SUR LA

FORMULE DE STOKES DANS L'HYPERESPACE,

PAR M. A. BUHL.

[**1**] Ayant précédemment écrit un Mémoire *Sur les applications géométriques de la formule de Stokes,* il m'a semblé bon de ne pas confondre avec lui des résultats qui proviennent des mêmes recherches, mais qui appartiennent plus à l'Analyse qu'à la Géométrie.

La formule de Stokes, étendue dans l'espace à n dimensions, relie les intégrales doubles attachées à des portions de variété ayant deux dimensions aux intégrales simples attachées à des variétés à une dimension qui servent de contour aux portions précédentes.

Les premières préoccupations de ce genre remontent aux paragraphes 2 et 3 du Mémoire de M. H. Poincaré *Sur les résidus des intégrales doubles* (Acta Mathematica, t. IX) et aux travaux de M. E. Picard cités plus loin.

Je donne la formule de Stokes, dans l'espace à n dimensions, sous une forme symbolique, très symétrique, qui me semble nouvelle et qui donne immédiatement, pour $n=3$, la formule de Stokes ordinaire et, pour $n=2$, la formule de Riemann (dite aussi de Green).

Pour $n=4$, j'ai appliqué la formule à la démonstration de l'extension du théorème de Cauchy aux fonctions analytiques de deux variables. Ce procédé permet de conclure que ladite extension revient à la formule de Riemann étendue, sans changement d'aspect, au cas où ses deux variables deviennent complexes.

[**2**] Soit, dans un plan YOX, un contour C enfermant une aire A. On a

$$\int_C X\,dY = \iint_A dX\,dY, \tag{1}$$

l'un des membres de cette égalité n'étant autre chose que l'expression de l'aire A.

Imaginons maintenant un changement de variables tel que le suivant :

$$(2) \qquad X = f_1(x, y), \qquad Y = f_2(x, y).$$

L'égalité (1) devient

$$(3) \qquad \int X\left(\frac{\partial Y}{\partial x}dx + \frac{\partial Y}{\partial y}dy\right) = \iint_S \begin{vmatrix} \dfrac{\partial X}{\partial x} & \dfrac{\partial X}{\partial y} \\ \dfrac{\partial Y}{\partial x} & \dfrac{\partial Y}{\partial y} \end{vmatrix} dx\,dy,$$

Σ désignant le contour transformé de C par (2) et S étant l'aire contenue dans Σ.

On peut ajouter, pour plus de clarté, que la transformation (2) est supposée telle que le contour Σ soit parcouru dans le sens direct quand il en est ainsi pour C. Des remarques analogues peuvent être sous-entendues plus loin.

Posons maintenant

$$P = X\frac{\partial Y}{\partial x}, \qquad Q = X\frac{\partial Y}{\partial y},$$

et (3) deviendra

$$(3\ bis) \qquad \int_\Sigma P\,dx + Q\,dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_S \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} dx\,dy,$$

ce qui est la formule de Riemann. Bien entendu, il n'y a là rien que de très élémentaire et de très banal, la formule de Riemann étant couramment mise en relation avec (1) par une foule d'auteurs et dans des buts fort divers; ainsi on retrouvera, à peu près, le raisonnement précédent dans la *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales* de MM. Appell et Goursat (Introduction, p. IX). Mais, ce qui me paraît beaucoup moins remarqué, c'est qu'on peut établir par la même voie la formule de Stokes et les extensions de celle-ci dans l'hyperespace.

[**3**] Etablissons d'abord la formule de Stokes. Je reprends (1) et les formules

$$X = f_1(x, y, z), \qquad Y = f_2(x, y, z)$$

qui définissent un simple changement de variables si le point x, y, z appartient à une surface

$$(4) \qquad z = f(x, y).$$

Alors (1) devient

$$\int_\Sigma X\left(\frac{\partial Y}{\partial x}dx + \frac{\partial Y}{\partial y}dy + \frac{\partial Y}{\partial z}dz\right) = \iint_S \begin{vmatrix} \dfrac{\partial X}{\partial x} + \dfrac{\partial X}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial X}{\partial y} + \dfrac{\partial X}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y} \\ \dfrac{\partial Y}{\partial x} + \dfrac{\partial Y}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial Y}{\partial y} + \dfrac{\partial Y}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} dx\,dy,$$

S étant une portion de surface (4) limitée par le contour Σ.

Le déterminant qui figure dans l'intégrale double peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} -\frac{\partial z}{\partial x} & -\frac{\partial z}{\partial y} & 1 \\ \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial z} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial z} \end{vmatrix}$$

et, si l'on pose,

$$\text{(5)} \qquad P = X\frac{\partial Y}{\partial x}, \quad Q = X\frac{\partial Y}{\partial y}, \quad R = X\frac{\partial Y}{\partial z}.$$

la formule précédente devient

$$\text{(6)} \qquad \int_\Sigma P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_S \begin{vmatrix} -\frac{\partial z}{\partial x} & -\frac{\partial z}{\partial y} & 1 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dx\,dy.$$

C'est bien celle de Stokes. Elle n'a peut-être pas encore toute sa généralité, parce que les égalités (5) font de P, Q, R les composantes d'un vecteur doublement et non triplement scalaire, mais il est bien aisé d'obtenir la généralité absolue. Il n'y a qu'à récrire la formule obtenue avec d'autres fonctions P, Q, R et ajouter les deux; dans le résultat on a un troisième groupe de fonctions P, Q, R tout à fait quelconques.

Si la surface S est définie par une équation $F(x, y, z) = 0$, la formule (6) prend une forme plus symétrique, utile à considérer dès maintenant, car elle se conservera dans l'hyperespace. On a d'abord :

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Tirant de là $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$, on écrit (6) sous la forme

$$\text{(6 bis)} \qquad \int_\Sigma P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_S \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \frac{dx\,dy}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Enfin si, sur la surface (4), l'élément d'aire est $d\sigma$, on a

$$\alpha\,d\sigma = -\frac{\partial z}{\partial x}dx\,dy, \qquad \beta\,d\sigma = -\frac{\partial z}{\partial y}dx\,dy, \qquad \gamma\,d\sigma = dx\,dy,$$

α, β, γ étant les cosinus directeurs de la normale à la surface, menée dans l'élément $d\sigma$.

Et alors (6) peut s'écrire

$$\int_\Sigma \mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy + \mathrm{R}dz = \iint_{\mathrm{S}} \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \mathrm{P} & \mathrm{Q} & \mathrm{R} \end{vmatrix} d\sigma,$$

ce qui, en développant le pseudo-déterminant, coïncide avec la forme la plus habituellement adoptée, par exemple celle du *Traité de Mécanique* de M. P. Appell (t. III, chap. XXVIII).

[**4**] Il est bien clair qu'au lieu de déduire les formules de Riemann et de Stokes de la formule (1), on pourrait déduire celle de Stokes de celle de Riemann, ce que j'ai montré dans mon Mémoire *Sur les applications géométriques de la formule de Stokes*, publié ici même (n° 37). D'ailleurs, l'une des opinions que je donnais dans ce précédent Mémoire se trouve encore renforcée par ce qui précède. Les formules de Riemann et de Stokes ont surtout une valeur *externe;* je veux dire qu'en elles-mêmes elles ne contiennent rien qui ne soit déjà contenu dans (1), assertion évidente puisqu'on peut les déduire de (1) par des changements de variables. Cependant elles ont des applications d'une extrême importance et d'ailleurs fort nombreuses; j'ai encore augmenté le nombre de ces dernières dans mon Mémoire précité. Pour les fonctions analytiques, la formule de Riemann conduit de la manière la plus naturelle au théorème de Cauchy; en Physique, la formule de Stokes est un admirable instrument de synthèse. On ne pourrait se passer d'elles, le plus souvent, qu'au prix de grands détours, mais il est analytiquement remarquable qu'au fond des choses on puisse toujours se ramener à un emploi unique ou à des emplois répétés de l'égalité (1) qu'on peut même considérer comme une identité.

[**5**] Voyons maintenant, dans l'hyperespace, les généralisations des formules de Riemann et Stokes. Je traiterai simplement le cas de l'espace à quatre dimensions où les coordonnées d'un point quelconque seront désignées par x_1, x_2, x_3, x_4. Dans ces conditions, la seule symétrie des notations permettra de voir ce que serait la formule générale relative au cas de n dimensions.

Partons toujours de (1) et posons

$$\mathrm{X} = f_1(x_1, x_2, x_3, x_4), \qquad \mathrm{Y} = f_2(x_1, x_2, x_3, x_4),$$

ce qui définit un simple changement de variables si le point x_1, x_2, x_3, x_4 appartient toujours à la variété à deux dimensions :

$$x_1 = x_1, \quad x_2 = x_2, \quad x_3 = \varphi(x_1, x_2), \quad x_4 = \psi(x_1, x_2). \tag{7}$$

Alors (1) devient

$$\int_\Sigma X\sum\frac{\partial Y}{\partial x_i}dx_i=\iint_S\begin{vmatrix}\frac{\partial X}{\partial x_1}+\frac{\partial X}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial x_1}+\frac{\partial X}{\partial x_4}\frac{\partial x_4}{\partial x_1} & \frac{\partial X}{\partial x_2}+\frac{\partial X}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial x_2}+\frac{\partial X}{\partial x_4}\frac{\partial x_4}{\partial x_2}\\ \frac{\partial Y}{\partial x_1}+\frac{\partial Y}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial x_1}+\frac{\partial Y}{\partial x_4}\frac{\partial x_4}{\partial x_1} & \frac{\partial Y}{\partial x_2}+\frac{\partial Y}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial x_2}+\frac{\partial Y}{\partial x_4}\frac{\partial x_4}{\partial x_2}\end{vmatrix}dx_1\,dx_2,$$

S étant la portion de variété (7) limitée par le contour Σ.

Le déterminant qui figure dans l'intégrale double peut s'écrire :

$$\begin{vmatrix}-\frac{\partial x_3}{\partial x_1} & -\frac{\partial x_3}{\partial x_2} & 1 & 0\\ -\frac{\partial x_4}{\partial x_1} & -\frac{\partial x_4}{\partial x_2} & 0 & 1\\ \frac{\partial X}{\partial x_1} & \frac{\partial X}{\partial x_2} & \frac{\partial X}{\partial x_3} & \frac{\partial X}{\partial x_4}\\ \frac{\partial Y}{\partial x_1} & \frac{\partial Y}{\partial x_2} & \frac{\partial Y}{\partial x_3} & \frac{\partial Y}{\partial x_4}\end{vmatrix}.$$

Si l'on pose

$$(7\ bis)\qquad P_i=X\frac{\partial Y}{\partial x_i},$$

la formule précédente devient

$$(8)\quad \int_\Sigma P_1dx_1+P_2dx_2+P_3dx_3+P_4dx_4=\iint_S\begin{vmatrix}-\frac{\partial x_3}{\partial x_1} & -\frac{\partial x_3}{\partial x_2} & 1 & 0\\ -\frac{\partial x_4}{\partial x_1} & -\frac{\partial x_4}{\partial x_2} & 0 & 1\\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_4}\\ P_1 & P_2 & P_3 & P_4\end{vmatrix}dx_1\,dx_2.$$

Telle est, dans l'espace à quatre dimensions, la formule qui correspond à celle de Riemann dans le plan et à celle de Stokes dans l'espace ordinaire. Elle n'a pas jusqu'ici toute sa généralité parce que les quatre fonctions P définies par (7 *bis*) ne dépendent que de deux fonctions arbitraires X et Y, mais on remédie immédiatement à cet inconvénient en imaginant que l'on écrive deux autres formules avec des fonctions P différentes; l'addition des trois donne encore une formule du même type où les fonctions P sont alors quelconques.

On pourrait évidemment se proposer de revenir de la formule (8) à la formule de Stokes en remplaçant, dans (8), la forme différentielle qui se trouve sous l'intégrale simple par une forme analogue contenant une différentielle de moins. La question est ainsi mise en relation avec le problème de Pfaff, ce que j'ai déjà signalé dans mon premier Mémoire (n° 36).

[**6**] La formule (8) prend une forme beaucoup plus symétrique si l'on suppose que la variété S est définie par deux équations telles que

$$(9)\qquad F_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \qquad F_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0.$$

Ces équations définissent implicitement des fonctions x_3 et x_4 des variables x_1 et x_2. Donc

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_1}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial x_1} + \frac{\partial F_1}{\partial x_4}\frac{\partial x_4}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_4}\frac{\partial x_4}{\partial x_1} = 0,$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F_1}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial x_2} + \frac{\partial F_1}{\partial x_4}\frac{\partial x_4}{\partial x_2} = 0, \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_2}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial x_2} + \frac{\partial F_2}{\partial x_4}\frac{\partial x_4}{\partial x_2} = 0.$$

Considérons maintenant le déterminant du quatrième ordre qui figure dans (8). A la première ligne multipliée par $\dfrac{\partial F_1}{\partial x_3}$ ajoutons la seconde multipliée par $\dfrac{\partial F_1}{\partial x_4}$; de même multiplions la seconde, non encore modifiée, par $\dfrac{\partial F_2}{\partial x_4}$ et ajoutons-lui la première, non encore modifiée, multipliée par $\dfrac{\partial F_2}{\partial x_3}$. Il est facile de voir que ces opérations multiplient le déterminant par le jacobien de F_1, F_2 par rapport à x_3, x_4. Donc (8) prend la forme

$$(10)\quad \int_\Sigma P_1 dx_1 + P_2 dx_2 + P_3 dx_3 + P_4 dx_4 = \iint_S \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_3} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_4} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_3} & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_4} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} & \dfrac{\partial}{\partial x_4} \\ P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \end{vmatrix} \frac{dx_1 dx_2}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_3} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_4} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_3} & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_4} \end{vmatrix}}.$$

Telle est la formule de Stokes dans l'espace à quatre dimensions; elle a une forme complètement analogue à la forme (6 *bis*) établie dans l'espace à trois dimensions.

D'ailleurs, la formule précédente peut redonner (6 *bis*); s'il s'agit d'une surface dans l'espace ordinaire, les équations (9) doivent se réduire à

$$F_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \qquad x_4 = 0,$$

ce qui permet de vérifier immédiatement l'assertion.

Que l'on rapproche maintenant la formule de Riemann (3 *bis*), celle de Stokes (6 *bis*) et celle que je viens d'établir dans l'espace à quatre dimensions; il n'en faudra point davantage pour apercevoir la forme générale de ces égalités dans l'espace à n dimensions.

APPLICATION A LA THÉORIE DES FONCTIONS DE DEUX VARIABLES COMPLEXES.

[7] La formule de Stokes (8) ou (10), relative à l'espace à quatre dimensions, peut servir de manière remarquable à établir les fondements de la théorie des intégrales doubles relatives à une fonction de deux variables complexes. La généralisation du théorème de Cauchy pour de telles intégrales dépend alors de (8) ou (10) tout comme le théorème de Cauchy relatif aux fonctions d'une seule variable dépend de la formule de Riemann (3 *bis*). Bien plus, si l'on pousse le calcul jusqu'au bout, c'est-à-dire si, non content de montrer qu'une intégrale double étendue à une portion S d'une variété à deux dimensions ne dépend que du contour Σ de cette portion, on veut, de plus, obtenir sa valeur par une intégrale de ligne relative à Σ, on retrouve purement et simplement la formule de Riemann (3 *bis*) qui se trouve ainsi étendue au cas où les variables x et y sont complexes.

Je vais vérifier ces différentes assertions. Je commence par bien préciser ce dont il s'agit.

Soit l'intégrale double

$$\iint_S f(x, y)\,dx\,dy. \tag{11}$$

Elle possède le sens qui lui a été attribué par M. H. Poincaré, puis par M. E. Picard (*Traité d'Analyse*, 2e édit., t. II, p. 273. *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, t. I, p. 49). On a

$$x = x_1 + ix_2, \qquad y = x_3 + ix_4,$$

le point x_1, x_2, x_3, x_4 décrivant S dans l'espace à quatre dimensions. S est limitée par un contour Σ qui, en général, appartient aussi à l'espace à quatre dimensions.

Je suppose toujours que, Σ restant fixe, S peut se déformer sans rencontrer de singularités pour les fonctions P et Q définies par l'égalité

$$f(x, y) = P(x_1, x_2, x_3, x_4) + iQ(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Si l'on considère un continuum S, pris parmi les précédents, on devra pouvoir sur ce continuum déformer le contour Σ de manière à le réduire à un point.

[8] Reprenons les raisonnements qui se trouvent dans les ouvrages précités de M. Picard.

L'intégrale (11) prend d'abord la forme

$$\iint_S (P + iQ)(dx_1 + i\,dx_2)(dx_3 + i\,dx_4)$$

ou

$$(12)\quad \left\{ \begin{aligned} & \iint_S \mathrm{P}(dx_1dx_3 - dx_2dx_4) - \mathrm{Q}(dx_2dx_3 + dx_1dx_4) \\ & + i\iint_S \mathrm{Q}(dx_1dx_3 - dx_2dx_4) + \mathrm{P}(dx_2dx_3 + dx_1dx_4). \end{aligned} \right.$$

Prenons uniquement pour variables x_1 et x_2, ce qui revient à supposer que la variété S est définie par des équations telles que (7). Les intégrales (12) prennent la forme

$$(13)\quad \left\{ \begin{aligned} & \iint_S \left(\mathrm{P}\frac{\partial x_3}{\partial x_2} + \mathrm{P}\frac{\partial x_4}{\partial x_1} + \mathrm{Q}\frac{\partial x_3}{\partial x_1} - \mathrm{Q}\frac{\partial x_4}{\partial x_2}\right) dx_1dx_2 \\ & + i\iint_S \left(\mathrm{Q}\frac{\partial x_3}{\partial x_2} + \mathrm{Q}\frac{\partial x_4}{\partial x_1} - \mathrm{P}\frac{\partial x_3}{\partial x_1} + \mathrm{P}\frac{\partial x_4}{\partial x_2}\right) dx_1dx_2. \end{aligned} \right.$$

Ces intégrales sont des cas particuliers du second membre de (8).

Dans le déterminant du second membre de (8) considérons les pseudo-mineurs du second ordre

$$\frac{\partial \mathrm{P}_3}{\partial x_1} - \frac{\partial \mathrm{P}_1}{\partial x_3}, \quad \frac{\partial \mathrm{P}_4}{\partial x_2} - \frac{\partial \mathrm{P}_2}{\partial x_4}, \quad \frac{\partial \mathrm{P}_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \mathrm{P}_2}{\partial x_3}, \quad \frac{\partial \mathrm{P}_4}{\partial x_1} - \frac{\partial \mathrm{P}_1}{\partial x_4}, \quad \frac{\partial \mathrm{P}_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \mathrm{P}_1}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial \mathrm{P}_4}{\partial x_3} - \frac{\partial \mathrm{P}_3}{\partial x_4}.$$

Si l'assertion mise en italique est exacte, on doit pouvoir égaler ces expressions respectivement à

$$\mathrm{P}, \quad -\mathrm{P}, \quad -\mathrm{Q}, \quad -\mathrm{Q}, \quad 0, \quad 0,$$

s'il s'agit de la première intégrale (13), et à

$$\mathrm{Q}, \quad -\mathrm{Q}, \quad \mathrm{P}, \quad \mathrm{P}, \quad 0, \quad 0,$$

s'il s'agit de la seconde. On a ainsi deux systèmes de six équations à quatre fonctions inconnues, systèmes que j'appelle (A) et (B). Chacun de ces systèmes pris à part doit être compatible. On peut se borner à vérifier la compatibilité à l'aide des équations

$$(14)\quad \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x_1} - \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x_3} - \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x_4} = 0, \quad \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x_4} + \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x_3} = 0,$$

procédé qui revient à celui indiqué par M. Picard aux endroits précités. Mais on peut vérifier ladite compatibilité, d'une manière encore plus tangible, en déterminant *effectivement* les fonctions $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \mathrm{P}_4$ qui sont solutions du système (A) et les fonctions analogues du système (B). On prouvera ainsi non seulement que les intégrales (12) ou (13) ne dépendent que du contour C de S, mais on déterminera leur valeur au moyen d'une intégrale de ligne attachée à C. Et cette seconde méthode est d'autant moins à dédaigner que la détermination des fonctions P_i est très simple.

[9] Par des quadratures de différentielles totales à deux variables déterminons d'abord des fonctions

$$U_1 = \int Q\,dx_1 + P\,dx_2, \qquad U_2 = \int P\,dx_1 - Q\,dx_2,$$

$$U_3 = \int Q\,dx_3 + P\,dx_4, \qquad U_4 = \int P\,dx_3 - Q\,dx_4.$$

On déduit immédiatement de là

$$\frac{\partial U_2}{\partial x_4} + \frac{\partial U_1}{\partial x_3} = 0, \qquad \frac{\partial U_1}{\partial x_4} - \frac{\partial U_2}{\partial x_3} = 0, \qquad \frac{\partial U_3}{\partial x_1} + \frac{\partial U_4}{\partial x_2} = 0, \qquad \frac{\partial U_4}{\partial x_1} - \frac{\partial U_3}{\partial x_2} = 0.$$

Dans ces conditions, le système (A) peut s'écrire :

$$\frac{\partial(P_3 - U_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial P_1}{\partial x_3} = 0, \qquad \frac{\partial(P_4 + U_1)}{\partial x_2} - \frac{\partial P_2}{\partial x_4} = 0, \qquad \frac{\partial(P_3 - U_2)}{\partial x_2} - \frac{\partial P_2}{\partial x_3} = 0,$$

$$\frac{\partial(P_4 + U_1)}{\partial x_1} - \frac{\partial P_1}{\partial x_4} = 0, \qquad \frac{\partial P_2}{\partial x_1} - \frac{\partial P_1}{\partial x_2} = 0, \qquad \frac{\partial(P_4 + U_1)}{\partial x_3} - \frac{\partial(P_3 - U_2)}{\partial x_4} = 0.$$

Il exprime que

$$P_1\,dx_1 + P_2\,dx_2 + (P_3 - U_2)\,dx_3 + (P_4 + U_1)\,dx_4$$

est une différentielle exacte, soit dV. Donc

$$P_1\,dx_1 + P_2\,dx_2 + P_3\,dx_3 + P_4\,dx_4 = dV + U_2\,dx_3 - U_1\,dx_4.$$

Sur la portion de variété S et sur son contour Σ il ne peut y avoir aucune singularité pour dV, ceci d'après les hypothèses faites sur P et Q à la fin du paragraphe 7.

Donc, le long de Σ, l'intégrale de dV est nulle et la première intégrale de (12) ou (13) est, d'après (8), égale à une intégrale de ligne relative à Σ et portant uniquement sur

$$U_2\,dx_3 - U_1\,dx_4.$$

Si maintenant on considère le système (B), on trouve, par un raisonnement complètement analogue, que la seconde intégrale de (12) ou de (13) se réduit aussi à une intégrale de ligne relative à Σ, mais portant sur

$$U_1\,dx_3 + U_2\,dx_4.$$

Donc les expressions (12) et (13) se ramènent à des intégrales simples relatives à Σ et portant sur

$$(U_2\,dx_3 - U_1\,dx_4) + i(U_1\,dx_3 + U_2\,dx_4) = (U_2 + iU_1)(dx_3 + i\,dx_4),$$

ce qui est égal à

$$d(x_3 + ix_4)\int [(P\,dx_1 - Q\,dx_2) + i(P\,dx_2 + Q\,dx_1)].$$

Cette dernière expression peut s'écrire enfin

$$d(x_3 + ix_4)\int (\mathrm{P} + i\mathrm{Q})\, d(x_1 + ix_2) = dy \int f(x, y)\, dx = \mathrm{N}\, dy,$$

si l'on pose

$$f(x, y) = \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x}.$$

Il est ainsi établi que

$$\int_\Sigma \mathrm{N}\, dy = \iint_{\mathrm{S}} \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x}\, dx\, dy.$$

[**10**] Au début du paragraphe précédent, j'ai défini U_1, U_2, U_3, U_4, mais je ne me suis servi que des deux premières de ces fonctions; il est aisé de voir qu'on pourrait refaire le raisonnement en n'utilisant, au contraire, que les deux dernières. On arriverait ainsi à une égalité de la forme

$$\int_\Sigma \mathrm{M}\, dx = -\iint_{\mathrm{S}} \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y}\, dx\, dy.$$

Donc

$$\int_\Sigma \mathrm{M}\, dx + \mathrm{N}\, dy = \iint_{\mathrm{S}} \left(\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y}\right) dx\, dy. \tag{15}$$

C'est la formule de Riemann étendue au cas où les variables x et y sont complexes. Cette extension lui laisse le même aspect que dans le cas de variables réelles.

[**11**] Il importe d'observer que les hypothèses, sur lesquelles on s'est appuyé pour obtenir la conclusion précédente, jouent un rôle absolument essentiel. Leur abandon ne permettrait pas, en général, de maintenir sans changement la formule (15). Ainsi supposons que la fonction

$$f(x, y) = \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y}$$

ait un continuum de singularités rencontrant la variété S. Ceci n'est pas une raison pour que l'intégrale double de (15) perde toute signification, mais, même si elle conserve un sens, elle ne s'exprimera plus par l'intégrale de ligne du premier membre. En effet, le contour Σ ne peut plus, sur S, se réduire à un point sans rencontrer de singularité; il n'est donc pas certain que les différentielles telles que $d\mathrm{V}$, considérées au paragraphe 9, donnent un résultat nul par intégration le long de Σ. Par suite, l'égalité (15) ne pourrait subsister que par adjonction, au premier membre, de certains termes complémentaires.