LES FONCTIONS ABÉLIENNES

ET

LA THÉORIE DES NOMBRES

PAR GASTON COTTY.

INTRODUCTION.

[**1**] On ne peut parcourir l'œuvre d'Hermite sans être frappé de l'appui que s'y prêtent mutuellement les diverses parties de la science mathématique. En particulier, la théorie des fonctions et la théorie des nombres y trouvent de nombreux points de contact, et cette pénétration continuelle et inévitable de l'Arithmétique supérieure dans l'étude des transcendantes elliptiques et abéliennes est sans aucun doute une des principales raisons pour lesquelles le grand analyste, fort épris de la théorie des nombres, ne cessa de s'intéresser à ces fonctions. L'un de ses travaux où cette pénétration est le mieux marquée et en même temps l'une de ses plus belles œuvres est le Mémoire consacré à la transformation des fonctions abéliennes (1). En 1835, Jacobi ayant, dans un théorème célèbre (2) et qui devait provoquer de belles recherches d'Hermite sur l'approximation des irrationnelles et la théorie des formes (3), démontré l'impossibilité de l'existence d'une fonction d'une variable à plus de deux périodes, avait été conduit à formuler de la façon suivante l'énoncé du problème de

---

(1) HERMITE, *Sur la théorie de la transformation des fonctions abéliennes* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences. t. XL, 1855; et Œuvres, t. I, pp. 444 et suiv.).

(2) JACOBI, *De functionibus duarum varabilium quadrupliciter periodicis, quibus theoria transcendentium abelianarum innitur* (Journal de Crelle, t. XIII, 1835, p. 53).

(3) Voir *Lettre d'Hermite à Jacobi sur la théorie des nombres* (Journal de Liouville, vol. XI, p. 97, et Œuvres d'Hermite, t. I, p. 100).

l'inversion de l'intégrale hyperelliptique portant sur un polynôme $\varphi(x)$ du cinquième ou du sixième degré. Posons

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}} + \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}} = u,$$
$$\int_{x_0}^{x} \frac{x\,dx}{\sqrt{\varphi(x)}} + \int_{y_0}^{y} \frac{y\,dy}{\sqrt{\varphi(y)}} = v,$$

x et y considérées comme fonctions de u et v admettent alors quatre paires de périodes et réalisent cette inversion ; il s'agissait d'étudier ces fonctions quadruplement périodiques de deux variables. Une quinzaine d'années plus tard, Rosenhain (1) et Göpel (2) arrivaient par deux voies différentes à prouver que $x+y$ et xy pouvaient se mettre sous forme de fractions dont le numérateur et le dénominateur sont des fonctions entières de u et v susceptibles de développements en séries analogues aux fonctions et aux séries thêta d'une seule variable. Les deux illustres géomètres découvrirent les seize fonctions ϑ d'ordre un, à l'aide desquelles ils exprimèrent $x+y$, xy et treize autres fonctions uniformes de u et v liées algébriquement aux deux premières.

Soient $f_1(u, v)$, $f_2(u, v)$ ..... $f_{15}(u, v)$, ces quinze fonctions uniformes quadruplement périodiques. Hermite ayant remarqué qu'elles jouent, dans l'étude des transcendantes abéliennes de genre deux, le même rôle que *snx, cnx, dnx* dans la théorie des fonctions elliptiques, pose ainsi le problème de la transformation :

Soient $F_1(u, v)$, $F_2(u, v)$, ... $F_{15}(u, v)$, les fonctions de même nature que $f_i(u, v)$ obtenues en prenant pour point de départ les équations

$$\left\{\begin{aligned} &\int_{x_0}^{x} \frac{\lambda + \mu x}{\sqrt{\psi(x)}}\,dx + \int_{y_0}^{y} \frac{\lambda + \mu y}{\sqrt{\psi(y)}}\,dy = u,\\ &\int_{x_0}^{x} \frac{\lambda' + \mu' x}{\sqrt{\psi(x)}}\,dx + \int_{y_0}^{y} \frac{\lambda' + \mu' y}{\sqrt{\psi(y)}}\,dy = v, \end{aligned}\right.$$

où λ, μ, λ', μ' sont des constantes et $\psi(x)$ un polynôme du cinquième ou du sixième degré en x.

Le polynôme $\varphi(x)$ étant donné, déterminer λ, μ, λ', μ' et le polynôme $\psi(x)$ de telle manière que les quinze fonctions $F_i(u, v)$ soient des fonctions rationnelles des quinze fonctions $f_i(u, v)$.

---

(1) Rosenhain, *Sur les fonctions de deux variables et à quatre périodes qui sont les inverses des intégrales ultra-elliptiques de la première classe* (Mémoire des savants étrangers, Académie des Sciences de Paris, t. XI, 1851).

(2) Göpel, *Theoriæ transcendentium abelianarum primi ordinis adumbatio levis* (Journal de Crelle, t. XXXV, 1847).

La remarque évidente que les périodes des anciennes fonctions abéliennes relatives au polynôme $\varphi(x)$ ne peuvent être que des sommes de multiples entiers des périodes des nouvelles fonctions liées au polynôme $\psi(x)$, conduit Hermite à exprimer les anciennes périodes en fonction des nouvelles à l'aide de seize entiers; mais les périodes n'étant pas arbitraires, on est conduit à un système de relations entre ces seize entiers. Ainsi, le problème était à peine posé qu'on se heurtait déjà à des difficultés de nature arithmétique; Hermite les lève immédiatement en faisant l'étude de ces systèmes linéaires particuliers de seize nombres. Il insiste sur l'analogie qu'ils présentent avec les systèmes linéaires à quatre lettres et signale une classe remarquable de formes quadratiques à quatre variables dont les coefficients sont liés par un ensemble de relations que les substitutions spéciales définies à l'aide des seize entiers d'une transformation abélienne laissent invariable. Ces formes jouent un rôle très important dans la théorie des fonctions abéliennes; elles ont été l'origine des travaux de Laguerre sur les formes abéliennes qui en constituent une belle généralisation; nous reviendrons sur ce sujet dans la suite. Le problème de la transformation a été complètement résolu par Hermite, en supposant toutefois que les fonctions abéliennes considérées sont *générales* (*ordinaires* avec la terminologie actuellement adoptée). Les périodes normales d'un des systèmes de transcendantes abéliennes s'expriment en fonction des périodes de l'autre, mais par des formules qui ne sont pas linéaires par rapport à ces périodes. Hermite indique un procédé pour former les relations algébriques entre les fonctions initiales et finales. Enfin, à chaque transformation est attaché un certain entier k qu'on peut appeler l'*ordre* de la transformation; en réduisant les transformations d'ordre k dans celles d'ordre 1, Hermite a été conduit à ce résultat, analogue à une proposition relative aux fonctions elliptiques, due à Jacobi et complétée par Abel :

Le nombre des transformations distinctes d'ordre premier k est égal à

$$720(1 + k + k^2 + k^3).$$

Il restait à faire l'étude des fonctions abéliennes non générales. Elles ont fait le sujet de beaux travaux de M. Humbert, qui les a étudiées sous le nom de *fonctions abéliennes singulières*, dans différents Mémoires insérés au *Journal de mathématiques pures et appliquées* (1). Considérons un système de fonctions abéliennes aux variables u et v ayant pour périodes normales :

$$\begin{array}{lcccc} u: & 1 & 0 & g & h, \\ v: & 0 & 1 & h & g', \end{array}$$

(1) G. Humbert, *Sur les fonctions abéliennes singulières* (Journal de mathématiques pures et appliquées, 5e série, t. V, VI et VII). — *Les fonctions abéliennes singulières et les formes quadratiques* (même journal, 5e série, t. IX et X).

ces périodes vérifient une *relation singulière* si elles sont liées par une équaiion

$$Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0,$$

où A, B, C, D, E sont des entiers, qu'on peut toujours supposer sans diviseur commun. A ces fonctions, se trouvent rattachées des *fonctions intermédiaires singulières* qui ne sont pas des fonctions thêta aux mêmes périodes et des *transformations singulières* différentes de celles qu'admettent les fonctions abéliennes générales. Enfin, ce sont les seules fonctions abéliennes qui admettent des *multiplications complexes* différentes de la multiplication ordinaire par un entier. C'est ainsi que seules les fonctions abéliennes singulières permettent l'extension aux fonctions abéliennes d'une des théories les plus importantes relatives aux fonctions elliptiques. Ce n'est pas là un fait isolé et on verra, au cours de ce travail, que les fonctions singulières présentent la généralisation de tous les problèmes qui se posent dans l'étude des fonctions elliptiques; au point de vue fonctionnel, nous retrouvons des fonctions de deux variables entièrement analogues aux fonctions modulaires; au point de vue arithmétique, nous transportons dans les corps quadratiques réels les principales questions que présente dans le corps des entiers ordinaires la théorie des fonctions elliptiques.

Il semble donc qu'il n'y ait rien à ajouter aux travaux si complets d'Hermite et de M. Humbert sur la transformation des fonctions abéliennes. Cependant, en nous plaçant au point de vue des applications arithmétiques de ce problème, nous avons dû considérer les fonctions abéliennes particulières qui admettent, non seulement les périodes (1,0); (0,1); (g, h); (g, h'), mais en même temps la période $\left(\frac{1}{n}, 0\right)$, n étant un entier; nous pouvons regarder ces fonctions comme relatives au tableau de périodes d'indice n :

$$T_n \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{n} & 0 & g & h, \\ 0 & 1 & h & g'. \end{matrix} \right.$$

Ce n'est pas une notion nouvelle. M. Traynard [1] a fait, dans sa thèse, l'étude systématique de ces fonctions et en a tiré de nombreux exemples de surfaces hyperelliptiques remarquables. M. Remy [2] ayant montré que ces surfaces se trouvent en rapport étroit avec les surfaces hyperelliptiques singulières étudiées par M. Humbert, on doit considérer les fonctions abéliennes spéciales relatives aux tableaux T_n comme intermédiaires entre les fonctions ordinaires et les fonctions singulières, et l'étude

[1] Traynard, *Sur les fonctions thêta de deux variables et les surfaces hyperelliptiques* (Thèses de la Faculté des Sciences de Paris, 1907, et Annales de l'École Normale supérieure, 1907).

[2] Remy, *Sur les surfaces hyperelliptiques définies par les fonctions intermédiaires singulières* (C. R. A. S., 26 mars 1906).

de leur transformation ne semblait pas s'imposer. Au point de vue arithmétique, il en va tout autrement; on est conduit à considérer des systèmes linéaires de seize lettres plus généraux que ceux d'Hermite et jouissant de propriétés analogues; on peut leur rattacher des formes quadratiques dont celles d'Hermite ne sont qu'un cas particulier et dont l'étude peut reposer sur les mêmes principes. Enfin à ces fonctions correspondent des groupes hyperabéliens ayant un caractère arithmétique intéressant et différents de ceux qu'on rencontre dans la théorie ordinaire de la transformation. On peut dire que l'introduction de ces tableaux T_n permet d'étendre à certains *modules* de nombres algébriques du second degré les notions et les problèmes qui se présentent relativement aux entiers des corps quadratiques dans la transformation des fonctions abéliennes habituellement considérées. Bien que nous ayons traité dans ce travail le problème de la transformation dans le cas des tableaux T_n, nous avons dû, faute de place, n'indiquer le plus souvent que les applications à la théorie des nombres du cas où n est égal à l'unité. Nous nous proposons de revenir sur le cas général dans un autre travail.

M. Humbert ayant indiqué dans son Cours du Collège de France (1908-09) une interprétation géométrique de la transformation des fonctions abéliennes, nous avons développé cette interprétation et nous l'avons étendue au cas des fonctions relatives aux tableaux T_n, en la complétant par la considération des invariants arithmétiques des systèmes de droites de l'espace. On voit ainsi apparaître une liaison intime entre certaines propriétés de l'espace réglé et celles des fonctions abéliennes ordinaires et singulières. Ceci n'a rien de surprenant, si l'on songe au rapport étroit qui existe entre la configuration et les surfaces de Kümmer d'une part, les modules d'un système de fonctions abéliennes et les fonctions thêta d'une part. Dans tout ce travail, on trouvera un perpétuel contact entre les propriétés arithmétiques de l'espace réglé et celles des fonctions quadruplement périodiques, et nous croyons que cette utilisation de la géométrie réglée dans l'étude des fonctions abéliennes et dans son application à la théorie des nombres mériterait d'être encore plus développée.

Dans la première partie, après avoir indiqué quelques propositions de géométrie réglée qui nous seront indispensables dans la suite, nous traitons le problème de la transformation des fonctions abéliennes relatives à deux tableaux T_n et T_N. Après une étude purement arithmétique des systèmes linéaires qui se présentent au début de ce problème, nous étudions les correspondances ponctuelles entre deux surfaces hyperelliptiques, nous donnons les formules de transformation des périodes, et, à propos de la réduction des transformations abéliennes, nous montrons qu'on est amené à concevoir à un nouveau point de vue les correspondances entre les couples de points de deux courbes hyperelliptiques. Passant ensuite aux fonctions abéliennes singulières, nous effectuons la réduction des relations singulières d'un genre n déterminé et nous en donnons une application arithmétique à la décomposition d'un résidu quadratique de $4n$ en cinq carrés dont trois positifs et deux négatifs, deux de chaque signe étant multipliés par n. Enfin, nous déterminons les transformations singulières liées à une relation singulière de genre n et nous donnons une solution nouvelle du problème de la multiplication complexe. Cette solution conduit très simplement à un cas de multiplication entièrement analogue à celui des fonctions elliptiques et généralisant la relation quadratique : $a\tau^2 + b\tau + c = 0$, que vérifie le rapport des périodes.

[**2**] La théorie des fonctions elliptiques a présenté le premier exemple de fonctions uniformes d'une variable ne changeant pas par un groupe d'une infinité de substitutions effectuées sur cette variable. Parmi les fonctions fuchsiennes de M. Poincaré, cette belle généralisation de la fonction modulaire, celle-ci apparaît comme correspondant à un groupe fuchsien qui se distingue des groupes généraux par un caractère purement arithmétique; les coefficients a, b, c, d des substitutions $\left(\xi;\ \dfrac{a\xi + b}{c\xi + d}\right)$ du groupe étant entiers et le déterminant $(ad - bc)$ étant égal à 1.

Il semblait bien naturel de penser que la théorie des fonctions abéliennes viendrait présenter de même des exemples de fonctions uniformes de plusieurs variables analogues aux fonctions modulaires et liées à des groupes de substitutions présentant un caractère arithmétique. C'est un point de vue sur lequel M. Picard a depuis longtemps déjà attiré l'attention. Or, les fonctions abéliennes générales liées à la courbe de genre *deux*, conduisent, comme il résulte des travaux d'Hermite sur la transformation de ces fonctions, à des fonctions de trois variables indépendantes, et les substitutions effectuées sur ces trois variables sont bien encore à coefficients entiers, mais ne sont plus linéaires par rapport à ces variables. A ce point de vue, les fonctions abéliennes se différenciaient nettement des fonctions elliptiques. C'est ailleurs qu'il fallait chercher la généralisation des fonctions fuchsiennes pour le cas de deux variables. Cette généralisation a fait l'objet des importants travaux de M. Picard sur les *fonctions hyperfuchsiennes* (1), dont un cas particulier est lié à l'étude des fonctions abéliennes, mais de genre *trois*, et présente encore un caractère arithmétique bien tranché, les coefficients du groupe hyperfuchsien correspondant étant des entiers du corps $i\sqrt{3}$. Les *fonctions hyperabéliennes* (2) de M. Picard se présentèrent ensuite comme fonctions de deux variables analogues aux fonctions modulaires et liées dans un cas particulier aux transformations des fonctions abéliennes singulières dont les périodes normales satisfont à la relation

$$h^2 - gg' = \mathrm{D},$$

D étant un entier positif.

---

(1) Pour la bibliographie des travaux de M. Picard sur *Les fonctions hyperfuchsiennes*, voir la Thèse de M. Alezais (Thèses de la Faculté des Sciences de Paris, 1901, et Annales de l'École Normale supérieure, 1902).

(2) Picard, *Sur les fonctions hyperabéliennes* (Journal de mathématiques pures et appliquées, 4e série, t. I, 1885, p. 87).

Le groupe hyperabélien correspondant à ce cas se rattachait directement aux groupes généraux rattachés par M. Picard aux transformations semblables d'une forme quaternaire indéfinie du type

$$u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2.$$

Son étude a été faite dans la thèse de M. Bourget (1) et on y voit nettement apparaître son caractère arithmétique remarquable par sa liaison avec les entiers du corps $\sqrt{D}$.

Il était naturel de poser la question suivante :

Les fonctions abéliennes de genre deux dépendant de trois modules et faisant passer du cas d'une seule variable présenté par les fonctions elliptiques au cas de trois variables, considérons un système de fonctions abéliennes simplement singulières dont les périodes normales g, h, g' satisfont à une seule relation singulière; ces trois modules étant liés par une relation algébrique, ne peut-on pas les considérer comme des fonctions de deux variables analogues aux fonctions modulaires?

Si la relation singulière est d'invariant pair, on déduit des travaux de M. Picard et de M. Bourget que les trois modules sont des fonctions hyperabéliennes. Nous avons montré que le cas de l'invariant impair conduit à la même conclusion (2). Les groupes hyperabéliens correspondants sont tout à fait remarquables par leur liaison avec les corps quadratiques réels et sont tout à fait analogues au groupe modulaire. Ce sont les groupes modulaires de ces corps. Nous avons appelé *groupe arithmétique* du corps quadratique $\sqrt{D}$, le groupe des substitutions de l'un ou l'autre type :

$$\left(\xi, \eta; \frac{a\xi + b}{c\xi + d}, \frac{a'\eta + b'}{c'\eta + d'}\right), \qquad \left(\xi, \eta; \frac{a\eta + b}{c\eta + d}, \frac{a'\xi + b'}{c'\xi + d'}\right),$$

dans lesquelles a, b, c, d sont des entiers du corps $\sqrt{D}$ vérifiant la relation $ad - bc = \pm 1$, a', b', c', d' étant les entiers conjugués; le sous-groupe des substitutions dans lesquelles $ad - bc$ est égal à $+1$ pour le premier type et à -1 pour le second étant le *groupe modulaire* du corps $\sqrt{D}$. Ces groupes se présentent dans la solution géométrique du problème de la transformation ou plus précisément d'une question relative aux propriétés arithmétiques de l'espace réglé. A ce point de vue, ils se rattachent directement aux transformations semblables de certaines formes quadratiques réductibles au type $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - u_4^2$ si le corps est imaginaire, et au type $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2$ si le corps est réel, ce qui permet d'apercevoir leur identité avec certains groupes kleinéens et fuchsiens. La plupart de ces groupes ont déjà été étudiés; l'origine commune que nous leur donnons permet d'exposer parallèlement

(1) BOURGET, *Sur une classe particulière de groupes hyperabéliens* (Thèses de la Faculté des Sciences de Paris, 1898, et Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1898).

(2) *Sur la transformation des fonctions abéliennes* (C. R. A. S., 21 février 1910).

les propriétés communes à ces divers groupes et de poursuivre leur analogie avec le groupe modulaire. Les groupes modulaires des corps réels sont isomorphes à un groupe de transformations abéliennes d'ordre 1 n'altérant pas une relation, et on voit se manifester à ce nouveau point de vue le caractère remarquable des fonctions abéliennes singulières de permettre l'extension aux corps quadratiques des problèmes que la théorie des fonctions elliptiques présente dans le corps des entiers ordinaires. Les groupes des corps $\sqrt{D}$, quand D n'est pas congru à 1 suivant le module 4, ont été étudiés par M. Bourget. Nous avons fait l'étude des groupes modulaires des corps $\sqrt{4N+1}$, mais nous n'en avons donné ici qu'un résumé; nous la publierons prochainement, ainsi que la recherche des fonctions de ces groupes.

Il semble bien qu'il y ait dans l'étude de ces groupes hyperabéliens particuliers et des fonctions qui leur sont liées un immense champ de recherches tout à fait comparable à celui qu'avait ouvert à l'analyse l'étude des fonctions elliptiques et modulaires, et, à ce point de vue, notre travail paraît sans doute bien incomplet.

[**3**] En étudiant les propriétés de ces systèmes linéaires de seize nombres qui se présentaient dès le début dans l'étude de la transformation des fonctions abéliennes, Hermite a considéré une classe de formes quadratiques f à quatre variables dont les coefficients sont liés par un système de relations que conservent les substitutions définies par ces seize entiers. Il montre que le discriminant de ces formes est carré parfait et que la racine carrée de ce discriminant se reproduit multiplié par k^2 dans une transformation d'ordre k. « Ce résultat, dit Hermite, montre qu'on peut isoler en quelque sorte les formes f des formes générales à quatre indéterminées pour les comparer entre elles par les substitutions spéciales que nous avons définies. On pourra ainsi se poser sous ce nouveau point de vue le problème de l'équivalence arithmétique de ces formes, établir la notion de classe, rechercher les rapports entre les classes distinctes qui correspondent à une même valeur de δ. Dans un Mémoire publié dans le *Journal de Crelle* (tome XLVII, page 343), j'ai déjà donné un exemple d'une théorie arithmétique conçue de cette manière et qui se rapporte à des formes à quatre indéterminées d'une nature analogue à celle des formes linéaires. Mais il me suffit ici d'avoir donné la notion des formes f, dont on va voir le rôle important dans la théorie des fonctions abéliennes. »

Hermite utilise ensuite une de ces formes f pour établir la convergence des séries Θ relatives aux périodes liées par une transformation abélienne quelconque à celles d'un système de fonctions abéliennes donné. Et revenant à la fin de son Mémoire sur la liaison étroite qui existe entre certaines propriétés de ces formes quadratiques et celles des fonctions abéliennes, il dit : « On voit ainsi comment vient se présenter cette étude arithmétique de formes quadratiques particulières à quatre indéterminées où l'on n'emploie pas comme instrument analytique les substitutions les plus générales entre deux groupes de quatre variables, mais des substitutions particulières qui reproduisent des formes du même genre. C'est précisément à cette idée que je me suis déjà trouvé conduit dans un autre travail en ayant en vue l'étude purement arithmétique des nombres entiers complexes $a + b\sqrt{-1}$. J'ai pu alors traiter par les méthodes propres aux formes linéaires, les principales questions concernant les formes particulières à quatre indéterminées qui étaient l'objet de mes recherches et ajouter par là de nouveaux caractères de similitude entre les nombres entiers réels et les nombres complexes. Un pareil rapprochement entre les formes f et les formes linéaires semble devoir se présenter..... Cependant l'analogie de ces formes particulières que j'ai nommées à indéterminées conjuguées avec les formes linéaires ne persiste pas toujours; parfois, comme je l'ai fait voir, il arrive qu'on ait à la suivre dans plusieurs directions différentes et bientôt on est amené à des questions où la nature des formes à quatre variables se manifeste sous un point de vue qui lui est propre et qui exige de nouveaux principes. Les mêmes circonstances viendront-elles s'offrir dans les questions analogues dont le point de départ s'est trouvé dans la théorie des fonctions abéliennes? C'est là un ordre de considérations arithmétiques aussi intéressantes que difficiles, sur lesquelles je pourrai, peut-être, un jour offrir aux amis de la Science le résultat de mes recherches. »

Bien que, comme en témoignent les lignes précédentes, Hermite ait été vivement intéressé par ce sujet, nous ne croyons pas qu'il y soit revenu dans ses travaux. Et cependant, l'étude des formes f comprenant, comme nous le verrons, celle des formes qui sont pour un corps quadratique quelconque positif ou négatif ce que sont les formes à indéterminées conjuguées pour le corps des entiers complexes, quand on comparera aux considérations générales que nous venons de rappeler les résultats que nous avons obtenus, on sera certainement frappé du rapprochement qu'Hermite pensait à établir entre ces formes f et les formes à indéterminées conjuguées.

La méthode employée [1], que nous croyons nouvelle, pourra sembler bien éloignée des méthodes ordinairement en usage dans la théorie des formes. Cependant, elle montre bien que c'est dans la théorie des formes linéaires que se trouve un instrument analytique essentiel pour l'étude de ces formes particulières. Enfin, elle permet d'introduire très simplement les entiers des corps quadratiques, ce qui n'était pas sans intérêt dans un travail où nous nous intéressions surtout à la théorie des nombres. En rapprochant certains résultats, obtenus dans la première Partie et relatifs à l'interprétation géométrique de la transformation des fonctions abéliennes, des propriétés d'une certaine classe de ces formes f, on voit apparaître la liaison étroite de ces formes et des fonctions abéliennes singulières. On peut même de cer-

---

[1] Une partie des résultats de la troisième partie a fait l'objet de deux notes aux Comptes rendus de l'Académie des Sciences, *Sur une classe de formes quadratiques liées à la transformation des fonctions abéliennes* (29 janvier et 5 février 1912).

taines propositions concernant ces fonctions déduire les théorèmes généraux relatifs à l'équivalence de ces formes et à la distribution en un nombre limité de classes des formes à indéterminées conjuguées de même discriminant. Nous avons mis en évidence ce rapprochement de la théorie des fonctions abéliennes et de la théorie arithmétique des formes d'Hermite que nous avons encore appelées formes abéliennes conformément à la terminologie adoptée par Laguerre. Nous n'en avons cependant pas développé toutes les conséquences; en particulier, nous n'en avons pas donné les applications aux fonctions abéliennes que peuvent suggérer les idées qu'Hermite a émises sur ce sujet. Enfin, après une généralisation du problème posé par Hermite, nous terminons cette troisième Partie par des considérations générales sur l'application de la méthode qui nous a conduit à la solution des problèmes d'équivalence et de réduction des formes abéliennes, nous y envisageons une nouvelle façon de concevoir l'étude arithmétique de ces formes quadratiques et donnons quelques indications sur une première généralisation des formes que nous avons étudiées.

Laguerre, dans un Mémoire célèbre sur le calcul des substitutions linéaires (1), a montré que l'étude des fonctions abéliennes de genre trois, quatre, cinq... conduirait à des classes de formes quadratiques à six, huit, dix... variables (formes abéliennes), jouant dans cette théorie le même rôle que les formes binaires dans la théorie des fonctions elliptiques et jouissant de propriétés tout à fait analogues à celles des formes qui se présentèrent à Hermite dans le problème de la transformation des fonctions de genre deux. Aucun travail n'a encore été publié sur la transformation des fonctions abéliennes à plus de deux variables; mais il est facile de se rendre compte que, comme l'a annoncé M. Humbert, l'étude de ces fonctions présente une grande analogie avec celle des transcendantes abéliennes de genre deux. D'autre part, les considérations de géométrie réglée que nous avons si souvent utilisées dans ce travail, peuvent s'étendre aux espaces à cinq, sept... dimensions, et, sur les principes qui nous ont conduit à la distribution en classes des formes quadratiques spéciales étudiées dans la troisième Partie, on peut baser l'étude des formes plus générales de Laguerre. Le cas de trois variables mène à la considération de certaines formes ternaires particulières et de formes ternaires à indéterminées conjuguées. Il semble bien qu'on arrivera ainsi à des généralisations des fonctions fuchsiennes pour le domaine de plusieurs variables et qu'on retrouvera des groupes généralisant le groupe modulaire et dont un cas particulier a donné à M. Picard le premier exemple des fonctions hyperfuchsiennes. Mais il y a là tout un immense champ de recherches où, la théorie des fonctions et la théorie des nombres se pénétrant constamment, les idées si fécondes que l'on peut puiser dans les Œuvres d'Hermite ne manqueront pas de trouver de beaux et utiles développements.

(1) LAGUERRE, *Sur le calcul des systèmes linéaires* (Journal de l'École polytechnique, cahier XXV, p. 215).

Je tiens à adresser maintenant mes bien sincères remerciements à M. Humbert pour le bienveillant accueil qu'il a constamment réservé à mes recherches, ainsi que pour les conseils et les encouragements qu'il m'a prodigués. Qu'il me soit permis également d'exprimer à M. Picard toute la reconnaissance que je lui dois pour l'intérêt qu'il a bien voulu porter au développement de ce travail. C'est aussi pour moi un devoir bien agréable à remplir que d'assurer de ma parfaite gratitude M. Borel, qui n'a cessé de me donner en toutes circonstances des marques de son inépuisable bienveillance (1).

Henri Poincaré faisait partie du jury de cette thèse quand la mort, le frappant subitement en pleine activité scientifique, l'enleva prématurément à sa famille, à ses amis, à ses élèves et à la Science; nous ne pouvons que nous associer à un deuil qui, s'étendant bien au delà des frontières de la nation, fut à peu près universel, et rendre un dernier hommage à la mémoire de celui qui, savant illustre, philosophe éminent, penseur profond et d'une rare originalité, fut l'un des plus grands génies des temps modernes.

---

(1) Cette étude ayant été terminée pendant mon séjour à la Fondation Thiers, je remercie très sincèrement M. Boutroux, Directeur, et MM. les Membres du Conseil d'Administration des excellentes conditions matérielles qu'on rencontre dans cet établissement et qui sont tout à fait de nature à faciliter l'effort intellectuel et les recherches personnelles.

PREMIÈRE PARTIE

CHAPITRE PREMIER.

Sur quelques propriétés arithmétiques de l'espace réglé.

Ce premier chapitre est consacré à la démonstration de certaines propriétés de l'espace réglé et à l'établissement de quelques formules que nous utiliserons dans la suite.

[**1**] Soient x_0, x_1, x_2, x_3 les coordonnées homogènes ou tétraédriques d'un point, nous allons considérer les transformations de l'espace définies par les substitutions homographiques suivantes :

$$(\mathrm{S})\qquad \left\{\begin{aligned} x_0 &= a_0 X_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3, \\ x_1 &= b_0 X_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3, \\ x_2 &= c_0 X_0 + c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3, \\ x_3 &= d_0 X_0 + d_1 X_1 + d_2 X_2 + d_3 X_3, \end{aligned}\right.$$

et chercher ce que deviennent divers systèmes de droites de l'espace quand on leur fait subir ces transformations, en nous attachant d'ailleurs, plus particulièrement, au cas où les coefficients a_i, b_i, c_i, d_i sont des entiers ordinaires, positifs ou négatifs.

Soient p_{ik} les six coordonnées pluckériennes d'une droite définie par les équations

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} p_{01}x_1 + p_{02}x_2 + p_{03}x_3 &= 0, \\ p_{10}x_0 \qquad\quad + p_{12}x_2 + p_{13}x_3 &= 0, \\ p_{20}x_0 + p_{21}x_1 \qquad\quad + p_{23}x_3 &= 0, \\ p_{30}x_0 + p_{31}x_1 + p_{32}x_2 \qquad\quad &= 0, \end{aligned}\right.$$

ces six coordonnées étant liées par la relation

$$p_{01}p_{23} + p_{02}p_{31} + p_{03}p_{12} = 0.$$

La droite (d) de coordonnées pluckériennes p_{ik} se change par la substitution (S) en une droite (D) de coordonnée P_{ik}. Exprimons les P_{ik} en fonction des p_{ik}. Pour cela, remplaçons les x_i par leurs expressions en fonction des X_i dans les équations (1); on arrive ainsi aux quatre équations suivantes :

$$\sum_{i=0}^{i=3}(b_i p_{01} + c_i p_{02} + d_i p_{03})X_i = 0,$$

$$\sum_{i=0}^{i=3}(a_i p_{10} + c_i p_{12} + d_i p_{13})X_i = 0,$$

$$\sum_{i=0}^{i=3}(a_i p_{20} + b_i p_{21} + d_i p_{23})X_i = 0,$$

$$\sum_{i=0}^{i=3}(a_i p_{30} + b_i p_{31} + c_i p_{32})X_i = 0.$$

Éliminant successivement X_0, X_1, X_2 et X_3 entre deux quelconques de ces équations, on met les équations de la droite (D) sous une forme analogue aux relations (1) définissant les coordonnées pluckériennes de (d), et on trouve en posant pour abréger

$$(mn)_{ij} = m_i n_j - m_j n_i$$

les expressions suivantes des P_{ik} :

$$(\mathrm{R}_1)\quad\left\{\begin{aligned}
P_{01} &= (ab)_{01}p_{01} + (cd)_{01}p_{23} + (ac)_{01}p_{02} + (db)_{01}p_{31} + (ad)_{01}p_{03} + (bc)_{01}p_{12},\\
P_{23} &= (ab)_{23}p_{01} + (cd)_{23}p_{23} + (ac)_{23}p_{02} + (db)_{23}p_{31} + (ad)_{23}p_{03} + (bc)_{23}p_{12},\\
P_{02} &= (ab)_{02}p_{01} + (cd)_{02}p_{23} + (ac)_{02}p_{02} + (db)_{02}p_{31} + (ad)_{02}p_{03} + (bc)_{02}p_{12},\\
P_{31} &= (ab)_{31}p_{01} + (cd)_{31}p_{23} + (ac)_{31}p_{02} + (db)_{31}p_{31} + (ad)_{31}p_{03} + (bc)_{31}p_{12},\\
P_{03} &= (ab)_{03}p_{01} + (cd)_{03}p_{23} + (ac)_{03}p_{02} + (db)_{03}p_{31} + (ad)_{03}p_{03} + (bc)_{03}p_{12},\\
P_{12} &= (ab)_{12}p_{01} + (cd)_{12}p_{23} + (ac)_{12}p_{02} + (db)_{12}p_{31} + (ad)_{12}p_{03} + (bc)_{12}p_{12}.
\end{aligned}\right.$$

Nous allons montrer maintenant que les coordonnées p_{ik} s'expriment d'une manière analogue en fonction des P_{ik}. Pour le prouver, il suffit de remarquer si u_0, u_1, u_2, u_3 sont les coordonnées tangentielles d'un plan, la droite (d) peut être définie par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
& & \varpi_{01}u_1 &+ \varpi_{02}u_2 + \varpi_{03}u_3 = 0,\\
\varpi_{10}u_0 & & &+ \varpi_{12}u_2 + \varpi_{13}u_3 = 0,\\
\varpi_{20}u_0 &+ \varpi_{21}u_1 & &+ \varpi_{23}u_3 = 0,\\
\varpi_{30}u_0 &+ \varpi_{31}u_1 &+ \varpi_{32}u_2 & = 0.
\end{aligned}$$

et l'on sait que l'on a :

$$\frac{\varpi_{01}}{p_{23}} = \frac{\varpi_{23}}{p_{01}} = \frac{\varpi_{02}}{p_{31}} = \frac{\varpi_{31}}{p_{02}} = \frac{\varpi_{03}}{p_{12}} = \frac{\varpi_{12}}{p_{03}}. \tag{2}$$

A la substitution (S) sur les x_i correspond la substitution (Σ) sur les u_i :

$$(\Sigma) \quad \left\{ \begin{aligned} U_0 &= a_0 u_0 + b_0 u_1 + c_0 u_2 + d_0 u_3, \\ U_1 &= a_1 u_0 + b_1 u_1 + c_1 u_2 + d_1 u_3, \\ U_2 &= a_2 u_0 + b_2 u_1 + c_2 u_2 + d_2 u_3, \\ U_3 &= a_3 u_0 + b_3 u_1 + c_3 u_2 + d_3 u_3. \end{aligned} \right.$$

Si Π_{ik} sont les coordonnées pluckériennes tangentielles de (D), analogues aux ϖ_{ik} de (d), on voit de suite que (Σ) faisant passer des U_i aux u_i, le calcul précédent qui nous a conduit aux relations (R_1) conduit de même à l'expression des ϖ_{ik} en fonction des Π_{ik}; il suffit de remplacer dans (R_1). P_{ik} par ϖ_{ik}, p_{ik} par Π_{ik} et chaque quantité a_i, b_i, c_i, d_i par l'élément qui occupe dans le déterminant de (Σ) la place qu'elle occupe dans celui de (S). Remplaçant ensuite les Π_{ik} et les ϖ_{ik} par leurs expressions en fonction des P_{ik} et des p_{ik} tirées de (2) et de la relation analogue écrite avec les grandes lettres, on arrive aux formules suivantes :

$$(R_2) \quad \left\{ \begin{aligned} p_{01} &= (cd)_{23}P_{01} + (cd)_{01}P_{23} + (cd)_{31}P_{02} + (cd)_{02}P_{31} + (cd)_{12}P_{03} + (cd)_{03}P_{12}, \\ p_{23} &= (ab)_{23}P_{01} + (ab)_{01}P_{23} + (ab)_{31}P_{02} + (ab)_{02}P_{31} + (ab)_{12}P_{03} + (ab)_{03}P_{12}, \\ p_{02} &= (db)_{23}P_{01} + (db)_{01}P_{23} + (db)_{31}P_{02} + (db)_{02}P_{31} + (db)_{12}P_{03} + (db)_{03}P_{12}, \\ p_{31} &= (ac)_{23}P_{01} + (ac)_{01}P_{23} + (ac)_{31}P_{02} + (ac)_{02}P_{31} + (ac)_{12}P_{03} + (ac)_{03}P_{12}, \\ p_{03} &= (bc)_{23}P_{01} + (bc)_{01}P_{23} + (bc)_{31}P_{02} + (bc)_{02}P_{31} + (bc)_{12}P_{03} + (bc)_{03}P_{12}, \\ p_{12} &= (ad)_{23}P_{01} + (ad)_{01}P_{23} + (ad)_{31}P_{02} + (ad)_{02}P_{31} + (ad)_{12}P_{03} + (ad)_{03}P_{12}. \end{aligned} \right.$$

Jusqu'ici nous n'avons pas regardé les p_{ik} comme un système de six nombres; nous les supposons seulement définis à un facteur près. C'est ainsi que, si des relations (R_1) on tirait les p_{ik} en fonction des P_{ik}, on n'obtiendrait pas (R_2); mais il est facile de voir qu'on obtiendrait pour les p_{ik} des expressions analogues où l'on aurait remplacé P_{ik} par $\Delta^2 P_{ik}$, Δ étant le degré de la substitution (S), c'est-à-dire la valeur du déterminant :

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}.$$

Ceci montre en même temps que si l'on considère les déterminants Δ_1 et Δ_2 des coefficients de (R_1) et (R_2), chaque mineur du premier ordre relatif à un élément de l'un d'eux est égal au produit par Δ^2 de l'élément correspondant de l'autre. On voit aisément que :

Les déterminants Δ_1 *et* Δ_2 *de* (R_1) *et* (R_2) *sont égaux à* Δ^3.

Si Δ est égal à ε ($\varepsilon = \pm 1$), Δ_1 et Δ_2 sont égaux à ε; si les p_{ik} ont un plus grand commun diviseur δ, les P_{ik} ont aussi comme plus grand commun diviseur δ; en particulier, si l'un des systèmes de p_{ik} est formé de six membres premiers entre eux, l'autre jouit de la même propriété.

Ceci nous conduit à poser les définitions suivantes :

Deux droites de coordonnées p_{ik} et P_{ik} sont arithmétiquement équivalentes si l'on passe de l'une à l'autre par une transformation du type (R), les a_i, b_i, c_i, d_i étant des entiers et le déterminant de la substitution étant égal à ± 1. S'il est égal à $+1$, l'équivalence est propre; s'il est égal à -1, l'équivalence est impropre.

Les formules de transformation sur les p_{ik} sont données par (R_2) et la définition de l'équivalence ainsi transportée aux coordonnées pluckériennes s'étend d'elle-même aux divers ensembles de droites qu'on pourra avoir à considérer.

Supposons maintenant que nous considérions un tel ensemble de droites définies par des relations entre leurs six coordonnées pluckériennes; on peut lui faire subir une transformation de degré Δ différent de ± 1; on en déduira un nouvel ensemble qui sera dit équivalent au premier par une substitution de degré Δ.

Par définition, le second système sera obtenu en remplaçant, dans les relations définissant le premier, les p_{ik} par leurs expressions (R_2) en fonction des P_{ik}, qui seraient eux-mêmes exprimés en fonction des p_{ik} par les équations (R_1) dont les seconds nombres auraient été multipliés par Δ^2. Il y aurait lieu d'insister ici sur ces deux systèmes de formules et de parler des transformations ponctuelles, planaires et dualistiques qui rendent compte du passage d'un système à l'autre. Mais notre but n'est pas de nous occuper de géométrie réglée, mais d'exposer aussi brièvement que possible les quelques considérations qui trouveront leur application dans l'étude de la transformation des fonctions abéliennes, nous ne nous y arrêterons pas et nous dirons quelques mots du complexe linéaire.

[**2**] Soit

$$\Sigma a_{ik} p_{ik} = a_{01}p_{01} + a_{23}p_{23} + a_{02}p_{02} + a_{31}p_{31} + a_{03}p_{03} + a_{12}p_{12} = 0$$

l'équation d'un complexe linéaire (l), cherchons l'expression générale des coefficients A_{ik} des complexes (L) équivalents à (l). Remplaçons pour cela les p_{ik} par leurs expressions tirées de (R_2) dans l'équation précédente; il vient :

$$(R_1')\quad \begin{cases} A_{01} = a_{01}(cd)_{23} + a_{23}(ab)_{23} + a_{02}(db)_{23} + a_{31}(ac)_{23} + a_{03}(bc)_{23} + a_{12}(ad)_{23}, \\ A_{23} = a_{01}(cd)_{01} + a_{23}(ab)_{01} + a_{02}(db)_{01} + a_{31}(ac)_{01} + a_{03}(bc)_{01} + a_{12}(ad)_{01}, \\ A_{02} = a_{01}(cd)_{31} + a_{23}(ab)_{31} + a_{02}(db)_{31} + a_{31}(ac)_{31} + a_{03}(bc)_{31} + a_{12}(ad)_{31}, \\ A_{31} = a_{01}(cd)_{02} + a_{23}(ab)_{02} + a_{02}(db)_{02} + a_{31}(ac)_{02} + a_{03}(bc)_{02} + a_{12}(ad)_{02}, \\ A_{03} = a_{01}(cd)_{12} + a_{23}(ab)_{12} + a_{02}(db)_{12} + a_{31}(ac)_{12} + a_{03}(bc)_{12} + a_{12}(ad)_{12}, \\ A_{12} = a_{01}(cd)_{03} + a_{23}(ab)_{03} + a_{02}(db)_{03} + a_{31}(ac)_{03} + a_{03}(bc)_{03} + a_{12}(ad)_{03}. \end{cases}$$

L'emploi du système (R_1) nous aurait de même conduit aux relations suivantes entre les a_{ik} et les A_{ik} :

$$(R_2')\quad \left\{\begin{aligned}
a_{01} &= A_{01}(ab)_{01} + A_{23}(ab)_{23} + A_{02}(ab)_{02} + A_{31}(ab)_{31} + A_{03}(ab)_{03} + A_{12}(ab)_{12},\\
a_{23} &= A_{01}(cd)_{01} + A_{23}(cd)_{23} + A_{02}(cd)_{02} + A_{31}(cd)_{31} + A_{03}(cd)_{03} + A_{12}(cd)_{12},\\
a_{02} &= A_{01}(ac)_{01} + A_{23}(ac)_{23} + A_{02}(ac)_{02} + A_{31}(ac)_{31} + A_{03}(ac)_{03} + A_{12}(ac)_{12},\\
a_{31} &= A_{01}(db)_{01} + A_{23}(db)_{23} + A_{02}(db)_{02} + A_{31}(db)_{31} + A_{03}(db)_{03} + A_{12}(db)_{12},\\
a_{03} &= A_{01}(ad)_{01} + A_{23}(ad)_{23} + A_{02}(ad)_{02} + A_{31}(ad)_{31} + A_{03}(ad)_{03} + A_{12}(ad)_{12},\\
a_{12} &= A_{01}(bc)_{01} + A_{23}(bc)_{23} + A_{02}(bc)_{02} + A_{31}(bc)_{31} + A_{03}(bc)_{03} + A_{12}(bc)_{12}.
\end{aligned}\right.$$

On voit facilement que si le complexe (l) est spécial, le complexe (L) l'est également et les formules (R_1'), (R_2') se réduisent aux formules (R_1) et (R_2) donnant les relations entre les coordonnées des axes de ces deux complexes.

Introduisons les quantités

$$I(l) = a_{01}a_{23} + a_{02}a_{31} + a_{03}a_{12}, \qquad I(L) = A_{01}A_{23} + A_{02}A_{31} + A_{03}A_{12},$$

qui sont ce que M. Klein appelle les invariants des complexes (l) et (L) ; on voit que, le déterminant Δ de la substitution étant égal à $\varepsilon(\varepsilon = \pm 1)$, on a :

$$I(L) = \varepsilon I(l).$$

Si la transformation considérée est de déterminant Δ, on trouve que les formules (R_1') donnent

$$I(L) = \Delta I(l).$$

[**3**] Considérons en particulier les complexes linéaires dont les coefficients a_{ik} sont des entiers ordinaires; tous les complexes équivalents jouissent de la même propriété. Nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Tous les complexes linéaires à coefficients entiers d'invariant ε *sont arithmétiquement et proprement équivalents entre eux et improprement équivalents aux complexes à coefficients entiers d'invariant* $-\varepsilon$.

On montre que tout complexe d'invariant ε est proprement équivalent à

$$p_{03} + \varepsilon p_{12} = 0$$

et improprement équivalent à

$$p_{03} - \varepsilon p_{12} = 0.$$

Indiquons la démonstration de la propriété suivante un peu plus générale :

Il existe des substitutions de degré Δ *à coefficients entiers changeant le complexe* $\Sigma a_{ik}p_{ik} = 0$, *à coefficients entiers et d'invariant* Δ *en :* $P_{03} + P_{12} = 0$, *ou plus exactement en* $\Delta(P_{03} + P_{12}) = 0$.

On est conduit à prouver la résolubilité en nombres entiers du système suivant d'équations :

$$(1)\qquad \begin{cases} (ab)_{03}+(ab)_{12}=a_{01}, \\ (cd)_{03}+(cd)_{12}=a_{23}, \\ (ac)_{03}+(ac)_{12}=a_{02}, \\ (db)_{03}+(db)_{12}=a_{31}, \\ (ad)_{03}+(ad)_{12}=a_{03}, \\ (bc)_{03}+(bc)_{12}=a_{12}. \end{cases}$$

Pour cela, cherchons à résoudre

$$(2)\qquad (ab)_{03}=a_{01},\quad (ac)_{03}=a_{02},\quad (ad)_{03}=a_{03};\quad (cd)_{03}=(db)_{03}=(bc)_{03}=0$$

et

$$(3)\qquad (cd)_{12}=a_{23},\quad (db)_{12}=a_{31},\quad (bc)_{12}=a_{12},\quad (ab)_{12}=(ac)_{12}=(ad)_{12}=0.$$

Le système (2) se trouve résolu en prenant

$$a_0=1,\quad a_3=0,\quad b_0=b_3=a_{01},\quad c_0=c_3=a_{02},\quad d_0=d_3=a_{03}.$$

Pour résoudre le système (3), désignons par δ le plus grand commun diviseur de a_{23} et a_{31} et posons

$$a_1=a_2=d_1=0,\quad d_2=\delta,\quad c_1=\frac{a_{23}}{\delta},\quad b_1=-\frac{a_{31}}{\delta},$$

b_2 et c_2 se trouvent détérminés par

$$\frac{a_{23}}{\delta}b_2+\frac{a_{31}}{\delta}c_2=-a_{12},$$

équation résoluble en nombres entiers, puisque les coefficients de b_2 et c_2 sont premiers entre eux.

Le déterminant (a_i, b_i, c_i, d_i) est égal à Δ, comme il est facile de s'en rendre compte, si l'on observe qu'en remplaçant dans l'expression de l'invariant du complexe $\Sigma a_{ik}p_{ik}=0$, les a_{ik} par leurs valeurs tirées de (1), on obtient une forme de développement connue pour un déterminant du quatrième ordre.

Le dernier théorème est susceptible de la généralisation suivante :

Soit $\Sigma a_{ik}p_{ik}=0$ *l'équation d'un complexe à coefficients entiers et d'invariant égal à* Δn, *n étant un nombre premier, il existe des substitutions homographiques à coefficients entiers, de déterminant* $\varepsilon\Delta$ *le changeant en* $P_{03}+\varepsilon n P_{12}=0$, *ou plus précisément en* $\Delta(P_{03}+\varepsilon n P_{12})=0$.

Nous aurons fréquemment à utiliser dans la suite les propositions précédentes. Nous allons de suite en donner une application à la théorie des formes quadratiques.

Considérons une quadrique dont l'équation

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3)=0$$

a ses coefficients entiers. Cette quadrique contient deux séries réglées, chacune d'elles appartenant à une infinité de complexes linéaires; on vérifie facilement que, si parmi eux se trouve le complexe

$$p_{03} + p_{12} = 0,$$

le quadrique a son discriminant carré parfait et il est bien aisé de voir que les théorèmes précédents nous permettent d'en déduire que :

Si une quadrique à coefficients entiers appartient à un complexe linéaire à coefficients rationnels, son discriminant est carré parfait.

CHAPITRE II.

Sur la transformation des fonctions abéliennes.

Nous étudierons dans ce chapitre la transformation des fonctions abéliennes ordinaires relatives aux tableaux de périodes T_n d'indice n quelconque. A ces transformations abéliennes nous rattachons des tableaux de nombres plus généraux que ceux qu'Hermite a considérés et qui jouissent, comme ces derniers, de propriétés remarquables les rapprochant des systèmes linéaires de quatre lettres. On verra dans la suite quelle liaison étroite existe entre les tableaux d'Hermite et les corps quadratiques; les systèmes linéaires plus généraux auxquels nous a conduit le problème de la transformation des fonctions abéliennes de genre deux relatives aux tableaux de périodes T_n, sont liés de la même manière à certains *modules* constitués par des nombres algébriques du second degré d'une forme particulière et dont l'étude se poursuivrait d'après les mêmes principes que celle des corps quadratiques. Nous signalons également certaines classes de formes quadratiques à quatre indéterminées plus générales que celles qui se sont présentées à Hermite et dont nous pensons faire l'étude dans un autre travail en appliquant la méthode qui nous a permis dans la troisième Partie de résoudre les problèmes relatifs à l'équivalence des formes abéliennes. Une étude des correspondances ponctuelles entre deux surfaces hyperelliptiques relatives à deux tableaux de périodes T_n et T_N et des transformations des périodes suivie de quelques considérations sur le nouveau point de vue auquel nous sommes amenés à concevoir les correspondances entre les couples de points de deux courbes hyperelliptiques, termine ce chapitre où nous avons systématiquement laissé de côté les diverses questions qui se rattachent plus particulièrement à la théorie des fonctions.

I. — Le problème de la transformation.

[1] Considérons une surface hyperelliptique générale (s), les coordonnées rectilignes d'un point étant trois fonctions abéliennes de deux variables u et v formant un système fondamental, c'est-à-dire tel qu'à un point de la surface corresponde un couple de valeurs de u et v et un seul, à des périodes près. Ces fonctions abéliennes peuvent être regardées comme les quotients de deux fonctions entières $\Theta(u, v)$; nous supposerons que ces Θ sont relatifs au tableau de périodes :

$$T_n \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{n} & 0 & g & h, \\ 0 & 1 & h & g'. \end{matrix} \right.$$

Pour tout ce qui concerne ces surfaces hyperelliptiques et ces fonctions Θ particulières, je renvoie à la thèse de M. Traynard.

Considérons de même une surface hyperelliptique générale (S) dont les coordonnées sont des fonctions abéliennes de U et V, relatives au tableau :

$$T_N \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{N} & 0 & G & H, \\ 0 & 1 & H & G'. \end{matrix} \right.$$

Le problème de la transformation des fonctions abéliennes relatives à ces deux tableaux, se pose ainsi sous forme géométrique :

Peut-on établir entre les deux surfaces hyperelliptiques (s) *et* (S) *une correspondance algébrique telle qu'à un point* (u, v) *de* (s) *corresponde un point* (U, V) *et un seul de* (S)?

On voit de suite que toute fonction abélienne des variables U et V s'exprime rationnellement en fonction des fonctions abéliennes de u et v. Et la considération des intégrales de différentielles totales sur les deux surfaces (s) et (S) montre que U et V sont fonctions linéaires de u et v. Les relations entre les couples u, v et U, V de variables seront donc de la forme

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} U &= \lambda u + \mu v, \\ V &= \lambda' u + \mu' v \end{aligned} \right.$$

en négligeant les constantes qu'on peut ajouter à U et V.

Le problème de la transformation peut aussi être conçu de cette façon :

Le tableau de périodes T_N étant donné, déterminer λ, μ, λ', μ' et le tableau T_N de telle manière qu'à un couple de valeurs de u et v corresponde un seul couple de valeurs de U et V, à des périodes près.

La marche à suivre est la même que pour le cas ordinairement traité où $n = \mathrm{N}$, et nous l'exposerons très brièvement.

Augmentons u et v d'un des quatre couples de périodes simultanées du tableau T_n et exprimons que U et V augmentent eux aussi d'un couple de périodes de T_N. Nous sommes ainsi conduits aux relations nécessaires suivantes où les a_i, b_i, c_i, d_i désignent des nombres entiers :

$$
(2)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\frac{\lambda}{n} &= \frac{a_0}{\mathrm{N}} + a_3\mathrm{G} + a_2\mathrm{H},\\
\frac{\lambda'}{n} &= a_1 + a_3\mathrm{H} + a_2\mathrm{G}',\\
\mu &= \frac{b_0}{\mathrm{N}} + b_3\mathrm{G} + b_2\mathrm{H},\\
\mu' &= b_1 + b_3\mathrm{H} + b_2\mathrm{G}',\\
\lambda g + \mu h &= \frac{d_0}{\mathrm{N}} + d_3\mathrm{G} + d_2\mathrm{H},\\
\lambda' g + \mu' h &= d_1 + d_3\mathrm{H} + d_2\mathrm{G}',\\
\lambda h + \mu g' &= \frac{c_0}{\mathrm{N}} + c_3\mathrm{G} + c_2\mathrm{H},\\
\lambda' h + \mu' g' &= c_1 + c_3\mathrm{H} + c_2\mathrm{G}'.
\end{aligned}
\right.
$$

Ces huit équations (2) doivent nécessairement être vérifiées par des entiers a_i, b_i, c_i, d_i pour que la transformation du premier système de fonctions abéliennes dans le second puisse exister. Des quatre premières nous tirons λ, μ, λ' et μ'. Portant les valeurs trouvées dans les quatre dernières et éliminant g, h, g' entre les équations trouvées, on arrive à la condition nécessaire suivante pour les périodes G, H, G' :

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{1}{\mathrm{N}}[n(ad)_{01} + (bc)_{01}] + [n(ad)_{31} + (bc)_{31}]\mathrm{G} + \frac{1}{\mathrm{N}}[n(ad)_{02} + (bc)_{02}]\mathrm{G}'\\
&\quad + \left\{\frac{1}{\mathrm{N}}[n(ad)_{03} + (bc)_{03}] - n(ad)_{12} - (bc)_{12}\right\}\mathrm{H} + [n(ad)_{23} + (bc)_{23}](\mathrm{H}^2 - \mathrm{GG}') = 0.
\end{aligned}
$$

Nous supposerons d'abord qu'aucune relation de cette forme n'existe entre les périodes de T_N ; alors l'équation précédente (3) devra se réduire à une identité et les seize entiers a_i, b_i, c_i, d_i devront être liés par les relations

$$
(\mathrm{I})\qquad \left\{
\begin{aligned}
&n(ad)_{01} + (bc)_{01} = 0,\\
&n(ad)_{31} + (bc)_{31} = 0,\\
&n(ad)_{02} + (bc)_{02} = 0,\\
&n(ad)_{23} + (bc)_{23} = 0,\\
&n(ad)_{03} + (bc)_{03} = \mathrm{N}[n(ad)_{12} + (bc)_{12}] = \mathfrak{N}.
\end{aligned}
\right.
$$

On aurait pu de même éliminer G, H, G′ entre les quatre équations trouvées et on serait arrivé à la condition suivante pour g, h, g' :

$$\frac{1}{n}[(cd)_{03}+\mathrm{N}(cd)_{12}]+[(ac)_{03}+\mathrm{N}(ac)_{12}]g+\frac{1}{n}[(db)_{03}+\mathrm{N}(db)_{12}]g' \tag{4}$$
$$+\left\{\frac{1}{n}[bc)_{03}+n(bc)_{12}]-(ad)_{13}-\mathrm{N}(ad)_{12}\right\}h+[(ab)_{03}+\mathrm{N}(ab)_{12}](h^2-gg')=0.$$

Si aucune relation de cette forme n'existe entre g, h et g', cette équation doit être une identité et elle nous fournit les relations nécessaires suivantes entre les seize entiers caractéristiques de la transformation :

$$\text{(II)}\quad\begin{cases}(ac)_{03}+\mathrm{N}(ac)_{12}=0,\\(db)_{03}+\mathrm{N}(db)_{12}=0,\\(ab)_{03}+\mathrm{N}(ab)_{12}=0,\\(cd)_{03}+\mathrm{N}(cd)_{12}=0,\\(bc)_{03}+\mathrm{N}(bc)_{12}=n\{(ad)_{03}+\mathrm{N}(ad)_{12}\}=\mathfrak{N}.\end{cases}$$

J'ai posé les deux dernières quantités égales à $\mathfrak{N}$, car on voit immédiatement que leur somme est égale à $2\mathfrak{N}$; on a en outre :

$$(bc)_{03}=\mathrm{N}n(ad)_{12},\qquad n(ad)_{03}=\mathrm{N}(bc)_{12}.$$

Les deux systèmes (I) et (II) sont absolument équivalents comme on va le voir.

[**2**] Considérons la substitution homographique

$$\text{(S)}\quad\begin{cases}x_0=a_0\mathrm{X}_0+a_1\mathrm{X}_1+a_2\mathrm{X}_2+a_3\mathrm{X}_3,\\x_1=b_0\mathrm{X}_0+b_1\mathrm{X}_1+b_2\mathrm{X}_2+b_3\mathrm{X}_3,\\x_2=c_0\mathrm{X}_0+c_1\mathrm{X}_1+c_2\mathrm{X}_2+c_3\mathrm{X}_3,\\x_3=d_0\mathrm{X}_0+d_1\mathrm{X}_1+d_2\mathrm{X}_2+d_3\mathrm{X}_3,\end{cases}$$

où les a_i, b_i, c_i, d_i sont les seize entiers précédents. Si l'on se reporte aux formules données dans le chapitre I, on voit aisément que les systèmes de relations (I) et (II) expriment tous deux que la substitution (S) précédente change le complexe linéaire Γ_n :

$$p_{03}+np_{12}=0$$

en Γ_N :

$$\mathrm{P}_{03}+\mathrm{N}\mathrm{P}_{12}=0,$$

ou plus exactement $(p_{03}+np_{12})$ en $\dfrac{\mathfrak{N}}{\mathrm{N}}(\mathrm{P}_{03}+\mathrm{N}\mathrm{P}_{12})$, et que ces deux systèmes de relations sont bien équivalents.

On a ainsi une interprétation géométrique très simple des relations qui existent entre les seize entiers caractéristiques d'une transformation ; si l'on se place dans le cas de $n = N = 1$, on voit que les relations données par Hermite expriment que le complexe $p_{03} + p_{12} = 0$ n'est pas altéré par la substitution (S).

L'introduction des tableaux T_n conduit donc à de nouvelles transformations abéliennes, plus générales que celles qui s'étaient présentées à Hermite. Nous appellerons transformation abélienne de type (n, N) une transformation dont les entiers caractéristiques sont liés par les relations (I) et (II); les transformations d'Hermite sont de type $(1, 1)$. Quant aux substitutions homographiques qui sont liées aux transformations et qui en donnent une interprétation géométrique si simple, nous ne pouvons pas les appeler substitutions abéliennes, cette expression ayant en général un autre sens; nous les nommerons substitutions (S) et nous les répartirons en types (n, N) comme les transformations. Ces définitions étant posées, nous considérerons une transformation du type (n, N) comme faisant passer du tableau de périodes T_n à T_N, ou si l'on veut de la surface hyperelliptique (s) à la surface (S), une substitution (S) de type (n, N) changeant le complexe Γ_n en Γ_N.

Nous sommes ainsi amenés à considérer les systèmes linéaires de seize lettres :

$$\begin{Bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{Bmatrix}$$

dont les éléments sont liés par les relations (I) et (II), nous adopterons pour ces tableaux de nombres la notation générale Σ; le tableau est de type (n, N) si ses éléments satisfont à (I) et (II), les tableaux de type (n, N) étant notés $\Sigma(n, N)$.

Nous appellerons *degré* d'une transformation abélienne, d'une substitution (S) ou d'un tableau Σ, la valeur du déterminant (a_i, b_i, c_i, d_i) :

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}.$$

2. — Étude des systèmes linéaires Σ.

[1] Le degré d'un système linéaire $\Sigma(n, N)$ est égal à $\dfrac{\mathfrak{N}^2}{Nn}$.

Pour le voir, il suffit de remarquer que le déterminant (a_i, b_i, c_i, d_i) est égal à

$$[(ad)_{03} + (ad)_{12}][(bc)_{03} + (bc)_{12}] + [(ac)_{03} + (ac)_{12}][db)_{03} + (db)_{12}]$$
$$+ [(ab)_{03} + (ab)_{12}][(cd_{03} + (cd)_{12}].$$

En vertu des relations (II) :

$$[(ac)_{03} + (ac)_{12}][(db)_{03} + (db)_{12}] = (N - 1)^2 (ac)_{12}(db)_{12},$$
$$[(ab)_{03} + (ab)_{12}][(cd)_{03} + (cd)_{12}] = (N - 1)^2 (ab)_{12}(cd)_{12},$$
$$[(ad)_{03} + (ad)_{12}][(bc)_{03} + (bc)_{12}] = \frac{\mathfrak{N}^2}{Nn} + (N - 1)^2 (ad)_{12}(bc)_{12}.$$

Tenant compte de l'identité

$$(ac)_{12}(db)_{12} + (ad)_{12}(bc)_{12} + (ab)_{12}(cd)_{12} = 0,$$

on arrive au résultat annoncé.

Le degré d'un système Σ ou, ce qui revient au même, d'une transformation abélienne quelconque, est donc toujours positif. Il est multiple de n et de N, et, si n et N ne sont pas égaux, il n'existe aucun système linéaire $\Sigma(n, N)$ de degré égal à 1 ou à un carré parfait. Mais si $n = N$, posons

$$\mathfrak{N} = kn;$$

on voit que le degré du système linéaire $\Sigma(n, n)$ est égal à k^2. Le nombre k ainsi défini sera dit l'*ordre* du système $\Sigma(n, n)$. Le degré d'un tel système est égal au carré de son ordre. Nous considérerons également k comme l'ordre d'une transformation abélienne de type (n, n) ou d'une substitution (S) du même type,

[**2**] Soient (S_1) et (S_2) deux substitutions (S) respectivement de types (n, n') et (n', N), le produit de ces deux substitutions est une substitution (S) changeant le complexe Γ_n en Γ_N, par conséquent de type (n, N). Son degré est égal au produit des degrés de (S_1) et (S_2). Cette composition des substitutions (S) conduit à la composition des transformations abéliennes et à celle des systèmes linéaires Σ, et définit le produit de deux transformations ou de deux systèmes linéaires :

Le produit d'une transformation abélienne de type (n, n') par une transformation de type (n', N) est une transformation abélienne de type (n, N), le degré de la transformation composée étant égal au produit des degrés des transformations composantes.

De même :

Deux systèmes linéaires $\Sigma(n, n')$ et $\Sigma(n', N)$ se composent en un système linéaire $\Sigma(n, N)$, le degré du système composé étant égal au produit des degrés des systèmes composants.

Dans ce qui suit, nous examinerons plus particulièrement les transformations du type (n, n). Les substitutions (S) correspondantes sont celles que laissent invariables le complexe linéaire $\Gamma_n : p_{03} + np_{12} = 0$. La composition de deux telles substitutions conduit à une substitution analogue :

Deux systèmes linéaires $\Sigma(n, n)$ se composent en un nouveau système linéaire $\Sigma(n, n)$.

Nous exprimerons la relation de composition par l'équation

$$(5)\qquad \begin{Bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \delta_0 & \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ B_0 & B_1 & B_2 & B_3 \\ C_0 & C_1 & C_2 & C_3 \\ D_0 & D_1 & D_2 & D_3 \end{Bmatrix}$$

et en posant

$$(bc)_{03} + n(bc)_{12} = n[(ad)_{03} + n(ad)_{12}] = \mathfrak{N}_1 = k_1 n,$$
$$(\beta\gamma)_{03} + n(\beta\gamma)_{12} = n[(\alpha\delta)_{03} + n(\alpha\delta)_{12}] = \mathfrak{N}_2 = k_2 n,$$
$$(\mathrm{BC})_{03} + n(\mathrm{BC})_{12} = n[(\mathrm{AD})_{03} + n(\mathrm{AD})_{12}] = \mathfrak{N}_3 = k_3 n.$$

on trouve :

$$k_3 = k_1 k_2.$$

Deux systèmes linéaires de type (n, n) *se composent en un système du même type dont l'ordre est égal au produit des ordres des systèmes composants.*

Le degré d'un système de type (n, n) étant égal au carré de son ordre, la proposition précédente entraîne le théorème analogue relatif aux degrés d'un système composé et de ses composants.

[**3**] Nous avons étendu à ces systèmes linéaires de type (n, n) le théorème d'Hermite sur la réduction des systèmes $\Sigma(1, 1)$ d'un ordre premier k. Revenons à l'équation de composition (5); si $k_2 = 1$, les deux systèmes linéaires

$$\begin{Bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ B_0 & B_1 & B_2 & B_3 \\ C_0 & C_1 & C_2 & C_3 \\ D_0 & D_1 & D_2 & D_3 \end{Bmatrix}$$

seront regardés comme *équivalents*.

Nous avons établi la proposition suivante :

Si k_3 *est un nombre premier à* n *et égal au produit de deux entiers* k_1 *et* k_2. *on peut, étant donné le système linéaire* (A, B, C, D) *d'ordre* k_3, *déterminer le système* $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ *d'ordre* k_2 *de manière que dans le tableau des éléments du système linéaire* (a, b, c, d) *d'ordre* k_1, *les éléments placés au-dessus de la diagonale* $a_0 d_3$ *soient tous nuls.*

Nous en avons déduit que :

Le nombre des systèmes linéaires $\Sigma(n, n)$ *non équivalents, d'ordre* k *premier et non diviseur de* n, *est égal à*

$$1 + k + k^2 + k^3.$$

C'est précisément le théorème qu'Hermite avait énoncé pour $n = 1$. La démonstration des théorèmes précédents étant longue et n'étant pas très différente de celle que l'on donne pour $n = 1$, nous ne l'exposerons pas.

[**4**] Ces systèmes non équivalents sont représentés par ces quatre types où i, i', i'' sont des nombres pris dans la série 0, 1, 2, ... $(k-1)$:

$$\begin{Bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ ni & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i' & 0 & -i & k \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ ni & i' & k & 0 \\ i'' & i & 0 & k \end{Bmatrix}.$$

Remarque. — On verra facilement que si k est un nombre premier à n, les éléments des tableaux $\Sigma(n, n)$ d'ordre k, satisfont aux congruences

$$b_0 \equiv b_3 \equiv c_0 \equiv c_3 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } n).$$

Il suffit pour s'en rendre compte d'écrire que si Δ désigne le déterminant d'un tel système, on a, par exemple :

$$\frac{\partial \Delta}{\partial b_0} = -\frac{c_3 k}{n},$$

k étant premier à n et $\frac{c_3 k}{n}$ devant être entier, c_3 est nécessairement multiple de n.

[**5**] A l'un quelconque des systèmes précédents, il en correspond toujours un autre et un seul, tel qu'en les composant avec lui on obtienne le système

$$\begin{Bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{Bmatrix}$$

ou un système qui lui est équivalent.

[**6**] Les propositions précédentes montrent qu'il existe une grande analogie entre les systèmes linéaires $\Sigma(n, n)$ et les systèmes linéaires à quatre lettres :

$$\begin{Bmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{Bmatrix}.$$

Suivant toujours Hermite dans l'étude qu'il a faite des systèmes $\Sigma(1, 1)$, considérons la substitution (T) adjointe de la substitution (S) liée à un système $\Sigma(n, n)$:

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{\partial \Delta}{\partial a_0} Z_0 + \frac{\partial \Delta}{\partial a_1} Z_1 + \frac{\partial \Delta}{\partial a_2} Z_2 + \frac{\partial \Delta}{\partial a_3} Z_3, \\ z_1 &= \frac{\partial \Delta}{\partial b_0} Z_0 + \frac{\partial \Delta}{\partial b_1} Z_1 + \frac{\partial \Delta}{\partial b_2} Z_2 + \frac{\partial \Delta}{\partial b_3} Z_3, \\ z &= \frac{\partial \Delta}{\partial c_0} Z_0 + \frac{\partial \Delta}{\partial c_1} Z_1 + \frac{\partial \Delta}{\partial c_2} Z_2 + \frac{\partial \Delta}{\partial c_3} Z_3, \\ z &= \frac{\partial \Delta}{\partial d_0} Z_0 + \frac{\partial \Delta}{\partial d_1} Z_1 + \frac{\partial \Delta}{\partial d_2} Z_2 + \frac{\partial \Delta}{\partial d_3} Z_3. \end{aligned}$$

Supposons que l'ordre k soit premier à n, on trouve que le déterminant de la substitution précédente est identique au suivant :

$$\begin{vmatrix} d_3 & nd_2 & -nd_1 & -d_0 \\ \dfrac{c_3}{n} & c_2 & -c_1 & -\dfrac{c_0}{n} \\ -\dfrac{b_3}{n} & -b_2 & b_1 & \dfrac{b_0}{n} \\ -a_3 & -na_2 & na_1 & a_0 \end{vmatrix}$$

dont tous les termes auraient été multipliés par k, de sorte que l'on passe de la substitution primitive à son adjointe par

$$\begin{array}{llll} x_0 = z_3, & x_1 = nz_2, & x_2 = -nz_1, & x_3 = -z_0, \\ X_0 = kZ_3, & X_1 = knZ_2, & X_2 = -knZ_1, & X_3 = -kZ_0, \end{array}$$

résultat analogue à celui qui concerne les substitutions entre deux indéterminées; b_0, b_3, c_0 et c_3 étant des multiples de n, tous les éléments du déterminant précédent sont entiers.

Si k n'est pas premier à n, soit δ le plus grand commun diviseur de k et n, posons :

$$k = k'\delta, \qquad n = n'\delta.$$

On voit facilement que kb_0, kb_3, kc_0, kc_3 sont nécessairement des multiples de n; donc

$$b_0 \equiv b_3 \equiv c_0 \equiv c_3 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } n').$$

Le déterminant de (T) est égal au suivant dont tous les éléments auraient été multipliés par k' :

$$\begin{vmatrix} \delta d_3 & n\delta a_2 & -n\delta d_1 & -\delta d_0 \\ \dfrac{c_3}{n'} & \delta c_2 & -\delta c_1 & -\dfrac{c_0}{n'} \\ -\dfrac{b_3}{n'} & -\delta b_2 & \delta b_1 & \dfrac{b_0}{n'} \\ -\delta a_3 & -n\delta d_2 & n\delta a_1 & \delta a_0 \end{vmatrix}.$$

On passe de la substitution (S) à son adjointe (T) en posant :

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{llll} x_0 = z_3, & x_1 = n'z_2, & x_2 = -n'z_1, & x_3 = -z_0'. \\ X_0 = kZ_3, & X_1 = knZ_2, & X_2 = -knZ_1, & X_3 = -kZ_0. \end{array} \right.$$

Dans le premier cas, le déterminant de (T), après division de tous les éléments par k est égal au degré de (S); dans le second, il est égal au produit de celui-ci par δ^4.

[7] Une propriété analogue appartient aux systèmes linéaires $\Sigma(n, \mathrm{N})$. Le nombre $\mathfrak{N}$ attaché à chacun de ces systèmes doit être divisible par N et n; soit δ le plus grand commun diviseur de N et n, posons

$$\mathrm{N} = \mathrm{N}'\delta, \qquad n = n'\delta,$$

on aura

$$\mathfrak{N} = \varkappa\delta\mathrm{N}'n',$$

$\varkappa$ étant un entier; le degré de $\Sigma(n, \mathrm{N})$ est égal à $\varkappa^2\mathrm{N}'n'$.

On voit aisément que $\varkappa c_3$, $\varkappa c_0$, $\varkappa b_3$ et $\varkappa b_0$ sont divisibles par δ; on est amené à distinguer le cas où $\varkappa$ et δ sont premiers entre eux et celui où ils ont un plus grand commun diviseur différent de l'unité. Je me placerai dans le premier cas; le second mène à des conclusions analogues et se traite comme celui des systèmes $\Sigma(n, n)$ d'ordre non premier à n.

Si $\varkappa$ et δ sont premiers entre eux, nécessairement b_0, b_3, c_0 et c_3 sont divisibles par δ. Le déterminant des coefficients de l'adjointe (T) après la division de tous les éléments par $\varkappa$ s'écrit :

$$\begin{vmatrix} n'd_3 & \dfrac{\mathfrak{N}}{\varkappa}d_2 & -\dfrac{\mathfrak{N}}{\varkappa}d_1 & -n'd_0 \\ \dfrac{c_3}{\delta} & \mathrm{N}'c_2 & -\mathrm{N}'c_1 & -\dfrac{c_0}{\delta} \\ -\dfrac{b_3}{\delta} & -\mathrm{N}'b_2 & \mathrm{N}'b_1 & \dfrac{b_0}{\delta} \\ -n'a_3 & -\dfrac{\mathfrak{N}}{\varkappa}a_2 & \dfrac{\mathfrak{N}}{\varkappa}a_1 & n'a_0 \end{vmatrix}.$$

On passe de la substitution (S) à son adjointe (T) par

$$(7) \qquad \begin{cases} x_0 = \dfrac{\delta z_3}{n}, & x_1 = \delta z_2, \quad x_2 = -\delta z_1, \quad x_3 = -\dfrac{\delta z_0}{n}. \\ \mathrm{X}_0 = \varkappa\mathrm{Z}_3, & \mathrm{X}_1 = \varkappa\mathrm{N}\mathrm{Z}_2, \quad \mathrm{X}_2 = -\varkappa\mathrm{N}\mathrm{Z}_1, \quad \mathrm{X}_3 = -\varkappa\mathrm{Z}_0. \end{cases}$$

Le déterminant de (T) après division des coefficients par $\varkappa$ est égal à celui de (S) multiplié par $(n'\mathrm{N}')^2$.

Si $\varkappa$ et δ ont un plus grand commun diviseur $\mathfrak{D}$, on peut encore poursuivre l'analogie des systèmes linéaires de seize lettres que nous considérons, avec les systèmes de quatre lettres. Les éléments du déterminant de (T), que nous n'écrirons pas, sont tous divisibles par $\dfrac{\varkappa}{\mathfrak{D}}$, et après cette division, le déterminant est égal au produit de celui de (S) par $(\mathfrak{D}^2 n'\mathrm{N}')^2$. Le passage de (S) à (T) se fait encore par des formules analogues aux précédentes (6) et (7).

[**8**] Présentons encore la remarque suivante qui trouvera dans la suite une application utile dans la démonstration d'un théorème important relatif à la transformation des fonctions abéliennes.

Au système linéaire Σ, de degré Δ,

$$\begin{Bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{Bmatrix}$$

adjoignons le tableau de nombres :

$$\begin{Bmatrix} \frac{1}{h}\frac{\partial\Delta}{\partial a_0} & \frac{1}{h}\frac{\partial\Delta}{\partial b_0} & \frac{1}{h}\frac{\partial\Delta}{\partial c_0} & \frac{1}{h}\frac{\partial\Delta}{\partial d_0} \\ \frac{1}{h}\frac{\partial\Delta}{\partial a_1} & \frac{1}{h}\frac{\partial\Delta}{\partial b_1} & \frac{1}{h}\frac{\partial\Delta}{\partial c_1} & \frac{1}{h}\frac{\partial\Delta}{\partial d_1} \\ \frac{1}{h}\frac{\partial\Delta}{\partial a_2} & \frac{1}{h}\frac{\partial\Delta}{\partial b_2} & \frac{1}{h}\frac{\partial\Delta}{\partial c_2} & \frac{1}{h}\frac{\partial\Delta}{\partial d_2} \\ \frac{1}{h}\frac{\partial\Delta}{\partial a_3} & \frac{1}{h}\frac{\partial\Delta}{\partial b_3} & \frac{1}{h}\frac{\partial\Delta}{\partial c_3} & \frac{1}{h}\frac{\partial\Delta}{\partial d_3} \end{Bmatrix},$$

h étant égal à :

k si Σ est de type (n, n) et d'ordre k premier à n.

$k' = \frac{k}{\delta}$ si Σ est de type (n, n) et si son ordre k et l'entier n ont comme plus grand commun diviseur δ.

$\varkappa$ si Σ est de type (n, N) et si $\mathfrak{N} = \varkappa\delta \mathrm{N}'n'$, $\varkappa$ et δ étant premiers entre eux.

$\varkappa' = \frac{\varkappa}{\mathfrak{D}}$ dans le même cas si $\varkappa$ et δ ont un plus grand commun diviseur $\mathfrak{D}$.

On voit sans difficulté que le tableau précédent est un système Σ que nous noterons Σ' et que nous appellerons *système adjoint à* Σ.

Si Σ *est du type* (n, n), Σ' *est du même type.*

Si k est l'ordre de Σ, l'ordre de Σ' est égal à k si k et n sont premiers entre eux, et à $k\delta^2$ si k et n ont comme plus grand commun diviseur δ.

Si Σ *est du type* (n, N), Σ' *est du type* (N, n).

Autrement dit, les éléments de Σ' vérifient les relations (I) et (II) dans lesquelles on aurait permuté n et N. Si l'entier $\mathfrak{N}$ correspondant à Σ est égal à $\varkappa\delta\mathrm{N}'n'$, l'entier $\mathfrak{N}'$ correspondant à Σ' est égal à $\mathfrak{N}\mathrm{N}'n'$ si $\varkappa$ et δ sont premiers entre eux, et à $\mathfrak{N}\mathrm{N}'n'\mathfrak{D}^2$ si $\varkappa$ et δ ont comme plus grand commun diviseur $\mathfrak{D}$.

Soit Σ'' le système linéaire adjoint à Σ', on vérifie facilement que Σ'' est identique à Σ dans le cas où ce dernier est de type (n, n) et d'ordre k premier à n. Dans les autres cas, Σ'' est identique à Σ dont les éléments auraient été multipliés par :

δ^2 si Σ est de type (n, n) et si k et n ont comme plus grand commun diviseur δ.

$n'N'$ si Σ est de type (n, N) et si $\varkappa$ est premier à δ, les notations étant celles que nous avons employées précédemment dans le même cas.

$\mathfrak{D}^2 n'N'$ si $\varkappa$ et δ ont comme plus grand commun diviseur $\mathfrak{D}$.

Au système adjoint Σ' est liée une transformation abélienne adjointe à celle qui correspondait à Σ et une substitution (S') adjointe à (S). (S') sera dans la suite appelée *substitution adjointe de* (S), mais il importe de remarquer que ce n'est pas l'adjointe au sens donné à ce mot dans la théorie des substitutions. On verra facilement quelle relation il y a entre (S') et (T); comme dans tout ce qui suit nous n'aurons jamais à considérer que la substitution (S'), il ne pourra s'établir aucune confusion.

[9] Considérons les formes quadratiques

$$f = \Sigma a_{ij} x_i x_j,$$

a_{ij} étant égal à a_{ji} et le signe Σ s'étendant aux valeurs 0, 1, 2, 3 des indices i et j.

Établissons entre les coefficients a_{ij} les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
a_{11}a_{22} - a_{12}^2 &= n^2(a_{00}a_{33} - a_{03}^2),\\
a_{01}a_{12} - a_{02}a_{11} + n(a_{00}a_{31} - a_{01}a_{03}) &= 0,\\
a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22} + n(a_{02}a_{33} - a_{03}a_{23}) &= 0,\\
a_{01}a_{22} - a_{12}a_{02} + n(a_{00}a_{23} - a_{02}a_{03}) &= 0,\\
a_{31}a_{22} - a_{11}a_{23} + n(a_{03}a_{31} - a_{01}a_{33}) &= 0.
\end{aligned}$$

Le discriminant d'une telle forme sera carré parfait et égal à δ^2 en posant

$$\delta = n(a_{00}a_{33} - a_{03}^2) + a_{01}a_{23} - a_{02}a_{31}.$$

Soit

$$F = \Sigma A_{ij} X_i X_j$$

la transformée de f par une substitution (S) de type (n, n), les coefficients A_{ij} sont soumis aux mêmes conditions que les a_{ij}. Posons :

$$\Delta = n(A_{00}A_{33} - A_{03}^2) + A_{01}A_{23} - A_{02}A_{31}.$$

Si la substitution (S) est d'ordre k, on a

$$\Delta = k^2\delta.$$

Ce résultat montre qu'on peut isoler les formes f des formes quadratiques générales à quatre variables, pour les comparer entre elles par les substitutions (S) de type (n, n). On pourra aussi poser, sous ce point de vue, le problème de l'équivalence et de la réduction de ces formes. Nous ne faisons que signaler ici cette question. Dans la troisième partie de ce travail, on trouvera l'étude des formes f dans le cas de $n = 1$, qu'avait signalé Hermite dans son Mémoire sur la transformation des fonctions abéliennes. Le cas général fera l'objet d'un autre travail.

3. — Correspondances ponctuelles entre deux surfaces hyperelliptiques.

[**1**] Revenons maintenant à la transformation des fonctions abéliennes. Considérons la transformation de type (n, N) dont les entiers caractéristiques sont a_i, b_i, c_i et d_i et désignons toujours par Δ la valeur du déterminant

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

Nous l'avons appelé le *degré* de la transformation ; on sait que l'on a

$$\Delta = \varkappa^2 N' n',$$

N' et n' étant les quotients de N et n par leur plus grand commun diviseur et $\varkappa$ un entier. Δ est un entier toujours positif.

Relativement à ces transformations abéliennes, on peut développer des théories analogues à celles qui se présentent dans l'étude des transformations habituellement considérées de type $(1, 1)$. L'interprétation géométrique de la substitution (S) d'une part, l'étude arithmétique des systèmes linéaires $\Sigma(n, N)$ d'autre part, rendant à peu près immédiats les résultats suivants, nous nous bornerons à les énoncer :

Le produit d'une première transformation abélienne de type (n, N) *faisant passer d'un tableau de périodes* T_n *à un tableau* T_N *et d'une seconde transformation abélienne de type* (N, N') *faisant passer du même tableau* T_N *à un tableau* $T_{N'}$, *est une transformation abélienne de type* (n, N) *faisant passer du tableau* T_n *au tableau* $T_{N'}$. *Le degré de cette dernière est égal au produit des degrés des transformations composantes. Si* $n = N = N'$, *toutes les transformations sont de type* (n, n) *et l'ordre de la transformation finale est égal au produit des ordres des deux transformations composantes.*

On peut se débarrasser de la considération des ordres négatifs dans le cas de $n = N$, en remarquant que la transformation

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

d'ordre -1 donne

$$U = u, \quad V = v$$

et

$$H = -h, \quad G' = -g'.$$

Elle ne conduit donc pas à des fonctions abéliennes distinctes; on peut dire qu'elle laisse invariant tout tableau T_n; elle est de degré 1. En faisant précéder ou suivre une transformation d'ordre négatif quelconque de celle-ci, le produit sera une transformation d'ordre positif.

Revenons maintenant aux correspondances ponctuelles entre deux surfaces hyperelliptiques.

[2] *A un point* (u, v) *de* (s), *il correspond un seul point* (U, V) *de* (S), *et à un point* (U, V) *de* (S) *il correspond* Δ *points* (u, v) *de* (s).

La démonstration est analogue à celle de la même proposition dans le cas de $n = N = 1$; nous la donnerons cependant à cause de l'importance de ce théorème.

Augmentons U et V de deux couples de périodes quelconques et cherchons à quelle condition il correspondra aux deux points (U, V) ainsi déterminés de (S), le même point (u, v) de (s).

J'augmente U et V des périodes suivantes :

$$U : \frac{\theta_0'}{N} + \theta_3' G + \theta_2' H, \qquad \frac{\theta_0''}{N} + \theta_3'' G + \theta_2'' H.$$
$$V : \theta_0' + \theta_3' H + \theta_2' G', \qquad \theta_2'' + \theta_3'' H + \theta_2'' G'.$$

θ_i' et θ_i'' étant des nombres entiers. Posons :

$$\theta_i' - \theta_i'' = \theta_i.$$

Aux deux nouveaux couples de valeurs de U et V, il correspond le même couple (u, v); on a nécessairement :

$$(8) \qquad \begin{cases} \dfrac{\theta_0}{N} + \theta_3 G + \theta_2 H = \lambda\left(\dfrac{\xi_0}{n} + \xi_3 g + \xi_2 h\right) + \mu(\xi_1 + \xi_3 h + \xi_2 g'), \\[2ex] \theta_1 + \theta_3 H + \theta_2 G' = \lambda'\left(\dfrac{\xi_0}{n} + \xi_3 g + \xi_2 h\right) + \mu'(\xi_1 + \xi_3 h + \xi_2 g'). \end{cases}$$

Remplaçant λ, μ, λ', μ', $(\lambda g + \mu h)$, $\lambda' g + \mu' h)$, $(\lambda h + \mu g')$ et $(\lambda' h + \mu' g')$ par leurs valeurs en fonction de G, H, G', on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\theta_0}{N} + \theta_3 G + \theta_2 H = {} & n\left(\frac{a_0}{N} + a_3 G + a_2 H\right)\frac{x_0}{N} \\ & + \left(\frac{b_0}{N} + b_3 G + b_2 H\right)x_1 + \left(\frac{c_0}{N} + c_3 G + c_2 H\right)x_2 + \left(\frac{d_0}{N} + d_3 G + d_2 H\right)x_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_1 + \theta_3 H + \theta_2 G' = {} & n\left(a_1 + a_3 H + a_2 G'\right)\frac{x_0}{N} \\ & + \left(b_1 + b_3 H + b_2 G'\right)x_1 + \left(c_1 + c_3 H + c_2 G'\right)x_2 + \left(d_1 + d_3 H + d_2 G'\right)x_3. \end{aligned}$$

De telles relations entre G, H, G′ ne seraient possibles que si G_1, H_1, G_1' étant les parties imaginaires de G, H, G′, on avait

$$H_1^2 - G_1 G_1' = 0.$$

Or, on sait que cette quantité est essentiellement négative; donc les équations précédentes sont des identités et alors :

$$(9)\qquad \begin{cases} \theta_0 = a_0\xi_0 + b_0\xi_1 + c_0\xi_2 + d_0\xi_3, \\ \theta_1 = a_1\xi_0 + b_1\xi_1 + c_1\xi_2 + d_1\xi_3, \\ \theta_2 = a_2\xi_0 + b_2\xi_1 + c_2\xi_2 + d_2\xi_3, \\ \theta_3 = a_3\xi_0 + b_3\xi_1 + c_3\xi_2 + d_3\xi_3. \end{cases}$$

Le nombre des points (u, v) correspondant à un point (U, V) est égal au nombre des solutions *distinctes* des équations précédentes, deux systèmes de valeurs des θ_i étant regardés comme non distincts s'ils diffèrent par des nombres entiers.

Un tel système se ramène par des substitutions unimodulaires à coefficients entiers effectuées simultanément sur les quantités θ_i et ξ_i à la forme canonique

$$(10)\qquad \begin{cases} \Omega_0 = \lambda_0\omega_0, \\ \Omega_1 = \lambda_1\omega_1, \\ \Omega_2 = \lambda_2\omega_2, \\ \Omega_3 = \lambda_3\omega_3, \end{cases}$$

les λ_i étant des entiers dépendant uniquement des a_i, b_i, c_i, d_i et satisfaisant à la relation

$$\lambda_0\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \Delta,$$

les ω_i étant les nouvelles inconnues et les Ω_i pouvant prendre toutes les valeurs entières possibles. Le nombre des points (u, v) correspondant à un point (U, V) est égal au nombre de solutions distinctes des équations (10). Et il est bien évident qu'en donnant à Ω_i les valeurs 0, 1, 2, ..., (mod $\lambda_i - 1$), on obtient ainsi pour les ω_i des solutions distinctes et on les a toutes. Leur nombre est donc égal à mod $(\lambda_0\lambda_1\lambda_2\lambda_3)$, par conséquent égal à Δ, puisque Δ est positif.

4. — Transformation des périodes.

[**1**] Revenons aux conditions nécessaires (2) entre λ, μ, λ', μ' et les périodes de deux systèmes de fonctions abéliennes liées par une transformation de type (n, N); portons les valeurs de λ, μ, λ', μ' tirées des quatre premières équations, dans les

quatre dernières, on peut alors de ces équations tirer g, h, g' en fonction de G, H, G′ ou inversement G, H, G′ en fonction de g, h, g'. On trouve ainsi les relations suivantes :

$$(\rho_1)\quad\left\{\begin{aligned}
g &= \frac{(db)_{01}+(db)_{31}\mathrm{NG}+(db)_{02}\mathrm{G}'+[(db)_{03}-\mathrm{N}(db)_{12}]\mathrm{H}+(db)_{23}\mathrm{N}(\mathrm{H}^2-\mathrm{GG}')}{n[(ab)_{01}+(ab)_{31}\mathrm{NG}+(ab)_{02}\mathrm{G}'+[(ab)_{03}-\mathrm{N}(ab)_{12}]\mathrm{H}+(ab)_{23}\mathrm{N}(\mathrm{H}^2-\mathrm{GG}')]},\\
h &= \frac{(ad)_{01}+(ad)_{31}\mathrm{NG}+(ad)_{02}\mathrm{G}'+[(ad)_{03}-\mathrm{N}(ad)_{12}]\mathrm{H}+(ad)_{23}\mathrm{N}(\mathrm{H}^2-\mathrm{GG}')}{(ab)_{01}+(ab)_{31}\mathrm{NG}+(ab)_{02}\mathrm{G}'+[(ab)_{03}-\mathrm{N}(ab)_{12}]\mathrm{H}+(ab)_{23}\mathrm{N}(\mathrm{H}^2-\mathrm{GG}')},\\
g' &= \frac{(ac)_{01}+(ac)_{31}\mathrm{NG}+(ac)_{02}\mathrm{G}'+[(ac)_{03}-\mathrm{N}(ac)_{12}]\mathrm{H}+(ac)_{23}\mathrm{N}(\mathrm{H}^2-\mathrm{GG}')}{(ab)_{01}+(ab)_{31}\mathrm{NG}+(ab)_{02}\mathrm{G}'+[(ab)_{03}-\mathrm{N}(ab)_{12}]\mathrm{H}+(ab)_{23}\mathrm{N}(\mathrm{H}^2-\mathrm{GG}')},\\
(h^2-gg') &= \frac{(cd)_{01}+(cd)_{31}\mathrm{NG}+(cd)_{02}\mathrm{G}'+[(cd)_{03}-\mathrm{N}(cd)_{12}]\mathrm{H}+(cd)_{23}\mathrm{N}(\mathrm{H}^2-\mathrm{GG}')}{n[(ab)_{01}+(ab)_{31}\mathrm{NG}+(ab)_{02}\mathrm{G}'+[(ab)_{03}-\mathrm{N}(ab)_{12}]\mathrm{H}+(ab)_{23}\mathrm{N}(\mathrm{H}^2-\mathrm{GG}')]}.
\end{aligned}\right.$$

et de même :

$$(\rho_2)\quad\left\{\begin{aligned}
\mathrm{G} &= \frac{(cd)_{02}+(ac)_{02}ng+(db)_{02}ng'+[(bc)_{02}-n(ad)_{02}]h+(ab)_{02}n(h^2-gg')}{\mathrm{N}[(cd)_{23}+(ac)_{23}ng+(db)_{23}g'+[(bc)_{23}-n(ad)_{23}]h+(ab)_{23}n(h^2-gg')]},\\
\mathrm{H} &= \frac{(cd)_{12}+(ac)_{12}ng+(db)_{12}g'+[(bc)_{12}-n(ad)_{12}]h+(ab)_{12}n(h^2-gg')}{(cd)_{23}+(ac)_{23}ng+(db)_{23}g'+[(bc)_{23}-n(ad)_{23}]h+(ab)_{23}n(h_2-gg')},\\
\mathrm{G}' &= \frac{(cd)_{31}+(ac)_{31}ng+(db)_{31}g'+[(bc)_{31}-n(ad)_{31}]h+(ab)_{31}n(h^2-gg')}{(cd)_{23}+(ac)_{23}ng+(db)_{23}g'+[(bc)_{23}-n(ad)_{23}]h+(ab)_{23}n(h^2-gg')},\\
(\mathrm{H}^2-\mathrm{GG}') &= \frac{(cd)_{01}+(ac)_{01}ng+(db)_{01}g'+[(bc)_{01}-n(ad)_{01}]h+(ab)_{01}n(h^2-gg')}{\mathrm{N}[(cd)_{23}+(ac)_{23}ng+(db)_{23}g'+[(bc)_{23}-n(ad)_{23}]h+(ab)_{23}n(h^2-gg')]}.
\end{aligned}\right.$$

[**2**] En étudiant les systèmes linéaires $\Sigma(n, \mathrm{N})$, nous avons adjoint à chacun d'eux un certain système linéaire $\Sigma(\mathrm{N}, n)$, ces deux systèmes adjoints s'écrivant dans le cas d'une transformation de degré $\varkappa^2\mathrm{N}n'$ où $\varkappa$ est premier au plus grand commun diviseur δ de N et n :

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} n'd_3 & \dfrac{c_3}{\delta} & -\dfrac{b_3}{\delta} & -n'a_3 \\ \dfrac{\mathfrak{N}}{\varkappa}d_2 & \mathrm{N}'c_2 & -\mathrm{N}'b_2 & -\dfrac{\mathfrak{N}}{\varkappa}a_2 \\ -\dfrac{\mathfrak{N}}{\varkappa}d_1 & -\mathrm{N}'c_1 & \mathrm{N}'b_1 & \dfrac{\mathfrak{N}}{\varkappa}a_1 \\ -n'd_0 & -\dfrac{c_0}{\delta} & \dfrac{b_0}{\delta} & n'a_0 \end{pmatrix}.$$

On voit aisément que si l'on remplace n par N, g, h, g' par G, H, G′ et inversement G, H, G′ par g, h, g', et en outre chaque lettre a_i, b_i, c_i ou d_i par l'élément qui occupe la même place qu'elle dans le tableau adjoint, les relations (ρ_1) se changent en les relations (ρ_2) ou plus exactement en ces mêmes relations dont tous les coefficients $(mn)_{ij}$ (m et n désignant deux des lettres a, b, c, d et i et j deux des indices o, 1, 2, 3) auraient été multipliés par $N'n'$. Si $\varkappa$ et δ ont un plus grand commun diviseur $\mathcal{D}$, la conclusion est la même, le multiplicateur $N'n'$ devant toutefois être remplacé par $\mathcal{D}^2 N'n'$. On voit ainsi comment cette considération du système adjoint permet le passage facile d'un des deux systèmes de formules (ρ_1) et (ρ_2) à l'autre. Considérons la transformation abélienne dont les seize entiers caractéristiques sont ceux du système linéaire $\Sigma(N, n)$ précédent, nous l'avons appelée la *transformation adjointe* de la première. Elle fait passer des fonctions abéliennes du tableau T_N à celles du tableau T_n. Nous parvenons ainsi au résultat suivant :

S'il existe entre les points de deux surfaces hyperelliptiques générales (s) *et* (S) *une correspondance ponctuelle algébrique telle qu'à un point de la première corresponde un seul point de la seconde, la propriété est réciproque et on peut établir entre les deux surfaces une correspondance ponctuelle algébrique faisant correspondre à un point de* (S) *et ceux de* (s).

Si la première correspondance est du type $(1, \varkappa^2 N'n')$, la seconde est du type $(1, \varkappa^2 N'^3 n'^3)$ si $\varkappa$ et δ sont premiers entre eux, et du type $(1, \varkappa^2 \mathcal{D}^4 N'^3 n'^3)$ si $\varkappa$ et δ ont comme plus grand commun diviseur $\mathcal{D}$. Considérons en particulier le cas de $n = N$, N' et n' sont égaux à 1, et on voit que :

S'il existe entre deux surfaces hyperelliptiques générales (s) *et* (S) *relatives à deux tableaux de périodes* T_n *et* T'_n, *de même indice* n, *une correspondance ponctuelle du type* $(1, k^2)$, k *étant premier à* n, *réciproquement, il existe aussi une correspondance du même type entre les points de* (S) *et ceux de* (s).

Ces théorèmes ne sont que l'extension aux surfaces hyperelliptiques relatives aux tableaux de périodes T_n de théorèmes connus sur ces mêmes surfaces relatives au tableau T_1 et se présentent comme une application immédiate des propriétés arithmétiques des systèmes linéaires $\Sigma(n, N)$.

[3] L'identité des coefficients qui figurent dans les relations (ρ_1) et (ρ_2) de la transformation des périodes et de ceux des formules (R_1) et (R_2) du premier chapitre, montre qu'entre ces deux systèmes de relations un rapprochement s'impose.

Rappelons que les substitutions (S) liées aux systèmes linéaires $\Sigma(n, N)$ changent le complexe $\Gamma_n : p_{03} + np_{12} = 0$ en $\Gamma_N : P_{03} + NP_{12} = 0$. Posons :

$$(11) \qquad ng = \frac{p_{02}}{p_{23}}, \qquad h = \frac{p_{12}}{p_{23}}, \qquad g' = \frac{p_{31}}{p_{23}}, \qquad n(h^2 - gg') = \frac{p_{01}}{p_{23}}$$

et

$$(12) \qquad NG = \frac{P_{02}}{P_{23}}, \qquad H = \frac{P_{12}}{P_{23}}, \qquad G' = \frac{P_{31}}{P_{23}}, \qquad N(H^2 - GG') = \frac{P_{01}}{P_{23}},$$

ce qui revient à faire correspondre aux périodes de T_n une droite d_n du complexe linéaire $p_{03} + np_{12} = 0$, et aux périodes de T_N une droite d_N de $P_{03} + NP_{12} = 0$.

A une transformation abélienne (T), faisant passer des fonctions abéliennes relatives au tableau T_n à celles qui admettent les périodes du tableau T_N, est associée une substitution (S) à coefficients entiers, et il est bien évident que (S) change la droite d_n en d_N ; inversement, à toute substitution (S) à coefficients entiers changeant Γ_n en Γ_N et d_n en d_N, correspond une transformation abélienne (T) faisant passer des périodes de T_n à celles de T_N. La transformation adjointe à T fait passer des périodes de T_N à celles de T_n, et la substitution adjointe à (S) change d_N en d_n. On a ainsi une interprétation géométrique très simple de la transformation des fonctions abéliennes. En remarquant que d_n est la droite qui joint les deux points $\left(\frac{1}{n}, 0, h, g\right)$ et $(0, 1, g', h)$, on peut encore énoncer le théorème suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour que deux systèmes de fonctions abéliennes relatifs aux tableaux de périodes T_n et T_N soient liés par une transformation abélienne de degré Δ, est qu'il existe une substitution (S) à coefficients entiers changeant Γ_n en Γ_N (1) et la droite d_n qui joint les deux points $\left(\frac{1}{n}, 0, h, g\right)$, $(0, 1, g', h)$ en la droite d_N qui passe par les deux points $\left(\frac{1}{N}, 0, H, G\right)$, $(0, 1, G', H)$.

La question de reconnaître si l'on peut passer d'un système de fonctions abéliennes à un autre par une transformation abélienne de degré quelconque, se trouve ainsi ramenée à de simples problèmes de géométrie réglée.

5. — Sur la réduction des transformations abéliennes de type (n, n) et d'ordre premier.

Dans les développements précédents, nous avons vu que, si les fonctions abéliennes spéciales qui admettent les couples de périodes d'un tableau T_n d'indice quelconque, présentent de grandes analogies avec les fonctions abéliennes ordinairement considérées, elles se distinguent cependant de ces dernières par certaines propriétés des transformations abéliennes qui leur sont liées et par la nature des correspondances ponctuelles qu'il est possible d'établir entre les surfaces hyperelliptiques associées à ces fonctions. Leur caractère particulier se révèle principalement lorsque, laissant de côté les problèmes de théorie des nombres qui se présentent dans l'étude de la transformation et qui sont des généralisations de ceux qui s'étaient posés à Hermite dans son Mémoire de 1855, on porte plus spécialement son attention sur les fonctions abéliennes elles-mêmes et les modules des courbes hyperelliptiques qui s'y rattachent.

---

(1) Nous verrons plus loin que cette condition peut être supprimée, en vertu de l'hypothèse faite sur les périodes des fonctions abéliennes considérées de ne vérifier aucune relation singulière.

[**1**] Considérons un système de fonctions abéliennes $f(u, v)$ aux périodes

$$T_n \begin{cases} \dfrac{1}{n} & 0 & g & h, \\ 0 & 1 & h & g'. \end{cases}$$

Ces fonctions ne sont que des fonctions abéliennes particulières admettant les couples de périodes normales : $(1, 0)$, $(0, 1)$, (g, h) et (h, g'). Si $\varphi(x)$ est le polynôme du cinquième ou du sixième degré leur donnant naissance, nous appellerons encore *modules* du système de fonctions abéliennes $f(u, v)$ relatives au tableau T_n, ceux des fonctions abéliennes générales aux périodes normales : $(1, 0)$, $(0, 1)$, (g, h), (h, g'), c'est-à-dire les trois invariants absolus de la forme $\varphi(x, y)$ obtenue en rendant homogène le polynôme $\varphi(x)$ ou, si l'on veut, les trois modules de la courbe hyperelliptique :

$$t^2 = \varphi(x).$$

Cela posé, soit un second système de fonctions abéliennes $F(U, V)$ aux périodes :

$$T_n' \begin{cases} \dfrac{1}{n} & 0 & G & H, \\ 0 & 1 & H & G'. \end{cases}$$

Considérons l'ensemble des transformations abéliennes de type (n, n); elles font passer d'un tableau de périodes T_n quelconque à un tableau T'_n de même indice n. Distinguons parmi elles, celles qui sont d'un ordre k déterminé, k étant supposé premier et non diviseur de n. L'étude des systèmes linéaires $\Sigma(n, n)$ et leur réduction par les mêmes systèmes d'ordre égal à l'unité, nous conduit à ne regarder comme distinctes deux transformations abéliennes que si elles ne sont pas équivalentes dans une transformation d'ordre 1, c'est-à-dire si l'une d'elles n'est pas le produit de l'autre par une transformation d'ordre égal à 1. On étend ainsi aux transformations abéliennes les théorèmes relatifs à la réduction des systèmes linéaires (chap. II, § 2) et on est conduit à énoncer, relativement au nombre des transformations distinctes d'ordre premier, une proposition analogue à celle qu'Hermite a établie pour les fonctions abéliennes ordinaires liées aux tableaux d'indice 1 :

Le nombre des transformations abéliennes de type (n, n) distinctes, d'ordre k premier et non diviseur de n, est égal à

$$1 + k + k^2 + k^3.$$

Toutes ces transformations sont équivalentes aux suivantes :

$$\begin{vmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ ni & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ ni' & 0 & -i & k \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ ni & i' & k & 0 \\ ni'' & i & 0 & k \end{vmatrix}.$$

Supposons que n soit égal à 1, le théorème précédent se réduit alors à la proposition même d'Hermite. Dans le cas de ces fonctions abéliennes relatives aux tableaux de périodes d'indice 1, on sait que les transformations d'Hermite d'ordre 1 n'altèrent pas les modules d'un système de fonctions abéliennes et qu'ainsi deux transformations équivalentes effectuées sur un même système de fonctions conduisent à deux autres systèmes ayant les mêmes modules. L'intérêt du théorème précédent est considérable; étant donné un système de périodes normales (g, h, g'), il montre que les transformations d'ordre k premier ne conduisent qu'à un nombre limité de systèmes distincts dont il est aisé d'écrire les périodes en fonction de g, h, g' en utilisant les transformations réduites. On pourrait se proposer de rechercher les relations algébriques qui existent entre un système de modules déterminé et les $(1 + k + k^2 + k^3)$ systèmes de modules qu'on en déduit par les transformations abéliennes d'ordre k; ce serait là un ordre de considérations fort intéressantes, mais extrêmement difficiles. Nous n'écrirons pas les transformations réduites sur les variables u et v et les périodes g, h, g'; elles ont d'ailleurs été données par Hermite et on les trouvera dans son Mémoire sur la transformation.

Supposons maintenant que n soit quelconque et cherchons quel intérêt présente la réduction des transformations de type (n, n). Revenons à l'énoncé même du problème de la transformation dans le cas de $n = N$; nous avons considéré une surface hyperelliptique (s) dont les coordonnées rectilignes sont trois fonctions abéliennes $f(u, v)$ relatives au tableau T_n et formant un système fondamental, c'est-à-dire tel qu'à un point de (s) corresponde un couple de valeurs de u et v et un seul, aux périodes de T_n près; nous avons pris une seconde surface hyperelliptique (S) dont les coordonnées sont des fonctions abéliennes $F(U, V)$ jouissant des mêmes propriétés relativement au tableau T'_n et nous avons cherché les correspondances algébriques qu'il est possible d'établir entre les points de (s) et ceux de (S), de telle manière qu'à un point (u, v) de (s) corresponde un et un seul point de (S). Considérons maintenant la courbe hyperelliptique (c) liée au premier système de fonctions $f(u, v)$ et la courbe hyperelliptique (C) liée au second système de fonctions $F(U, V)$; à un point (u, v) de (s) correspondent les n couples de points

$$(u, v), \quad \left(u + \frac{1}{n}, v\right), \quad \left(u + \frac{2}{n}, v\right), \quad \ldots\ldots, \quad \left(u + \frac{n-1}{n}, v\right)$$

de la courbe (c); un tel groupe de n couples sera dit former un ensemble (e_n); de la même manière, à un point (U, V) de (S), correspond l'ensemble (E_n) des n couples suivants de la courbe hyperelliptique (C) :

$$(U, V), \quad \left(U + \frac{1}{n}, V\right), \quad \left(U + \frac{2}{n} V\right), \quad \ldots\ldots, \quad \left(U + \frac{n-1}{n}, V\right).$$

Les transformations de type (n, n) réalisent des correspondances entre les couples de points des deux courbes hyperelliptiques (c) et (C) telles qu'à un ensemble e_n de la première corresponde un seul ensemble (E_n) de la seconde. Les transformations du premier degré font également correspondre à un ensemble (E_n) un seul ensemble (e_n); elles réalisent donc des correspondances $(1, 1)$ entre les ensembles (e_n) de n couples de points de deux courbes hyperelliptiques; mais il est bien clair que ceci n'entraîne nullement qu'il y ait correspondance $(1, 1)$ entre les couples de (c) et (C) et que les modules de ces deux courbes soient les mêmes.

Ceci montre que nous sommes ainsi conduits à envisager à un point de vue nouveau les correspondances entre les couples de points des courbes hyperelliptiques. Il serait intéressant de chercher quelles sont les transformations de type (n, n) qui entraînent une correspondance $(1, 1)$ entre les couples de (c) et de (C), car on est certain que ces transformations conduisent d'un système de fonctions abéliennes à un autre de mêmes modules. On réduira ensuite les transformations d'un ordre déterminé dans ces transformations spéciales de degré 1; en particulier, on réduira les transformations du premier degré; il pourra arriver que celles-ci ne conservent pas les modules du système de fonctions abéliennes auxquelles on les applique et on trouvera aussi qu'il peut exister des correspondances ponctuelles $(1, 1)$ entre deux surfaces hyperelliptiques sans que ces deux surfaces aient les mêmes modules; c'est ce qui s'était déjà présenté à M. Humbert dans l'étude des surfaces hyperelliptiques singulières.

Nous devons nous borner à ces rapides indications, le développement des considérations précédentes nous entraînerait fort loin. Elles ne sont cependant pas sans intérêt, même au point de vue arithmétique; on est conduit à distinguer les transformations abéliennes (a_i, b_i, c_i, d_i) de type (n, n), dans lesquelles le coefficient d_0 est congru à zéro suivant le module n; elles forment un groupe et on réduit, dans ces transformations particulières de degré 1, les transformations d'un ordre quelconque k. D'ailleurs, dans tout ce qui suit, nous nous occuperons surtout des fonctions abéliennes relatives au tableau d'indice égal à l'unité; nous reviendrons plus tard sur le cas général que nous ne pourrions traiter ici sans allonger par trop ce Mémoire.

CHAPITRE III.

Sur les fonctions abéliennes singulières et les relations singulières de genre n.

Nous étudions dans ce chapitre les fonctions abéliennes singulières admettant un tableau de périodes T_n et les relations singulières auxquelles satisfont les périodes d'un tel système de fonctions. Constamment guidé par l'interprétation géométrique de ces fonctions et de ces relations, nous effectuons la réduction des relations singulières de genre donné; problème qui comprend comme cas particulier celui de la réduction des relations singulières telles que M. Humbert les a considérées. Plus généralement, nous effectuons la réduction de certains couples δ de droites conjuguées et à coordonnées rationnelles par rapport à un complexe linéaire d'invariant n; c'est sur cette réduction que nous ferons reposer celle des formes abéliennes que nous étudierons dans la troisième Partie. Une application arithmétique des résultats obtenus à la représentation d'un résidu quadratique de $4n$ par la forme

$$x_0^2 + nx_1^2 + nx_2^2 - nx_3^2 - nx_4^2$$

termine ce chapitre où nous avons laissé de côté la plupart des questions qui concernent plus spécialement la théorie des fonctions.

I. — Les relations singulières de genre n.

[**1**] Considérons les fonctions abéliennes, à deux variables u et v, admettant les périodes du tableau

$$(1) \qquad T_n \left\{ \begin{array}{lcccc} u: & \dfrac{1}{n} & 0 & g & h, \\ v: & 0 & 1 & h & g'. \end{array} \right.$$

Nous dirons qu'elles vérifient une *relation singulière* de genre n si elles sont liées par la relation

$$(2) \qquad Ang + Bh + Cg' + Dn(h^2 - gg') + E = 0,$$

A, B, C, D et E étant des entiers que nous pourrons toujours supposer premiers entre eux dans l'ensemble. Les fonctions abéliennes spéciales relatives à T_n seront dites *singulières*, s'il existe entre leurs périodes une telle relation. Ces définitions coïncident bien quand n est égal à 1 avec celles qu'on a l'habitude de donner.

Nous allons montrer que la quantité

$$\Delta = B^2 - 4nAC - 4nDE$$

jouit de propriétés remarquables, analogues à celles de l'*invariant* d'une relation singulière dans le cas de $n=1$, et qui nous conduiront à la désigner également sous le nom d'*invariant* de la relation (2).

Faisons subir aux périodes de T_n une transformation abélienne quelconque de type (n, N) conduisant aux périodes du tableau T_N suivant :

$$T_N \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{N} & 0 & G & H, \\ 0 & 1 & H & G'. \end{matrix} \right.$$

Soient (a_i, b_i, c_i, d_i) les seize entiers caractéristiques de cette transformation, rappelons qu'ils sont liés par les deux systèmes d'équations suivantes, qui sont équivalents :

$$(\mathrm{I}) \left\{ \begin{aligned} & n(ad)_{01} + (bc)_{01} = 0, \\ & n(ad)_{31} + (bc)_{31} = 0, \\ & n(ad)_{02} + (bc)_{02} = 0, \\ & n(ad)_{23} + (bc)_{23} = 0, \\ & n(ad)_{03} + (bc)_{03} = N[n(ad)_{12} + (bc)_{12}] = \mathfrak{N}. \end{aligned} \right. \qquad (\mathrm{II}) \left\{ \begin{aligned} & (ac)_{03} + N(ac)_{12} = 0, \\ & (db)_{03} + N(db)_{12} = 0, \\ & (ab)_{03} + N(ab)_{12} = 0, \\ & (cd)_{03} + N(cd)_{12} = 0. \\ & (bc)_{03} + N(bc)_{12} = n[(ad)_{03} + N(ad)_{12}] = \mathfrak{N}. \end{aligned} \right.$$

Les périodes G, H, G′ s'expriment en fonctions de g, h, g' par les formules (ρ_2) du chapitre II, et inversement les formules (ρ_1) donnent g, h, g' en fonction de G, H, G′. Portons ces valeurs de g, h, g' et $h^2 - gg'$ tirées de (ρ_1) dans la relation singulière (2); elle se change identiquement en l'équation suivante :

$$A_1NG + B_1H + C_1G' + D_1N(H^2 - GG') + E_1 = 0 \tag{3}$$

en posant

$$(4) \left\{ \begin{aligned} A_1 &= A(db)_{31} + B(ad)_{31} + C(ac)_{31} + D(cd)_{31} + E(ab)_{31}, \\ B_1 &= 2A(db)_{03} + B\left[2(ad)_{03} - \frac{\mathfrak{N}}{n}\right] + 2C(ac)_{03} + 2D(cd)_{03} + 2E(ab)_{03}, \\ C_1 &= A(db)_{02} + B(ad)_{02} + C(ac)_{02} + D(cd)_{02} + E(ab)_{02}, \\ D_1 &= A(db)_{23} + B(ad)_{23} + C(ac)_{23} + D(cd)_{23} + E(ab)_{23}, \\ E_1 &= A(db)_{01} + B(ad)_{01} + C(ac)_{01} + D(cd)_{01} + E(ab)_{01}. \end{aligned} \right.$$

A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 sont entiers et l'équation (3) est une relation singulière de genre N. Donc :

Quand on opère une transformation sur les périodes d'un système de fonctions abéliennes, si les fonctions initiales sont singulières, les fonctions finales le sont également.

[**2**] Les équations (4) jointes aux relations (I) et (II) de la transformation permettent de vérifier l'identité suivante :

$$\text{(5)} \qquad B_1^2 - 4NA_1C_1 - 4ND_1E_1 = \frac{\mathfrak{N}^2}{n^2}(B^2 - 4nAC - 4nDE).$$

Par exemple, le coefficient de B^2 peut s'écrire

$$[(ad)_{03} - N(ad)_{12}]^2 - 4N[(ad)_{31}(ad)_{02} + (ad)_{23}(ad)_{01}].$$

Tenant compte de l'identité

$$(ad)_{01}(ad)_{23} + (ad)_{02}(ad)_{31} + (ad)_{03}(ad)_{12} \equiv 0,$$

on voit que ce coefficient est égal à

$$[(ad)_{03} + N(ad)_{12}]^2 = \frac{\mathfrak{N}^2}{n^2}.$$

Ce résultat analogue à celui qui concerne le cas de $n = N = 1$ et qui le renferme comme cas particulier, entraîne la conséquence suivante : Supposons que n soit égal à N et que $\mathfrak{N}$ soit égal à $\pm n$, c'est-à-dire que l'ordre de la transformation soit égal à ± 1, nous pouvons supposer les entiers A, B, C, D et E sans diviseur commun, on verra aisément, comme dans le cas de $n = 1$, que les entiers A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 sont aussi sans diviseur commun et que l'on a identiquement :

$$\text{(6)} \qquad B_1^2 - 4nA_1C_1 - 4nD_1E_1 = B^2 - 4nAC - 4nDE.$$

Nous donnerons au nombre $B^2 - 4nAC - 4nDE$ le nom d'*invariant* de la relation singulière (2); il jouit de la propriété suivante :

Une transformation abélienne quelconque de type (n, n) et de degré 1, effectué sur les périodes d'un tableau T_n, change une relation singulière de genre n, dont les coefficients sont premiers entre eux dans l'ensemble, en une relation singulière de même genre, jouissant de la même propriété et ayant le même invariant.

C'est l'extension aux tableaux de périodes d'indice quelconque du théorème connu sur les tableaux d'indice 1 qu'a considérés M. Humbert.

[**3**] Les coefficients B et B_1 de h dans deux relations singulières de genre n déduites l'une de l'autre par une transformation abélienne de type (n, n) d'ordre $\varepsilon = \pm 1$, satisfont, comme il est bien facile de le vérifier sur les équations (4), à la congruence

$$\text{(7)} \qquad B_1 \equiv \varepsilon B \pmod{2n}.$$

Nous dirons que deux tels nombres vérifiant l'une des deux congruences où $\varepsilon = \pm 1$ sont *congrus au signe près* suivant le module $2n$. Cette remarque conduit à définir le *type d'une relation singulière*. On sait que l'invariant d'une relation singulière de genre 1 est soit un nombre pair de la forme $4m$, soit un nombre impair de la forme $4m+1$; il y a deux types d'invariants et une transformation d'Hermite de degré 1 ne change pas le type d'une relation singulière. Si n est quelconque :

L'invariant d'une relation singulière de genre n est résidu quadratique de $4n$.

L'invariant Δ de la relation singulière (2) s'écrit :

$$\Delta = B^2 - 4n(AC + DE);$$

B est congru suivant le module $2n$ à un nombre et un seul $\pm k$, où k désigne l'un des nombres de la suite : $0, 1, 2, \ldots, (n-1), n$; Δ est alors congru à k^2 suivant le module $4n$. Nous dirons que la relation (2) est de type (k); il y a, par conséquent, $(n+1)$ types d'invariants pour les relations singulières de genre n.

Deux relations singulières de genre n premier et de même invariant sont de même type; mais si n n'est pas premier, l'égalité des invariants n'entraîne pas nécessairement l'identité des types; ce qui tient, dans ce cas, à ce que les carrés de deux nombres différents k_0 et k_1 de la suite : $0, 1, 2, \ldots, n$ peuvent être congrus l'un à l'autre suivant le module $4n$. Il résulte de résultats antérieurement établis et des définitions précédentes que :

Une transformation abélienne du premier degré effectuée sur les périodes d'un tableau T_n change une relation singulière de genre n entre ces périodes en une autre relation singulière de même genre, de même invariant et de même type.

[**4**] Il est à peu près évident que :

S'il existe une relation singulière d'un genre quelconque entre les périodes normales g, h, g' d'un système de fonctions abéliennes, il en existe de tous les genres.

Cette remarque n'est cependant pas sans importance; elle montre bien l'intérêt que présente l'introduction des relations singulières de genre n; à une relation singulière de genre 1, on associe ainsi une infinité d'autres relations auxquelles se rattachent, par exemple, des groupes de transformations abéliennes plus généraux que ceux que l'on rencontre dans l'étude des seules relations de genre 1, et on conçoit que la considération des relations de genre quelconque puisse permettre la généralisation d'un grand nombre de problèmes présentés par l'étude des fonctions abéliennes singulières, telle qu'on la traite habituellement. On trouvera, dans ce travail, peu d'applications de ce procédé de généralisation; nous l'avons cependant appliqué à la recherche d'une classe intéressante de groupes hyperabéliens dont les coefficients sont des nombres algébriques appartenant à certains *modules* et à l'étude des classes de formes quadratiques quaternaires que nous avons rencontrées dans l'étude des systèmes linéaires $\Sigma(n, n)$. Ces questions feront l'objet d'un autre travail.

2. — Interprétation géométrique des relations singulières.

[**1**] Rappelons d'abord que, dans le chapitre II, nous avons été conduits à faire correspondre à chaque tableau de périodes

$$T_n \left\{ \begin{matrix} \dfrac{1}{n} & 0 & g & h, \\ 0 & 1 & h & g' \end{matrix} \right.$$

d'un système de fonctions, la droite d_n, dont les coordonnées pluckériennes p_{01}, p_{23}, p_{02}, p_{31}, p_{03}, p_{12}, définies comme nous l'avons indiqué dans le chapitre I, sont données par les relations

$$(8) \qquad p_{01} = n(h^2 - gg'), \quad p_{23} = 1, \quad p_{02} = ng, \quad p_{31} = g', \quad p_{03} = -nh, \quad p_{12} = h,$$

qui vérifient bien l'identité

$$p_{01}p_{23} + p_{02}p_{31} + p_{03}p_{12} = 0.$$

Cette droite d appartient au complexe linéaire Γ_n, ayant pour équation

$$p_{03} + np_{12} = 0.$$

Quelle est la signification géométrique de l'hypothèse que nous avons faite au début de l'étude des transformations abéliennes dans le chapitre II que nous pouvons énoncer ainsi : il n'existe aucune relation singulière de genre n entre les périodes du système de fonctions abéliennes considéré?

La réponse à cette question découle de la proposition suivante :

La condition nécessaire et suffisante pour que les périodes normales g, h, g' d'un système de fonctions abéliennes soient liées par une relation singulière de genre n est que la droite (d_n) appartienne à un complexe linéaire à coefficients entiers, autre que Γ_n.

1° La condition est nécessaire.

En effet, s'il existe une relation singulière de genre n :

$$(2) \qquad Ang + Bh + Cg' + Dn(h^2 - gg') + E = 0$$

entre g, h, g' ; d'après les relations (8), la droite d_n appartient au complexe

$$Ap_{02} + Bp_{12} + Cp_{31} + Dp_{01} + Ep_{23} = 0$$

qui est bien à coefficients entiers et qui ne coïncide certainement pas avec Γ_n, puisque son équation ne contient pas de terme en p_{03}.

2° La condition est suffisante.

Supposons que d_n soit une droite du complexe

$$A_{01}p_{01} + A_{23}p_{23} + A_{02}p_{02} + A_{31}p_{31} + A_{03}p_{03} + A_{12}p_{12} = 0.$$

Remplaçons les p_{ik} par leurs expressions en fonction de g, h, g' tirées de (8), on trouve l'équation

$$A_{01}n(h^2 - gg') + A_{23} + A_{02}ng + A_{31}g' + (A_{12} - nA_{03})h = 0$$

qui est bien une relation singulière de genre n,

Ce théorème étant établi, on voit maintenant comment se présentait le problème de la transformation des fonctions abéliennes non singulières. Considérons d'une part les fonctions abéliennes relatives au tableau T_n, d'autre part les fonctions relatives à un nouveau tableau :

$$T_N \left\{ \begin{array}{cccc} \frac{1}{N} & 0 & G & H, \\ 0 & 1 & H & G'. \end{array} \right.$$

A ces deux systèmes de fonctions correspondent respectivement la droite d_n et la droite d_N définie par les relations

$$(9)\quad P_{01} = N(H^2 - GG'),\quad P_{23} = 1,\quad P_{02} = NG,\quad P_{31} = G',\quad P_{03} = -NH,\quad P_{12} = H,$$

et le problème de la transformation se ramenait au suivant :

Trouver toutes les substitutions homographiques (S) :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = a_0X_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3, \\ x_1 = b_0X_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3, \\ x_2 = c_0X_0 + c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3, \\ x_3 = d_0X_0 + d_1X_1 + d_2X_2 + d_3X_3 \end{array} \right.$$

à coefficients entiers changeant la droite d_n en la droite D_n.

Convenons d'appeler complexe linéaire *arithmétique* un complexe à coefficients entiers. L'hypothèse que nous avions faite et qu'Hermite avait implicitement supposée en étudiant la transformation dans le cas de $n = 1$, peut s'interpréter géométriquement de la manière suivante : *la droite d_n n'appartient à aucun complexe linéaire arithmétique autre que* Γ_n. Or, nous savons (chap. I) que tout complexe linéaire arithmétique se change par une substitution homographique à coefficients entiers en un autre complexe arithmétique; par conséquent, si (S) change d_n en d_N, cette dernière droite appartient à un complexe arithmétique et à un seul, puisque d_n ne fait partie que d'un seul complexe à coefficients entiers; ce complexe unique auquel appartient d_N ne peut dès lors être que Γ_N, et les substitutions (S) changent nécessairement Γ_n en Γ_N. Supposons au contraire que d_n appartienne à un complexe arithmétique autre que Γ_n, s'il existe une substitution homographique quelconque à coefficients entiers changeant d_n en d_N, nécessairement d_N appartiendra à un complexe arithmétique au moins autre que Γ_N. Ces résultats entraînent les suivants :

Si l'on fait subir une transformation aux périodes d'un système de fonctions abéliennes, les fonctions finales sont ordinaires ou singulières en même temps que les fonctions initiales.

Cette propriété bien évidente géométriquement entraîne aussi l'équivalence des relations (I) et (II) entre les entiers caractéristiques d'une transformation.

[**2**] Pour compléter ce que nous venons de dire, nous reviendrons maintenant sur les transformations abéliennes étudiées dans le chapitre II. Nous avons vu que les transformations relatives aux tableaux T_n conduisent à des systèmes linéaires de seize lettres plus généraux que ceux d'Hermite et à une classe de formes quadratiques à quatre variables plus générales que celles qu'Hermite avait rencontrées dans son Mémoire de 1855, et, qu'au point de vue arithmétique, tout au moins, l'introduction de tableaux T_n permet une généralisation importante de tous les problèmes qu'avait présentés le cas de $n = 1$. Rendons-nous compte géométriquement du degré de généralisation auquel nous sommes conduits. La théorie des transformations abéliennes, telle qu'on la traite ordinairement, revient à associer à chaque système de périodes g, h, g' la droite d_1, dont les coordonnées pluckériennes sont :

$$p_{01} = (h^2 - gg'),\quad p_{23} = 1,\quad p_{02} = ng,\quad p_{31} = g',\quad p_{03} = -h,\quad p_{12} = h.$$

A chaque système de fonctions abéliennes correspond aussi une seule droite, et le problème de la transformation conduit à étudier l'équivalence arithmétique des deux droites associées à deux systèmes de fonctions donnés. L'introduction des tableaux T_n conduit, au contraire, à associer à chaque système de périodes normales une infinité de droites d_n et à étudier les correspondances arithmétiques entre deux quelconques de ces droites prises parmi celles qui correspondent à deux systèmes de fonctions donnés. Tandis que, comme nous le verrons dans la deuxième partie, la transformation sous sa forme ordinaire conduit à des groupes hyperabéliens qui auront une représentation géométrique très simple dans les substitutions qui laissent invariable un couple de droites conjuguées par rapport au complexe Γ_1 : $p_{03} + p_{12} = 0$, le problème généralisé conduira à des groupes plus généraux liés aux complexes Γ_n : $p_{03} + np_{12} = 0$. Et de même que le premier problème mène à l'étude des formes quaternaires que nous appellerons formes appartenant au complexe Γ_1, le second conduit à la réduction et à l'équivalence des formes plus générales appartenant à un complexe Γ_n, où n est un entier quelconque. Nous terminerons ici cette digression, dans laquelle nous nous proposions simplement de faire entrevoir des résultats que nous développerons prochainement dans un autre travail et dont l'aperçu géométrique précédent rend très bien compte.

[3] Considérons les systèmes de fonctions abéliennes singulières dont les périodes sont liées par la relation singulière de genre n :

$$\text{(2)} \qquad \mathrm{A}ng + \mathrm{B}h + \mathrm{C}g' + \mathrm{D}n(h^2 - gg') + \mathrm{E} = 0.$$

Leurs droites associées d_n appartiennent toutes, comme nous l'avons vu, aux deux complexes arithmétiques suivants :

$$\text{(10)} \qquad \begin{gathered} p_{03} + np_{12} = 0, \\ \mathrm{D}p_{01} + \mathrm{E}p_{23} + \mathrm{A}p_{02} + \mathrm{C}p_{31} + \mathrm{B}p_{12} = 0 \end{gathered}$$

que nous nommerons Γ_n et $\mathrm{C}_{0,1}$; les droites d_n appartiennent également à tous les complexes arithmétiques :

$$\text{(11)} \qquad k(\mathrm{D}p_{01} + \mathrm{E}p_{23} + \mathrm{A}p_{02} + \mathrm{C}p_{31} + \mathrm{B}p_{12}) + l(p_{03} + np_{12}) = 0;$$

l et k sont deux entiers quelconques. Le complexe d'équation (11) sera désigné par la notation $\mathrm{C}_{l,k}$, le complexe Γ_n étant identique à $\mathrm{C}_{1,0}$.

Cherchons les invariants de ces complexes; on trouve que l'invariant de $\mathrm{C}_{l,k}$ est $\mathrm{I}(l, k)$ donné par l'équation suivante :

$$\text{(12)} \qquad \mathrm{I}(l, k) = k^2(\mathrm{AC} + \mathrm{DE}) + l(k\mathrm{B} + ln)$$

qu'on peut écrire

$$\text{(13)} \qquad 4n\mathrm{I}(l, k) = (2nl + \mathrm{B}k)^2 - \Delta k^2,$$

Δ désignant, comme toujours, l'invariant $\mathrm{B}^2 - 4n\mathrm{AC} - 4n\mathrm{DE}$ de la relation singulière (2).

En particulier, les indices l et k des complexes d'invariant n sont donnés par les solutions de l'équation de Pell :

$$\text{(14)} \qquad (2nl + \mathrm{B}k)^2 - \Delta k^2 = 4n^2$$

qui aura toujours des solutions différentes de ($l = 1$, $k = 0$) si Δ est positif et non carré parfait.

Les droites d_n associées aux systèmes de périodes satisfaisant à la relation (2) sont des droites de la congruence linéaire définie par les complexes Γ_n et $\mathrm{C}_{0,1}$. On sait qu'elles rencontrent toutes deux droites fixes, les directrices de la congruence respectivement conjuguées par rapport à tous les complexes du système à deux termes définis par Γ_n et $\mathrm{C}_{0,1}$. Cherchons ces deux droites, on trouve que leurs coordonnées pluckériennes p_{ik} sont définies par les équations (15), où ε désigne ± 1 :

$$\text{(15)} \qquad p_{01} = \mathrm{E}, \; p_{23} = \mathrm{D}, \; p_{02} = \mathrm{C}, \; p_{31} = \mathrm{A}, \; p_{03} = \frac{\mathrm{B} + \varepsilon\sqrt{\Delta}}{2}, \; p_{12} = -\frac{\mathrm{B} - \varepsilon\sqrt{\Delta}}{2n};$$

on peut remarquer que

$$p_{03} - np_{12} = \mathrm{B}, \qquad p_{03} + np_{12} = \varepsilon\sqrt{\Delta};$$

p_{01}, p_{23}, p_{02}, p_{31} et $p_{03} - np_{12}$ étant donnés, la quantité $p_{03} + np_{12}$ se trouve déterminée par la relation identique

$$p_{01}p_{23} + p_{02}p_{31} + p_{03}p_{12} = 0.$$

Nous appellerons couple δ_n un tel système de deux droites conjuguées par rapport à Γ_n et dont les coordonnées p_{01}, p_{23}, p_{02}, p_{31} et $p_{03} - np_{12}$ sont cinq nombres entiers qu'on peut toujours supposer premiers entre eux dans l'ensemble.

La considération de ces droites δ_n, que l'on peut appeler droites à coordonnées rationnelles par rapport au complexe Γ_n pour rappeler leur caractère arithmétique, est très importante; c'est sur leur équivalence que se trouve basée l'étude des formes quadratiques de la troisième partie et, de plus, elles fournissent une interprétation géométrique qui n'est pas sans intérêt des groupes hyperabéliens liés aux fonctions abéliennes.

Si l'on considère l'une de ces droites δ_n comme l'axe d'un complexe spécial et si l'on écrit que l'*invariant simultané* de ce complexe et de Γ_n reste invariant dans une transformation d'ordre 1, on retrouve le théorème de l'invariance de Δ dans ces transformations, Δ sera également appelé *invariant du couple* δ_n. Au point de vue arithmétique, ces droites se partagent en trois catégories :

1° Δ *est positif et non carré parfait.* — Ce cas comprend celui des couples δ_n liés aux relations singulières entre les périodes d'un système de fonctions abéliennes, l'invariant d'une telle relation de genre n quelconque étant, comme dans le cas $n = 1$, un nombre positif. Il comprend également celui des couples δ_n liés aux relations singulières entre les périodes des systèmes de fonctions quadruplement périodiques singulières, fonctions étudiées par M. Humbert dans le *Journal de Mathématiques* (5e série, t. VII, p. 97).

2° Δ *est carré parfait.* — Toutes les coordonnées pluckériennes de δ_n sont rationnelles; ce cas correspond pour les fonctions abéliennes au *cas elliptique*.

3° Δ *est négatif.* — Ce cas ne correspond à rien, ni pour les fonctions abéliennes, ni pour les fonctions quadruplement périodiques de M. Humbert.

Si l'on se reporte à l'équation de Pell (14) donnant les complexes arithmétiques d'invariant n auxquels appartiennent les droites de la congruence linéaire dont les directrices sont les deux droites δ_n, on voit que les trois cas précédents conduisent à des conclusions très différentes, qu'il est bien aisé de formuler, relativement à l'existence de ces complexes. Nous allons maintenant préciser toutes ces représentations géométriques à l'aide d'une transformation de contact analogue à celle qu'avait indiquée M. Humbert pour le cas de $n = 1$. Nous ferons remarquer cependant que cette transformation n'est nullement indispensable; autrement dit, la correspondance établie entre les périodes g, h, g' et les droites d_n d'une part, les relations singulières et les systèmes δ_n d'autre part, ne peut logiquement mener à aucune contradiction, et de toute propriété *des ensembles de droites* d_n et δ_n résulte une propriété des relations singulières et des périodes qui les vérifient et réciproquement. Par exemple, il suffit d'appliquer les formules générales (R_1) et (R_2) du chapitre I^er aux deux droites δ_n correspondant à la relation (2) et à la substitution (S) associée à une transformation abélienne dont les entiers caractéristiques sont liés par les équations (I) et (II) pour retrouver les résultats suivants :

1° *Une transformation abélienne de type* (n, N) *change une relation de genre n en une autre de genre* N.

Ceci tient tout simplement à ce que la substitution homographique (S) change Γ_n en Γ_N et deux droites conjuguées et à coordonnées rationnelles par rapport à Γ_n en deux droites conjuguées et à coordonnées rationnelles par rapport à Γ_N.

2° La substitution (S) change, en vertu des relations générales (R_1) et (R_2), le couple δ_n défini par les équations

$$q_{01} = E, \quad q_{23} = D, \quad q_{02} = C, \quad q_{31} = A, \quad q_{03} = n, \quad q_{12} = B$$

en le couple δ_N dont les coordonnées de Plücker sont :

$$Q_{01} = E_1, \quad Q_{23} = D_1, \quad Q_{02} = C_1, \quad Q_{31} = A_1, \quad Q_{03} = N, \quad Q_{12} = B_1,$$

si l'on pose, en tenant compte des relations (I) et (II) :

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}
A_1 &= A(db)_{31} + B(ad)_{31} + C(ac)_{31} + D(cd)_{31} + E(ab)_{31},\\
B_1 &= 2A(db)_{03} + B[(ad)_{03} - N(ad)_1] + 2C(ac)_{03} + 2D(cd)_{03} + 2E(ab)_{03},\\
C_1 &= A(db)_{02} + B(ad)_{02} + C(ac)_{02} + D(cd)_{02} + E(ab)_{02},\\
D_1 &= A(db)_{23} + B(ad)_{23} + C(ac)_{23} + D(cd)_{23} + E(ab)_{23},\\
E_1 &= A(db)_{01} + B(ad)_{01} + C(ac)_{01} + D(cd)_{01} + E(ab)_{01}
\end{aligned}\right.$$

et

$$(4')\quad \left\{\begin{aligned}
A &= A_1(ac)_{02} + B_1(ac)_{12} + C_1(ac)_{31} + D_1(ac)_{01} + E_1(ac)_{23},\\
B &= 2A_1(bc)_{02} + B_1[(bc)_{12} - n(ad)_{12}] + 2C_1(bc)_{31} + 2D_1(bc)_{01} + 2E_1(bc)_{23},\\
C &= A_1(db)_{02} + B_1(db)_{12} + C_1(db)_{31} + D_1(db)_{01} + E_1(db)_{23},\\
D &= A_1(ab)_{02} + B_1(ab)_{12} + C_1(ab)_{31} + D_1(ab)_{01} + E_1(ab)_{23},\\
E &= A_1(cd)_{02} + B_1(cd)_{12} + C_1(cd)_{31} + D_1(cd)_{01} + E_1(cd)_{23}.
\end{aligned}\right.$$

On en conclut que la relation (2) se trouve changée en la relation singulière

$$A_1NG + B_1H + C_1G' + D_1N(H^2 - GG') + E_1 = 0,$$

et l'on obtient ainsi très simplement les formules de transformation des coefficients d'une relation singulière. Quant aux formules de transformation des périodes, nous les avons déjà interprétées géométriquement à l'aide de ces mêmes équations (R_1) et (R_2) au chapitre II.

[**4**] Tout ce qui suit se rapporte au cas où l'on considère seulement l'ensemble des tableaux de périodes T_n de même indice n et des relations singulières du même genre n. Nous allons montrer que la correspondance entre les droites d_n et δ_n d'une part, les périodes d'un système de fonctions abéliennes et les relations singulières de genre n d'autre part, peut être établie à l'aide d'une transformation de contact analogue à la transformation de Sophus Lie (¹).

Considérons deux espaces ordinaires (e) et (E) dans lesquels les coordonnées homogènes d'un point sont respectivement (x_0, x_1, x_2, x_3) et (X_0, X_1, X_2, X_3). Au point (x_0, x_1, x_2, x_3) de (e) correspond par définition la droite de (E) ayant comme équations :

$$(16)\qquad \begin{cases} nX_1x_0 + X_3x_1 - X_0x_3 = 0, \\ nX_3x_0 + X_2x_1 - X_0x_2 = 0. \end{cases}$$

Quelle est la surface de (E) qui correspond à la droite (D) de coordonnées pluckériennes p_{ik} de l'espace (e)? On l'obtient aisément en remarquant qu'il suffit, pour avoir son équation, d'éliminer x_0, x_1, x_2, x_3 entre les équations (16) et les équations de (D) que nous écrirons :

$$\begin{aligned} p_{20}x_0 + p_{21}x_1 + p_{23}x_3 &= 0, \\ p_{30}x_0 + p_{31}x_1 + p_{32}x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Cette élimination donne :

$$\begin{vmatrix} nX_1 & X_3 & 0 & -X_0 \\ p_{20} & p_{21} & 0 & p_{23} \\ nX_3 & X_2 & -X_0 & 0 \\ p_{30} & p_{31} & p_{32} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui, en développant le déterminant et en supposant $p_{23} \neq 0$, s'écrit

$$(17)\qquad p_{01}X_0^2 + np_{31}X_0X_1 + p_{02}X_0X_2 + (p_{03} - np_{12})X_0X_3 + np_{23}(X_3^2 - X_1X_2) = 0,$$

c'est l'équation d'une quadrique de (E) qui, si l'on suppose que $X_0 = 0$ est le plan de l'infini, a comme courbe à l'infini la conique

$$X_3^2 - X_1X_2 = 0$$

et que nous appellerons une pseudosphère de (E).

Cherchons la condition nécessaire et suffisante pour que cette pseudosphère se réduise à un cône que nous considérons comme une pseudosphère-point. Cette condition est que les quatre équations suivantes soient compatibles :

$$\begin{aligned} 2p_{01}X_0 + np_{31}X_1 + p_{02}X_2 + (p_{03} - np_{12})X_3 &= 0, \\ p_{31}X_0 - p_{23}X_2 &= 0, \\ p_{02}X_0 - np_{23}X_1 &= 0, \\ p_{03} - np_{12}X_0 + 2np_{23}X_3 &= 0. \end{aligned}$$

(¹) Une transformation de contact analogue à celle-ci avait été indiquée par M. Humbert, dans son Cours au Collège de France, pour le cas de $n = 1$.

Écrivant que le déterminant des coefficients de X_i est nul, on trouve

$$p_{03} + np_{12} = 0.$$

Si cette condition est remplie, le sommet du cône est

$$X_0 = p_{23}, \quad X_1 = \frac{p_{02}}{n}, \quad X_2 = p_{31}, \quad X_3 = p_{12}.$$

Inversement, prenons dans (E) une pseudosphère

$$AnX_0X_1 + BX_0X_3 + CX_0X_2 + D(X_3^2 - X_1X_2) + EX_0^2 = 0;$$

on trouve qu'il lui correspond dans (e) les deux droites suivantes :

$$p_{01} = E, \quad p_{23} = D, \quad p_{02} = C, \quad p_{31} = A, \quad p_{03} = \frac{B + \varepsilon\sqrt{\Delta}}{2}, \quad p_{12} = -\frac{B - \varepsilon\sqrt{\Delta}}{2n},$$

ε étant égal à ± 1 et Δ étant la quantité $B^2 - 4nAC - 4nDE$. Ces deux droites sont conjuguées par rapport au complexe Γ_n :

$$p_{03} + np_{12} = 0,$$

et si Δ est nul, elles se confondent en une même droite de ce complexe.

La transformation de contact considérée établit entre les droites d_n et les couples δ_n de l'espace e, d'une part, les points et les pseudosphères (Σ) de l'espace E, d'autre part, une correspondance qui est celle que nous avions définie précédemment. En particulier, il suffit de donner aux coordonnées X_0, X_1, X_2 et X_3 les valeurs 1, g, g' et h pour trouver qu'à (g, h, g') correspond la droite

$$(18) \quad p_{01} = n(h^2 - gg'), \quad p_{23} = 1, \quad p_{02} = ng, \quad p_{31} = g', \quad p_{03} = -nh, \quad p_{12} = h$$

du complexe Γ_n et à la relation singulière

$$Ang + Bh + Cg' + Dn(h^2 - gg') + E = 0$$

il correspond l'ensemble des deux droites (18). Ce sont justement les liaisons que nous avions établies entre les droites du complexe Γ_n et les périodes d'un système de fonctions abéliennes relatives au tableau T_n d'une part, les systèmes de droites conjuguées, à coordonnées rationnelles par rapport à Γ_n, et les relations singulières de genre n, d'autre part.

Aux transformations abéliennes particulières menant d'un tableau T_n à un autre de même indice n correspondent les substitutions homographiques à coefficients entiers, de l'espace (e), n'altérant pas le complexe Γ_n, et la transformation de contact précédente permet une représentation géométrique de l'effet de ces transformations abéliennes sur les périodes et les relations singulières.

3. — Réduction des relations singulières de genre n.

[**1**] Considérons la relation singulière de genre n :

$$(2) \qquad An g + Bh + Cg' + Dn(h^2 - gg') + E = 0.$$

Une transformation abélienne de type (n, n) de premier degré la change en une autre relation de même genre, de même invariant et de même type. On sait également que s'il existe une transformation de premier degré changeant une première relation singulière en une seconde, inversement, la transformation adjointe, qui est aussi de degré 1, change la seconde relation en la première. Ceci nous conduit à regarder comme *équivalentes* deux relations singulières de même genre n, telles qu'on puisse passer de l'une à l'autre par une transformation abélienne de type (n, n) du premier degré, et à rechercher à quelles formes canoniques simples on peut réduire l'ensemble des relations singulières de même genre n, de même invariant Δ et de même type (k) par les transformations du premier degré de type (n, n). Nous démontrerons le théorème suivant :

Toute relation singulière de genre n, d'invariant Δ et de type (k) est équivalente à la relation singulière

$$(19) \qquad ng + kh - mg' = 0,$$

m étant défini par l'égalité de Δ et de $k^2 + 4mn$.

Appelons *classe* (n, Δ, k) l'ensemble des relations singulières de genre n, d'invariant Δ et de type (k), le théorème précédent peut s'énoncer ainsi :

Les relations singulières d'une même classe (n, Δ, k) sont toutes équivalentes entre elles.

Et la relation singulière (19) peut être considérée comme la relation *réduite* de cette classe.

[**2**] A la relation singulière (2), nous avons associé le couple δ_n de droites conjuguées et à coordonnées rationnelles par rapport au complexe linéaire Γ_n, défini par les équations

$$(15) \quad p_{01} = E, \quad p_{23} = D, \quad p_{02} = C, \quad p_{31} = A, \quad p_{03} = \frac{B + \varepsilon\sqrt{\Delta}}{2}, \quad p_{12} = -\frac{B - \varepsilon\sqrt{\Delta}}{2n},$$

où ε désigne ± 1. Considérons une relation singulière équivalente à la précédente, il lui correspond un couple δ'_n qui est le transformé de δ_n par une substitution homographique (S) à coefficients entiers de degré 1 et n'altérant pas le complexe Γ_n, ce qui nous montre que l'étude de l'équivalence et de la réduction des relations singulières se ramène à un problème de géométrie réglée. Nous avons étendu les définitions de genre, d'invariant et de type aux couples S, ainsi que les théorèmes relatifs à l'invariance de ces nombres dans les substitutions (S) du premier degré. Regardons comme *équivalents* deux ensembles de points de l'espace qui se déduisent l'un de l'autre par une substitution (S) à coefficients entiers du premier degré n'altérant pas un complexe Γ_n; nous pouvons étudier l'équivalence et la réduction des couples δ, et cette étude comprendra, comme cas particulier, celle de l'équivalence des relations singulières.

Appelons classe (n, Δ, k) de couples δ l'ensemble des couples de genre n, d'invariant Δ et de type (k), nous établirons la proposition suivante :

Les couples δ d'une même classe (n, D, k) sont équivalents entre eux et au couple réduit $[\delta]_n^k$:

$$(20)\qquad p_{01}=p_{23}=0,\quad p_{02}=-m,\quad p_{31}=1,\quad p_{03}=\frac{k+\varepsilon\sqrt{\Delta}}{2},\quad p_{12}=-\frac{k-\varepsilon\sqrt{\Delta}}{2n},$$

où ε désigne ± 1, m étant défini par l'égalité de Δ et de k^2+4mn.

Il y a, par conséquent, un seul couple réduit par classe et les couples δ_n de même invariant sont équivalents aux $(n+1)$ couples réduits correspondant aux valeurs $0, 1, 2, \ldots, n$ de l'entier k définissant le type. Le théorème précédent renferme, comme cas particulier, celui du paragraphe précédent relatif aux relations singulières. Dans le cas de $n=1$, les couples δ de même invariant forment une seule classe et il en est de même pour les relations singulières.

C'est sur cette étude de l'équivalence des couples δ dans les substitutions particulières n'altérant pas le complexe Γ_n que nous fonderons la réduction des formes abéliennes qui feront l'objet de la troisième Partie, ces formes devant être, comme nous le verrons, comparées entre elles par ces mêmes substitutions spéciales.

[**3**] Considérons les deux couples suivants :

$$\delta_n : \mathrm{P}_{01}=\mathrm{E},\quad \mathrm{P}_{23}=\mathrm{D},\quad \mathrm{P}_{02}=\mathrm{C},\quad \mathrm{P}_{31}=\mathrm{A},\quad \mathrm{P}_{03}=\frac{\mathrm{B}+\varepsilon'\sqrt{\Delta}}{2},\quad \mathrm{P}_{12}=-\frac{\mathrm{B}-\varepsilon'\sqrt{\Delta}}{2n}$$

et

$$[\delta]_n^k : p_{01}=0,\quad p_{23}=0,\quad p_{02}=-m,\quad p_{31}=1,\quad p_{03}=\frac{k+\varepsilon\sqrt{\Delta}}{2},\quad p_{12}=-\frac{k-\varepsilon\sqrt{\Delta}}{2n};$$

A, B, C, D, E sont des entiers quelconques, ε et ε' désignent ± 1 et

$$(23)\qquad \Delta=\mathrm{B}^2-4n\mathrm{AC}-4n\mathrm{DE}=k^2+4mn$$

avec la condition

$$\mathrm{B}\equiv\pm k \pmod{2n}.$$

On peut trouver des entiers a_i, b_i, c_i, d_i satisfaisant aux relations

$$(21)\quad \begin{cases} n(ad)_{01} + (bc)_{01} = 0, \\ n(ad)_{31} + (bc)_{31} = 0, \\ n(ad)_{02} + (bc)_{02} = 0, \\ n(ad)_{23} + (bc)_{23} = 0, \\ n(ad)_{03} + (bc)_{03} = \pm n, \\ n(ad)_{12} + (bc)_{12} = \pm 1. \end{cases} \qquad (22)\quad \begin{cases} (ac)_{03} + n(ac)_{12} = 0, \\ (db)_{03} + n(db)_{12} = 0, \\ (ab)_{03} + n(ab)_{12} = 0, \\ (cd)_{03} + n(cd)_{12} = 0, \\ (bc)_{03} + n(bc)_{12} = \pm n, \\ (ad)_{03} + n(ad)_{12} = \pm 1, \end{cases}$$

tels que la substitution

$$(S)\quad \begin{cases} x_0 = a_0X_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3, \\ x_1 = b_0X_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3, \\ x_2 = c_0X_0 + c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3, \\ x_3 = d_0X_0 + d_1X_1 + d_2X_2 + d_3X_3 \end{cases}$$

change le couple $[\delta]_n^k$ *en* δ_n, *la substitution adjointe de la précédente changeant* δ_n *en* $[\delta]_n^k$.

La démonstration que nous allons indiquer donnera en même temps toutes les substitutions (S) faisant passer d'un couple à l'autre.

Prenons comme équations de chacune des droites $[\delta]_n^k$ les suivantes :

$$(24)\quad \begin{cases} p_{03}x_0 = p_{31}x_1 + p_{32}x_2, \\ p_{03}x_3 = p_{10}x_1 + p_{20}x_2. \end{cases}$$

Remplaçons dans ces équations x_0, x_1, x_2, x_3 par leurs valeurs en fonction de X_0, X_1, X_2, X_3 tirées des relations définissant la substitution (S), nous avons ainsi deux équations en X_0, X_1, X_2, X_3; remplaçons-y X_0 et X_3 par leurs valeurs tirées des équations

$$(25)\quad \begin{cases} P_{03}X_0 = P_{31}X_1 + P_{32}X_2, \\ P_{03}X_3 = P_{10}X_1 + P_{20}X_2, \end{cases}$$

il reste deux équations linéaires et homogènes en X_1 et X_2 qui doivent être des identités, ce qui s'exprime par les quatre relations suivantes entre les p_{ik} et les P_{ik} :

$$(26)\quad \begin{cases} p_{03}(a_0P_{31} + a_1P_{03} + a_3P_{10}) = p_{31}(b_0P_{31} + b_1P_{03} + b_3P_{10}) + p_{32}(c_0P_{31} + c_1P_{03} + c_3P_{10}), \\ p_{03}(a_0P_{32} + a_2P_{03} + a_3P_{20}) = p_{31}(b_0P_{32} + b_2P_{03} + b_3P_{20}) + p_{32}(c_0P_{32} + c_2P_{03} + c_3P_{20}), \\ p_{03}(d_0P_{31} + d_1P_{03} + d_3P_{10}) = p_{10}(b_0P_{31} + b_1P_{03} + b_3P_{10}) + p_{20}(c_0P_{31} + c_1P_{03} + c_3P_{10}), \\ p_{03}(d_0P_{32} + d_2P_{03} + d_3P_{20}) = p_{10}(b_0P_{32} + b_2P_{03} + b_3P_{20}) + p_{20}(c_0P_{32} + c_2P_{03} + c_3P_{20}), \end{cases}$$

Remarquons maintenant que les substitutions changeant $[\delta]_n^k$ en δ_n peuvent être de deux espèces suivant qu'elles changent la droite correspondant à $\varepsilon = +1$ en celle qui correspond à $\varepsilon' = +1$, ou en sa conjuguée.

Pour les obtenir toutes, il suffit de remplacer dans les équations (26) les p_{ik} par leurs valeurs, en gardant ε, pour $\varepsilon' = +1$, et d'écrire que ces équations sont satisfaites quel que soit le signe qu'on prenne devant le radical $\sqrt{\Delta}$. Et même dans le cas où Δ est carré parfait, nous obtiendrons ainsi toutes les substitutions cherchées. Nous arrivons de cette façon aux relations suivantes entre les coefficients a_i, b_i, c_i, d_i de la substitution (S) :

$$(27)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{k+\varepsilon\sqrt{\Delta}}{2}\left(a_0\mathrm{A} + a_1\frac{\mathrm{B}+\sqrt{\Delta}}{2} - a_3\mathrm{E}\right) = b_0\mathrm{A} + b_1\frac{\mathrm{B}+\sqrt{\Delta}}{2} - b_3\mathrm{E},\\
&\frac{k+\varepsilon\sqrt{\Delta}}{2}\left(-a_0\mathrm{D} + a_2\frac{\mathrm{B}+\sqrt{\Delta}}{2} - a_3\mathrm{C}\right) = -b_0\mathrm{D} + b_2\frac{\mathrm{B}+\sqrt{\Delta}}{2} - b_3\mathrm{C},\\
&-\frac{k+\varepsilon\sqrt{\Delta}}{2n}\left(-\frac{\mathrm{B}+\sqrt{\Delta}}{2n}c_0 - \mathrm{C}c_1 + \mathrm{E}c_2\right) = -\frac{\mathrm{B}+\sqrt{\Delta}}{2n}d_0 - \mathrm{C}d_1 + \mathrm{E}d_2,\\
&-\frac{k+\varepsilon\sqrt{\Delta}}{2n}\left(-\frac{\mathrm{B}+\sqrt{\Delta}}{2n}c_3 + \mathrm{D}c_1 + \mathrm{A}c_2\right) = -\frac{\mathrm{B}+\sqrt{\Delta}}{2n}d_3 + \mathrm{D}d_1 + \mathrm{A}d_2.
\end{aligned}\right.$$

Écrivons que ces équations (27) sont satisfaites quel que soit le signe qu'on prenne devant $\sqrt{\Delta}$; ceci nous fournit huit équations dont on peut tirer les expressions b_0, b_1, b_2, b_3 en fonction de a_0, a_1, a_2, a_3, et de d_0, d_1, d_2, d_3 en fonction de c_0, c_1, c_2, c_3. Nous ne développerons pas le calcul qui conduit aux relations suivantes :

$$(28)\quad\left\{\begin{aligned}
b_0 &= \frac{k-\mathrm{B}\varepsilon}{2}a_0 - \varepsilon n\mathrm{C}a_1 + \varepsilon n\mathrm{E}a_2,\\
b_1 &= \varepsilon\mathrm{A}a_0 + \frac{k+\mathrm{B}\varepsilon}{2}a_1 - \varepsilon\mathrm{E}a_3,\\
b_2 &= -\varepsilon\mathrm{D}a_0 + \frac{k+\mathrm{B}\varepsilon}{2}a_2 - \varepsilon\mathrm{C}a_3,\\
b_3 &= \varepsilon n\mathrm{D}a_1 + \varepsilon n\mathrm{A}a_2 + \frac{k-\mathrm{B}\varepsilon}{2}a_3;
\end{aligned}\right.$$

$$(29)\quad\left\{\begin{aligned}
d_0 &= -\frac{k+\mathrm{B}\varepsilon}{2n}c_0 - \varepsilon\mathrm{C}c_1 + \varepsilon\mathrm{E}c_2,\\
d_1 &= \frac{\varepsilon\mathrm{A}}{n}c_0 - \frac{k-\mathrm{B}\varepsilon}{2n}c_1 - \frac{\varepsilon\mathrm{E}}{n}c_3,\\
d_2 &= -\frac{\varepsilon\mathrm{D}}{n}c_0 - \frac{k-\mathrm{B}\varepsilon}{2n}c_2 - \frac{\varepsilon\mathrm{C}}{n}c_3,\\
d_3 &= \varepsilon\mathrm{D}c_1 + \varepsilon\mathrm{A}c_2 - \frac{k+\mathrm{B}\varepsilon}{2n}c_3.
\end{aligned}\right.$$

Il faut que les coefficients soient entiers; or, k et B étant congrus au signe près suivant le module $2n$, on peut déterminer ε tel que l'on ait

$$kB\varepsilon \equiv 0 \pmod{2n}; \tag{30}$$

il pourra d'ailleurs arriver que $\varepsilon = +1$ et $\varepsilon = -1$ satisfassent tous deux à la congruence précédente.

k et B étant de même parité, $k + B\varepsilon$ sera pair. Prenons maintenant c_0 et c_3 multiples de n; les coefficients b_i et d_i donnés par les expressions (28) et (29) seront bien entiers.

Il reste à satisfaire aux équations (21) et (22). On trouve qu'elles se réduisent, moyennant (28) et (29), aux deux relations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} (ac)_{03} + n(ac)_{12} = 0, \\ A(ac)_0 + B(ac)_{12} + C(ac)_{31} + D(ac)_{31} + E(ac)_{03} = \varepsilon n, \end{array}\right. \tag{31}$$

l'ordre $(ad)_{03} + n(ad)_{12}$ de la transformation étant égal à ε.

Pour achever la démonstration de la proposition que nous avons en vue, il suffit de montrer que les équations (30) sont résolubles en nombres entiers par rapport aux a_i et aux c_i, c_0 et c_3 étant des multiples de n. Si E est nul, ceci est très simple. Il suffit de prendre

$$c_0 = -n, \quad c_1 = 0, \quad c_2 = \gamma_2, \quad c_3 = n\gamma_3;$$

les deux équations (31), considérées comme équations en a_0, a_1, a_2, a_3, sont résolubles en nombres entiers si les deux matrices

$$\left\| \begin{array}{cccc} \gamma_3 & \gamma_2 & 0 & -1 \\ A\gamma_2 & B\gamma_2 - nC\gamma_3 + nD & An & 0 \end{array} \right\|$$

et

$$\left\| \begin{array}{ccccc} \gamma_3 & \gamma_2 & 0 & -1 & 0 \\ A\gamma_2 & B\gamma_2 - nC\gamma_2 + nD & An & 0 & \varepsilon n \end{array} \right\|$$

ont même plus grand commun diviseur. Le plus grand commun diviseur de la première est le plus grand commun diviseur de nA et de $B\gamma_2 - nC\gamma_3 + nD$; or, A, B, C et D étant premiers entre eux, le plus grand commun diviseur de nA, B, nC, nD ne peut être qu'un certain diviseur ν de n, et l'on peut toujours choisir γ_2 et γ_3 pour que nA et $B\gamma_2 - nC\gamma_3 + nD$ aient comme plus grand commun diviseur ν; on voit de suite que ν, étant diviseur de n, sera aussi le plus grand commun diviseur de la seconde matrice, ce qui prouve la possibilité de résoudre en nombres entiers les équations (31).

Il reste encore à prouver cependant qu'étant donné un couple δ_n pour lequel $P_{03} = E$ est différent de 0, on peut toujours trouver une substitution du premier degré (b)

le changeant en un couple pour lequel E soit nul. A cet effet, prenons une substitution pour laquelle

$$a_1 = a_2 = b_0 = b_3 = c_0 = c_3 = d_0 = d_1 = d_2 = 0, \quad a_0 = 1, \quad d_3 = 1,$$

les relations (21) et (22) se réduisent à

$$(bc)_{12} = 1.$$

D'autre part, en revenant aux équations (4), on trouve pour la valeur de P_{01}, dans le couple transformé de δ_n, la quantité

$$E_1 = Cc_1 + Eb_1,$$

soit δ le plus grand commun diviseur de C et E; prenons

$$c_1 = \frac{E}{\delta}, \qquad b_1 = -\frac{C}{\delta},$$

b_1 et c_1 étant premiers entre eux, on pourra toujours déterminer b_2 et c_2, tels que

$$b_1 c_2 - b_2 c_1 = 1;$$

a_3 reste indéterminé.

La démonstration est ainsi complètement terminée.

Remarque I. — Si n est supérieur à 1, en général ε est déterminé par la congruence (30), et les transformations faisant passer d'un couple à un couple réduit sont toutes d'ordre 1 ou toutes d'ordre -1, selon que B est congru à k ou à $-k$ suivant le module $2n$, tandis que dans certains cas, par exemple quand n est égal à l'unité, on peut prendre indifféremment pour ε les valeurs ± 1, et il y a des transformations des deux ordres ± 1 faisant passer d'un couple δ_1 à un couple équivalent.

Remarque II. — La réduction des relations singulières et des couples δ_n, telle que que nous venons de la présenter, est complète; mais il importe de remarquer qu'il pourra arriver que deux couples δ_n soient équivalents dans une substitution homographique de degré 1, ne laissant pas inaltéré le complexe linéaire Γ_n; le problème de l'équivalence et de la réduction des couples δ ne se trouvant résolu que lorsqu'on compare ces couples dans des substitutions spéciales qui concernent l'un quelconque des complexes Γ_n.

[**4**] La réduction des relations singulières joue, comme nous allons le montrer, un rôle très important dans l'étude des fonctions abéliennes singulières :

1° Considérons un système de fonctions singulières dont les périodes g, h, g' vérifient une relation singulière d'invariant Δ; je dis que cet invariant est un nombre positif. En effet, la relation considérée est équivalente à une relation réduite

$$ng + kh - mg' = 0$$

de même genre n, de même invariant Δ et de même type; pour qu'il existe des fonctions abéliennes ayant pour couples de périodes $\left(\frac{1}{n}, 0\right)$; $(0, 1)$; (g, h); (h, g'), il faut et il suffit que les parties imaginaires g_1, h_1, g_1' de g, h, g' vérifient les inégalités

$$h_1^2 - g_1 g_1' < 0, \quad g_1 > 0, \quad g_1 > 0. \tag{26}$$

Or, on a entre g_1, h_1 et g_1' la relation

$$ng_1 + kh_1 - mg_1' = 0,$$

qui donne h_1 en fonction de g_1 et g_1'; portant cette valeur de h_1 dans la première des inégalités (26), celle-ci devient

$$n^2 g_1^2 - (2mn + k^2) g_1 g_1' + m^2 g_1'^2 < 0.$$

Pour qu'on puisse déterminer des valeurs de g_1 et de g_1' vérifiant cette inégalité, il est nécessaire que le trinôme en g_1 et g_1' ait ses racines réelles et non confondues, c'est-à-dire que l'invariant $\Delta = k^2 + 4mn$ soit positif.

Cette démonstration n'est autre que celle qu'a donnée M. Humbert dans le cas des relations de genre 1, qui n'est pas, au fond, différent du précédent.

2° Les modules λ, μ, ν des systèmes de fonctions abéliennes singulières dont les périodes vérifient une relation singulière de genre 1 d'invariant Δ sont liés par une relation algébrique

$$F(\lambda, \mu, \nu) = 0,$$

et, en vertu de l'équivalence des relations singulières de même invariant, cette équation $F = 0$ ne dépend que du nombre Δ et non pas des coefficients de la relation singulière.

La formation de cette équation algébrique qui lie les modules des fonctions abéliennes dont les périodes satisfont à une relation singulière est un problème très difficile à traiter complètement.

M. Humbert en a donné une solution qui le ramène à une question de géométrie plane en utilisant les propriétés des courbes tracées sur la surface de Kummer, et nous renvoyons, pour tout ce qui concerne ce sujet, au Mémoire de M. Humbert sur les fonctions abéliennes singulières (1).

3° Dans le cas des relations singulières de genre n quelconque, il importe de remarquer, qu'au point de vue fonctionnel, la réduction de ces relations, telle que nous l'avons effectuée, n'est peut-être pas la plus intéressante. Celle qui s'imposait, en quelque sorte, est plutôt la réduction dans les transformations de degré 1, con-

(1) Humbert, *Sur les fonctions abéliennes singulières* (Journal de mathématiques, 5e série, 1899, p. 313).

servant certainement les modules; et nous savons que ces transformations ne possèdent pas toujours toutes cette propriété. Nous n'envisagerons pas ici ce nouveau mode de réduction; d'ailleurs, comme nous l'avons déjà dit, pour ne pas allonger par trop ce travail, nous traiterons plus spécialement les questions qui se rattachent aux fonctions abéliennes telles qu'on les considère habituellement.

4° C'est sur la réduction des couples δ_1, telle que nous l'avons présentée, que nous ferons reposer la solution des divers problèmes arithmétiques relatifs aux formes abéliennes, et, à ce point de vue, son importance est capitale. Quant aux couples δ_n, on baserait de la même manière, sur leur réduction, l'étude arithmétique des formes plus générales que les formes abéliennes, que nous avons signalées au chapitre II.

Enfin, nous donnerons, au paragraphe suivant, une application purement arithmétique de cette réduction à la théorie des nombres.

4. — Sur les représentations propres d'un résidu quadratique de $4n$ par la forme $\xi_0^2 + n\xi_1^2 + n\xi_2^2 - n\xi_3^2 - n\xi_4^2$.

[**1**] Soit n un nombre premier quelconque; les couples δ de genre n et de même invariant étant équivalents, on peut énoncer la proposition suivante :

Toutes les représentations propres d'un résidu quadratique quelconque de $4n$, positif ou négatif par la forme à cinq variables :

$$X_0^2 - 4nX_1X_2 - 4nX_3X_4, \tag{31}$$

se déduisant de l'une quelconque d'entre elles $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ *par les formules suivantes :*

$$\left\{\begin{aligned}
X_0 &= [2(ad)_{03} \varepsilon n]x_0 + 2(db)_{03}x_1 + 2(ac)_{03}x_2 + 2(cd)_{03}x_3 + 2(ab)_{03}x_4,\\
X_1 &= (ad)_{31}\ x_0 + (db)_{31}x_1 + (ac)_{31}x_2 + (cd)_{31}x_3 + (ab)_{31}x_4,\\
X_2 &= (ad)_{02}\ x_0 + (db)_{02}x_1 + (ac)_{02}x_2 + (cd)_{02}x_3 + (ab)_{02}x_4,\\
X_3 &= (ad)_{23}\ x_0 + (db)_{23}x_1 + (ac)_{23}x_2 + (cd)_{23}x_3 + (ab)_{23}x_4,\\
X_4 &= (ad)_{12}\ x_0 + (db)_{12}x_1 + (ac)_{12}x_2 + (cd)_{12}x_3 + (ab)_{12}x_4,
\end{aligned}\right. \tag{32}$$

où les a_i, b_i, c_i, d_i sont les seize entiers caractéristiques d'une substitution (S) *de type (n, n) du premier degré, c'est-à-dire satisfaisant aux relations*

$$\begin{aligned}
n(ad)_{01} + (bc)_{01} &= 0,\\
n(ad)_{31} + (bc)_{31} &= 0,\\
n(ad)_{02} + (bc)_{02} &= 0,\\
n(ad)_{23} + (bc)_{23} &= 0,\\
n(ad)_{03} + (bc)_{03} &= n[n(ad)_{12} + (bc)_{12}] = \varepsilon n,
\end{aligned}$$

ε étant égal à $+1$ ou à -1.

Dans le cas où n est égal à 1, on trouve ainsi la généralisation des théorèmes que M. Humbert avait énoncés sur les représentations propres d'un nombre positif $4N$ ou $4N+1$, par la forme $X^2 - 4YZ - 4TU$ (1).

Il est très facile de trouver une représentation propre d'un résidu quadratique Δ de $4n$ par la forme (31); on aura toujours

$$\Delta = k^2 + 4mn,$$

k étant un des nombres 0, 1, 2, ..., $(n-1)$; il suffira de prendre

$$x_0 = k, \quad x_1 = -m, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = x_4 = 0.$$

Remarquons que les formules (32) donnent en même temps des transformations arithmétiques en elles-mêmes de la forme (31); c'est une conséquence immédiate de l'invariabilité de l'invariant d'un couple δ dans une substitution (S) de degré 1.

La forme (31) représente tous les résidus quadratiques de $4n$ et ne représente que ces nombres, et les formules (31) donnent toutes les représentations propres de chacun d'eux dès qu'on connaît l'une quelconque d'entre elles.

[**2**] Si n n'est pas un nombre premier, il est bien facile de modifier le théorème; si x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 sont premiers entre eux et tels que

$$x_0^2 - 4nx_1x_2 - 4nx_3x_4 = \Delta,$$

les formules (32) donnent toutes les représentations propres de Δ satisfaisant à la congruence

$$X_0 \equiv \pm x_0 \pmod{2n}.$$

Il est possible qu'on les ait toutes, mais, en vertu d'une remarque déjà faite, Δ peut admettre d'autres représentations. On verra sans difficulté que l'on peut énoncer le résultat suivant :

Soit Δ un résidu quadratique de $4n$, si Δ satisfait à une seule des congruences

$$\Delta \equiv k^2 \pmod{4n},$$

k étant l'un des nombres 0, 1, 2, 3, ..., $(n-1)$, toutes les représentations propres de Δ par la forme (31) se déduisent de l'une quelconque d'entre elles par la formule (32).

Si Δ satisfait aux deux congruences

$$\Delta \equiv k^2, \quad \Delta \equiv k'^2 \pmod{4n},$$

k et k' étant deux nombres différents de la suite 0, 1, 2, ..., $(n-1)$, toutes les repré-

(1) Humbert, *Les fonctions abéliennes singulières et les formes quadratiques* (Journal de mathématiques pures et appliquées, 1903, p. 49).

sentations propres de Δ par la forme (31) se déduiront par les formules (32) de deux quelconques d'entre elles $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ et $(x_0', x_1', x_2', x_3', x_4')$ assujetties seulement à vérifier les congruences

$$x_0 \equiv \pm k, \quad x_0' \equiv \pm k' \quad (\mathrm{mod}\ 2n).$$

[**3**] Posons

$$X_0 = \Xi_0, \quad X_1 - X_2 = \Xi_1, \quad X_1 + X_2 = \Xi_3, \quad X_3 - X_4 = \Xi_2, \quad X_3 + X_4 = \Xi_4;$$

on a identiquement :

$$X_0^2 - 4nX_1X_2 - 4nX_3X_4 \equiv \Xi_0^2 + n\Xi_1^2 + n\Xi_2^2 - n\Xi_3^2 - n\Xi_4^2.$$

Soit n un nombre premier et soit à décomposer un résidu quadratique quelconque de $4n$ en une somme d'un carré et du produit par n de quatre carrés dont deux positifs et deux négatifs, ce qui revient à représenter ce nombre par la forme

$$\Xi_0^2 + n\Xi_1^2 + n\Xi_2^2 - n\Xi_3^2 - n\Xi_4^2. \tag{34}$$

En vertu de l'hypothèse faite sur Δ, on voit aisément qu'un des entiers Ξ_2 et Ξ_3 a la parité de Ξ_4, l'autre celle de Ξ_5, nous supposerons que Ξ_1 et Ξ_3 ont la même parité, ainsi que Ξ_2 et Ξ_4; posons alors :

$$\Xi_0 = X_0, \quad \begin{cases} \Xi_1 + \Xi_3 = 2X_1, & \Xi_2 + \Xi_4 = 2X_3, \\ -\Xi_1 + \Xi_3 = 2X_2, & -\Xi_2 + \Xi_4 = 2X_4, \end{cases}$$

on aura

$$\Delta = X_0^2 - 4nX_1X_2 - 4nX_3X_4.$$

Donc, à toute représentation propre d'un résidu quadratique de $4n$ par la forme (31) correspond une représentation propre de ce nombre par la forme (34) et réciproquement.

Toutes les décompositions propres d'un résidu quadratique quelconque de $4n$, positif ou négatif en cinq carrés dont trois positifs et deux négatifs, deux de chaque signe étant multipliés par n, se déduisent de l'une quelconque d'entre elles $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5)$ par les formules suivantes :

$$
(35)\quad \left\{
\begin{aligned}
\Xi_0 &= [2(ad)_{03} - n]\xi_0 + [(db)_{03} - (ac)_{03}]\xi_1 + [(cd)_{03} - (ab)_{03}]\xi_2 + [(db)_{03} + (ac)_{03}]\xi_3 + [(cd)_{03} + (ab)_{03}]\xi_4,\\
\Xi_1 &= [(ad)_{31} - (ad)_{02}]\xi_0 + \frac{(db)_{31} - (db)_{02} - (ac)_{31} + (ac)_{02}}{2}\xi_1 + \frac{(cd)_{31} - (cd)_{02} - (ab)_{31} + (ab)_{02}}{2}\xi_2\\
&\quad + \frac{(db)_{31} - (db)_{02} + (ac)_{31} - (ac)_{02}}{2}\xi_3 + \frac{(cd)_{31} - (cd)_{02} + (ab)_{31} - (ab)_{02}}{2}\xi_4,\\
\Xi_2 &= [(ad)_{23} - (ad)_{12}]\xi_0 + \frac{(db)_{23} - (db)_{12} - (ac)_{23} + (ac)_{12}}{2}\xi_1 + \frac{(cd)_{23} - (cd)_{12} - (ab)_{23} + (ab)_{12}}{2}\xi_2\\
&\quad + \frac{(db)_{23} - (db)_{12} + (ac)_{23} - (ac)_{12}}{2}\xi_3 + \frac{(cd)_{23} - (cd)_{12} + (ab)_{23} - (ab)_{12}}{2}\xi_4,\\
\Xi_3 &= [(ad)_{31} + (ad)_{02}]\xi_0 + \frac{(db)_{31} + (db)_{02} - (ac)_{31} - (ac)_{02}}{2}\xi_1 + \frac{(cd)_{31} + (ca)_{02} - (ab)_{31} - (ab)_{02}}{2}\xi_2\\
&\quad + \frac{(db)_{31} + (db)_{02} + (ac)_{31} + (ac)_{02}}{2}\xi_3 + \frac{(cd)_{31} + (cd)_{02} + (ab)_{31} + (ab)_{02}}{2}\xi_4,\\
\Xi_4 &= [(ad)_{23} + (ad)_{12}]\xi_0 + \frac{(db)_{23} + (db)_{12} - (ac)_{23} - (ac)_{12}}{2}\xi_1 + \frac{(cd)_{23} + (cd)_{12} - (ab)_{23} - (ab)_{12}}{2}\xi_2\\
&\quad + \frac{(db)_{23} + (db)_{12} + (ac)_{23} + (ac)_{12}}{2}\xi_3 + \frac{(cd)_{23} + (cd)_{12} + (ab)_{23} + (ab)_{12}}{2}\xi_4,
\end{aligned}
\right.
$$

où les a_i, b_i, c_i, d_i sont seize entiers quelconques, satisfont aux relations (33).

Si ce résidu quadratique de $4n$ est positif, on voit que ses décompositions se rattachent aux transformations abéliennes de type (n, n) du premier degré. Dans tous les cas, la représentation géométrique, le groupe des substitutions (S) de degré 1 donne une interprétation très simple des formules (35). En revenant aux couples de droites δ_n, on verra que, si l'on substitue aux coordonnées pluckériennes que nous avons adoptées jusqu'ici les coordonnées de Klein, ces formules (35) s'interprètent exactement comme les formules (33). Nous n'insisterons pas sur ce point, ni sur les modifications qu'on doit apporter au théorème précédent quand n n'est pas un nombre premier et qu'il est bien aisé d'énoncer.

Nous ferons seulement remarquer que dans le cas de $n = 1$, nous retrouvons la généralisation pour un nombre quelconque positif ou négatif de forme $4N$ ou $4N + 1$ du théorème énoncé par M. Humbert sur la décomposition d'un tel nombre positif en cinq carrés dont trois positifs et deux négatifs.

CHAPITRE IV.

Sur les transformations abéliennes singulières et la multiplication complexe.

Dans ce chapitre, nous traiterons des transformations qu'admettent les fonctions abéliennes singulières et de la multiplication complexe de ces fonctions. Le point de vue géométrique où nous nous sommes placés dans les chapitres précédents conduit, d'une part, à des interprétations intéressantes dans l'espace réglé; d'autre part, à des solutions nouvelles et simples des divers problèmes qui se présentent dans ces théories et que M. Humbert a déjà traités dans divers Mémoires du *Journal de mathématiques pures et appliquées*. Nous n'avons pas repris complètement toutes ces questions; nous nous sommes bornés pour les résultats déjà connus à n'indiquer que la marche à suivre pour les retrouver rapidement en s'aidant de considérations géométriques, et nous ne mentionnons le plus souvent que la solution d'un cas particulier de quelques-uns des problèmes que nous aurions à traiter. Nous nous efforçons surtout de montrer qu'on trouve dans cette branche de la théorie des fonctions abéliennes l'origine de recherches d'arithmétique transcendante qui ne seraient pas sans intérêt pour l'étude des corps quadratiques et plus généralement de certains modules de nombres algébriques du second degré. Enfin, on verra apparaître ce caractère remarquable des fonctions abéliennes singulières, qui se manifestera aussi très nettement dans la suite de ce travail, de présenter pour les corps quadratiques réels les mêmes problèmes que ceux qui se présentent pour le corps des entiers ordinaires dans la théorie des fonctions elliptiques.

I. — Sur les transformations abéliennes singulières.

[**1**] Dans le chapitre II, nous avons traité le problème de la transformation des fonctions abéliennes admettant les périodes

$$T_n \left\{ \begin{array}{cccc} \dfrac{1}{n} & 0 & g & h, \\ 0 & 1 & h & g', \end{array} \right.$$

en supposant qu'il n'existait entre g, h, g' aucune relation singulière de genre n. Dans la suite, nous ferons, au contraire, l'hypothèse suivante : les périodes de T_n satisfont à l'équation

$$(1) \qquad Ang + Bh + Cg' + Dn(h^2 - gg') + E = 0,$$

A, B, C, D et E étant des entiers premiers entre eux dans leur ensemble. Il pourrait arriver que g, h, g' vérifient plusieurs relations singulières de genre n; nous supposerons pour le moment qu'il n'en existe qu'une seule, ce que nous traduirons en disant que les fonctions considérées sont *simplement singulières*. Comme dans le cas de $n=1$, ces fonctions admettent des transformations différentes de celles qu'admettaient les fonctions non-singulières; nous les nommerons *transformations singulières* par opposition aux anciennes qui seront dites *ordinaires*. La recherche de ces transformations se poursuit, dans le cas où n est un entier quelconque, de la même façon que dans le cas habituellement considéré de $n=1$.

L'énoncé du problème de la transformation des fonctions abéliennes singulières est exactement le même que celui que nous avons donné pour les fonctions ordinaires. On est conduit à des calculs analogues que nous ne développerons pas; si la relation singulière est l'équation (1) et si la transformation conduit des périodes T_n aux nouvelles périodes

$$T_N \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{N} & 0 & G & H, \\ 0 & 1 & H & G', \end{matrix} \right.$$

les relations (II) du chapitre II entre les seize entiers caractéristiques a_i, b_i, c_i, d_i doivent être remplacées par les suivantes :

$$(2)\qquad \left\{ \begin{aligned} &(ac)_{03} + N(ac)_{12} = kA, \\ &(db)_{03} + N(db)_{12} = kC, \\ &(ab)_{03} + N(ab)_{12} = kD, \\ &(cd)_{03} + N(cd)_{12} = kE, \\ &(bc)_{03} + N(bc)_{12} - n[(ad)_{03} + N(ad)_{12}] = kB, \end{aligned} \right.$$

où k désigne un entier arbitraire. Les transformations ordinaires correspondent à la valeur nulle de k. Les formules de transformation des périodes sont exactement les mêmes que dans le cas des fonctions ordinaires (chap. II, § 4). Posons :

$$(3)\qquad \left\{ \begin{aligned} &(bc)_{31} + n(ad)_{31} = k'A', \\ &(bc)_{02} + n(ad)_{02} = k'C', \\ &(bc)_{23} + n(ad)_{23} = k'D', \\ &(bc)_{01} + n(ad)_{01} = k'E', \\ &(bc)_{03} + n(ad)_{03} - N[(bc)_{12} + n(ad)_{12}] = k'B', \end{aligned} \right.$$

k' étant choisi de telle façon que A', B', C', D' et E' soient premiers entre eux dans l'ensemble, les fonctions abéliennes transformées des premières ont leurs périodes T_N liées par la relation singulière de genre N :

$$(4)\qquad A'NG + B'H + C'G' + D'N(H^2 - GG') + E' = 0.$$

Par conséquent :

Les fonctions abéliennes initiales et finales liées par une transformation singulière sont singulières.

On peut associer à une transformation singulière T, dont les seize entiers caractéristiques sont a_i, b_i, c_i, d_i, la substitution homographique

$$(\mathrm{S})\quad \begin{cases} x_0 = a_0 X_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3, \\ x_1 = b_0 X_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3, \\ x_2 = c_0 X_0 + c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3, \\ x_3 = d_0 X_0 + d_1 X_1 + d_2 X_2 + d_3 X_3; \end{cases}$$

le degré de la transformation T sera le degré de la substitution (S), c'est-à-dire le déterminant de ses coefficients. Les considérations relatives à la transformation adjointe à une transformation ordinaire s'étendent aux transformations singulières.

Si l'on considère deux surfaces hyperelliptiques (s) et (S) liées aux fonctions abéliennes singulières de périodes T_n et T_N (définies comme nous l'avons indiqué au chapitre II), on voit que :

Une transformation singulière effectuée sur les périodes T_n *et conduisant aux périodes* T_N *fait correspondre à un point de* (s) *un seul point de* (S); *inversement, à un point de* (S) *il correspond des points de* (s) *en nombre égal à la valeur absolue du degré de la transformation* [1].

La composition des transformations s'étend aux transformations singulières et on développe aisément, dans le cas de l'indice n quelconque, les théories qu'a exposées M. Humbert dans le cas où n est égal à l'unité.

[**2**] Reprenons maintenant le problème de la transformation au point de vue géométrique. Nous avons déjà défini le degré de la transformation T; définissons de la même façon que dans le cas de $n = 1$ ses deux indices l et k :

$$l = (ad)_{03} + \mathrm{N}(ad)_{12}$$

et k est l'entier qui figure dans les formules (2). Pour que k soit défini sans ambiguïté, nous devons faire une convention nécessitée par ce fait que A, B, C, D, E ne sont définis qu'au signe près : A est positif; s'il est nul, D est positif; si A et D sont nuls, B est positif; enfin, si A, D et B étaient nuls, l'invariant de la relation singulière serait nul et nous laisserons de côté ce cas sans intérêt; l et k seront également appelés les *indices de la substitution* (S) associée à T. A la relation singulière (1) de

(1) Une transformation singulière de degré positif change un système de périodes normales en un autre système de périodes normales; si son degré est négatif, elle change un système de fonctions abéliennes singulières en un système de fonctions quadruplement périodiques singulières. Nous supposerons dans la suite le degré toujours positif.

genre n, correspond un couple δ_n de droites conjuguées et à coordonnées rationnelles par rapport au complexe Γ_n. Les droites d_n, associées aux systèmes de périodes g, h, g' vérifiant la relation (1), rencontrent toutes les deux droites δ_n et appartiennent à tous les complexes arithmétiques $C_{l,k}$ d'équation :

$$(5) \qquad k(Dp_{01} + Ep_{23} + Ap_{02} + Cp_{31} + Bp_{12}) + l(p_{03} + np_{12}) = 0.$$

Les relations (2) entre les entiers caractéristiques d'une transformation singulière T d'indices l et k s'interprètent géométriquement de la façon suivante :

Les relations (2) *expriment que la substitution* (S) *d'indices l et k change le complexe arithmétique* $C_{l,k}$ *en* Γ_N.

A priori, il était bien évident que (S) devait changer en Γ_N un certain complexe $C_{l,k}$. En effet, considérons la droite d_N associée aux périodes T_N, (S) doit changer d_n en d_N; d_N appartenant à Γ_N, (S) doit changer en Γ_N un certain complexe arithmétique auquel appartient d_n, par conséquent l'un des complexes $C_{l,k}$, puisque ce sont les seuls dont d_n fasse partie en vertu de l'hypothèse faite sur les périodes de T_n d'être simplement singulières, hypothèse qui revient à supposer que d_n ne rencontre qu'un seul couple δ_n.

On peut, comme dans le cas des transformations ordinaires, énoncer ce théorème :

La condition nécessaire et suffisante pour que deux systèmes de fonctions abéliennes singulières soient liés par une transformation ordinaire ou singulière de degré δ est qu'il existe une substitution (S) *de degré δ changeant l'une dans l'autre les droites d_n et d_N associées aux périodes des fonctions considérées.*

La proposition précédente rend à peu près immédiats les principaux résultats relatifs aux transformations singulières. On peut introduire les indices de la transformation adjointe, ce qui est particulièrement intéressant dans le cas où n est égal à N. Nous dirons simplement que les relations (3) trouvent une interprétation géométrique analogue à celle des relations (2). Quant aux équations qui lient le degré d'une transformation singulière, ses indices, les invariants des relations initiale et finale, ainsi que le degré et les indices de la transformation adjointe, on les obtient très facilement en écrivant que l'invariant d'un complexe arithmétique et l'invariant simultané de deux tels complexes, se reproduisent, dans une substitution (S), multipliés par le degré de cette substitution. Ces considérations géométriques donnent également les relations qui existent entre les degrés et les indices de deux transformations et de leur produit. Nous n'insisterons pas sur la recherche de ces relations qui se trouve ramenée à un problème tout à fait élémentaire, et nous nous occuperons, dans la suite, de la réduction des transformations singulières.

[**3**] Nous supposerons que N est égal à n; le tableau T_N est alors un certain tableau T'_n, et nous désignerons par d'_n la droite du complexe Γ_n associée à ce tableau. Deux transformations (ou substitutions) singulières sont équivalentes si l'une est le

produit de l'autre par une transformation (ou substitution) ordinaire de degré 1. Soient S et S' deux substitutions singulières équivalentes ; on a $S' = S\Sigma$, Σ désignant une transformation ordinaire du premier degré ; soit Σ^{-1} l'adjointe de Σ, elle est aussi de degré 1, et l'on a $S = S'\Sigma^{-1}$, ce qui montre qu'on peut parler de deux substitutions équivalentes sans préciser laquelle des deux est le produit de l'autre par une substitution ordinaire d'ordre ± 1. La réduction des relations singulières montre que :

Les transformations singulières liées à une relation singulière déterminée sont équivalentes aux transformations singulières liées à la relation singulière réduite équivalente.

On peut donc se borner à étudier ces transformations singulières dans le cas des relations réduites. Nous opérerons la réduction des transformations singulières du premier degré ; elles ont des propriétés intéressantes et ce sont les seules que nous aurons à considérer dans la suite de ce travail.

Soit $[\delta]_n^k$ le couple δ associé à la relation singulière réduite

$$ng + kh - mg' = 0 \tag{5}$$

d'invariant $\Delta = k^2 + 4mn$, et soit S une substitution singulière de degré 1 et d'indices λ et $\varkappa$ changeant la relation (5) en une autre relation singulière. Puisque cette substitution S est du premier degré, on a

$$(2n\lambda + k\varkappa)^2 - \Delta\varkappa^2 = 4n^2, \tag{6}$$

équation qui exprime que le déterminant des coefficients a_i, b_i, c_i, d_i de S est égal à l'unité. D'autre part, S change en Γ_n le complexe $C_{\lambda,\varkappa}$ d'équation :

$$\varkappa(p_{02} - mp_{31} + kp_{12}) + \lambda(p_{03} + np_{12}) = 0. \tag{7}$$

$C_{\lambda,\varkappa}$ est d'invariant égal à n, puisque Γ_n est d'invariant n ; c'est ce qu'exprime l'équation (6). Rappelons que les deux substitutions du premier degré :

$$S = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}, \qquad S^{-1} = \begin{vmatrix} d_3 & \dfrac{c_3}{n} & -\dfrac{b_3}{n} & -a_3 \\ nd_2 & c_2 & -b_2 & -na_2 \\ -nd_1 & -c_1 & b_1 & na_1 \\ -d_0 & -\dfrac{c_0}{n} & \dfrac{b_0}{n} & a_0 \end{vmatrix}$$

sont deux substitutions adjointes et ont mêmes degrés. Si S change une relation d'invariant Δ en une autre d'invariant Δ' et si $\varkappa, \lambda$ et $\varkappa', \lambda'$ sont les indices de S et S^{-1}, on a

$$2n\lambda + k\varkappa = 2n\lambda' - B'\varkappa', \qquad \varkappa^2\Delta = \varkappa'^2\Delta'.$$

Soient S et S′ deux substitutions singulières d'indices λ et $\varkappa$ du premier degré. $S^{-1}S'$ change Γ_n en lui-même, c'est une substitution ordinaire Σ de degré 1; on en déduit que S′ est égale à $S\Sigma$; donc deux substitutions singulières du premier degré, de mêmes indices, sont équivalentes. Il suffit de prendre pour chaque système d'indices λ et $\varkappa$ une substitution simple pour obtenir des substitutions réduites.

On peut prendre pour les transformations ou substitutions d'indices $\varkappa$ et λ :

$$S_{\lambda,\varkappa} = \begin{vmatrix} \lambda & \dfrac{\varkappa}{n} & 0 & 0 \\ m\varkappa & \lambda + k\dfrac{\varkappa}{n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

λ et $\varkappa$ vérifient l'équation (6); or, c'est une équation de Pell, et si l'on désigne par λ_1 et $\varkappa_1$ sa plus petite solution positive, on en déduit toutes les autres solutions par l'équation

$$\frac{(2n\lambda_p + k\varkappa_p) + \sqrt{\Delta}\,\varkappa_p}{2n} = \left(\frac{(2n\lambda_1 + k\varkappa_1) + \sqrt{\Delta}\,\varkappa_1}{2n}\right)^p$$

où p prend toutes les valeurs entières positives et négatives. On trouve que

$$S_{\lambda_p,\varkappa_p} = (S_{\lambda_1,\varkappa_1})^p.$$

Toutes les transformations singulières du premier degré sont équivalentes aux puissances positives et négatives d'une même transformation de ce degré.

Si n est égal à 1, on retrouve un théorème qu'a établi M. Humbert en suivant une toute autre méthode.

Désignons par C_p le complexe $C_{\lambda_p,\varkappa_p}$, C_0 coïncidant avec Γ_n et par Σ la substitution S d'indices λ_1 et $\varkappa_1$, Σ^p change tout complexe C_q en C_{q-p}, et en particulier C_p en C_0, c'est-à-dire en Γ_n. On a ainsi une interprétation géométrique simple de l'effet des substitutions singulières sur les complexes liés au couple δ associé à une relation singulière.

[**4**] Nous avons implicitement supposé que l'équation de Pell (6) avait des solutions; or, ceci n'a lieu que si Δ est positif et non carré parfait. Donc :

Les fonctions abéliennes du cas elliptique n'admettent pas de transformations singulières du premier degré.

On peut se proposer d'étendre aux couples δ_n d'invariant quelconque les considérations précédentes. Il suffit de remarquer que si l'invariant de δ_n est négatif, il n'existe aucune substitution singulière liée au couple, sauf dans le cas où l'invariant est égal à -4; on trouve alors deux substitutions singulières; ce cas particulier n'a pas grand intérêt. Si cet invariant est positif, on retombe dans le cas précédemment étudié.

[5] Au point de vue de la théorie des fonctions, l'étude des transformations abéliennes singulières est fort importante; elle a permis à M. Humbert de montrer que deux systèmes de fonctions abéliennes pouvaient être liés par une transformation du premier degré, sans que les deux polynômes qui leur donnent naissance aient mêmes invariants absolus; sous une autre forme : *deux surfaces hyperelliptiques peuvent se correspondre point par point sans avoir les mêmes modules.* Ceci est possible lorsque les fonctions abéliennes sont singulières et liées à la relation singulière

$$g + kh - mg' = 0,$$

dans le cas où la forme $x^2 + kxy - my^2$ ne peut pas représenter -1; géométriquement, cela revient à dire que la droite d, associée aux périodes g, h, g' n'appartient à aucun complexe arithmétique d'invariant égal à -1. Il serait intéressant de poursuivre des recherches analogues pour les fonctions abéliennes relatives aux tableaux de périodes T_n.

2. — Sur la multiplication complexe des fonctions abéliennes.

Nous exposerons maintenant la solution nouvelle du problème de la multiplication complexe des fonctions abéliennes à laquelle nous a conduit l'interprétation géométrique des transformations ordinaires ou singulières que nous avons développée dans les chapitres précédents. Nous traiterons un cas intéressant qui se présente comme la généralisation de la multiplication complexe des fonctions elliptiques et qui est lié à l'étude de l'équivalence des formes binaires dont les coefficients sont des entiers d'un corps quadratique réel.

[1] Le problème de la multiplication complexe des fonctions abéliennes à deux variables u et v admettant les périodes

$$T_n \left\{ \begin{array}{cccc} \frac{1}{n} & 0 & g & h, \\ 0 & 1 & h & g', \end{array} \right.$$

se pose ainsi :

Déterminer toutes les transformations abéliennes ordinaires ou singulières qui font passer des périodes du tableau T_n *aux mêmes périodes.*

Sous forme géométrique : *étant donnée une surface hyperelliptique (s) dont les coordonnees sont des fonctions abéliennes de u et v formant un système fondamental, posons*

(1) $$U = \lambda u + \mu v, \qquad V = \lambda' u + \mu' v,$$

peut-on déterminer les constantes $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$ *de manière qu'à un point* (u, v) *de la surface* (s) *corresponde un et un seul point* (U, V) *de la même surface?* Cet énoncé est le même que dans le cas traité par M. Humbert de $n = 1$. Le problème comprend celui de la recherche des transformations birationnelles d'une surface hyperelliptique en elle-même. On pourrait le poser d'une façon un peu plus générale en considérant les transformations changeant les périodes de T_n en celles du tableau T_N relatifs aux mêmes périodes normales g, h, g' ; nous laisserons de côté cette généralisation.

L'interprétation géométrique des transformations abéliennes ramène le problème de la multiplication complexe au suivant :

Trouver toutes les substitutions homographiques à coefficients entiers :

$$(\mathrm{S})\quad \begin{cases} x_0 = a_0\mathrm{X}_0 + a_1\mathrm{X}_1 + a_2\mathrm{X}_2 + a_3\mathrm{X}_3, \\ x_1 = b_0\mathrm{X}_0 + b_1\mathrm{X}_1 + b_2\mathrm{X}_2 + b_3\mathrm{X}_3, \\ x_2 = c_0\mathrm{X}_0 + c_1\mathrm{X}_1 + c_2\mathrm{X}_2 + c_3\mathrm{X}_3, \\ x_3 = d_0\mathrm{X}_0 + d_1\mathrm{X}_1 + d_2\mathrm{X}_2 + d_3\mathrm{X}_3 \end{cases}$$

qui laissent inaltérée la droite d_n *de coordonnées*

$$(2)\quad p_{01} = n(h^2 - gg'), \quad p_{23} = 1, \quad p_{02} = ng, \quad p_{31} = g', \quad p_{03} = -nh, \quad p_{12} = h,$$

joignant les points $\left(\frac{1}{n}, 0, h, g\right)$ et $(1, 0, g', h)$.

Il suffit de se reporter aux équations (R_1) et (R_2) du premier chapitre, de faire $\mathrm{P}_{ik} = \varpi p_{ik}$ dans (R_1) et $p_{ik} = \varpi \mathrm{P}_{ik}$ dans (R_2), et de remplacer les p_{ik} par leurs valeurs en fonction de g, h, g' pour avoir les conditions nécessaires et suffisantes auxquelles doivent satisfaire les entiers a_i, b_i, c_i, d_i. On trouve ainsi les systèmes équivalents de relations (σ_1) et (σ_2) ; la substitution (S) est de degré ϖ^2 :

$$(\sigma_1)\quad \begin{cases} (cd)_{31}ng + [(cd)_{03} - n(cd)_{12}]h + (cd)_{02}g' + [(cd)_{23} - \varpi]n(h^2 - gg') + (cd)_{01} = 0, \\ (ab)_{31}ng + [(ab)_{03} - n(ab)_{12}]h + (ab)_{02}g' + (ab)_{23}n(h^2 - gg') + (ab)_{01} - \varpi = 0, \\ [(db)_{31} - \varpi]ng + [(db)_{03} - n(db)_{12}]h + (db)_{02}g' + (db)_{23}n(h^2 - gg') + (db)_{01} = 0, \\ (ac)_{31}ng + [(ac)_{03} - n(ac)_{12}]h + [(ac)_{02} - \varpi]g' + (ac)_{23}n(h^2 - gg') + (ac)_{01} = 0, \\ (ad)_{31}ng + [(ad)_{03} - n(ad)_{12} - \varpi]h + (ad)_{02}g' + (ad)_{23}n(h^2 - gg') + (ad)_{01} = 0, \\ (bc)_{31}ng + [(bc)_{03} - n(bc_{12}) + n\varpi]h + (bc)_{02}g' + (bc)_{23}n(h^2 - gg') + (bc)_{01} = 0 \end{cases}$$

et

$$(\sigma_2)\quad \begin{cases} (ac)_{01}ng + [(bc)_{01} - n(ad)_{01}]h + (db)_{01}g' + [(ab)_{01} - \varpi]n(h^2 - gg') + (cd)_{01} = 0, \\ (ac)_{23}ng + [(bc)_{23} - n(ad)_{23}]h + (db)_{23}g' + (ab)_{23}n(h^2 - gg') + (cd)_{23} - \varpi = 0, \\ [(ac)_{02} - \varpi]ng + [(bc)_{02} - n(ad)_{02}]h + (db)_{02}g' + (ab)_{02}n(h^2 - gg') + (cd)_{02} = 0, \\ (ac)_{31}ng + [(bc)_{31} - n(ad)_{31}]h + [(db)_{31} - \varpi]g' + (ab)_{31}n(h^2 - gg') + (cd)_{31} = 0, \\ (ac)_{03}ng + [(bc)_{03} - n(ad)_{03} + n\varpi]h + (db)_{03}g' + (ab)_{03}n(h^2 - gg') + (cd)_{03} = 0, \\ (ac)_{12}ng + [(bc)_{12} - n(ad)_{12} - \varpi]h + (db)_{12}g' + (ab)_{12}n(h^2 - gg') + (cd)_{12} = 0. \end{cases}$$

Les six équations de chaque système sont des relations singulières de genre n entre les périodes g, h, g'. Si les périodes de T_n ne sont pas singulières, nécessairement ces équations se réduisent à des identités, on trouve alors que les entiers de la substitution (S) sont

$$a_1 = a_2 = a_3 = b_0 = b_2 = b_3 = c_0 = c_1 = c_3 = d_0 = d_1 = d_2 = 0,$$
$$a_0 = b_1 = c_2 = d_3 = p, \qquad \varpi = p^2,$$

p étant un entier arbitraire. Entre les arguments des deux systèmes de fonctions abéliennes liés par la transformation précédente, existent les relations

$$U = pu, \qquad V = pv,$$

c'est la *multiplication ordinaire par un entier*.

Pour qu'il existe des multiplications autres que la précédente, il est nécessaire que les périodes T_n satisfassent à une relation singulière au moins, de genre n.

Géométriquement, la démonstration de cette proposition fondamentale est très simple. La substitution (S) change les uns dans les autres les complexes linéaires arithmétiques contenant d_n; or, si les périodes T_n ne sont pas singulières, d_n n'appartient qu'au seul complexe Γ_n et (S) le laisse nécessairement inaltéré; cette substitution correspond à la multiplication ordinaire par un entier. Pour qu'il puisse exister d'autres multiplications complexes, il est nécessaire que d_n appartienne à un complexe arithmétique autre que Γ_n, et on sait que ceci entraîne que les périodes T_n soient singulières.

Si nous réservons le nom de multiplications complexes aux multiplications ordinaires ou singulières qui ne se réduisent pas à la multiplication ordinaire par un entier, le théorème démontré précédemment s'énonce ainsi :

Il existe entre les périodes T_n d'un système de fonctions abéliennes admettant une multiplication complexe, au moins une relation singulière de genre n.

C'est le théorème qu'avait démontré M. Humbert dans le cas de $n = 1$ en suivant une toute autre voie.

Remarque. — La démonstration de la proposition précédente ne fait nullement intervenir la condition relative à g, h, g' d'être imaginaires et de satisfaire aux inégalités

$$h_1^2 - g_1 g_1' < 0, \qquad g_1 > 0, \qquad g_1' > 0,$$

g_1, g_1', h_1 étant les parties imaginaires de g, g' et h. En particulier, si $h_1^2 - g_1 g_1'$ est positif, c'est-à-dire si l'on a affaire à des fonctions quadruplement périodiques singulières [1], la solution précédente conduit à la détermination des multiplications complexes d'un tel système de fonctions.

---

[1] Ces fonctions ont été considérées par M. Humbert (*Journal de Math. pures et appliquées*, 5e série, t. X, 1901).

Considérons une droite d_n du complexe Γ_n et proposons-nous de rechercher toutes les substitutions (S) à coefficients entiers qui la laissent inaltérée; la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe des substitutions autres que celles qui sont définies par les équations (3), est que d_n fasse partie d'un complexe arithmétique autre que Γ_n ou, ce qui revient au même, que d_n rencontre les deux droites d'un couple δ_n; ce couple δ_n ne correspond pas nécessairement à une relation singulière et peut avoir son invariant négatif.

Nous ne pouvons pas traiter complètement dans ce travail la multiplication complexe au point de vue tout à fait général; dans le cas de $n = 1$, on retrouve très facilement, en partant des équations (σ_1) et (σ_2), les résultats démontrés par M. Humbert. Nous considérerons le cas où il n'existe qu'une seule relation singulière d'invariant non carré parfait, entre les périodes g, h, g' d'un tableau T d'indice égal à l'unité.

[**2**] Nous supposons que les périodes T_n sont liées par une seule relation singulière que nous pouvons supposer réduite, en vertu des résultats du chapitre III; soit :

$$ng + kh - mg' = 0 \tag{4}$$

cette relation d'invariant Δ. Les substitutions (S) de multiplication complexe laissent inaltéré le couple δ_n associé à la relation (4), ce sont des transformations singulières correspondant à la relation singulière (4); leurs coefficients satisfont donc nécessairement aux deux systèmes équivalents d'équations :

$$(5)\quad \begin{cases} (ac)_{03} + n(ac)_{12} = \varkappa, \\ (db)_{03} + n(db)_{12} = -m\varkappa, \\ (ab)_{03} + n(ab)_{12} = 0, \\ (cd)_{03} + n(cd)_{12} = 0, \\ (bc)_{03} + n(bc)_{12} - n[(ad)_{03} + n(ad)_{12}] = k\varkappa. \end{cases} \qquad (6)\quad \begin{cases} n(ad)_{31} + (bc)_{31} = \varkappa, \\ n(ad)_{02} + (bc)_{02} = -m\varkappa, \\ n(ad)_{23} + (bc)_{23} = 0, \\ n(ad)_{01} + (bc)_{01} = 0, \\ n(ad)_{03} + (bc)_{03} - n[n(ad)_{12} + (bc)_{12}] = k\varkappa. \end{cases}$$

Posons

$$(ad)_{03} + n(ad)_{12} = \lambda,$$

λ et $\varkappa$ sont les deux indices de la multiplication complexe (a_i, b_i, c_i, d_i). Le degré δ de cette multiplication est donné par la relation

$$(2n\lambda + k\varkappa)^2 - \Delta\varkappa^2 = 4n^2\delta;$$

on en déduit que δ ne peut être égal à l'unité que dans le cas où Δ n'est pas carré parfait :

Les fonctions abéliennes simplement singulières du cas elliptique n'admettent pas de multiplications complexes du premier degré.

Considérons le système des relations (σ_1) et écrivons que toutes ces équations sont satisfaites en tenant compte de la relation (4). La sixième équation est une conséquence de la cinquième en vertu des conditions (5) et (6). Si l'on multiplie la quatrième équation par m, la cinquième par $-k$ et si l'on additionne membre à membre les deux équations obtenues, la relation trouvée se réduit à la troisième des relations (σ_1). Il reste donc à satisfaire à la première, la seconde, la quatrième et la cinquième des équations (σ_1).

Dans l'étude des groupes hyperabéliens liés aux fonctions abéliennes singulières (étude qui, dans le cas de $n=1$, sera faite dans ce travail), nous avons été conduits à exprimer les périodes g, h, g' satisfaisant à la relation (4) en fonction de deux paramètres complexes ξ et η de la façon suivante. Posons

$$\theta = \frac{k+\sqrt{\Delta}}{2n}, \qquad \theta' = \frac{k-\sqrt{\Delta}}{2n}$$

et

$$g = \frac{\theta'^2\xi - \theta^2\eta}{\sqrt{\Delta}}, \quad h = \frac{-\theta'\xi + \theta\eta}{\sqrt{\Delta}}, \quad g' = \frac{\xi - \eta}{\sqrt{\Delta}}, \quad h^2 - gg' = \frac{\xi\eta}{n^2}. \tag{7}$$

Les périodes de T_n correspondent à deux valeurs particulières de ξ et η : remplaçons g, h, g' par leurs expressions (7) en fonction de ξ et η dans les équations (σ_1); on arrivera ainsi à des équations en ξ et η qui devront être satisfaites *pour les deux valeurs de ces paramètres correspondant à* T_n.

Pour simplifier un peu le calcul, supposons que n soit égal à l'unité; le cas de n quelconque se traitant de la même façon, k peut alors être nul ou égal à 1, suivant que Δ est pair ou impair.

1° Δ *pair*. — La relation (4) s'écrit

$$g - mg' = 0. \tag{8}$$

Posons

$$\alpha_{01} = a_0 + a_1\sqrt{m}, \quad \alpha'_{01} = a_0 - a_1\sqrt{m}, \quad \alpha_{23} = a_2 + a_3\sqrt{m}, \quad \alpha'_{23} = a_2 - a_3\sqrt{m},$$
$$\gamma_{01} = c_0 + c_1\sqrt{m}, \quad \gamma'_{01} = c_0 - c_1\sqrt{m}, \quad \gamma_{23} = c_2 + c_3\sqrt{m}, \quad \gamma'_{23} = c_2 - c_3\sqrt{m},$$

on trouve que les quatre équations (σ_1) en ξ et η s'écrivent

$$\left\{\begin{aligned} &(\alpha_{01} + \alpha_{23}\xi)(\alpha'_{01} + \alpha'_{23}\eta) = \varpi, \\ &(\gamma_{01} + \gamma_{23}\xi)(\alpha'_{01} + \alpha'_{23}\eta) = \varpi\xi, \\ &(\alpha_{01} + \alpha_{23}\xi)(\gamma'_{01} + \gamma'_{23}\eta) = \varpi\eta, \\ &(\gamma_{01} + \gamma_{23}\xi)(\gamma'_{01} + \gamma'_{23}\eta) = \varpi\xi\eta, \end{aligned}\right. \tag{9}$$

et l'on a

$$g = \frac{\sqrt{m}(\xi-\eta)}{2}, \qquad h = \frac{\xi+\eta}{2}, \qquad g' = \frac{\xi-\eta}{2\sqrt{m}}.$$

Les quatre équations (9) sont compatibles et se réduisent à trois; $(\alpha_{01}+\alpha_{23}\xi)$ et $(\alpha'_{01}+\alpha'_{23}\eta)$ ne peuvent pas être nuls, sinon ϖ serait nul. On voit aisément que s'il n'existe aucune relation singulière autre que (8), les équations (9) doivent se réduire à des identités, à moins que ξ et η ne satisfassent aux relations quadratiques

$$(10)\qquad \begin{cases} \alpha_{23}\xi^2+(\alpha_{01}-\gamma_{23})\xi-\gamma_{01}=0, \\ \alpha'_{23}\eta^2+(\alpha'_{01}-\gamma'_{23})\eta-\gamma'_{01}=0, \end{cases}$$

c'est-à-dire à moins que ξ ne soit racine d'une équation du second degré à coefficients entiers dans le corps $\sqrt{m}$ et η racine de l'équation conjuguée.

Si les valeurs de ξ et η correspondant aux fonctions abéliennes considérées sont quelconques, les relations (9) doivent, comme nous l'avons dit, se réduire à des identités; cela tient à ce que, s'il existe entre les périodes g, h, g' une relation singulière autre que (8), ξ et η vérifient une relation

$$A\xi\eta+B\xi+B'\eta+C=0,$$

où A et C sont deux entiers ordinaires et B et B′ deux entiers conjugués du corps $\sqrt{m}$; inversement, à une relation de cette forme correspond une relation singulière. L'équation (8) étant supposée la seule relation singulière vérifiée par g, h, g', les équations (9) sont des identités et les multiplications complexes sont :

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ ma_1 & a_0 & ma_3 & a_2 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 \\ 0 & 0 & ma_1 & a_0 \end{vmatrix},$$

a_0, a_1, a_2 et a_3 étant des entiers arbitraires.

Si ξ et η satisfont aux équations

$$(11)\qquad A_1\xi^2+B_1\xi+C_1=0,\qquad A_1'\eta^2+B_1'\eta+C_1'=0,$$

où A_1, B_1, et C_1 sont des entiers du corps $\sqrt{m}$ et A_1', B_1', C_1' leurs conjugués, on obtient toutes les multiplications complexes en écrivant que les équations (9) sont des conséquences des seules équations (11). Ce cas de multiplication complexe est tout à fait remarquable par son analogie avec la multiplication complexe des fonctions elliptiques. Il correspond à celui que M. Humbert a traité à la page 358 de son Mémoire sur les fonctions abéliennes singulières; nous devons ajouter également que dans ce cas de l'invariant pair, M. Humbert avait signalé qu'on pouvait ramener les relations entre g, h, g' à deux relations quadratiques analogues à (11). La méthode que nous avons suivie s'applique également aux relations singulières d'invariant impair et conduit très simplement à cette généralisation intéressante de la relation quadratique à laquelle satisfait le rapport des périodes d'un système de fonctions elliptiques admettant une multiplication complexe.

2° Δ *impair.* — La relation (4) est la suivante :

$$g + h - mg' = 0, \tag{12}$$

d'invariant $\Delta = 4m + 1$. Un calcul analogue au précédent et que nous ne développerons pas, montre qu'on obtient un cas singulier de multiplication complexe lorsque les valeurs des paramètres ξ et η, correspondant aux fonctions abéliennes considérées, vérifient deux équations :

$$A_2\xi^2 + B_2\xi + C_2 = 0, \qquad A_2'\eta^2 + B_2'\eta + C_2' = 0, \tag{13}$$

où A_2, B_2, C_2 sont des entiers du corps $\sqrt{\Delta}$, c'est-à-dire des nombres de forme $M + N\omega$, en posant $\omega = \frac{1+\sqrt{\Delta}}{2}$, M et N étant des entiers ordinaires. A_2', B_2', C_2' sont les conjugués de A_2, B_2, C_2. Nous verrons dans la deuxième partie que les coefficients b_i et d_i des transformations, laissant inaltérée la relation (12), s'expriment en fonction des entiers a_i et c_i; pour trouver toutes les multiplications complexes du cas précédent, il suffit de lier a_i et c_i par les équations

$$\frac{a_2 - 2ma_3 - (a_3 + 2a_2)\theta}{A_2} = \frac{-a_0 + (2m+1)a_1 + c_2 - 2mc_3 + (2a_0 - a_1 - 2c_2 - c_3)\theta}{B_2}$$
$$= \frac{(2m+1)c_1 - c_0 + (2c_0 - c_1)\theta}{C_2}$$

et leurs conjuguées.

Nous verrons que les valeurs ξ et η, correspondant à un système de périodes g, h, g' normales (ou même à un système de périodes de fonctions quadruplement périodiques singulières), sont imaginaires; par conséquent, les formes $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$, où A, B, C sont les coefficients A_1, B_1, C_1 ou A_2, B_2, C_2, ou bien encore leurs conjugués sont *définies*. C'est ce qui avait lieu pour la forme binaire associée à l'équation du second degré que vérifie le rapport des périodes d'un système de fonctions elliptiques admettant une multiplication complexe.

[**3**] Considérons un système de fonctions elliptiques de multiplication complexe dont le rapport τ des périodes satisfait à l'équation

$$a\tau^2 + b\tau + c = 0;$$

si l'on effectue sur les périodes une transformation du premier degré, on effectue sur τ une substitution modulaire

$$\tau' = \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}$$

et τ' satisfait à une nouvelle relation quadratique

$$a'\tau'^2 + b'\tau' + c' = 0;$$

les deux formes binaires $ax^2+bxy+cy^2$ et $a'x^2+b'xy+c'y^2$ sont équivalentes, et c'est ainsi que la théorie de l'équivalence et de la réduction des formes binaires à coefficients entiers se trouve liée à la multiplication complexe des fonctions elliptiques.

Considérons de même un système de fonctions abéliennes simplement singulières les périodes normales g, h, g' satisfont à une relation singulière d'invariant Δ'; si Δ' est pair, posons $\Delta=\frac{\Delta'}{4}$ (nous supposerons que Δ n'est pas congru à 1 suivant le module 4); si Δ' est impair, nous posons $\Delta=\Delta'$. Nous faisons cette hypothèse : les valeurs ξ et η des paramètres ξ et η correspondant à g, h, g' vérifient les deux équations conjuguées

$$(14)\qquad A\xi^2+B\xi+C=0,\qquad A'\eta^2+B'\eta+C'=0,$$

A, B, C étant des entiers quelconques du corps $\sqrt{\Delta}$, et A', B', C' leurs conjugués; en outre, les deux formes $Ax^2+Bxy+Cy^2$ et $A'x^2+B'xy+C'y^2$ sont nécessairement définies, puisque ξ et η ne peuvent être qu'imaginaires. Effectuons une transformation abélienne d'ordre 1 laissant inaltérée la relation singulière, ceci revient, comme nous le verrons (deuxième partie, chap. II), à effectuer sur ξ et η une substitution de l'un ou l'autre type :

$$\left(\xi,\eta;\ \frac{\alpha\xi+\beta}{\gamma\xi+\delta},\ \frac{\alpha'\eta+\beta'}{\gamma'\eta+\delta'}\right);\qquad \left(\xi,\eta;\ \frac{a\eta+b}{c\eta+d},\ \frac{a'\xi+b'}{c'\xi+d'}\right),$$

où α, β, γ, δ, a, b, c, d sont des entiers du corps $\sqrt{\Delta}$ vérifiant les équations

$$\alpha\delta-\beta\gamma=1\quad\text{et}\quad ad-bc=-1;$$

α', β', γ', δ', a', b', c', d' sont les conjugués de α, β, γ, δ, a, b, c, d. Nous appellerons ces substitutions les *substitutions modulaires du corps* $\sqrt{\Delta}$, on peut ne considérer que celles du premier type; on obtient celles du second en leur adjoignant $(\xi,\eta;\ -\eta,\ -\xi)$. Une substitution modulaire (Σ) du corps $\sqrt{\Delta}$ change l'ensemble des deux relations quadratiques (14) en un ensemble analogue :

$$(15)\qquad \mathcal{A}\xi^2+\mathcal{B}\xi+\mathcal{C}=0,\qquad \mathcal{A}'\eta^2+\mathcal{B}'\eta+\mathcal{C}'=0,$$

ce qui montre que les périodes G, H, G' transformées de g, h, g' par la transformation abélienne correspondant à (Σ) sont encore des périodes de multiplication complexe spéciale.

Regardons comme équivalentes deux formes à coefficients entiers dans le corps $\sqrt{\Delta}$ si l'une est la transformée de l'autre par une substitution de degré 1 à coefficients entiers dans le corps $\sqrt{\Delta}$. Les deux formes

$$\mathcal{A}x^2+\mathcal{B}xy+\mathcal{C}y^2\quad\text{et}\quad \mathcal{A}'x^2+\mathcal{B}'xy+\mathcal{C}'y^2$$

sont équivalentes aux formes

$$Ax^2+Bxy+Cy^2\quad\text{et}\quad A'x^2+B'xy+C'y^2.$$

Cette question de l'équivalence de deux formes binaires à coefficients entiers dans un corps quadratique est intimement liée à la multiplication complexe et à la transformation des fonctions abéliennes singulières, et il ne serait pas sans intérêt d'essayer de la traiter à ce point de vue. On voit aussi quel intérêt il y aurait, pour l'étude des corps quadratiques réels, à déterminer les domaines fondamentaux des groupes modulaires de ces corps.

On trouvera, dans la suite de ce travail, de nombreux exemples d'extensions aux corps quadratiques réels, des principales questions que pose la théorie des fonctions elliptiques dans le corps des entiers ordinaires, obtenues par la considération des fonctions abéliennes singulières.

[**4**] En considérant des couples δ et non plus des relations singulières, tout ce qui précède s'étend immédiatement aux corps quadratiques imaginaires et aux formes à coefficients entiers dans ces corps.

Enfin, le cas des tableaux T_n et des couples δ_n conduit à des résultats analogues aux précédents, mais relatifs non plus aux entiers d'un même corps, mais aux nombres de certains *modules* que nous allons définir. Soit Δ un *résidu quadratique de* $4n$, congru à k^2 suivant le module $4n$; k étant supposé positif ou nul, inférieur ou égal à n. Posons $\theta = \dfrac{k+\sqrt{\Delta}}{2n}$; si M et N sont deux entiers ordinaires quelconques, les nombres algébriques $M + N\theta$ forment évidemment un module qui renferme tous les entiers du corps $\sqrt{\Delta}$; à chaque résidu quadratique de $4n$ correspond aussi $(n+1)$ modules.

La considération des tableaux T_n et des couples δ_n permet d'étendre à ces modules tous les résultats précédents concernant les entiers des corps quadratiques. C'est d'ailleurs un fait absolument général que nous tenons à signaler dès maintenant; ne pouvant, dans ce travail, développer les considérations relatives à ces modules, aux groupes hyperabéliens et aux formes binaires ou quaternaires, ou à indéterminées conjuguées qu'on peut leur rattacher, nous nous réservons d'y revenir dans un autre travail.

DEUXIÈME PARTIE

CHAPITRE PREMIER.

Sur certains groupes de transformations abéliennes.

Nous considérons dans ce chapitre l'ensemble des systèmes de fonctions abéliennes dont les périodes normales g, h, g' vérifient une même relation singulière. Après avoir montré qu'on peut exprimer g, h, g' en fonction de deux paramètres complexes ξ et η soumis à certaines limitations, nous effectuons la recherche des transformations ordinaires et singulières qui font passer d'un tel système de fonctions abéliennes singulières à un système analogue. D'après leur définition même, il est bien évident que ces transformations forment un groupe. La plupart des résultats ne sont pas nouveaux; le problème avait déjà été traité par M. Humbert [1]; nous n'avons fait que le reprendre par une méthode nouvelle. La solution géométrique que nous en donnons permet de résoudre le problème plus général de la recherche des groupes de substitutions homographiques (S) à coefficients entiers, qui laissent inaltéré un couple δ de droites conjuguées et à coordonnées rationnelles par rapport au complexe $p_{03} + p_{12} = 0$, dont la considération ne sera pas sans intérêt pour l'étude des formes abéliennes. A ces groupes, nous rattacherons, au chapitre suivant, des groupes de substitutions à deux variables intéressants par leur caractère arithmétique et par leur liaison avec des groupes de substitutions semblables de certaines formes quaternaires indéfinies.

I. — Représentation paramétrique des périodes d'un système de fonctions abéliennes simplement singulières.

[1] Rappelons qu'à la relation singulière

$$Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0 \tag{1}$$

entre les périodes normales (g, h, g') d'un système de fonctions abéliennes singulières, nous avons fait correspondre le couple δ de droites conjuguées et à coordonnées

(1) G. Humbert, *Les fonctions abéliennes singulières et les formes quadratiques* (Journal de Math. pures et appliquées, 5e série, tome IX, 1903).

rationnelles par rapport au complexe Γ_1; $p_{03}+p_{12}=0$, définies par les équations

$$(2) \quad p_{01}=E, \quad p_{23}=D, \quad p_{02}=C, \quad p_{31}=A, \quad p_{03}=\frac{B+\varepsilon\sqrt{\Delta}}{2}, \quad p_{12}=\frac{-B+\varepsilon\sqrt{\Delta}}{2}$$

dans lesquelles ε est respectivement égal à $+1$ et à -1 pour les deux droites D et D′ du couple δ, Δ' étant l'invariant essentiellement positif $B^2-4AC-4DE$ de la relation singulière (2). A tout système de périodes (g, h, g') vérifiant l'équation (1), il correspond une droite d du complexe Γ_1 :

$$(3) \qquad p_{01}=h^2-gg' \quad p_{23}=1, \quad p_{02}=g, \quad p_{31}=g', \quad p_{03}=-h, \quad p_{12}=h,$$

rencontrant les deux droites D et D′ du couple δ.

[**2**] Concevons qu'on représente univoquement les points M de la droite D à l'aide d'un paramètre ξ et, de la même manière, les points M′ de D′ à l'aide d'un paramètre η. La droite d, associée à un système de fonctions abéliennes singulières vérifiant la relation (1), coupe les droites D et D′ en deux points M et M′. Les coordonnées de ces deux points sont des fonctions de g, h, g', et si ξ et η sont les valeurs des paramètres des points M et M′, il sera bien aisé d'exprimer g, h, g' en fonction de ξ et η, et de représenter ainsi, à l'aide de ces deux paramètres ξ et η, les périodes normales de tous les systèmes de fonctions abéliennes liés à la relation singulière (1).

Nous déterminerons dans la suite toutes les transformations ordinaires ou singulières qui n'altèrent pas une relation singulière donnée. A chacune de ces transformations abéliennes correspond une certaine transformation des périodes g, h, g' et une certaine substitution W effectuée sur les paramètres ξ et η. Plus généralement, à chaque substitution homographique (S) à coefficients entiers n'altérant pas un couple δ d'invariant quelconque positif ou négatif, il correspond une transformation des points des deux droites D et D′, par conséquent une certaine substitution W sur les paramètres ξ et η représentant univoquement les points de ces deux droites. Nous porterons plus particulièrement notre attention sur les substitutions W effectuées sur l'ensemble des deux variables ξ et η, et nous allons montrer, qu'à ce point de vue, on peut se borner à effectuer la recherche des groupes de substitutions W dans le cas où la relation singulière (1) est une relation réduite ou, plus exactement, dans le cas où le couple δ est un couple réduit [δ].

[**3**] La réduction des relations singulières effectuée par M. Humbert et reprise par nous à un point de vue plus général (première partie, chap. III, § 3), a montré que toute relation singulière (1) est équivalente à la relation réduite

$$(4) \qquad g+kh-mg'=0,$$

dans laquelle k est égal à 0 ou à 1 suivant que B est pair ou impair, avec la condition

$$(5) \qquad k^2+4m=\Delta=B^2-4AC-4\,DE.$$

Nous avons prouvé que tout couple δ d'invariant quelconque et n'étant pas nécessairement associé à une relation singulière, supposé défini par les équations (2), dans lesquelles A, B, C, D, E désignent des entiers quelconques premiers entre eux dans l'ensemble et Δ l'invariant du couple, est équivalent au couple réduit $[\delta]$ dont les coordonnées pluckériennes sont :

$$(6)\qquad p_{01}=0,\ p_{23}=1,\ p_{02}=-m,\ p_{31}=1,\ p_{03}=\frac{k+\varepsilon\sqrt{\Delta}}{2},\ p_{12}=\frac{-k+\varepsilon\sqrt{\Delta}}{2},$$

ε est égal respectivement à $+1$ et à -1 pour les deux droites $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{D}'$ du couple $[\delta]$; k a la valeur 0 ou 1 suivant que B est pair ou impair, k^2+4m étant égal à l'invariant Δ.

Supposons qu'on ait choisi une représentation paramétrique, à l'aide des deux variables ξ et η, des points des deux droites $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{D}'$ du couple $[\delta]$, et qu'on ait déterminé les groupes de substitutions effectuées sur les deux variables ξ et η qui correspondent aux groupes de substitutions (S) n'altérant pas ce couple réduit $[\delta]$. Il existe une substitution (S) ordinaire de degré 1 changeant $[\delta]$ en δ ; soit Σ cette substitution ; rien ne nous empêche de prendre comme représentation paramétrique par ξ' et η' des points des droites D et D' du couple δ, celle qu'on déduit par Σ de la représentation par les variables ξ et η des points de $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{D}'$. Soit T l'une quelconque des substitutions (S) laissant inaltéré le couple $[\delta]$, les substitutions $\Sigma^{-1}T\Sigma$ n'altèrent pas le couple δ, et ce sont les seules qui jouissent de cette propriété. Et il est bien évident que la substitution W' correspondant à $\Sigma^{-1}T\Sigma$ et effectuée sur les paramètres ξ' et η' des points de D et D' est identique à la substitution W correspondant à T et effectuée sur les variables ξ et η. Nous pouvons donc n'effectuer la recherche des groupes de substitutions homographiques n'altérant pas un couple δ et des groupes correspondants de substitutions à deux variables, que dans le cas des couples réduits.

[4] Nous adopterons la représentation paramétrique suivante des points des droites $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{D}'$ du couple réduit $[\delta]$ d'invariant Δ : $\mathfrak{D}$ ayant comme équations

$$(7)\qquad x_1=\frac{k+\sqrt{\Delta}}{2}x_0=\theta x_0,\qquad x_3=-\frac{k-\sqrt{\Delta}}{2}x_2=-\theta' x_2,$$

nous poserons

$$(8)\qquad \frac{x_0}{1}=\frac{x_1}{\theta}=\frac{x_2}{\xi}=\frac{x_3}{-\theta'\xi}.$$

Les équations de $\mathfrak{D}'$ pouvant s'écrire

$$(9)\qquad x_1=\frac{k-\sqrt{\Delta}}{2}x_0=\theta' x_0,\qquad x_3=-\frac{k+\sqrt{\Delta}}{2}x_2=-\theta x_2,$$

posons

$$(10)\qquad \frac{x_0}{1}=\frac{x_1}{\theta'}=\frac{x_2}{\eta}=\frac{x_3}{-\theta\eta},$$

et les points de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont représentés paramétriquement à l'aide des variables ξ et η. Si k est nul, l'invariant Δ est égal à $4m$. θ est égal à $\sqrt{m}$ et θ' à $-\sqrt{m}$; si k est égal à l'unité, $\Delta = 1 + 4m$, $\theta = \omega$, $\theta' = \omega'$ en posant

$$\omega = \frac{1+\sqrt{\Delta}}{2}, \qquad \omega' = \frac{1-\sqrt{\Delta}}{2}.$$

[**5**] *Représentation paramétrique des périodes singulières g, h, g'.* — Supposons que le couple $[\delta]$ ait son invariant positif et qu'il soit associé à la relation singulière réduite (4); exprimons que la droite d_n associée aux périodes normales g, h, g' d'un système de fonctions abéliennes singulières, vérifiant la relation (1), coupe $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ aux points de paramètres ξ et η, nous trouvons

$$g + \theta h + \theta'\xi = 0, \qquad h + \theta g' - \xi = 0,$$
$$g + \theta' h + \theta\eta = 0, \qquad h + \theta' g' - \eta = 0,$$

on tire aisément de ces équations g, h, g' en fonction de ξ et η :

$$(11) \qquad g = \frac{\theta'^2\xi - \theta^2\eta}{\sqrt{\Delta}}, \qquad h = \frac{-\theta'\xi + \theta\eta}{\sqrt{\Delta}}, \qquad g' = \frac{\xi - \eta}{\sqrt{\Delta}}.$$

On vérifie sans difficulté la relation

$$h^2 - gg' = \xi\eta.$$

Si la relation singulière est d'invariant pair, $\Delta = 4m$, les formules (11) s'écrivent

$$(12) \qquad g = \frac{\sqrt{m}(\xi - \eta)}{2}, \qquad h = \frac{\xi + \eta}{2}, \qquad g' = \frac{\xi - \eta}{2\sqrt{m}}.$$

Si elle est, au contraire, d'invariant impair, $4m + 1$, les équations (11) se mettent sous la forme

$$(13) \qquad g = \frac{\omega'^2\xi - \omega^2\eta}{\sqrt{\Delta}}, \qquad h = \frac{-\omega'\xi + \omega\eta}{\sqrt{\Delta}}, \qquad g' = \frac{\xi - \eta}{\sqrt{\Delta}}.$$

[**6**] g, h, g' étant les périodes normales d'un système de fonctions abéliennes, posons

$$g = g_0 + ig_1, \qquad h = h_0 + ih_1, \qquad g' = g'_0 + ig'_1;$$

on sait que les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$(14) \qquad h_1^2 - g_1 g'_1 < 0, \qquad g_1 > 0, \qquad g'_1 > 0;$$

elles limitent le champ de variation des paramètres complexes ξ et η : posons

$$\xi = \xi_0 + i\xi_1, \qquad \eta = \eta_0 + i\eta_1,$$

nous avons :

$$g_1 = \frac{\theta'^2\xi_1 - \theta^2\eta_1}{\sqrt{\Delta}}, \quad h_1 = \frac{-\theta'\xi_1 + \theta\eta_1}{\sqrt{\Delta}}, \quad g'_1 = \frac{\xi_1 - \eta_1}{\sqrt{\Delta}}, \quad h_1^2 - g_1 g'_1 = \xi_1\eta_1.$$

Pour que $h_1^2 - g_1 g_1'$ soit négatif, il faut et il suffit que ξ_1 et η_1 soient de signe contraire; dans ces conditions, g_1 et g_1' devant être positifs, il est nécessaire et suffisant, pour que les inégalités (14) soient satisfaites, que l'on ait

$$\xi_1 > 0, \qquad \eta_1 < 0.$$

Inversement à tout système de valeurs $\xi_0 + i\xi_1$ et $\eta_0 + i\eta_1$ de ξ et η pour lequel ξ_1 est positif et η_1 négatif, il correspond un système de fonctions abéliennes singulières dont les périodes normales g, h, g', définies par les formules (11), vérifient la relation singulière réduite (4).

Remarque. — On représenterait paramétriquement de la même manière les périodes des systèmes de fonctions quadruplement périodiques singulières liés à la relation singulière (4), les limitations des paramètres complexes étant seules à modifier.

2. — Substitutions (S) laissant inaltéré un couple réduit.

[**1**] Le problème que nous traiterons est le suivant :

Trouver toutes les substitutions linéaires à coefficients entiers :

$$(S)\quad \begin{cases} x_0 = a_0 X_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3, \\ x_1 = b_0 X_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3, \\ x_2 = c_0 X_0 + c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3, \\ x_3 = d_0 X_0 + d_1 X_1 + d_2 X_2 + d_3 X_3 \end{cases}$$

qui laissent inaltéré le couple $[\delta]$ *de droites*

$$\mathfrak{D}\ \begin{cases} x_1 = \theta x_0, \\ x_3 = -\theta' x_2, \end{cases} \qquad\qquad \mathfrak{D}'\ \begin{cases} x_1 = \theta' x_0, \\ x_3 = -\theta x_2, \end{cases}$$

θ *et* θ' *étant respectivement égaux à* $\dfrac{k+\sqrt{\Delta}}{2}$ *et à* $\dfrac{k-\sqrt{\Delta}}{2}$; Δ *est l'invariant positif ou négatif* $k^2 + 4m$ *du couple* $[\delta]$ *et* k *est nul ou égal à l'unité.*

Les substitutions (S) sont de deux espèces, les unes laissant inaltérée chacune des deux droites $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{D}'$, les autres changeant $\mathfrak{D}$ en $\mathfrak{D}'$ et $\mathfrak{D}'$ en $\mathfrak{D}$. Les substitutions de première espèce seront encore appelées *substitutions droites*, celles de seconde espèce étant dites *gauches*. Parmi elles, il y en a des deux espèces que n'altèrent pas le complexe Γ_1; conformément à la terminologie déjà adoptée, nous les nommerons substitutions *ordinaires* par opposition aux autres qui seront dites *singulières*.

Soit $\mathfrak{D}(\varepsilon)$ la droite ayant comme équations

$$(15) \qquad x_1 = \frac{k+\varepsilon\sqrt{\Delta}}{2}x_0, \qquad x_3 = -\frac{k-\varepsilon\sqrt{\Delta}}{2}x_2, \qquad \varepsilon = \pm 1.$$

Pour trouver toutes les substitutions (S) laissant inaltéré le couple $[\mathfrak{d}]$, écrivons que (S) change $\mathfrak{D}(\varepsilon)$ en $\mathfrak{D}(\varepsilon')$ et $\mathfrak{D}(-\varepsilon)$ en $\mathfrak{D}(-\varepsilon')$, ε et ε' étant égaux à ± 1; si $\varepsilon\varepsilon' = 1$, (S) sera droite; si $\varepsilon\varepsilon' = -1$, elle sera gauche.

Si (X_0, X_1, X_2, X_3) est un point de la droite $\mathfrak{D}(\varepsilon')$, les équations de (S) peuvent s'écrire :

$$(16) \qquad \left\{\begin{aligned}
x_0 &= \Big(a_0 + \frac{k+\varepsilon'\sqrt{\Delta}}{2}a_1\Big)X_0 + \Big(a_2 - \frac{k-\varepsilon'\sqrt{\Delta}}{2}a_3\Big)X_2,\\
x_1 &= \Big(b_0 + \frac{k+\varepsilon'\sqrt{\Delta}}{2}b_1\Big)X_0 + \Big(b_2 - \frac{k-\varepsilon'\sqrt{\Delta}}{2}b_3\Big)X_2,\\
x_2 &= \Big(c_0 + \frac{k+\varepsilon'\sqrt{\Delta}}{2}c_1\Big)X_0 + \Big(c_2 - \frac{k-\varepsilon'\sqrt{\Delta}}{2}c_3\Big)X_2,\\
x_3 &= \Big(d_0 + \frac{k+\varepsilon'\sqrt{\Delta}}{2}d_1\Big)X_0 + \Big(d_2 - \frac{k-\varepsilon'\sqrt{\Delta}}{2}d_3\Big)X_2.
\end{aligned}\right.$$

De ces équations (16), on tire :

$$(17) \qquad \begin{aligned} x_1 - \frac{k+\varepsilon\sqrt{\Delta}}{2}x_0 = {}&\Big[b_0 + \frac{k+\varepsilon'\sqrt{\Delta}}{2}b_1 - \frac{k+\varepsilon\sqrt{\Delta}}{2}\Big(a_0 + \frac{k+\varepsilon'\sqrt{\Delta}}{2}a_1\Big)\Big]X_0\\
&+ \Big[b_2 - \frac{k-\varepsilon'\sqrt{\Delta}}{2}b_3 - \frac{k+\varepsilon\sqrt{\Delta}}{2}\Big(a_2 - \frac{k-\varepsilon'\sqrt{\Delta}}{2}a_3\Big)\Big]X_2;\end{aligned}$$

$$(17) \qquad x_3 + \frac{k-\varepsilon\sqrt{\Delta}}{2}x_2 = \left\{\begin{aligned} &\Big[d_0 + \frac{k+\varepsilon'\sqrt{\Delta}}{2}d_1 + \frac{k-\varepsilon\sqrt{\Delta}}{2}\Big(c_0 + \frac{k+\varepsilon'\sqrt{\Delta}}{2}c_1\Big)\Big]X_0\\
&+ \Big[d_2 - \frac{k-\varepsilon'\sqrt{\Delta}}{2}d_3 + \frac{k-\varepsilon\sqrt{\Delta}}{2}\Big(c_2 - \frac{k-\varepsilon'\sqrt{\Delta}}{2}c_3\Big)\Big]X_2,\end{aligned}\right.$$

(S) changeant $\mathfrak{D}(\varepsilon)$ en $\mathfrak{D}(\varepsilon')$, les seconds membres des équations (17) doivent être nuls quelles que soient les valeurs de X_0 et X_2; écrivant qu'ils sont identiquement nuls, on trouve qu'il doit exister entre les entiers a_i, b_i, c_i, d_i les relations suivantes :

$$(18) \qquad \left\{\begin{aligned}
&b_0 + \frac{k+\varepsilon'\sqrt{\Delta}}{2}b_1 - \frac{k+\varepsilon\sqrt{\Delta}}{2}a_0 - \frac{(k+\varepsilon\sqrt{\Delta})(k+\varepsilon'\sqrt{\Delta})}{4}a_1 = 0,\\
&b_2 - \frac{k-\varepsilon'\sqrt{\Delta}}{2}b_3 - \frac{k+\varepsilon\sqrt{\Delta}}{2}a_2 + \frac{(k+\varepsilon\sqrt{\Delta})(k-\varepsilon'\sqrt{\Delta})}{4}a_3 = 0,\\
&d_0 + \frac{k+\varepsilon'\sqrt{\Delta}}{2}d_1 + \frac{k-\varepsilon\sqrt{\Delta}}{2}c_0 + \frac{(k-\varepsilon\sqrt{\Delta})(k+\varepsilon'\sqrt{\Delta})}{4}c_1 = 0,\\
&d_2 - \frac{k-\varepsilon'\sqrt{\Delta}}{2}d_3 + \frac{k-\varepsilon\sqrt{\Delta}}{2}c_2 - \frac{(k-\varepsilon\sqrt{\Delta})(k-\varepsilon'\sqrt{\Delta})}{4}c_3 = 0.
\end{aligned}\right.$$

Les équations obtenues en changeant dans les équations (18) les signes de ε et ε' devront également être vérifiées par les entiers a_i, b_i, c_i, d_i, puisque la substitution (S) change $\mathfrak{D}(-\varepsilon)$ en $\mathfrak{D}(-\varepsilon')$.

Nous distinguerons deux cas suivant que ε est égal à ε' ou à $-\varepsilon'$; dans le premier cas, la substitution (S) est droite; dans le second, elle est gauche.

[2] *Substitutions droites.* — Le nombre ε' est égal à ε, et si nous remplaçons ε et ε' successivement par $+1$ et -1 dans les équations (18), nous obtenons entre les coefficients de (S) huit relations qui sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que cette substitution (S) laisse inaltérée chacune des deux droites $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{D}'$. Ces huit relations sont équivalentes aux suivantes :

$$(19)\quad \begin{cases} b_0 - m a_1 = 0, & -b_1 + a_0 + k a_1 = 0; \\ b_2 - k a_2 - m a_3 = 0, & b_3 - a_2 = 0; \\ d_0 + k c_0 - m c_1 = 0, & -d_1 + c_0 = 0; \\ d_2 - m c_3 = 0, & d_3 - c_2 + k c_3 = 0. \end{cases}$$

Ces équations (19) permettent d'exprimer les coefficients b_i et d_i en fonction des entiers a_i et c_i :

$$(20)\quad \begin{cases} b_0 = m a_1, & b_1 = a_0 + k a_1, & b_2 = k a_2 + m a_3, & b_3 = a_2. \\ d_0 = -k c_0 + m c_1, & d_1 = c_0, & d_2 = m c_3, & d_3 = c_2 - k c_3. \end{cases}$$

En donnant aux coefficients a_i et c_i des valeurs entières arbitraires, les valeurs des coefficients b_i et d_i données par les équations (20) sont également entières et on obtient ainsi toutes les substitutions (S) n'altérant pas le couple $[\varepsilon]$. Nous adopterons pour ces substitutions la notation générale Σ. Chacune d'elles dépend de huit entiers arbitraires a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2, b_3 que nous appellerons ses *entiers caractéristiques*.

[3] Nous indiquerons quelques propriétés des substitutions droites Σ :

1° Posons

$$(21)\qquad (ac)_{03} + (ac)_{12} = \varkappa, \qquad (ac)_{02} + m(ac)_{13} - k(ac)_{03} = \lambda;$$

les coefficients de Σ satisfont aux relations

$$(22)\quad \begin{cases} (ac)_{03} + (ac)_{12} = \varkappa, \\ (db)_{03} + (db)_{12} = -m\varkappa, \\ (ab)_{03} + (ab)_{12} = 0, \\ (cd)_{03} + (cd)_{12} = 0, \\ (ad)_{03} + (ad)_{12} = \lambda, \\ (bc)_{03} + (bc)_{12} = \lambda + k\varkappa. \end{cases} \qquad (23)\quad \begin{cases} (bc)_{31} + (ad)_{31} = -\varkappa, \\ (bc)_{02} + (ad)_{02} = m\varkappa, \\ (bc)_{23} + (ad)_{23} = 0, \\ (bc)_{01} + (ad)_{01} = 0, \\ (bc)_{03} + (ad)_{03} = \lambda, \\ (bc)_{12} + (ad)_{12} = \lambda + k\varkappa. \end{cases}$$

Si le couple $[\delta]$ est associé à la relation singulière réduite

$$(4) \qquad g + kh - mg' = 0,$$

ces équations sont celles d'une transformation singulière droite conduisant d'un système de périodes normales g, h, g' vérifiant la relation (4) à un système analogue.

Dans le cas général, les équations (22) et (23) trouvent une interprétation géométrique très simple dans la considération des complexes linéaires arithmétiques auxquels appartiennent les droites de la congruence dont les directrices sont $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{D}'$. En se reportant aux relations (R_1') et (R_2') du chapitre premier, on verra qu'elles expriment que la substitution Σ change

$$p_{03} + p_{12} = 0 \quad \text{en} \quad -\varkappa(P_{02} - mP_{31} + kP_{12}) + (\lambda + k\varkappa)(P_{03} + P_{12}) = 0$$

et

$$\varkappa(p_{02} - mp_{31} + kp_{12}) + \lambda(p_{03} + p_{12}) = 0 \quad \text{en} \quad P_{03} + P_{12} = 0.$$

2° Le degré $\mathfrak{D}$ de la substitution Σ est donné par l'équation

$$4\mathfrak{D} = (2\lambda + k\varkappa)^2 - \Delta\varkappa^2,$$

Δ étant l'invariant du couple $[\delta]$. On peut écrire également

$$\mathfrak{D} = (\lambda + \theta\varkappa)(\lambda + \theta'\varkappa),$$

θ désignant comme précédemment la quantité $\dfrac{k + \sqrt{\Delta}}{2}$ et θ' la quantité conjuguée obtenue en changeant le signe de $\sqrt{\Delta}$.

3° Si $\varkappa$ est nul, Σ laisse inaltéré le complexe Γ_1 ; c'est une substitution ordinaire d'ordre λ.

Si $\varkappa$ n'est pas nul, Σ est une substitution singulière d'indices $\varkappa$ et λ.

4° Considérons la substitution Σ^{-1} adjointe à Σ :

$$\Sigma^{-1} = \begin{vmatrix} c_2 - kc_3 & c_3 & -a_2 & -a_3 \\ mc_3 & c_2 & -(ka_2 + ma_3) & -a_2 \\ -c_0 & -c_1 & a_0 + ka_1 & a_1 \\ kc_0 - mc_1 & -c_0 & ma_1 & a_0 \end{vmatrix}.$$

C'est une substitution Σ dont les huit entiers caractéristiques sont :

$$c_2 - kc_3, \quad c_3, \quad -a_2, \quad -a_3, \quad -c_0, \quad -c_1, \quad a_0 + ka_1, \quad a_1.$$

Si Σ est ordinaire et d'ordre λ, Σ^{-1} est également ordinaire et de même ordre. Si Σ est singulière et d'indices $\varkappa$ et λ, Σ^{-1} est singulière, d'indices $-\varkappa$ et λ et de même degré que Σ.

Si Σ change un point M de $\mathfrak{D}$ en un point M_1 de la même droite et un point M′ de $\mathfrak{D}'$ en un point M_1' situé aussi sur $\mathfrak{D}'$, Σ^{-1} change M_1 en M et M_1' en M′.

5° Le produit de deux quelconques des substitutions Σ est une nouvelle substitution Σ et ces substitutions forment un groupe, ce qui était bien évident d'après leur définition.

6° Toute substitution Σ ordinaire d'ordre $-\lambda$ est égale au produit d'une substitution ordinaire d'ordre λ par la substitution σ d'entiers caractéristiques

$$a_0 = 1,\ a_1 = a_2 = a_3 = 0;\quad c_0 = c_1 = 0,\ c_2 = -1,\ c_3 = 0.$$

[**4**] *Substitutions gauches.* — Supposons que dans les équations (18) ε' soit égal à $-\varepsilon$ et écrivons qu'elles sont satisfaites pour les valeurs $+1$ et -1 de ε; on trouve ainsi entre les coefficients de la substitution (S) huit relations qui permettent d'exprimer $b_0, b_1, b_2, b_3, d_0, d_1, d_2, d_3$ en fonction de $a_0, a_1, a_2, a_3, c_0, c_1, c_2, c_3$. Les substitutions gauches Σ' à coefficients entiers changeant l'une dans l'autre les deux droites du couple $[\delta]$, s'obtiennent toutes en prenant comme valeurs des coefficients a_i et c_i, des entiers arbitraires que nous appellerons les huit entiers caractéristiques, les coefficients b_i et d_i s'en déduisant par les équations

$$(24)\quad \left\{\begin{array}{llll} b_0 = ka_0 - ma_1, & b_1 = -a_0, & b_2 = -ma_3, & b_3 = -a_2 + ka_3. \\ d_0 = -mc_1, & d_1 = -(c_0 + kc_1), & c_2 = -(kc_2 + mc_3), & d_3 = -c_2. \end{array}\right.$$

Ces substitutions Σ' ne forment pas un groupe; il est bien évident que le produit de deux quelconques d'entre elles est une substitution droite Σ.

[**5**] Énonçons quelques-unes de leurs propriétés :

1° Posons

$$(ac)_{03} + (ac)_{12} = \varkappa', \qquad (ac)_{02} + m(ac)_{13} + k(ac)_{12} = -\lambda';$$

les coefficients de Σ' vérifient les équations

$$(25)\quad \left\{\begin{array}{l} (ac)_{03} + (ac)_{12} = \varkappa', \\ (db_{03}) + (db)_{12} = -m\varkappa', \\ (ab)_{03} + (ab)_{12} = 0, \\ (cd)_{03} + (cd)_{12} = 0, \\ (ad)_{03} + (ad)_{12} = \lambda', \\ (bc)_{03} + (bc)_{12} = \lambda' + k\varkappa'. \end{array}\right. \qquad (26)\quad \left\{\begin{array}{l} (bc)_{31} + (ad)_{31} = \varkappa', \\ (bc)_{02} + (ad)_{02} = -m\varkappa', \\ (bc)_{23} + (ad)_{23} = 0, \\ (bc)_{01} + (ad)_{01} = 0, \\ (bc)_{03} + (ad)_{03} = \lambda' + k\varkappa', \\ (bc)_{12} + (ad)_{12} = \lambda'. \end{array}\right.$$

Ces équations s'interprètent de la même manière que les relations (22) et (23) relatives à une substitution droite. Si le couple $[\delta]$ est associé à la relation singulière réduite (4), ce sont les équations d'une transformation singulière gauche. Dans le cas général, elles expriment que Σ' change l'un dans l'autre les deux complexes

$$p_{03}+p_{12}=0, \qquad \varkappa'(p_{02}-mp_{31}+kp_{12})+\lambda'(p_{03}+p_{12})=0.$$

2° Le degré $\mathfrak{D}'$ de la substitution Σ' est donné par la relation

$$\mathfrak{D}'=(\lambda'+\theta\varkappa')(\lambda'+\theta'\varkappa')$$

qu'on peut écrire

$$4\mathfrak{D}'=(2\lambda'+k\varkappa')^2(-\Delta\varkappa'^2).$$

3° La substitution Σ' est ordinaire si $\varkappa'$ est nul, son ordre est alors égal à λ'; dans le cas contraire, elle est singulière et d'indices $\varkappa'$ et λ'.

4° L'adjointe Σ'^{-1} de Σ' est une substitution gauche ordinaire ou singulière en même temps que Σ'.

5° Toute substitution Σ' ordinaire d'ordre $-\lambda'$ est égale au produit d'une substitution ordinaire d'ordre λ' par la substitution σ d'ordre -1, précédemment définie.

6° Le produit d'une substitution droite Σ et d'une substitution gauche Σ' est une substitution gauche. La remarque suivante nous sera très utile dans la suite; considérons la substitution gauche particulière

$$\sigma'=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ k & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -k & -1 \end{vmatrix};$$

soit Σ' la substitution gauche d'entiers caractéristiques a_i et c_i, et Σ la substitution droite ayant les mêmes entiers caractéristiques, on a l'égalité symbolique

$$\Sigma'=\sigma'\Sigma.$$

Si σ'^{-1} désigne l'adjointe de σ' et Σ_1 la substitution droite $\sigma'\Sigma\sigma'^{-1}$, on a

$$\Sigma'=\Sigma_1\sigma'.$$

On en déduit qu'on obtient toutes les substitutions gauches Σ', et celles-là seulement, en faisant à volonté précéder ou suivre toutes les substitutions droites Σ de la substitution gauche particulière σ'.

3. — Transformations abéliennes et substitutions (S) du premier degré.

[**1**] Nous appliquerons les résultats généraux du paragraphe précédent à la recherche des substitutions (S) de degré *un* n'altérant pas un couple réduit [**δ**]; ce pro-

blème comprend comme cas particulier la détermination des transformations abéliennes ordinaires ou singulières du premier degré n'altérant pas une relation singulière. Nous avons déjà utilisé les conclusions auxquelles nous serons conduits (première partie, ch. IV) lorsque nous avons traité la multiplication complexe des fonctions abéliennes. En outre, les transformations abéliennes ordinaires d'ordre ± 1 n'altérant pas les modules d'un système de fonctions elliptiques, leur recherche n'est pas sans intérêt dans l'étude des fonctions abéliennes simplement singulières. Quant aux transformations singulières du premier degré, ou bien elles laissent également inaltérés les modules des fonctions abéliennes qui les subissent, ou bien elles conduisent toutes à deux systèmes distincts de modules et deux seulement. Enfin, la recherche des substitutions (S) du premier degré n'altérant pas un couple δ sera le point de départ de l'étude des groupes modulaires des corps quadratiques, et, dans la troisième partie, nous lui donnerons une importante application à la réduction des formes abéliennes et des formes à indéterminées conjuguées des corps quadratiques quelconques. Nous distinguerons plusieurs cas suivant que l'invariant Δ du couple δ est positif, négatif, pair ou impair; nous énoncerons simplement les résultats qui sont des conséquences directes des propositions du paragraphe précédent.

Invariant négatif.

Nous distinguerons trois cas suivant que cet invariant négatif Δ est pair et différent de -4, impair ou enfin égal -4.

1° *Invariant négatif pair* $\Delta = -4D$. Par hypothèse, D est supérieur à l'unité. Les substitutions Σ droites d'ordre $\varepsilon = \pm 1$, laissant inaltéré le couple réduit d'invariant $-4D$, sont toutes ordinaires et s'écrivent :

$$\Sigma = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -Da_1 & a_0 & -Da_3 & a_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ -Dc_1 & c_0 & -Dc_3 & c_2 \end{vmatrix}.$$

les entiers a_i et c_i étant liés par les relations

$$(ac)_{03} + (ac)_{12} = 0, \qquad (ac)_{02} - D(ac)_{13} = \varepsilon.$$

Les substitutions gauches d'ordre ± 1 s'obtiennent en faisant suivre les substitutions Σ de la suivante :

$$\sigma' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Les substitutions droites et gauches de degré I n'altérant pas le couple réduit d'invariant $-4D$ forment un groupe $\mathcal{G}$ dont les substitutions droites constituent un sous-groupe $\mathcal{G}_1$. Les substitutions droites d'ordre $+1$ forment un groupe G sous-groupe d'indice 2 de $\mathcal{G}_1$ et d'indice 4 de $\mathcal{G}$; on obtient toutes les substitutions de $\mathcal{G}_1$ en faisant suivre celles de G de la substitution unité et de la substitution

$$\sigma = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

On obtient toutes les substitutions de $\mathcal{G}$ en faisant suivre celles du groupe G de la substitution unité et des substitutions σ, σ', $(\sigma\sigma')$.

2° *Invariant négatif impair :* $\Delta = 1 - 4m$. — Les substitutions droites et gauches de degré I n'altérant pas le couple d'invariant Δ sont toutes ordinaires et forment un groupe $\mathcal{G}$ dont les substitutions d'ordre I forment un sous-groupe $\mathcal{G}_1$ dans lequel les substitutions droites d'ordre I constituent elles-mêmes un sous-groupe G. Les substitutions Σ de G s'écrivent :

$$\Sigma = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -ma_1 & a_0+a_1 & a_2-ma_3 & a_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ -c_0-mc_1 & c_0 & -mc_3 & c_2-c_3 \end{vmatrix},$$

les entiers a_i et c_i satisfaisant aux conditions

$$(ac)_{03} + (ac)_{12} = 0, \qquad (ac)_{02} - m(ac)_{13} - (ac)_{03} = 1.$$

Les substitutions de $\mathcal{G}_1$ sont Σ et $\Sigma\sigma$, celles de $\mathcal{G}$: Σ, $\Sigma\sigma$, $\Sigma\sigma'$, $\Sigma\sigma\sigma'$, si l'on pose :

$$\sigma = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \qquad \sigma' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

3° *Invariant* -4. — Les substitutions (S) n'altérant pas le couple réduit d'invariant -4 sont ordinaires ou singulières. Une substitution droite Σ s'écrit :

$$\Sigma = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ -c_1 & c_0 & -c_3 & c_2 \end{vmatrix};$$

elle est de degré I si les a_i et c_i vérifient les relations

$$(ac)_{03} + (ac)_{12} = \varkappa, \qquad (ac)_{02} - (ac)_{13} = \lambda, \qquad \lambda^2 + \varkappa^2 = 1.$$

Si $\lambda = \pm 1$, $\varkappa = 0$, Σ est ordinaire d'ordre λ; ces substitutions droites ordinaires d'ordre ± 1 forment un groupe $\mathcal{G}_1$ dont les substitutions droites d'ordre 1 ($\lambda = 1$, $\varkappa = 0$) forment un sous-groupe G.

Les substitutions singulières de degré 1 correspondent aux valeurs $\lambda = 0$, $\varkappa = \pm 1$; l'une d'elles est :

$$\sigma_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Les substitutions singulières droites de degré 1 s'obtiennent toutes en faisant suivre les substitutions de $\mathcal{G}_1$ de la substitution σ_1.

Le groupe $\mathcal{G}$ des substitutions ordinaires droites ou gauches d'ordre ± 1 n'altérant pas le couple réduit d'invariant -4 est obtenu en faisant suivre les substitutions de G de la substitution unité et de σ, σ' et $\sigma\sigma'$:

$$\sigma = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \qquad \sigma' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Le groupe $(\mathcal{G})$ des substitutions ordinaires ou singulières de degré 1 n'altérant pas le couple réduit d'invariant -4 s'obtient en faisant suivre les substitutions du du groupe $\mathcal{G}$ de la substitution unité et de σ_1.

Invariant positif.

Les couples $\mathfrak{C}$ d'invariant positif sont associés aux relations singulières entre les périodes normales g, h, g' d'un système de fonctions abéliennes singulières ou d'un système de fonctions quadruplement périodiques singulières. La recherche des substitutions (S) de degré 1 laissant inaltéré un tel couple est équivalente à la recherche des transformations abéliennes ordinaires ou singulières de degré 1 laissant inaltérée une relation singulière (¹). Ces transformations changent un système de fonctions abéliennes singulières en un autre lié à la même relation singulière et change de même un système de fonctions quadruplement périodiques singulières en un autre système analogue. Nous distinguerons trois cas suivant que l'invariant Δ est non carré pair ou impair ou bien carré parfait.

(¹) Cette recherche avait déjà été effectuée par M. Humbert, par une méthode différente (*Journal de Math. pures et appliquées*, 5e série, t. IX, 1903).

1° *Invariant positif pair non carré parfait :* $\Delta = 4D$. — La relation singulière réduite d'invariant 4D est :

$$g - Dg' = 0. \tag{27}$$

Les transformations abéliennes qui la laissent inaltérée sont droites ou gauches, ordinaires ou singulières. Le déterminant d'une transformation droite T s'écrit :

$$T = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ Da_1 & a_0 & Da_3 & a_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ Dc_1 & c_0 & Dc_3 & c_2 \end{vmatrix},$$

a_i et c_i étant des entiers qui, si T est de degré 1, vérifient les relations suivantes :

$$(ac)_{03} + (ac)_{12} = \varkappa, \qquad (ac)_{02} + D(ac)_{13} = \lambda, \qquad \lambda^2 - D\varkappa^2 = 1;$$

si $\varkappa = 0$, $\lambda = \pm 1$; T est ordinaire d'ordre λ. Les transformations ordinaires droites ou gauches de degré 1 forment un groupe $\mathcal{G}$ dont les transformations droites forment un sous-groupe $\mathcal{G}_1$; les transformations droites d'ordre $+1$ forment un groupe G sous-groupe de $\mathcal{G}_1$. Soit :

$$\Theta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \qquad \Theta' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Si T désigne une transformation quelconque du groupe G, les transformations de $\mathcal{G}_1$ sont T et $T\Theta$, celles de $\mathcal{G}$ sont T, $T\Theta$, $T\Theta'$, $T\Theta\Theta'$.

Soit $(\lambda_1, \varkappa_1)$ la plus petite solution positive de l'équation de Pell :

$$\lambda^2 - D\varkappa^2 = 1;$$

posons

$$\Theta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & -\varkappa_1 \\ 0 & 0 & -D\varkappa_1 & \lambda_1 \end{vmatrix}, \qquad \Theta_p = [\Theta_1]^p,$$

p étant un entier quelconque positif ou négatif et Θ_{-1} étant l'adjoint de Θ_1. Les transformations ordinaires ou singulières de degré 1 n'altérant pas la relation (27) forment un groupe $(\mathcal{G})$ dont on obtient toutes les transformations en faisant suivre celles de $\mathcal{G}$ de la transformation unité et de Θ_1 et toutes ses puissances Θ_p (I, chap. IV, § 1).

2° *Invariant positif impair non carré parfait* $\Delta = 4m + 1$. — La relation singulière réduite d'invariant $4m + 1$ est :

$$g + h - mg' = 0. \tag{28}$$

Comme dans le cas de l'invariant pair. les transformations abéliennes n'altérant pas cette relation sont ordinaires ou singulières. Une transformation droite de degré 1 s'écrit :

$$T = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ ma_1 & a_0 + a_1 & a_2 + ma_3 & a_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ -c_0 + mc_1 & c_0 & mc_3 & c_2 - c_3 \end{vmatrix}$$

et les entiers a_i et c_i vérifient la relation

$$(ac)_{03} + (ac)_{12} = \varkappa, \qquad (ac)_{02} + m(ac)_{13} - (ac)_{03} = \lambda, \qquad (2\lambda + \varkappa)^2 - \Delta\varkappa^2 = 4.$$

Si $\varkappa$ est nul, elle est ordinaire et d'ordre $\lambda = \pm 1$. Les transformations ordinaires de degré 1 forment un groupe $\mathcal{G}$; les transformations droites en constituent un sous-groupe $\mathcal{G}_1$ dans lequel les transformations d'ordre 1 forment elles-mêmes un sous-groupe G. Posons :

$$\Theta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \qquad \Theta' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Soient T les transformations de G, celles de $\mathcal{G}_1$ sont T et TΘ, celles de $\mathcal{G}$: T, TΘ, TΘ', T$\Theta\Theta'$.

Soit $(\lambda_1, \varkappa_1)$ la plus petite solution positive de l'équation de Pell :

$$(2\lambda + \varkappa)^2 - \Delta\varkappa^2 = 4$$

et soit Θ_1 la transformation singulière suivante :

$$\Theta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & -\varkappa_1 \\ 0 & 0 & -m\varkappa_1 & \lambda_1 + \varkappa_1 \end{vmatrix}.$$

les transformations ordinaires et singulières de degré 1 n'altérant pas la relation singulière (28) forment un groupe $(\mathcal{G})$; les transformations de $(\mathcal{G})$ s'obtiennent toutes en faisant suivre celles de $\mathcal{G}$ de Θ_1 et de toutes ses puissances positives et négatives, Θ_1^{-1} étant l'adjointe de Θ_1.

3° *Invariant carré parfait.* — Si la relation singulière est d'invariant carré parfait (cas elliptique), il n'y a pas de transformations singulières la laissant inaltérée, les transformations ordinaires forment un groupe $\mathcal{G}$ dont les opérations sont exactement les mêmes que dans le cas où l'invariant n'est pas carré parfait.

Remarque. — Aux groupes précédents correspondent des groupes de transformations sur les périodes d'un système de fonctions abéliennes singulières ou d'un système de fonctions quadruplement périodiques singulières; il est aisé de les trouver en se reportant aux formules (ρ_1) et (ρ_2) (I, chap. II, § 4).

CHAPITRE II.

Sur certains groupes de substitutions à deux variables analogues au groupe modulaire.

Dans le chapitre précédent, nous avons déterminé toutes les substitutions homographiques (S) à coefficients entiers qui laissent inaltéré un couple δ de droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ conjuguées et à coordonnées rationnelles par rapport au complexe linéaire arithmétique Γ : $p_{03}+p_{12}=0$, et nous avons représenté paramétriquement, à l'aide de deux variables complexes ξ et η, les points des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Aux groupes de substitutions (S) n'altérant pas un couple δ correspondent des groupes de substitutions W effectuées sur les deux variables ξ et η dont l'étude fera l'objet de ce chapitre et du suivant. Ces groupes sont remarquables par leur liaison avec les entiers des corps quadratiques et apparaissent comme l'extension naturelle du groupe modulaire aux corps algébriques du second degré. La plupart d'entre eux ont déjà été rencontrés dans d'autres recherches; c'est ainsi que nous retrouverons les groupes de Bianchi, le groupe de M. Picard et le groupe Picard-Bourget [1]. Ils comprennent cependant une classe de groupes hyperabéliens nouveaux que nous étudierons dans la suite sous le nom de groupes modulaires des corps $\sqrt{4N+1}$. Après avoir signalé l'analogie avec le groupe modulaire de tous ces groupes qui ont une origine géométrique commune, nous montrons qu'on peut les rattacher aux substitutions semblables arithmétiques de certaines formes quaternaires indéfinies de même nature et algébriquement réductibles à l'un ou l'autre des deux types

$$u_1^2+u_2^2+u_3^2-u_4^2, \qquad u_1^2+u_2^2-u_3^2-u_4^2,$$

[1] Nous désignons ainsi le groupe hyperabélien signalé par M. Picard au chapitre IV de son Mémoire *Sur les fonctions hyperabéliennes* (Journal de Math. pures et appliquées, 4e série, t. I, 1885) et étudié par M. Bourget dans sa Thèse.

ce qui permet d'apercevoir l'identité de ces groupes avec les groupes kleinéens et hyperabéliens (2). Ces derniers, relatifs aux corps quadratiques positifs, sont isomorphes à certains groupes de transformations d'Hermite effectuées sur les périodes d'un système de fonctions abéliennes singulières, et nous voyons se manifester à un nouveau point de vue ce caractère remarquable des fonctions abéliennes singulières de permettre l'extension aux corps quadratiques des problèmes posés dans le corps des entiers ordinaires par la théorie des fonctions elliptiques.

I. — Groupe modulaire d'un corps quadratique.

[**1**] Nous conservons les notations adoptées au chapitre Ier. Considérons le couple $[\delta]$ comprenant les deux droites

$$(1) \qquad \mathfrak{D}\begin{cases} x_1 = \theta x_0, \\ x_3 = -\theta' x_2; \end{cases} \qquad \mathfrak{D}'\begin{cases} x_1 = \theta' x_0, \\ x_3 = -\theta x_2, \end{cases}$$

θ et θ' désignant les nombres algébriques $\dfrac{k+\sqrt{\Delta}}{2}$ et $\dfrac{k-\sqrt{\Delta}}{2}$ où Δ est l'invariant du couple $[\delta]$. Les points de $\mathfrak{D}$ sont représentés paramétriquement par la variable ξ si l'on pose

$$(2) \qquad \frac{x_0}{1} = \frac{x_1}{\theta} = \frac{x_2}{\xi} = \frac{x_3}{-\theta'\xi};$$

ceux de $\mathfrak{D}'$ sont représentés paramétriquement par η en posant :

$$(3) \qquad \frac{x_0}{1} = \frac{x_1}{\theta'} = \frac{x_2}{\eta} = \frac{x_3}{-\theta\eta}.$$

Soit Σ une substitution droite d'entiers caractéristiques a_i et c_i, qui laisse inaltérées les deux droites $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{D}'$ prises séparément; elle change le point M de paramètre ξ situé sur $\mathfrak{D}$ en le point M′ de la même droite correspondant à la valeur ξ' du paramètre et ξ' est lié à ξ par la relation

$$\xi = \frac{(c_2 - \theta' c_3)\xi' + c_0 + \theta c_1}{(a_2 - \theta' a_3)\xi' + a_0 + \theta a_1}.$$

De la même manière, Σ change le point (η) de $\mathfrak{D}'$ en le point (η') de la même droite et l'on a :

$$\eta = \frac{(c_2 - \theta c_3)\eta' + c_0 + \theta' c_1}{(a_2 - \theta a_3)\eta' + a_0 + \theta' a_1}.$$

(2) Des propriétés analogues étaient connues pour les groupes déjà étudiés; il nous a cependant paru intéressant de les présenter ici sous une forme tout à fait générale et convenant aux groupes modulaires de tous les corps quadratiques réels ou imaginaires.

A la substitution droite Σ d'entiers caractéristiques a_i et c_i, il correspond la substitution à deux variables :

$$U = \left(\xi, \eta;\ \frac{(c_2 - \theta' c_3)\xi + c_0 + \theta c_1}{(a_2 - \theta' a_3)\xi + a_0 + \theta a_1},\ \frac{(c_2 - \theta c_3)\eta + c_0 + \theta' c_1}{(a_2 - \theta a_3)\eta + a_0 + \theta' a_1}\right).$$

On trouve de la même façon qu'à la substitution gauche Σ' d'entiers caractéristiques a_i et c_i, qui change $\mathfrak{D}$ en $\mathfrak{D}'$ et $\mathfrak{D}'$ en $\mathfrak{D}$, il correspond la substitution à deux variables :

$$V = \left(\xi, \eta;\ \frac{(c_2 - \theta c_3)\eta + c_0 + \theta' c_1}{(a_2 - \theta a_3)\eta + a_0 + \theta' a_1},\ \frac{(c_2 - \theta' c_3)\xi + c_0 + \theta c_1}{(a_2 - \theta' a_3)\xi + a_0 + \theta a_1}\right).$$

Cette correspondance entre les substitutions Σ et Σ' d'une part, U et V d'autre part, jouit des propriétés suivantes :

1° A une substitution Σ ou Σ' correspond une seule substitution U ou V et *réciproquement.*

2° A la substitution Σ^{-1} adjointe à Σ correspond la substitution U^{-1} inverse de U ; de même à Σ'^{-1} correspond V^{-1} inverse de V.

3° Au produit de deux des substitutions Σ ou Σ' correspond le produit des deux substitutions à deux variables U ou V correspondantes.

4° A un groupe de substitutions (S) n'altérant pas le couple [$\mathfrak{c}$] il correspond un groupe de substitutions à deux variables et les deux groupes sont *isomorphes holoèdriquement.*

Nous adopterons la notation W pour une substitution à deux variables de l'un ou l'autre des deux types U et V ; les substitutions U seront dites de première espèce ou *droites*, les V étant de seconde espèce ou *gauches*.

Toute substitution gauche V est le produit d'une substitution droite U par la substitution

$$V_0 = (\xi, \eta;\ -\eta, -\xi),$$

et le produit d'une substitution droite quelconque U par V_0 est une substitution gauche. Ceci résulte de l'application aux substitutions à deux variables de la proposition analogue relative aux substitutions (S).

Si l'invariant Δ est positif, les coefficients des substitutions W sont réels; si Δ est négatif, ils sont imaginaires. Précisons la nature de ces coefficients dans le groupe des substitutions W isomorphe au groupe des substitutions Σ et Σ' ordinaires ou singulières n'altérant pas le couple réduit d'invariant Δ : Si Δ est pair, égal à 4D et tel que D ne soit pas congru à 1 suivant le module 4, ce sont des entiers quelconques du corps $\sqrt{D}$; si $D \equiv 1 \pmod 4$, ce sont des entiers du corps $\sqrt{D}$ de la forme $M + N\sqrt{D}$, M et N étant deux entiers ordinaires quelconques; si Δ est impair, ce sont des entiers quelconques du corps $\sqrt{\Delta}$.

[**2**] Appelons *groupe modulaire du corps quadratique* $\sqrt{\Delta}$ réel ou imaginaire le groupe des substitutions de l'un ou l'autre des deux types (droit et gauche)

$$(4) \qquad \left(\xi, \eta;\ \frac{\alpha\xi+\beta}{\gamma\xi+\delta}, \frac{\alpha'\eta+\beta'}{\gamma'\eta+\delta'}\right); \qquad \left(\xi, \eta;\ \frac{a\eta+b}{c\eta+d}, \frac{a'\xi+b'}{c'\xi+d'}\right);$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, a, b, c, d$ sont des entiers du corps $\sqrt{\Delta}$, $\alpha', \beta', \gamma', \delta', a', b', c', d'$ étant leurs conjugués; on suppose en outre que ces entiers vérifient les relations

$$\alpha\delta - \beta\gamma = +1, \qquad ad - bc = -1;$$

$\alpha\delta - \beta\gamma$ et $ad - bc$ sont appelés les *déterminants* des substitutions (4). On vérifie très facilement que les substitutions du groupe modulaire forment bien un groupe. Les substitutions (4) de déterminant ± 1 forment aussi un groupe que nous appellerons *groupe arithmétique du corps quadratique* $\sqrt{\Delta}$. Le groupe modulaire est un sous-groupe invariant d'indice 2 du groupe arithmétique; les substitutions de celui-ci étant toutes obtenues en faisant suivre celles du groupe modulaire de la substitution unité et de $(\xi, \eta;\ -\eta,\ -\xi)$.

Ces définitions étant adoptées, soit $\mathcal{G}$ le groupe des substitutions (S) ordinaires de degré 1 n'altérant pas le couple réduit d'invariant Δ, il lui correspond un groupe $(\mathcal{G})$ de substitutions U et V à deux variables :

$(\mathcal{G})$ *est le groupe arithmétique du corps* $\sqrt{D}$ *si* Δ *est pair et égal à* $4D$ ($D \not\equiv 1$, mod 4), *et du corps* $\sqrt{\Delta}$ *si* Δ *est impair.*

Si $\Delta = 4(4N+1)$, $(\mathcal{G})$ est le sous-groupe du groupe arithmétique du corps $\sqrt{4N+1}$ formé par les substitutions de déterminant ± 1 dont les coefficients sont de la forme $A + B\sqrt{4N+1}$, A et B étant des entiers ordinaires. En outre :

Le groupe modulaire du corps $\sqrt{D}$ *est isomorphe holoèdriquement au groupe des substitutions ordinaires d'ordre* 1 *laissant inaltéré un couple* δ *d'invariant* $4D$ *si* $D \not\equiv 1 \pmod 4$, *et d'invariant* D *si* $D \equiv 1 \pmod 4$.

Nous désignerons par $(\mathcal{G}_a)$ le groupe arithmétique d'un corps quadratique, $(\mathcal{G})$ le groupe modulaire et (G) le sous-groupe de $(\mathcal{G})$ formé par les substitutions modulaires droites. Et à moins d'indications contraires, nous supposerons dans la suite que nous ne considérons que les couples δ dont l'invariant, s'il est pair, n'est pas de forme $4(4N+1)$. En se reportant aux notations du chapitre précédent, on voit que $(\mathcal{G}_a)$ est isomorphe au groupe $\mathcal{G}$, $(\mathcal{G})$ à $\mathcal{G}_1$ et (G) à G, l'isomorphisme étant toujours holoèdrique. Soient U les substitutions du groupe (G) d'un corps $\sqrt{\Delta}$, les substitutions de $(\mathcal{G})$ sont U et UV_0 en posant $V_0 = (\xi, \eta, -\eta, -\xi)$; celles de $(\mathcal{G}_a)$ sont U, UV_0, UU_{-1} et UV_0U_{-1} si l'on pose $U_{-1} = (\xi, \eta;\ -\xi,\ -\eta)$.

Les groupes arithmétique et modulaire des corps réels sont aussi holoèdriquement isomorphes à certains groupes de transformations d'Hermite signalés au chapitre précédent; celles-ci conservant les modules des fonctions abéliennes singulières qui les subissent, ces modules, considérés comme fonctions de ξ et η, sont des fonctions des groupes arithmétique et modulaire des corps réels.

Les considérations précédentes montrent que l'interprétation géométrique des fonctions abéliennes singulières et de leurs transformations met très facilement en évidence la liaison de ces dernières avec les corps quadratiques. Un grand nombre de problèmes relatifs à ces corps se rattachant à des questions de géométrie réglée, on voit en outre, qu'au point de vue de la théorie des nombres, il ne serait peut-être pas sans intérêt de rechercher, un peu plus que nous l'avons fait, les rapports qui existent entre les tableaux de seize lettres $\Sigma(n, n)$, les formes binaires à coefficients entiers dans un corps du second degré, et les groupes modulaires des corps quadratiques d'une part, les complexes linéaires arithmétiques et les divers ensembles de droites qui s'y rattachent d'autre part. On verra dans la troisième partie une nouvelle application de cette idée à la réduction des formes abéliennes et des formes à indéterminées conjuguées des corps quadratiques.

[**3**] L'analogie des groupes modulaires des corps quadratiques et du groupe modulaire proprement dit est très facile à poursuivre. On sait toute l'importance des *sous-groupes de congruence* dans l'étude de ce dernier et des *fonctions modulaires*. Des sous-groupes analogues existent dans les groupes modulaires des corps du second degré. Posons dans l'expression (4) des substitutions du groupe modulaire du corps $\sqrt{\mathrm{D}}$:

$$a = a_0 + a_1\omega, \qquad b = b_0 + b_1\omega, \qquad c = c_0 + c_1\omega, \qquad d = d_0 + d_1\omega,$$

ω étant égal à $\sqrt{\mathrm{D}}$ si $\mathrm{D} \not\equiv 1 \pmod 4$, et à $\dfrac{1+\sqrt{\mathrm{D}}}{2}$ si $\mathrm{D} \equiv 1 \pmod 4$. Les substitutions du groupe $(\mathcal{G}_a)$, dont les coefficients satisfont aux congruences

$$a_1 \equiv b_1 \equiv c_1 \equiv d_1 \pmod n$$

forment un sous-groupe d'indice fini du groupe modulaire $(\mathcal{G})$; nous l'appellerons *sous-groupe de congruence relatif au module n*. Par exemple, le groupe de substitutions W isomorphe au groupe des substitutions (S) ordinaires de degré 1 n'altérant pas un couple [δ] d'invariant $\Delta = 4(4\mathrm{N}+1)$ est le sous-groupe de congruence relatif au module 2 du groupe arithmétique du corps $\sqrt{4\mathrm{N}+1}$. Le groupe modulaire du corps $\sqrt{\Delta'}$ pour lequel $\Delta' = n^2\Delta$ est le sous-groupe de congruence relatif au module n du corps $\sqrt{\mathrm{D}}$.

Considérons maintenant les substitutions modulaires du corps $\sqrt{\mathrm{D}}$ dont les coefficients vérifient les congruences

$$a \equiv a' \equiv d \equiv d' \equiv 1, \qquad b \equiv b' \equiv c \equiv c' \equiv 0 \pmod n;$$

elles forment un groupe qui est un sous-groupe d'indice fini du groupe modulaire du corps $\sqrt{D}$; nous l'appellerons *sous-groupe de congruence principal relatif au module n* pour rappeler son analogie avec le sous-groupe correspondant du groupe modulaire proprement dit.

Nous n'insisterons pas sur l'extension aux groupes $(\mathcal{G})$ des notions relatives au groupe modulaire; nous allons donner de tous ces groupes une même propriété qui nous permettra de les situer dans les groupes connus à deux variables.

2. — Les groupes modulaires et les formes quadratiques quaternaires.

Appelons, suivant l'usage, *substitution semblable* ou *substitution automorphe* d'une forme quadratique toute substitution à coefficients réels et de déterminant ± 1 qui n'altère pas cette forme et substitution semblable arithmétique, une substitution automorphe à coefficients entiers. Nous montrerons que le groupe modulaire d'un corps quadratique est isomorphe à un groupe de substitutions semblables arithmétiques d'une forme quaternaire indéfinie à coefficients entiers réductible à l'un ou l'autre des types

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - u_4^2, \qquad u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2,$$

suivant que le corps quadratique considéré est imaginaire ou réel.

[**1**] Rappelons d'abord qu'en vertu d'une convention faite sur le choix de la représentation paramétrique des points des deux droites d'un couple δ, un groupe de substitutions à deux variables isomorphe à un groupe de substitutions (S) laissant inaltéré un couple $[\delta]$ réduit est identique à un groupe de substitutions à deux variables isomorphe à un groupe de substitutions (S) n'altérant pas un couple δ quelconque de même invariant que $[\delta]$. Rappelons également qu'au couple δ d'invariant Δ formé par les deux droites D et D' conjuguées par rapport au complexe Γ : $p_{03} + p_{12} = 0$ de l'espace (e), dont les coordonnées sont :

$$(5) \quad p_{01} = E,\ p_{23} = D,\ p_{02} = C,\ p_{31} = A,\ p_{03} = \frac{B + \varepsilon\sqrt{\Delta}}{2},\ p_{12} = -\frac{B - \varepsilon\sqrt{\Delta}}{2},\ \varepsilon = \pm 1,$$

nous avons associé la pseudosphère (Σ) de l'espace (E) :

$$D(X_3^2 - X_1X_2) + AX_0X_1 + CX_0X_2 + BX_0X_3 + EX_0^2 = 0.$$

A tout point (X_0, X_1, X_2, X_3) de l'espace (E), il correspond dans l'espace (e) la droite d du complexe Γ dont les coordonnées sont :

$$(6) \qquad p_{01} = \frac{X_3^2 - X_1X_2}{X_0},\ p_{23} = 1,\ p_{02} = X_1,\ p_{31} = X_2,\ p_{03} = -X_3,\ p_{12} = X_3.$$

A tout point de (Σ), il correspond une droite du complexe Γ rencontrant les deux droites D et D'; inversement, à toute droite de la congruence qui admet comme directrices D et D', il correspond un point de la pseudosphère (Σ).

A une substitution homographique (S) de l'espace (e)

$$(\mathrm{S})\quad \begin{cases} x_0 = a_0X_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3, \\ x_1 = b_0X_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3, \\ x_2 = c_0X_0 + c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3, \\ x_3 = d_0X_0 + d_1X_1 + d_2X_2 + d_3X_3, \end{cases}$$

supposée ordinaire, c'est-à-dire n'altérant pas le complexe Γ, il correspond une substitution linéaire sur les coordonnées pluckériennes p_{ik} d'une droite quelconque de Γ et une substitution linéaire (T) sur les coordonnées X_0, X_1, X_2, X_3 d'un point de (E) et sur la quantité $\frac{X_3^2 - X_1X_2}{X_0}$. Cette substitution (T) est la suivante :

$$(\mathrm{T})\quad \begin{cases} X_0 = (ab)_{01}X_0' + (ab)_{31}X_1' + (ab)_{02}X_2' + [(ab)_{03} - (ab)_{12}]X_3' + (ab)_{23}\dfrac{X_3'^2 - X_1'X_2'}{X_0'}, \\ X_1 = (db)_{01}X_0' + (db)_{31}X_1' + (db)_{02}X_2' + [(db)_{03} - (db)_{12}]X_3' + (db)_{23}\dfrac{X_3'^2 - X_1'X_2'}{X_0'}, \\ X_2 = (ac)_{01}X_0' + (ac)_{31}X_1' + (ac)_{02}X_2' + [(ac)_{03} - (ac)_{12}]X_3' + (ac)_{23}\dfrac{X_3'^2 - X_1'X_2'}{X_0'}, \\ X_3 = (ad)_{01}X_0' + (ad)_{31}X_1' + (ad)_{02}X_2' + [(ad)_{03} - (ad)_{12}]X_3' + (ad)_{23}\dfrac{X_3'^2 - X_1'X_2'}{X_0'}, \\ \dfrac{X_3^2 - X_1X_2}{X_0} = (cd)_{01}X_0' + (cd)_{31}X_1' + (cd)_{02}X_2' + [(cd)_{03} - (cd)_{12}]X_3' + (cd)_{23}\dfrac{X_3'^2 - X_1'X_2'}{X_0'}. \end{cases}$$

Si la substitution (S) laisse inaltéré le couple δ, elle change les unes dans les autres les droites de la congruence qui admet comme directrices les deux droites D et D' du couple δ; la substitution (T) change les uns dans les autres les points de (Σ). Supposons que (X_0, X_1, X_2, X_3) soit un point de (Σ), (X_0', X_1', X_2', X_3') est aussi un point de (Σ); $\frac{X_3^2 - X_1X_2}{X_0}$ et $\frac{X_3'^2 - X_1'X_2'}{X_0'}$ sont des fonctions linéaires respectivement de X_0, X_1, X_2, X_3 et X_0', X_1', X_2', X_3', et, pour les points de (Σ), (T) se réduit à une substitution linéaire (s) sur les coordonnées X_0, X_1, X_2, X_3. Supposons, pour simplifier, D égal à l'unité, (s) s'écrit :

$$(s)\quad \begin{cases} X_0 = [(ab)_{01} - E(ab)_{23}]X_0' + [(ab)_{31} - A(ab)_{23}]X_1' + [(ab)_{02} - C(ab)_{23}]X_2' + [(ab)_{03} - (ab)_{12} - B(ab)_{23}]X_3', \\ X_1 = [(db)_{01} - E(db)_{23}]X_0' + [(db)_{31} - A(db)_{23}]X_1' + [(db)_{02} - C(db)_{23}]X_2' + [(db)_{03} - (db)_{12} - B(db)_{23}]X_3', \\ X_2 = [(ac)_{01} - E(ac)_{23}]X_0' + [(ac)_{31} - A(ac)_{23}]X_1' + [(ac)_{02} - C(ac)_{23}]X_2' + [(ac)_{03} - (ac)_{12} - B(ac)_{23}]X_3', \\ X_3 = [(ad)_{01} - E(ad)_{23}]X_0' + [(ad)_{31} - A(ad)_{23}]X_1' + [(ad)_{02} - C(ad)_{23}]X_2' + [(ad)_{03} - (ad)_{12} - B(ad)_{23}]X_3'. \end{cases}$$

Supposons que le premier membre de l'équation de (Σ) soit une forme quadratique $F(X_0, X_1, X_2, X_3)$ à coefficients entiers et que la substitution ordinaire (S) soit à coefficients entiers de degré 1 et n'altérant pas le couple δ associé à (Σ), on voit facilement que (s) est à coefficients entiers et de degré 1 et que :

A tout groupe de substitutions ordinaires (S) *de degré* 1 *correspond un groupe de substitutions semblables arithmétiques* (s) *d'une forme quadratique* F.

Considérons maintenant le groupe des substitutions à deux variables isomorphe au groupe des (S) laissant inaltéré un couple δ quelconque d'invariant Δ, on voit que :

Le groupe modulaire et le groupe arithmétique d'un corps quadratique quelconque $\sqrt{D}$ *sont isomorphes à deux groupes de substitutions semblables arithmétiques d'une forme quadratique* F.

On peut prendre pour F le premier membre de l'équation d'une pseudosphère quelconque d'invariant D si $D \equiv 1 \pmod 4$ et $4D$ dans le cas contraire; en particulier, on peut toujours prendre, et d'une infinité de façons, une forme F dont le coefficient D soit égal à 1.

La propriété précédente appartient aussi aux sous-groupes et en particulier aux sous-groupes de congruence des groupes arithmétiques et modulaires des corps quadratiques.

Si l'invariant Δ de δ est négatif, F est algébriquement réductible au type $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - u_4^2$, et *le groupe modulaire d'un corps quadratique imaginaire est un groupe kleinéen.* Si Δ est positif, F est réductible au type $u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2$, et *le groupe modulaire d'un corps quadratique réel est un groupe hyperabélien.* Un tel groupe est isomorphe à un groupe de transformations d'Hermite effectuées sur les périodes g, h, g' d'un système de fonctions abéliennes; il est d'ailleurs très facile de rattacher ces transformations abéliennes aux substitutions (T) et (s) correspondantes.

[2] La correspondance établie entre les pseudosphères (Σ) et les couples δ permet d'étendre aux formes quadratiques F certains résultats relatifs à l'équivalence des couples δ. On sait que toute quadrique $F = 0$ peut, par une substitution isogonale, être transformée en un plan réel quand F est une forme indéfinie; c'est au fond ce que nous avons fait en définissant les couples $[\delta]$ *réduits*; ceux-ci correspondent en effet aux pseudosphères Σ réduites à des plans

$$X_1 + kX_3 - mX_2 = 0$$

où $k = \pm 1$, $\Delta = k^2 + 4m$. Toutes les formes F associées aux couples δ de même invariant Δ admettent des groupes de substitutions semblables arithmétiques tous isomorphes au groupe arithmétique (ou modulaire) du corps $\sqrt{\Delta}$ si Δ est impair, $\sqrt{\frac{\Delta}{4}}$ si Δ est pair. Dans le cas où Δ est pair et égal à $4D$, on peut prendre comme forme F la suivante :

$$X_3^2 - X_1X_2 - DX_0^2,$$

et c'est ainsi que MM. Picard et Bourget ont étudié les groupes modulaires des corps $\sqrt{D}$ où D est positif et non congru à 1 (mod 4).

Si Δ est impair, on peut prendre :

$$F = X_3^2 - X_1X_2 + X_0X_3 - nX_0^2.$$

A la pseudosphère $F=0$ correspond un couple δ d'invariant $\Delta = 4n+1$. On trouve aisément une substitution changeant δ en le couple réduit $[\delta]$ de même invariant; on en déduit alors les substitutions ordinaires (S) de degré 1 n'altérant pas δ (II, ch. I, § 2). Le groupe des substitutions semblables de la forme F isomorphe au groupe modulaire du corps $\sqrt{\Delta}$ comprend les substitutions

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} X_0 &= [(ab)_{01}+n]X_0' + (ab)_{31}X_1' + (ab)_{02}X_2' + [(ab)_{03}-(ab)_{12}-(ab)_{23}]X_3',\\ X_1 &= [(db)_{01}+n]X_0' + (db)_{31}X_0' + (db)_{02}X_2' + [(db)_{03}-(db)_{12}-(db)_{23}]X_3',\\ X_2 &= [(ac)_{01}+n]X_0' + (ac)_{31}X_1' + (ac)_{02}X_2' + [(ac)_{03}-(ac)_{12}-(ac)_{23}]X_3',\\ X_3 &= [(ad)_{01}+n]X_0' + (ad)_{31}X_1' + (ad)_{02}X_2' + [(ad)_{03}-(ad)_{12}-(ad)_{23}]X_3',\end{aligned}\right.$$

dans lesquelles a_i, b_i, c_i, d_i vérifient l'un ou l'autre des systèmes de relations

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{lllll} c_0 = na_2, & c_1 = -na_3 - a_1, & c_2 = a_0 - a_2, & c_3 = -a_1, & (ab)_{03} + (ab)_{12} = 0;\\ d_0 = -b_0 - nb_2, & d_1 = nb_3, & d_2 = -b_0, & d_3 = b_1 - b_3, & (ab)_{01} - (ab)_{03} - n(ab)_{23} = \varepsilon \end{array}\right.$$

et

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{lllll} c_0 = -a_0 - na_2, & c_1 = na_3, & c_2 = -a_0, & c_3 = a_1 - a_3, & (ab)_{03} + (ab)_{12} = 0;\\ d_0 = nb_2, & d_1 = -b_1 - nb_3, & d_2 = b_0 - b_2, & d_3 = -b_1, & (ab)_{01} - (ab)_{03} - n(ab)_{23} = -\varepsilon, \end{array}\right.$$

où $\varepsilon = \pm 1$. Si l'on pose $\omega = \frac{1+\sqrt{\Delta}}{2}$, $\omega' = \frac{1-\sqrt{\Delta}}{2}$, et

$$\frac{X_0}{\xi - \eta} = \frac{X_1}{(\omega - \omega')\xi\eta} = \frac{X_2}{\omega - \omega'} = \frac{X_3}{\omega\eta - \omega'\xi}$$

aux substitutions automorphes (7) de F correspondent sur ξ et η les substitutions du groupe arithmétique du corps $\sqrt{\Delta}$; si $\varepsilon = +1$, on a les substitutions du groupe modulaire.

Remarques : I. — Indépendamment de l'intérêt que présente la considération des formes F pour donner aux groupes modulaires de tous les corps quadratiques une même origine commune, nous ferons remarquer que les propositions précédentes montrent qu'on peut étudier ces groupes en effectuant la réduction continuelle des formes F. C'est d'ailleurs à ce point de vue que l'étude de certains d'entre eux a déjà été envisagée.

II. — Le cas de l'entier n quelconque et non égal à l'unité conduit à des groupes analogues aux groupes modulaires et dont les coefficients sont des entiers de certains modules que nous avons déjà signalés et sur lesquels nous reviendrons dans un autre travail.

3. — Sur quelques groupes modulaires particuliers.

[**1**] Les groupes arithmétique et modulaire des corps quadratiques imaginaires ne diffèrent pas de certains groupes kleinéens déjà étudiés; les substitutions effectuées sur les deux variables ξ et η étant imaginaires conjuguées, la considération des deux substitutions effectuées simultanément sur ξ et η ne présente pas un grand intérêt et on peut se borner à étudier le groupe G des substitutions droites effectuées sur ξ.

Dans le corps des entiers complexes, ce groupe G est le groupe connu sous le nom de *groupe de Picard*(¹); il comprend les substitutions linéaires $\left(\xi, \dfrac{\alpha\xi+\beta}{\gamma\xi+\delta}\right)$ où α, β, γ, δ sont des entiers complexes vérifiant la relation $\alpha\delta-\beta\gamma=\pm 1$ pour le groupe arithmétique et $\alpha\delta-\beta\gamma=1$ pour le groupe modulaire. Ce groupe se rattache, comme nous l'avons vu, aux substitutions semblables de la forme

$$X_3^2 - X_1X_2 + X_0^2.$$

Si l'on considère le groupe des substitutions linéaires $\left(\xi, \dfrac{\alpha\xi+\beta}{\gamma\xi+\delta}\right)$, pour lesquelles $(\alpha\delta-\beta\gamma)^2=\pm 1$, on voit facilement qu'il se rattache aux substitutions (S) singulières n'altérant pas un couple δ d'invariant -4. Le groupe de Picard n'est pas proprement discontinu dans le plan de la variable ξ, mais il possède dans l'espace à trois dimensions un domaine fondamental qui présente de grandes analogies avec celui du groupe modulaire dans le plan. C'est M. Picard qui l'a obtenu le premier, en réduisant une forme d'Hermite à indéterminées conjuguées. Ces formes se rattachent directement aux groupes arithmétique et modulaire du corps $\sqrt{-1}$; nous le montrerons dans la troisième Partie. Leur étude a été faite dans le cas des formes définies par Hermite, qui les avait rencontrées en traitant par une méthode nouvelle la représentation d'un nombre par une somme de quatre carrés (²). Le cas des formes indéfinies a fait l'objet d'un Mémoire de M. Picard (³) qui leur a appliqué la méthode de

(¹) E. Picard, *Bulletin Société mathématique de France*, XII (1883-84); *Math. Annalen*, XXXIX (1891).

(²) Hermite, *Sur la théorie des formes quadratiques*, second Mémoire (Journal de Crelle, t. XLVII, et Œuvres, t. I).

(³) E. Picard, *Mémoire sur les formes quadratiques binaires indéfinies à indéterminées conjuguées* (Acta Mathematica, t. V).

la réduction continuelle par laquelle Hermite ramenait l'étude des formes réelles indéfinies à la réduction d'une forme définie dépendant de certains paramètres variant d'une façon continue.

Le cas des corps négatifs quelconques a été envisagé par Bianchi [1]. Les groupes G correspondants ne sont pas proprement discontinus, mais ont un domaine fondamental dans l'espace à trois dimensions. Ce domaine a été déterminé par Bianchi pour un certain nombre de corps, en utilisant la méthode des symétries; mais cette méthode n'est pas susceptible de s'appliquer à tous les groupes G. Bianchi a rattaché ces groupes aux formes à indéterminées conjuguées et aux substitutions semblables de certaines formes quaternaires; c'est sur la connaissance du domaine fondamental des groupes G qu'il a fait reposer la réduction des formes à indéterminées conjuguées; nous aurons à revenir sur ce point dans la troisième Partie en traitant des formes abéliennes.

[**2**] Les groupes arithmétique et modulaire d'un corps réel $\sqrt{\Delta}$ sont des groupes hyperabéliens, c'est-à-dire des groupes de substitutions à deux variables de l'un ou l'autre type :

$$\left(\xi, \eta; \frac{a\xi + b}{c\xi + d}, \frac{a'\eta + b'}{c'\eta + d'}\right), \qquad \left(\xi, \eta; \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}, \frac{\alpha'\xi + \beta'}{\gamma'\xi + \delta'}\right),$$

discontinus dans un certain domaine de valeurs de ξ et η. Il est très facile de démontrer directement qu'ils sont discontinus à l'intérieur du domaine formé par deux cercles quelconques de rayons finis des plans analytiques (ξ) et (η) ne coupant pas l'axe réel. Cette propriété résulte aussi des théorèmes généraux démontrés par M. Picard relativement aux groupes hyperabéliens qui se rattachent aux substitutions semblables des formes quadratiques du type $u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2$. Bien entendu, nous supposons que Δ n'est pas carré parfait; dans ce cas, le groupe modulaire résulterait de la superposition de deux groupes modulaires ordinaires.

Si Δ n'est pas congru à 1 suivant le module 4, le groupe modulaire du corps $\sqrt{\Delta}$ est le groupe Picard-Bourget que M. Picard a rattaché aux transformations abéliennes d'ordre 1 n'altérant pas la relation singulière

$$h^2 - gg' = 4\Delta;$$

plus exactement, c'est ce groupe dans lequel on aurait changé ξ en $-\xi$ (en supposant qu'on adopte les notations de M. Bourget). Le groupe arithmétique est obtenu en adjoignant aux substitutions fondamentales du groupe modulaire la suivante :

---

[1] L. Bianchi, *Sur certains groupes de substitutions linéaires* (Math. Annalen, t. XL, XLII et XLIII).

$(\xi, \eta; -\xi, -\eta)$. Le groupe modulaire du corps $\sqrt{\Delta}$ comprend cinq *substitutions fondamentales :*

$$(\xi, \eta; \xi - 1, \eta - 1), \qquad (\xi, \eta; \xi + \sqrt{\Delta}, \eta - \sqrt{\Delta}), \qquad \left(\xi, \eta; -\frac{1}{\xi}, -\frac{1}{\eta}\right),$$
$$\left(\xi, \eta; (a - c\sqrt{\Delta})^2\xi, (a + c\sqrt{\Delta})^2\eta\right), \qquad (\xi, \eta; -\eta, -\xi),$$

où a et c désignent la plus petite solution positive des deux équations de Pell :

$$a^2 - \Delta c^2 = \pm 1.$$

Cette réduction est due à M. Bourget qui a également, par la considération des fonctions ϑ d'arguments nuls, déterminé un certain nombre de fonctions du groupe.

Si $\Delta \equiv 1 \pmod 4$, le groupe arithmétique du corps $\sqrt{\Delta}$ est le groupe hyperabélien que nous avons déduit des transformations d'Hermite n'altérant pas une relation singulière d'invariant Δ et que nous étudierons au chapitre suivant.

CHAPITRE III.

Sur les groupes modulaires des corps quadratiques réels $\sqrt{4n+1}$.

Dans les chapitres précédents, nous avons condensé dans un même exposé un ensemble de propriétés fondamentales communes aux groupes modulaires de tous les corps quadratiques. On peut poursuivre l'analogie de ces groupes avec le groupe modulaire proprement dit et rechercher, en particulier, pour les fonctions hyperabéliennes correspondant aux groupes des corps réels les propriétés spéciales de ces fonctions qui les rapprochent des fonctions modulaires, les fonctions abéliennes singulières devant jouer dans cette recherche le même rôle que les fonctions elliptiques dans la théorie des fonctions modulaires. C'est là un ordre de considérations fort difficiles qui seraient aussi intéressantes pour la théorie des fonctions que pour la théorie des nombres algébriques. Avant d'entreprendre cette recherche, il était nécessaire de faire l'étude arithmétique des groupes modulaires des corps $\sqrt{4n+1}$; nous la résumerons très brièvement, afin de ne pas allonger par trop ce travail; nous la reprendrons, en la complétant par l'étude des fonctions du groupe, dans un autre travail que nous publierons très prochainement (1).

[1] Soit $(\mathcal{G}_a)$ le groupe arithmétique, $(\mathcal{G})$ le groupe modulaire et (G) le groupe des substitutions modulaires droites du corps $\sqrt{\Delta} = \sqrt{4n+1}$. Les substitutions de

(1) Une partie de ces résultats a fait l'objet d'une Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (21 février 1910).

ces groupes sont de l'un ou l'autre des deux types

$$\left(\xi, \eta; \frac{a\xi + b}{c\xi + d}, \frac{a'\eta + b'}{c'\eta + d'}\right), \qquad \left(\xi, \eta; \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}, \frac{\alpha'\xi + \beta'}{\gamma'\xi + \delta'}\right);$$

$a, b, c, \ldots, \gamma, \delta$ sont des entiers du corps $\sqrt{\Delta}$, c'est-à-dire des nombres algébriques de la forme $M + N\omega$, M et N étant des entiers ordinaires quelconques et ω l'entier $\frac{1+\sqrt{\Delta}}{2}$ du corps $\sqrt{\Delta}$; $a', b', \ldots, \delta'$ sont les conjugués de $a, b, \ldots, \delta$; $ad - bc$ et $\alpha\delta - \beta\gamma$ sont égaux à $+1$ ou à -1, suivant les groupes que l'on considère.

Les groupes $(\mathcal{G}_a)$, $(\mathcal{G})$ et (G) sont isomorphes à trois groupes $\mathcal{H}_a$, $\mathcal{H}$ et H de substitutions arithmétiques semblables de la forme

$$F = X_3^2 - X_1X_2 + X_0X_3 - nX_0^2.$$

Ils sont respectivement isomorphes aux groupes des substitutions d'Hermite : 1° de degré 1, 2° d'ordre 1, 3° droites et d'ordre 1 n'altérant pas une relation singulière d'invariant Δ.

[2] La réduction continuelle de la forme indéfinie F permettrait de trouver les substitutions fondamentales des groupes $(\mathcal{G}_a)$, $(\mathcal{G})$ et G; comme dans le cas voisin du groupe Picard-Bourget, cette réduction continuelle ne s'opère pas sans d'assez grandes difficultés de calcul. Nous avons réduit le groupe des substitutions (S) n'altérant pas le couple réduit δ d'invariant Δ, ou, ce qui revient au même, le groupe des transformations d'Hermite du premier degré n'altérant pas une relation singulière d'invariant Δ. Ce groupe isomorphe au groupe arithmétique $(\mathcal{G}_a)$ du corps $\sqrt{\Delta}$ comprend six substitutions fondamentales :

$$S_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad S_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ n & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad S_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$S_4 = \begin{vmatrix} \frac{a+c}{2} & -c & 0 & 0 \\ -nc & \frac{a-c}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon\frac{a+c}{2} & \varepsilon c \\ 0 & 0 & \varepsilon nc & \varepsilon\frac{a-c}{2} \end{vmatrix},$$

$$S_5 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad S_6 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

où a et c désignent la plus petite solution positive des deux équations de Pell :

$$a^2 - \Delta c^2 = 4\varepsilon,$$

ε étant égal à ± 1. De cette réduction, on déduit la réduction à six transformations fondamentales des transformations d'Hermite d'ordre ± 1 n'altérant pas une relation singulière d'invariant $\Delta = 4n+1$; on en tire également la réduction des groupes $(\mathcal{G}_a)$, $(\mathcal{G})$ et (G).

Le groupe arithmétique $(\mathcal{G}_a)$ d'un corps quadratique réel admet six substitutions fondamentales :

$$W_1 = (\xi, \eta;\ \xi - 1,\ \eta - 1),\quad W_2 = (\xi, \eta;\ \xi + \omega,\ \eta + \omega'),\quad W_3 = \left((\xi, \eta;\ -\frac{1}{\xi},\ -\frac{1}{\eta}\right),$$

$$W_4 = \left(\xi, \eta;\ \left(\frac{a + c\sqrt{\Delta}}{2}\right)^2 \xi,\ \left(\frac{a - c\sqrt{\Delta}}{2}\right)^2 \eta\right),\quad W_5 = (\xi, \eta;\ -\eta, -\xi),\quad W_6 = (\xi, \eta;\ -\xi, -\eta).$$

Le groupe modulaire $(\mathcal{G})$ admet cinq substitutions fondamentales :

$$W_1,\ W_2,\ W_3,\ W_4,\ W_5.$$

Le groupe (G) *admet quatre substitutions fondamentales* :

$$W_1,\ W_2,\ W_3,\ W_4.$$

On écrirait facilement les substitutions fondamentales des groupes de substitutions semblables $(\mathcal{H}_a)$, $(\mathcal{H})$ et (H) de la forme F.

[**3**] Le groupe Picard-Bourget (1) correspondant à la relation singulière $h^2 - gg' = 4\Delta$ est le sous-groupe de congruence relatif au module 2 du groupe modulaire $(\mathcal{G})$; c'est un sous-groupe d'indice 2 si la plus petite solution positive des équations de Pell, $a^2 - \Delta c^2 = \pm 4$, est paire et d'indice 4 dans les autres cas.

On trouve facilement les substitutions fondamentales des sous-groupes de congruence principaux ou non, relatifs à des modules quelconques, en partant des substitutions fondamentales $W_1, \ldots, W_6$ de $(\mathcal{G}_a)$.

[**4**] Posons

$$\xi = \xi_1 + i\xi_2, \qquad \eta = \eta_1 + i\eta_2,$$

les groupes $(\mathcal{G})_a$, $(\mathcal{G})$ et (G) ont des domaines fondamentaux dans l'espace à quatre dimensions (E) où les coordonnées d'un point sont ξ_1, ξ_2, η_1, η_2. Nous ne les avons pas construits, mais la réduction continuelle de F et la connaissance des substitutions fondamentales suffisent à donner quelques renseignements qui montrent leur analogie avec le domaine fondamental du groupe modulaire. On peut utiliser

(1) Plus précisément le groupe qu'on en déduit en changeant ξ en $-\xi$.

les résultats généraux relatifs aux groupes hyperabéliens, dus à M. Picard, et s'aider aussi des remarques de M. Bourget sur le domaine fondamental du groupe qu'il a étudié.

Toute substitution modulaire (du groupe modulaire) change un point M de (E) pour lequel ξ_2 est positif et η_2 négatif en un point de la même région. Appelons, pour conserver des notations analogues à celles de M. Picard, domaine S l'ensemble des points (ξ, η) pour lesquels ξ_2 est positif et η_2 négatif, et désignons par (S) la limite $\xi_2 = \eta_2 = 0$ de ce domaine. La substitution $(\xi, \eta; -\xi, -\eta)$ change un point M de S en un point du domaine symétrique $(\xi_2 < 0, \eta_2 > 0)$ que nous appelons point symétrique de M, et le domaine fondamental du groupe modulaire $(\mathcal{G})$ est obtenu en adjoignant au domaine fondamental du groupe arithmétique $(\mathcal{G}_a)$ le domaine symétrique [1]. Il résulte de l'étude faite par M. Picard du domaine fondamental δ dans S d'un groupe hyperabélien isomorphe à un groupe de transformations semblables d'une forme quadratique F, que ce domaine est formé par l'ensemble d'un certain nombre fini de domaines D obtenus par la réduction continuelle de F et n'ayant aucun point commun avec la limite (S) de S; δ n'a aucun point commun avec (S). Ce résultat relatif au groupe modulaire du corps $\sqrt{\Delta}$ est analogue à celui qui concerne le groupe modulaire proprement dit dont le domaine fondamental n'a aucun point commun avec l'axe réel. Nous avons trouvé également que le domaine fondamental δ de $(\mathcal{G})$ n'a qu'un seul point à l'infini dans le domaine S $(\xi_2 = \eta_2 = \infty)$ tout à fait analogue au point à l'infini du groupe Picard-Bourget et du groupe modulaire proprement dit.

[5] Appelons fonction modulaire du corps $\sqrt{\Delta}$ toute fonction analytique de ξ et η dans les demi-plans $\xi_2 > 0$, $\eta_2 < 0$ qui ne prend qu'un nombre limité de valeurs pour l'ensemble des valeurs de ξ et η qui se déduisent de l'une d'elles par les substitutions modulaires du corps $\sqrt{\Delta}$. Ces fonctions sont des fonctions hyperabéliennes du groupe hyperabélien $(\mathcal{G})$ ou d'un de ses sous-groupes. Les propriétés générales des fonctions hyperabéliennes établies par M. Picard appartiennent à ces fonctions particulières; considérons, par exemple, les fonctions modulaires $F(\xi, \eta)$ du groupe $(\mathcal{G})$ ne prenant qu'une seule valeur pour l'ensemble des valeurs de ξ et η qu'on déduit de l'une d'elles par toutes les substitutions de $(\mathcal{G})$, ce sont des fonctions rationnelles de trois d'entre elles liées par une relation algébrique. La considération des fonctions ϑ d'arguments nuls permet de former des fonctions $F(\xi, \eta)$ que nous avons recherchées dans le cas des corps $\sqrt{4n+1}$; mais, de même que dans le cas traité par M. Bourget, la présence du radical $\sqrt{\Delta}$ dans l'expression de ces fonctions rend à peu près impossible la formation des relations algébriques qui existent

[1] On peut encore dire que $(\mathcal{G})$ admet un domaine fondamental δ dans S.

entre elles et les autres fonctions qu'on en peut déduire par addition, multiplication, dérivation, etc... D'autre part, si l'on considère les trois *modules* λ, μ, ν des systèmes de fonctions abéliennes singulières liées à une relation singulière d'invariant Δ, ce sont des fonctions modulaires de ξ et η du corps $\sqrt{\Delta}$; M. Humbert a bien indiqué un moyen de trouver la relation algébrique $\Phi(\lambda, \mu, \nu) = 0$ qui existe entre ces trois fonctions, mais la formation effective de Φ est extrêmement difficile. L'extension aux fonctions abéliennes simplement singulières de la théorie des fonctions modulaires qui se présente dans l'étude des fonctions elliptiques semble donc difficilement abordable. Et même, elle se présente à un point de vue un peu différent, le rôle de la fonction $J(\tau)$ étant joué dans la théorie des fonctions abéliennes singulières non pas par deux fonctions de deux variables, mais par trois fonctions λ, μ, ν liées par une relation algébrique. Il n'est pas sans intérêt d'étendre aussi à ces fonctions abéliennes singulières le problème de la transformation des fonctions elliptiques et de voir à quoi il correspond pour les fonctions modulaires des corps quadratiques. Nous espérons revenir prochainement sur ce sujet qui concerne plus spécialement la théorie des fonctions.

TROISIÈME PARTIE

CHAPITRE PREMIER.

Formes abéliennes et formes binaires adjointes.

En étendant aux fonctions abéliennes de deux variables le problème de la transformation tel que Jacobi l'avait traité dans le cas des fonctions elliptiques, Hermite a introduit dans la science un certain nombre de notions nouvelles; quelques-unes devaient être remarquablement fécondes et ouvrirent la voie à de belles recherches d'algèbre et d'arithmétique. C'est ainsi qu'on doit faire remonter à Hermite la notion de *substitution abélienne*, dont on sait le rôle important en algèbre, et celle de *forme abélienne* telle qu'elle a été utilisée par Laguerre dans son Mémoire : *Sur le calcul des systèmes linéaires* (1). Ces formes, dont la nature n'est pas altérée par les substitutions (S) liées aux transformations abéliennes d'Hermite, ont dans la théorie des fonctions abéliennes une importance capitale qu'Hermite et Laguerre ont tous deux mis en évidence; elles y jouent le même rôle que les formes binaires dans la théorie des fonctions elliptiques. Hermite a établi quelques-unes de leurs propriétés et s'en est servi pour démontrer plusieurs propositions fondamentales concernant la transformation des fonctions abéliennes de genre 2; d'autre part, nous aurons, à un point de vue tout différent, l'occasion de montrer quelle liaison étroite existe entre une certaine classe de ces formes particulières à quatre indéterminées et les fonctions abéliennes doublement singulières. C'est Hermite qui, à la fin de son Mémoire sur la transformation, a posé le problème de l'équivalence arithmétique des formes abéliennes à quatre variables, tel que nous le traiterons. Les propriétés relatives aux formes adjointes permettaient de penser qu'un rapprochement entre ces formes et les formes à deux indéterminées (2) devait se présenter; c'est pourquoi nous avons cherché à utiliser la considération des formes binaires pour effectuer la réduction

(1) *Journal de l'École polytechnique*, 42e cahier, tome XXV, 1867.

(2) Voir à ce sujet les deux citations d'Hermite faites dans l'Introduction. Par suite d'une erreur d'impression que le lecteur corrigera aisément, dans ces citations, il faut lire : formes binaires au lieu de formes linéaires.

des formes abéliennes et à faire reposer cette réduction sur les mêmes principes que celle des formes à deux variables. Mais, comme nous le montrerons, on rencontre dans cette voie, qu'il semble tout naturel de suivre, des difficultés de nature arithmétique à peu près insurmontables dans l'état actuel de la théorie des nombres algébriques et, malgré l'analogie apparente des formes abéliennes et des formes binaires, les méthodes propres à l'étude arithmétique de ces dernières ne peuvent, à elles seules, conduire à la solution des principaux problèmes concernant l'équivalence et la réduction des premières. C'est bien dans les propriétés des formes à deux variables que nous avons trouvé un instrument analytique essentiel pour effectuer la réduction des formes abéliennes; mais il ne semble pas possible de faire reposer cette réduction sur une suite de propositions analogues à celles qu'employèrent Gauss pour les formes binaires définies et Hermite pour les formes à indéterminées conjuguées. Avant d'exposer la méthode que nous avons suivie, nous présenterons quelques remarques sur les substitutions (S) à coefficients entiers de type (1, 1) que nous appelons encore substitutions d'Hermite.

Dans les deux premières Parties, nous avons étudié les substitutions d'Hermite liées aux transformations abéliennes en utilisant une propriété géométrique caractéristique de toutes ces substitutions, celle de laisser inaltéré le complexe Γ : $p_{03}+p_{12}=0$. Nous avons pu reprendre à ce point de vue les divers problèmes de la transformation des fonctions abéliennes, et c'est sur cette seule définition purement géométrique de ces substitutions que nous avons basé la recherche de leurs propriétés et la démonstration d'un grand nombre de propositions concernant la théorie des fonctions abéliennes ordinaires et singulières. C'est à un tout autre point de vue que ces substitutions s'étaient présentées à Hermite et il est d'autant plus important de rapprocher ces deux ordres de considérations, en apparence si différentes, que c'est la propriété analytique de ces substitutions qu'Hermite prit comme point de départ de ses recherches sur la transformation, qui conduisit M. Jordan à la notion de substitution abélienne [1]. Soient (ω_0, υ_0), (ω_1, υ_1), (ω_2, υ_2), (ω_3, υ_3) les quatre paires de périodes simultanées d'un système de fonctions quadruplement périodiques; on sait qu'il existe entre ces périodes la relation fondamentale de Riemann :

$$(1)\qquad \omega_0\upsilon_3-\omega_3\upsilon_0+\omega_1\upsilon_2-\omega_2\upsilon_1=0.$$

Cherchons à effectuer sur les deux systèmes de variables $(\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$ et $(\upsilon_0, \upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3)$ une même substitution à coefficients entiers

$$(S)\qquad \begin{cases} x_0=a_0X_0+a_1X_1+a_2X_2+a_3X_3, \\ x_1=b_0X_0+b_1X_1+b_2X_2+b_3X_3, \\ x_2=c_0X_0+c_1X_1+c_2X_2+c_3X_3, \\ x_3=d_0X_0+d_1X_1+d_2X_2+d_3X_3 \end{cases}$$

[1] JORDAN, *Traité des substitutions et des équations algébriques*, p. 71.

changeant ω_i en Ω_i et υ_i en Υ_i, et telle que l'on ait :

$$\omega_0\upsilon_3 - \omega_3\upsilon_0 + \omega_1\upsilon_2 - \omega_2\upsilon_1 = \mathrm{K}(\Omega_0\Upsilon_3 - \Omega_3\Upsilon_0 + \Omega_1\Upsilon_2 - \Omega_2\Upsilon_1), \tag{2}$$

on trouve qu'il doit exister entre les seize entiers a_i, b_i, c_i, d_i de la substitution (S), les relations d'Hermite dans le cas d'une substitution d'ordre K, et c'est à ce point de vue que ces substitutions se sont présentées à Hermite; il met bien en évidence le rapport étroit des considérations précédentes avec les substitutions abéliennes sur deux suites de deux paires d'indices. Considérons $(\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$, $(\upsilon_0, \upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3)$ comme les coordonnées de deux points de l'espace; les coordonnées pluckériennes de la droite qui les joint ayant comme expression

$$p_{ik} = \omega_i\upsilon_k - \omega_k\upsilon_i,$$

la relation de Riemann s'interprète ainsi : la droite qui passe par les deux points $(\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$ et $(\upsilon_0, \upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3)$ appartient au complexe linéaire Γ : $p_{03} + p_{12} = 0$; quant à l'égalité (2), elle exprime que la substitution (S) change une droite du complexe Γ en une autre droite de ce complexe. On aperçoit ainsi la complète identité du point de vue analytique d'Hermite qui fut le point de départ des recherches de M. Jordan sur les substitutions abéliennes et du point de vue géométrique où nous nous sommes placés. On peut remarquer que les considérations relatives à la relation de Riemann, aux substitutions d'Hermite et aux formes abéliennes s'étendent aux fonctions abéliennes de genre trois, quatre... et aux formes abéliennes à six, huit... variables; d'autre part, les notions de géométrie réglée sont susceptibles de généralisations dans les espaces à cinq, sept... dimensions, et on conçoit qu'on puisse étendre aux fonctions abéliennes de genre quelconque et aux formes abéliennes à un nombre quelconque de variables, les diverses méthodes géométriques que nous avons employées dans ce travail; c'est un ordre d'idées sur lequel nous reviendrons dans la suite. Cette digression étant terminée, nous aborderons l'étude arithmétique des fonctions abéliennes.

Nous isolons les formes abéliennes des formes générales à quatre indéterminées pour les comparer entre elles dans les substitutions d'Hermite; nous nous poserons à ce point de vue le problème de l'équivalence arithmétique de ces formes, nous établirons la notion de classe, nous prouverons que les formes à coefficients entiers dont le discriminant a une valeur donnée se distribuent en un nombre limité de classes et nous montrerons que, dans le cas des formes définies, on peut faire correspondre à chaque classe une et une seule forme réduite caractérisée par certaines inégalités auxquelles satisfont ses coefficients. Toute cette étude sera intimement liée aux propriétés des corps quadratiques et de certaines classes de formes bilinéaires et également à certaines propriétés des fonctions abéliennes que nous signalerons au cours de notre exposé.

C'est sous sa forme géométrique que nous exposerons la méthode que nous avons suivie pour faire l'étude arithmétique des formes abéliennes; il est bien évident que notre principal but était d'introduire les formes binaires dans la théorie des formes abéliennes et que les interprétations géométriques des propositions que l'on rencontrera dans la suite ne sont qu'un procédé commode pour en simplifier l'exposé.

I. — Propriétés générales des formes abéliennes.

[**1**] Soit

$$f = \Sigma a_{ij} x_i x_j$$

l'expression générale d'une forme à quatre indéterminées, les coefficients a_{ij} vérifiant les équations $a_{ij} = a_{ji}$ et le signe Σ s'étendant aux valeurs 0, 1, 2, 3 des indices i et j. Établissons entre les coefficients de cette forme les relations suivantes :

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned}
&a_{00}a_{33} - a_{03}^2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2,\\
&a_{00}a_{13} - a_{11}a_{02} - a_{01}(a_{03} - a_{12}) = 0,\\
&a_{33}a_{02} - a_{22}a_{13} - a_{23}(a_{03} - a_{12}) = 0,\\
&a_{11}a_{23} + a_{01}a_{33} - a_{13}(a_{03} + a_{12}) = 0,\\
&a_{00}a_{23} + a_{01}a_{22} - a_{02}(a_{03} + a_{12}) = 0.
\end{aligned}\right.$$

Toute forme f dont les coefficients vérifient les équations (1) sera dite *forme abélienne* ou *forme d'Hermite*.

Considérons la substitution

$$(\mathrm{S})\qquad \left\{\begin{aligned}
x_0 &= a_0 X_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3,\\
x_1 &= b_0 X_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3,\\
x_2 &= c_0 X_0 + c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3,\\
x_3 &= d_0 X_0 + d_1 X_1 + d_2 X_2 + d_3 X_3.
\end{aligned}\right.$$

Nous supposerons que ses coefficients sont des entiers ordinaires vérifiant les deux systèmes suivants de relations qui sont absolument équivalents :

$$(\mathrm{I})\qquad \left\{\begin{aligned}
&(ad)_{01} + (bc)_{01} = 0,\\
&(ad)_{23} + (bc)_{23} = 0,\\
&(ad)_{02} + (bc)_{02} = 0,\\
&(ad)_{31} + (bc)_{31} = 0,\\
&(ad)_{03} + (bc)_{03} = (ad)_{12} + (bc)_{12} = k.
\end{aligned}\right.
\qquad\qquad
(\mathrm{II})\qquad \left\{\begin{aligned}
&(ab)_{03} + (ab)_{12} = 0,\\
&(ac)_{03} + (ac)_{12} = 0,\\
&(bd)_{03} + (bd)_{12} = 0,\\
&(cd)_{03} + (cd)_{12} = 0,\\
&(ad)_{03} + (ad)_{12} = (bc)_{03} + (bc)_{12} = k.
\end{aligned}\right.$$

Une substitution (S) dont les coefficients sont entiers et vérifient les relations (I) et (II) sera dite *substitution abélienne* [1] ou *substitution d'Hermite d'ordre k*. Nous avons déjà étudié ces substitutions dans la première Partie; elles laissent inaltéré le complexe linéaire arithmétique $\Gamma : p_{03} + p_{12} = 0$, et nous avons vu que :

Toute substitution abélienne change une forme abélienne en une autre forme abélienne.

Deux formes abéliennes f et f' sont *équivalentes* si l'on passe de l'une à l'autre par une substitution abélienne d'ordre ± 1, c'est-à-dire de degré 1. Nous traiterons le problème de l'équivalence et de la réduction des formes d'Hermite à coefficients entiers; il sera bien facile de voir quels résultats sont valables pour les formes à coefficients quelconques.

[**2**] A chaque forme abéliennne f correspond une quadrique $f = 0$, que nous appellerons *quadrique d'Hermite* ou *quadrique abélienne* associée à la forme f. Le théorème précédent montre qu'une liaison géométrique doit exister entre les quadriques d'Hermite et le complexe linéaire Γ; cette liaison est la suivante :

Les quadriques abéliennes sont les quadriques appartenant au complexe Γ.

Nous disons qu'une quadrique appartient à un complexe linéaire lorsque l'une des deux séries réglées qu'elle contient est constituée par des droites de ce complexe.

La démonstration du théorème précédent repose sur la considération de la *deuxième adjointe* de la forme f, premier membre d'une équation d'une quadrique abélienne, et sur cette remarque géométrique :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une quadrique Q appartienne à un complexe linéaire Γ est la suivante : si Q contient une droite, elle contient en même temps sa conjuguée par rapport à Γ ou même, plus généralement, les conjuguées de toutes les droites tangentes à Q sont également tangentes à la quadrique.

Considérons la quadrique Q :

$$f = \Sigma a_{ij} x_i x_j = 0;$$

la condition nécessaire et suffisante pour qu'une droite de coordonnées pluckériennes p_{ik} soit tangente à Q s'obtient en annulant la deuxième adjointe $\Psi(p_{01}, p_{23}, p_{02}, p_{31}, p_{03}, p_{12})$ de f :

$$\Psi = \Sigma p_{ik}^2 (a_{ii} a_{kk} - a_{ik}^2) + 2\Sigma (a_{hi} a_{lk} - a_{hk} a_{li}) p_{hl} p_{ik}, \tag{2}$$

le signe Σ s'étendant aux valeurs 0, 1, 2, 3 des indices h, i, k, l, tels que $p_{ik} \not\equiv p_{hl}$.
Si p_{ik} et p'_{ik} sont les coordonnées de deux droites conjuguées par rapport au complexe linéaire Γ, on a :

$$p'_{01} = p_{01}, \quad p'_{23} = p_{23}, \quad p'_{02} = p_{02}, \quad p'_{31} = p_{31}, \quad p'_{03} = -p_{12}, \quad p'_{12} = -p_{03}. \tag{3}$$

---

[1] C'est la dénomination adoptée par Laguerre dans son Mémoire *Sur le calcul des substitutions linéaires*.

Écrivant que si l'équation (2) est satisfaite pour un système quelconque de valeurs des variables p_{ik}, elle est également satisfaite pour le système des valeurs correspondantes p'_{ik} définies par les équations (3), on obtient les relations (1) qui sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que la quadrique $f = 0$ appartienne au complexe Γ.

Remarque I. — Les propriétés géométriques des substitutions et des quadriques abéliennes rendent évident le théorème qu'Hermite a énoncé sur la propriété des formes abéliennes d'être transformées en des formes de même nature par une substitution abélienne.

Le caractère de l'étude arithmétique des formes f telle que l'avait conçue Hermite et telle que nous la ferons, apparaît bien nettement : nous isolons les formes abéliennes des formes à quatre indéterminées pour les comparer entre elles par une classe de substitutions particulières qui ne changent pas leur nature; à un autre point de vue, nous faisons la géométrie réglée par rapport à un complexe linéaire déterminé en isolant des quadriques générales celles qui appartiennent à ce complexe et des substitutions homographiques celles qui le laissent inaltéré.

[**3**] Hermite a montré que les substitutions abéliennes présentent de grandes analogies avec les substitutions à deux variables; nous avons repris ces considérations à un point de vue un peu plus général en étudiant les systèmes linéaires $\Sigma(n, n)$. (Première Partie, chap. II, § 1.)

Les formes abéliennes quaternaires se rapprochent également des formes à deux variables par des propriétés qui ont été signalées par Hermite et retrouvées par Laguerre.

1° Rappelons que le discriminant de la forme abélienne f est égal à δ^2 en posant

$$\delta = a_{03}^2 - a_{00}a_{33} + a_{02}a_{13} - a_{01}a_{23} = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} + a_{02}a_{13} - a_{01}a_{23},$$

δ sera dit l'*invariant* de la forme f. Soit, en effet,

$$F = \Sigma A_{ij} X_i X_j$$

la transformée de la forme d'Hermite f par la substitution abélienne (S) d'ordre K, posons :

$$\Delta = A_{03}^2 - A_{00}A_{33} + A_{02}A_{13} - A_{01}A_{23} = A_{12}^2 - A_{11}A_{22} + A_{02}A_{13} - A_{01}A_{23};$$

on a

$$\Delta = K^2 \delta,$$

relation qui met bien évident le rôle de l'ordre K et de l'invariant δ. Cet invariant reste inaltéré par les substitutions de degré 1.

2° Soit $\mathcal{F}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3)$ la forme adjointe de f; on aura

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = \mathcal{F}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3),$$

en posant

$$x_0 = \sqrt{-\delta}\,\boldsymbol{x}_3, \qquad x_0 = \sqrt{-\delta}\,\boldsymbol{x}_2, \qquad x_2 = -\sqrt{-\delta}\,\boldsymbol{x}_1, \qquad x_3 = -\sqrt{-\delta}\,\boldsymbol{x}_0,$$

propriété tout à fait analogue à celle des formes binaires et de leurs formes adjointes.

3° Les formes abéliennes sont définies ou indéfinies; dans ce dernier cas, elles sont algébriquement réductibles au type $u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2$. L'invariant δ d'une forme définie est nécessairement négatif, mais il existe deux catégories distinctes de formes indéfinies : pour les unes, l'invariant est positif; pour les autres, il est négatif. Les *formes indéfinies d'invariant négatif* seront dites *de première espèce*, celles dont l'invariant est *positif* étant *de seconde espèce*. Nous laissons de côté les formes d'invariant nul dont la considération est sans intérêt. Deux formes indéfinies d'espèce différente ne sont jamais transformables l'une dans l'autre par une substitution abélienne, cela résulte de l'invariance du signe de δ dans une telle substitution; par exemple, les deux formes abéliennes

$$2a_{02}x_0x_2 + 2a_{13}x_1x_3, \qquad 2a_{02}x_0x_2 - 2a_{13}x_1x_3$$

sont respectivement de première et de deuxième espèce en supposant a_{02} et a_{13} positifs; la substitution $(x_0, x_1, x_2, x_3;\ x_0, -x_1, x_2, x_3)$ change la première en la seconde, mais n'est pas abélienne; aucune substitution abélienne ne peut réaliser ce passage.

On voit ainsi s'introduire dans l'étude des formes abéliennes, telle que nous la comprenons, une distinction entre les diverses classes de formes indéfinies algébriquement réductibles à un même type qui n'a rien de correspondant dans la théorie ordinaire des formes et qui sera tout à fait fondamentale dans l'étude arithmétique des formes d'Hermite.

2. — Introduction des formes binaires dans la théorie des formes abéliennes.

[**1**] Comme nous l'avons annoncé, nous exposerons sous sa forme géométrique la méthode que nous avons suivie pour traiter le problème de l'équivalence arithmétique des formes abéliennes à coefficients entiers. Ainsi présentée, elle consiste à utiliser les propriétés arithmétiques de l'espace réglé, deux systèmes de droites étant équivalents lorsqu'on passe de l'un à l'autre par une substitution homographique à coefficients entiers et de degré 1 sur les coordonnées homogènes d'un point de l'espace. Adjoignons à la forme $f(x_0, x_1, x_2, x_3)$ la quadrique $f(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0$; si l'on peut déterminer sur ces quadriques $f = 0$ certains ensembles de droites jouissant de propriétés arithmétiques particulières, on conçoit que de l'étude de l'équivalence

et de la réduction de ces systèmes de droites, faite *a priori*, on puisse déduire un certain nombre de conditions nécessaires pour l'équivalence de deux formes f et une première réduction de ces formes à quelques types simples. Cette méthode, peut-être nouvelle dans la théorie des formes quadratiques, est susceptible de s'appliquer à d'autres formes que les formes abéliennes et nous en donnerons quelques extensions à la fin de ce travail.

Considérons un couple δ de droites conjuguées et à coordonnées rationnelles par rapport au complexe linéaire Γ; une substitution abélienne de degré 1 le change en un autre couple δ analogue et de même invariant, et il est bien évident qu'étant données deux formes d'Hermite à coefficients entiers f et f' équivalentes, si la quadrique $f=0$ contient un couple δ d'invariant Δ, la quadrique $f'=0$ contient nécessairement un couple δ' de même invariant. On conçoit que la considération des couples δ tracés sur les quadriques abéliennes puisse conduire à un certain nombre de conditions nécessaires pour l'équivalence de deux telles quadriques. Le premier problème que nous ayons à résoudre est donc celui de la recherche des couples δ appartenant à une quadrique d'Hermite.

Soient

$$p_{01}=\mathrm{E}, \quad p_{23}=\mathrm{D}, \quad p_{02}=\mathrm{C}, \quad p_{31}=\mathrm{A}, \quad p_{03}-p_{12}=\mathrm{B}$$

les équations définissant les coordonnées pluckériennes d'un couple δ d'invariant

$$\Delta=\mathrm{B}^2-4\mathrm{AC}-4\mathrm{DE},$$

A, B, C, D, E sont des entiers premiers entre eux dans l'ensemble et Δ est un entier positif ou négatif.

Remarquons d'abord que si l'une des droites D et D' du couple δ est une génératrice rectiligne d'une quadrique d'Hermite Q, la seconde est également une génératrice de Q, puisque D et D' sont conjuguées par rapport au complexe linéaire Γ auquel appartient toute quadrique abélienne. Cherchons les relations nécessaires et suffisantes qui doivent exister entre les coordonnées A, B, C, D, E d'un couple δ pour qu'il appartienne à la quadrique abélienne Q dont l'équation s'écrit :

$$f=\Sigma a_{ik}x_i x_k=0,$$

les coefficients a_{ik} satisfaisant aux conditions (1). Les équations des deux droites D et D' du couple δ peuvent s'écrire

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{-\mathrm{B}+\varepsilon\sqrt{\Delta}}{2}x_1 &= -\mathrm{C}x_0+\mathrm{D}x_3,\\ \frac{-\mathrm{B}+\varepsilon\sqrt{\Delta}}{2}x_2 &= \quad\mathrm{E}x_0+\mathrm{A}x_3,\end{aligned}\right.$$

ε étant respectivement égal à $+1$ et à -1 pour D et D'. De ces relations (4) tirons les valeurs de x_1 et x_2 en fonction de x_0 et x_3, portons-les dans l'équation de la quadrique Q et écrivons que cette équation devient une identité en x_0 et x_3 quand ε y reçoit successivement les valeurs $+1$ et -1; nous obtiendrons ainsi les conditions nécessaires et suffisantes pour que les deux droites D et D' soient deux génératrices rectilignes de Q. Nous ne développerons pas ce calcul qui conduit aux relations suivantes :

$$(5)\quad \begin{cases} 2Aa_{23} - Ba_{33} + 2Da_{13} = 0, \\ Ba_{00} + 2Ca_{01} - 2Ea_{02} = 0. \\ Aa_{02} - Ba_{03} - Ca_{13} + Da_{01} + Ea_{23} = 0; \end{cases}$$

$$(6)\quad \begin{cases} D^2a_{11} + A^2a_{22} + 2ADa_{12} - (AC+DE)a_{33} = 0, \\ C^2a_{11} + E^2a_{22} - 2CEa_{12} - (AC+DE)a_{00} = 0, \\ CDa_{11} - AEa_{22} + (AC-DE)a_{12} + (AC+DE)a_{03} = 0. \end{cases}$$

Remarquons que les six équations (5) et (6) expriment que la quadrique Q contient le couple δ; il est donc bien évident, sans qu'aucun calcul soit nécessaire pour le vérifier, qu'elles entraînent, quels que soient A, B, C, D, E, pourvu que Δ ne soit pas nul, que Q soit une quadrique du complexe Γ, c'est-à-dire une quadrique d'Hermite. Il est donc possible, en tenant compte des équations (1), de réduire à un nombre moindre les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une quadrique supposée abélienne contienne un couple δ. On trouve que les équations (6) sont des conséquences des relations (5) jointes aux conditions (1) auxquelles satisfont les coefficients a_{ik} d'une forme abélienne; par conséquent :

La condition nécessaire et suffisante pour que la quadrique Q *contienne le couple* δ *est que les coefficients* a_{ik} *de* Q *et* A, B, C, D, E *de* δ *vérifient les équations* (5).

[**3**] Si la quadrique Q ne se réduit pas à un système de deux plans, les trois équations (5) aux inconnues A, B, C, D, E sont indépendantes. Pour trouver tous les couples δ que contient une quadrique abélienne Q, il suffit de résoudre en nombres entiers les équations (5) qui constituent, si la forme f est à coefficients entiers, un système d'équations diophantiques du premier degré. Soit

$$(7)\quad \begin{cases} A_1\, B_1\, C_1\, D_1\, E_1 \\ A_2\, B_2\, C_2\, D_2\, E_2 \end{cases}$$

un système fondamental de solutions des équations (5); désignons par x et y deux entiers quelconques premiers entre eux, les coordonnées A, B, C, D, E des couples δ tracés sur Q reçoivent les expressions suivantes :

$$(8)\quad A = xA_1 + yA_2,\quad B = xB_1 + yB_2,\quad C = xC_1 + yC_2,\quad D = xD_1 + yD_2,\quad E = xE_1 + yE_2.$$

Sur chaque quadrique d'Hermite à coefficients entiers, il existe par conséquent une infinité de couples δ de droites conjuguées et à coordonnées rationnelles par rapport au complexe Γ. Les couples δ_1 et δ_2 correspondant respectivement aux valeurs $(x=1, y=0)$ et $(x=0, y=1)$ de x et y seront dits former un *système de couples fondamentaux* sur la quadrique Q et nous représenterons symboliquement le couple δ défini par les égalités (8) par la notation $x\delta_1 + y\delta_2$.

Posons

$$(9)\quad \Delta_1 = B_1^2 - 4A_1C_1 - 4D_1E_1, \quad \mathfrak{D} = B_1B_2 - 2(A_1C_2 + A_2C_1) - 2(D_1E_2 + E_1D_2), \quad \Delta_2 = B_2^2 - 4A_2C_2 - 4D_2E_2,$$

les invariants des couples δ tracés sur Q sont les nombres représentés proprement par la forme binaire

$$(10)\qquad \varphi(x, y) = \Delta_1 x^2 + 2\mathfrak{D}xy + \Delta_2 y^2.$$

Nous sommes ainsi conduits à associer à chaque forme abélienne f, ou ce qui revient au même à chaque quadrique d'Hermite Q, une forme binaire $\varphi(x, y)$ que nous appellerons la *forme binaire adjointe* à f ou à Q, et qui représente proprement les invariants de tous les couples δ tracés sur Q, et rien que ces invariants. En vertu d'une remarque déjà faite, deux couples δ n'étant équivalents que s'ils ont les mêmes invariants, deux formes abéliennes f et f' ne peuvent être équivalentes que si leurs formes binaires adjointes φ et φ' représentent proprement les mêmes nombres, c'est-à-dire sont proprement ou improprement équivalentes, au sens donné à ces mots dans la théorie ordinaire des formes quadratiques. Nous parvenons ainsi à la proposition suivante :

Théorème fondamental. — *A chaque forme abélienne $f = \Sigma a_{ik}x_ix_k$, associons la forme binaire adjointe $\varphi(x, y)$ ainsi définie :*

$$\left\{\begin{matrix} A_1\, B_1\, C_1\, D_1\, E_1 \\ A_2\, B_2\, C_2\, D_2\, E_2 \end{matrix}\right.$$

est un système fondamental de solutions des équations

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} &2Aa_{23} - Ba_{33} + 2Da_{13} = 0, \\ &Ba_{00} + 2Ca_{01} - 2Ea_{02} = 0, \\ &Aa_{02} - Ba_{03} - Ca_{13} + Da_{01} + Ea_{23} = 0, \end{aligned}\right.$$

et l'on pose :

$$\Delta_1 = B_1^2 - 4A_1C_1 - 4D_1E_1, \quad \mathfrak{D} = B_1B_2 - 2(A_1C_2 + A_2C_1) - 2(D_1E_2 + D_2E_1), \quad \Delta_2 = B_2^2 - 4A_2C_2 - 4D_2E_2;$$

$$\varphi(x, y) = \Delta_1 x^2 + 2\mathfrak{D}xy + \Delta_2 y^2.$$

Si deux formes abéliennes sont équivalentes, leurs formes binaires adjointes sont équivalentes (au sens donné à ce mot dans la théorie des formes).

Il est bien clair, qu'en général, cette condition nécessaire pour l'équivalence de deux formes abéliennes ne sera pas suffisante. Prenons, par exemple, une forme f et la forme obtenue en multipliant tous les coefficients de celle-ci par un même entier, il est bien évident que ces deux formes ne sont pas équivalentes; elles ont cependant même forme binaire adjointe.

Remarques : I. — Les formes binaires $\varphi(x, y)$ adjointes aux formes abéliennes ne sont pas les formes les plus générales à deux indéterminées; ceci résulte immédiatement de ce que, d'après leur définition même, elles ne peuvent représenter proprement que des entiers congrus à 0 ou à 1 suivant le module 4.

II. — Le nombre $\mathcal{D}$ défini par la seconde des égalités (9) est ce qu'on peut appeler l'*invariant simultané* de deux couples δ_1 et δ_2. Une substitution abélienne de degré 1 change un système de deux couples δ_1 et δ_2 en un autre système de deux couples δ_1' et δ_2' ayant les mêmes invariants et même invariant simultané.

III. — On peut remplacer le système fondamental (7) de solutions des équations diophantiques (5) par un système équivalent :

$$\begin{array}{llll} A_1' = \lambda A_1 + \mu A_2, & B_1' = \lambda B_1 + \mu B_2, & \ldots\ldots, & E_1' = \lambda E_1 + \mu E_2, \\ A_2' = \lambda' A_1 + \mu' A_2, & B_2' = \lambda' B_1 + \mu' B_2, & \ldots\ldots, & E_2' = \lambda' E_1 + \mu' E_2, \end{array}$$

$\lambda, \mu, \lambda', \mu'$ étant des entiers tels que $\lambda\mu' - \lambda'\mu = \pm 1$; la forme binaire adjointe à f s'écrit alors $\varphi_1(x', y')$ et elle se déduit de $\varphi(x, y)$ par la substitution

$$\begin{cases} x = \lambda x' + \lambda' y', \\ y = \mu x' + \mu' y'. \end{cases}$$

Les deux formes φ et φ_1 sont donc équivalentes, proprement ou improprement suivant que $\lambda\mu' - \lambda'\mu$ est égal à $+1$ ou à -1. Par conséquent, si l'on remplace le système fondamental (7) par un système arithmétiquement équivalent, la forme binaire φ adjointe à la forme abélienne f est remplacée par une forme équivalente; inversement, à toute forme binaire équivalente à $\varphi(x, y)$ correspond un système fondamental de solutions des équations (5). Ce résultat nous montre qu'il est plus exact de dire que nous associons à chaque forme abélienne f une *classe de formes binaires adjointes* en appelant classe de formes binaires l'ensemble des formes proprement ou improprement équivalentes à une forme donnée.

[**4**] Des considérations géométriques faciles permettent de vérifier les théorèmes suivants, qu'il est aisé de retrouver par le calcul.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une forme abélienne f soit :

1° *Définie, c'est-à-dire algébriquement réductible au type $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2$, est que la forme binaire adjointe φ soit définie négative;*

2° *Indéfinie de première espèce, c'est-à-dire algébriquement réductible au type*

$u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2$ *et d'invariant positif, est que la forme binaire adjointe* φ *soit indéfinie;*

3° *Indéfinie de seconde espèce, c'est-à-dire algébriquement réductible au type* $u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2$ *et d'invariant négatif est que la forme binaire adjointe* φ *soit définie positive.*

Ces propositions mettent bien en évidence le rôle important que doivent jouer les formes binaires adjointes dans l'étude des formes abéliennes. Cette dernière peut même, comme nous allons l'indiquer, reposer uniquement sur l'équivalence arithmétique des couples δ. En effet, si δ_1 et δ_2 sont deux couples δ d'invariants non nuls, il existe une et une seule quadrique d'Hermite Q à coefficients entiers contenant ces deux couples; ceci montre que l'on peut ramener les problèmes de l'équivalence et de la réduction des formes abéliennes aux problèmes analogues pour les ensembles de deux couples δ.

Une telle méthode, en apparence si simple, rencontre dans son application d'assez grosses difficultés qui tiennent à ce qu'un système de deux couples δ_1 et δ_2 possédant trois invariants Δ_1, $\mathfrak{D}$ et Δ_2, une substitution abélienne de degré 1 le change bien en un système analogue ayant les trois mêmes invariants, mais deux systèmes de deux couples δ admettant les trois mêmes invariants, ne sont pas toujours équivalents. Nous l'avons cependant appliquée à l'étude des formes abéliennes, elle conduit aux conditions nécessaires et suffisantes pour que deux formes soient équivalentes; d'ailleurs, ces conditions n'ont pas une expression très commode et ne sont intéressantes que dans certains cas particuliers, par exemple lorsque la forme proposée est susceptible de représenter proprement ± 1, ou bien pour décider de l'équivalence de deux formes numériquement données. Le manque de place nous empêche de les donner, mais nous ferons remarquer qu'elles renferment la théorie complète de l'équivalence arithmétique des formes abéliennes. Nous reviendrons d'ailleurs sur ce point, dans l'étude des formes indéfinies.

[**5**] Si l'emploi exclusif des propriétés arithmétiques des couples δ ne semble pas conduire, sans difficultés de calcul, à la réduction des formes abéliennes, il a du moins l'avantage de faciliter beaucoup la solution de ce problème et de mettre très nettement en évidence la liaison de ces formes d'Hermite avec les corps quadratiques et avec certaines formes bilinéaires liées à ces corps, que nous allons définir et dont on verra toute l'importance dans la suite.

Considérons une forme abélienne $f = \Sigma a_{ik} x_i x_k$ et sa forme binaire adjointe $\varphi(x, y)$. Soit Δ un nombre représenté proprement par $\varphi(x, y)$; il existe sur la quadrique Q associé à f un couple δ d'invariant Δ dont nous connaissons les coordonnées : c'est le couple $x_0\delta_1 + y_0\delta_2$ où x_0 et y_0 sont tels que $\varphi(x_0, y_0) = \Delta$.

Nous savons, d'autre part, que deux couples δ de même invariant sont équivalents;

en particulier, le couple $x_0\delta_1 + y_0\delta_2$ tracé sur Q est équivalent au couple réduit $[\delta]$ d'invariant Δ, et nous avons indiqué comment on trouvait une substitution abélienne (S) du premier ordre le changeant en $[\delta]$; on en conclut que la quadrique Q est équivalente à une certaine quadrique d'Hermite contenant le couple réduit $[\delta]$ dont les coordonnées pluckériennes sont

$$(11) \quad p_{01} = p_{23} = 0, \quad p_{02} = -n, \quad p_{31} = 1, \quad p_{03} = \frac{k + \varepsilon\sqrt{\Delta}}{2}, \quad p_{12} = -\frac{k - \varepsilon\sqrt{\Delta}}{2},$$

dans lesquelles k est égal à 0 ou à 1 suivant que le coefficient B du couple δ est pair ou impair, n étant défini par l'égalité de Δ et de $k^2 + 4n$. Cherchons l'équation générale des quadriques abéliennes contenant un couple réduit, nous distinguerons deux cas, suivant que Δ est pair ou impair.

1° *Invariant pair* 4D. — Les relations (5) entre les coefficients d'une quadrique abélienne et d'un couple δ tracé sur elle, montrent que, pour qu'une quadrique Q contienne le couple réduit $[\delta]$ d'invariant $\Delta = 4\mathrm{D}$, il est nécessaire et suffisant que ses coefficients soient liés par les équations

$$a_{00} = -\mathrm{D}a_{11}, \quad a_{22} = -\mathrm{D}a_{33}, \quad a_{02} = -\mathrm{D}a_{13}, \quad a_{01} = a_{23} = 0, \quad a_{03} = -a_{12};$$

l'équation générale d'une telle quadrique dépend donc de quatre entiers arbitraires m, n, p, q et peut s'écrire

$$\Psi = m(x_1^2 - \mathrm{D}x_0^2) + 2p(x_0x_3 - x_1x_2) + 2q(x_1x_3 - \mathrm{D}x_0x_2) + n(x_3^2 - \mathrm{D}x_2^2);$$

l'invariant δ d'une telle forme Ψ est donné par la relation

$$\delta = p^2 - \mathrm{D}(q^2 - mn).$$

2° *Invariant impair* $4\mathrm{N} + 1$. — On trouve de la même manière les relations nécessaires et suffisantes qui doivent exister entre les coefficients a_{ik} d'une quadrique abélienne, pour que cette dernière contienne le couple réduit d'invariant impair $\Delta = 4\mathrm{N} + 1$, elles s'écrivent

$$a_{00} = -\mathrm{N}a_{11} = 2\mathrm{N}a_{01}, \quad a_{22} = -\mathrm{N}a_{33} = -2\mathrm{N}a_{23}, \quad a_{02} = a_{03} - \mathrm{N}a_{13}, \quad a_{03} = -a_{12};$$

l'équation générale des quadriques contenant le couple réduit d'invariant $4\mathrm{N} + 1$ peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned}\Psi' = 2m'(x_1^2 - x_0x_1 - \mathrm{N}x_0^2) - 2p'(x_0x_3 + x_0x_2 - x_1x_2) - 2q'(x_1x_3 - \mathrm{N}x_0x_2) \\ - 2n'(x_3^2 + x_2x_3 - \mathrm{N}x_2^2);\end{aligned}$$

elle dépend de quatre entiers arbitraires et l'invariant de la forme Ψ' est égal à

$$\delta = p'^2 + p'q' - \mathrm{N}q'^2 + \Delta m'n'.$$

On peut remarquer que la forme $\Psi'(x_0, x_1, x_2, x_3)$ ne peut être qu'improprement primitive après division de ses coefficients par leur plus grand commun diviseur; on en conclut que :

Les formes abéliennes, dont la forme binaire adjointe peut représenter proprement un nombre impair, sont improprement primitives après division de leurs coefficients par leur plus grand commun diviseur.

Nous retrouverons plus loin ce résultat qui se présente comme une application immédiate de la réduction des formes abéliennes aux formes Ψ et Ψ'. La forme binaire adjointe à une forme abélienne f quelconque représente toujours proprement au moins un nombre pair $4D$; en effet, si l'un des coefficients B_1 et B_2 des couples fondamentaux δ_1 et δ_2 est pair, le résultat précédent est établi, et, s'ils sont tous deux impairs, le couple $\delta_1 + \delta_2$ a pour coefficient B un nombre pair et son invariant $\varphi(1, 1)$ est un nombre pair $4D$.

On en conclut que :

Toute forme abélienne est réductible à une forme de type $\Psi(x_0, x_1, x_2, x_3)$.

Cette réduction peut dans tous les cas être effectuée de plusieurs manières; on peut, en effet, changer la substitution qui fait passer du couple δ au couple réduit $[\delta]$ et choisir l'un quelconque des nombres $4D$ représentés par la forme adjointe. Cette première réduction des formes abéliennes sera très importante dans la suite et nous conduira pour les formes définies à la solution complète du problème de l'équivalence. Pour le moment, cherchons à préciser le caractère arithmétique des formes Ψ et Ψ' dont nous n'avons jusqu'à présent donné qu'une définition géométrique et à montrer le parti qu'on en peut tirer pour réduire les formes abéliennes.

3. — Sur les formes a indéterminées conjuguées d'un corps quadratique quelconque.

[**1**] Appelons *forme à indéterminées conjuguées du corps quadratique* $\sqrt{\Delta}$ réel ou imaginaire toute forme bilinéaire

$$A uu' + \frac{B}{\sqrt{\Delta}} uv' - \frac{B'}{\sqrt{\Delta}} u'v + C vv' \tag{15}$$

dans laquelle les coefficients A et C sont des entiers ordinaires, B et B′ étant deux entiers conjugués du corps $\sqrt{\Delta}$; on suppose en outre que les deux indéterminées u et v ne reçoivent que des valeurs entières du corps quadratique $\sqrt{\Delta}$, u' et v' étant les entiers conjugués de u et v; c'est ce que nous traduisons en disant que les indéterminées sont conjuguées; cette expression a toujours un sens, même si le corps quadratique considéré est un corps réel, puisque ces indéterminées ne sont susceptibles de prendre comme valeurs que celles des entiers du corps.

Si Δ est égal à -1, les formes à indéterminées conjuguées du corps de Gauss sont bien celles qu'Hermite [1] et M. Picard [2] ont étudiées sous le même nom. Une forme à indéterminées conjuguées d'un corps quadratique quelconque ne représente, en vertu des définitions précédentes, que des nombres entiers ordinaires; si ces entiers sont tous de même signe, la forme est *définie*, *positive* s'ils sont tous positifs, *négative* dans le cas contraire. S'il existe des entiers des deux signes représentables par la forme, on la dit *indéfinie*.

Posons

$$\delta = BB' + DAC,$$

δ sera le *déterminant* de la forme (15), $-\delta$ étant son *discriminant*. Les formes à indéterminées conjuguées des corps imaginaires sont définies ou indéfinies suivant que leur discriminant est positif ou négatif; quant aux formes des corps réels, elles sont toutes indéfinies. Nous supposerons toujours que le discriminant des formes à indéterminées conjuguées que nous considérons n'est ni nul, ni carré parfait; ces deux cas ne présentent aucun intérêt, la forme se décomposant alors en le produit de deux formes linéaires.

Ces définitions étant adoptées, posons dans l'expression (12) de la forme abélienne Ψ dont la forme binaire adjointe représente proprement le nombre $4D$:

$$(16)\qquad \begin{cases} x_1 + \sqrt{D}\,x_0 = u, & x_3 + \sqrt{D}\,x_2 = v, \\ x_1 - \sqrt{D}\,x_0 = u', & x_3 - \sqrt{D}\,x_2 = v'; \end{cases}$$

Ψ se change identiquement en

$$(17)\qquad \psi = a_{11}uu' + \frac{a_{03} + a_{13}\sqrt{D}}{\sqrt{D}}\,uv' - \frac{a_{03} - a_{13}\sqrt{D}}{\sqrt{D}}\,uv' + a_{33}vv'.$$

Si l'on ne donne à x_0, x_1, x_2, x_3 que des valeurs entières, ψ est une forme à indéterminées conjuguées du corps quadratique $\sqrt{D}$. On voit facilement qu'aux formes abéliennes Ψ correspondent les formes à indéterminées conjuguées les plus générales des corps quadratiques $\sqrt{\Delta}$ en supposant Δ congru à 0, 2 ou 3 suivant le module 4.

De la même manière, posons, dans l'expression (13) de la forme abélienne Ψ' :

$$(18)\qquad \begin{cases} x_1 - \omega x_0 = u, & x_3 + \omega' x_2 = v, \\ x_1 - \omega' x_0 = u', & x_3 + \omega x_2 = v'; \end{cases}$$

---

[1] Hermite, *Sur la théorie des formes quadratiques*, second Mémoire (Journal de Crelle, t. XLVII, et Œuvres, pp. 234, 290, 350).

[2] Picard, *Sur les formes quadratiques binaires indéfinies* (Annales de l'École Normale, 1884).

ω et ω' désignant respectivement les quantités algébriques $\frac{1+\sqrt{\Delta}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{\Delta}}{2}$, Ψ devient identique à la forme bilinéaire

$$\psi' = a_{01}uu' + \frac{a_{03}+a_{13}\omega'}{\sqrt{\Delta}}uv' - \frac{a_{03}+a_{13}\omega}{\sqrt{\Delta}}uv' - a_{23}vv', \tag{19}$$

qui n'est autre qu'une forme à indéterminées conjuguées du corps $\sqrt{\Delta}$, et il est bien clair qu'il correspond ainsi à l'ensemble des formes abéliennes Ψ' dont la forme binaire adjointe représente proprement le nombre $4n+1$, l'ensemble des formes à indéterminées conjuguées du corps réel ou imaginaire $\sqrt{4n+1}$.

Ce passage de Ψ et Ψ' à ψ et ψ' montre bien en quel rapport étroit se trouve l'étude arithmétique des formes abéliennes et celle des formes à indéterminées conjuguées. On peut remarquer que le discriminant de ψ est égal à l'invariant de Ψ. Les formes à indéterminées conjuguées ne pouvant être définies que si elles appartiennent à un corps imaginaire et si leur discriminant est positif; on en conclut que :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une forme abélienne soit définie est que son invariant soit positif et qu'elle contienne un couple (δ) *d'invariant négatif.*

Il est facile de voir que cette condition est bien équivalente à celle que nous avons déjà donnée en exprimant que la forme binaire adjointe à une forme abélienne définie est définie négative.

[2] Nous avons déterminé (deuxième partie, chap. II, § 2) les substitutions (S) ordinaires à coefficients entiers :

$$\left\{\begin{aligned} x_0 &= a_0X_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3, \\ x_1 &= b_0X_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3, \\ x_2 &= c_0X_0 + c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3, \\ x_3 &= d_0X_0 + d_1X_1 + d_2X_2 + d_3X_3 \end{aligned}\right.$$

qui n'altèrent pas un couple réduit [δ]. Ce sont des substitutions abéliennes qui changent toute forme abélienne Ψ ou Ψ' dont la quadrique associée contient un couple réduit [δ] déterminé en une autre forme de même nature. Il est bien naturel de comparer les formes abéliennes Ψ ou Ψ' correspondant à un même couple [δ] dans les substitutions abéliennes n'altérant pas ce couple et d'essayer d'en déduire des conditions suffisantes pour l'équivalence de deux formes abéliennes quelconques. Nous allons voir à quoi correspond ce problème pour les formes à indéterminées conjuguées.

Les substitutions abéliennes (S) d'ordre k n'altérant pas le couple réduit $[\delta]$ d'invariant $4\mathrm{D}$ sont de l'un ou l'autre type :

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ \mathrm{D}a_1 & a_0 & \mathrm{D}a_3 & a_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ \mathrm{D}c_1 & c_0 & \mathrm{D}c_3 & c_2 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -\mathrm{D}a_1 & -a_0 & -\mathrm{D}a_3 & -a_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ -\mathrm{D}c_1 & -c_0 & -\mathrm{D}c_3 & -c_2 \end{vmatrix};$$

les entiers a_i et c_i d'une substitution du premier type ou droite vérifiant les équations suivantes où $\varepsilon = +1$, celles du second type vérifiant les mêmes équations où ε reçoit la valeur -1 :

$$(21) \qquad (ac)_{03} + (ac)_{12} = 0, \qquad (ac)_{02} + \mathrm{D}(ac)_{13} = \varepsilon k.$$

A toute substitution abélienne (S) d'ordre k de l'un des deux types précédents correspond une substitution (Σ) effectuée sur les variables u, v, u', v' définies en fonction de x_0, x_1, x_2, x_3 par les équations (16); (Σ) sera dite *d'ordre* k et *droite* ou *gauche* suivant que (S) est du premier ou du second type. La substitution (Σ) droite qui correspond à la substitution abélienne droite (S) d'entiers caractéristiques a_i et c_i s'écrit :

$$(22) \begin{cases} u = (a_0 + a_1\sqrt{\mathrm{D}})\mathrm{U} + (a_2 + a_3\sqrt{\mathrm{D}})\mathrm{V}, & u' = (a_0 - a_1\sqrt{\mathrm{D}})\mathrm{U}' + (a_2 - a_3\sqrt{\mathrm{D}})\mathrm{V}'; \\ v = (c_0 + c_1\sqrt{\mathrm{D}})\mathrm{U} + (c_2 + c_3\sqrt{\mathrm{D}})\mathrm{V}, & v' = (c_0 - c_1\sqrt{\mathrm{D}})\mathrm{U}' + (c_2 - c_3\sqrt{\mathrm{D}})\mathrm{V}'. \end{cases}$$

A la substitution abélienne gauche d'entiers caractéristiques a_i et c_i correspond la substitution (Σ) gauche :

$$(23) \begin{cases} u = (-a_0 + a_1\sqrt{\mathrm{D}})\mathrm{U}' + (-a_2 + a_3\sqrt{\mathrm{D}})\mathrm{V}', & u' = -(a_0 + a_1\sqrt{\mathrm{D}})\mathrm{U} - (a_2 + a_3\sqrt{\mathrm{D}})\mathrm{V}; \\ v = (-c_0 + c_1\sqrt{\mathrm{D}})\mathrm{U}' + (-c_2 + c_3\sqrt{\mathrm{D}})\mathrm{V}', & v = -(c_0 + c_1\sqrt{\mathrm{D}})\mathrm{U} - (c_2 + c_3\sqrt{\mathrm{D}})\mathrm{V}. \end{cases}$$

A chaque substitution abélienne (S) n'altérant pas $[\delta]$ correspond une et une seule substitution (Σ) et réciproquement; à la substitution (S^{-1}) adjointe à (S) correspond la substitution (Σ^{-1}) inverse de (Σ); au produit de deux substitutions (S) correspond le produit des deux substitutions (Σ) correspondantes; à un groupe de substitutions (S) correspond un groupe de substitutions (Σ) et les deux groupes sont holoèdriquement isomorphes.

Convenons de désigner, par la notation m' le conjugué d'un entier quelconque m du corps $\sqrt{\mathrm{D}}$, on voit, en tenant compte des relations (20) et (21), que les substitutions (Σ) d'ordre k sont de l'un ou l'autre type :

$$(24) \qquad (u, v, u', v';\ \alpha u + \beta v,\ \ \gamma u + \delta v,\ \ \alpha' u' + \beta' v',\ \ \gamma' u' + \delta' v'),$$

$$(25) \qquad (u, v, u', v';\ a u' + b v',\ \ c u' + d v',\ \ a' u + b' v,\ \ c' u + d' v),$$

α, β, γ, δ étant des entiers quelconques du corps $\sqrt{\mathrm{D}}$ vérifiant la relation $\alpha\delta - \beta\gamma = k$

et a, b, c, d désignant également des entiers du même corps quadratique satisfaisant à l'équation $ad - bc = -k$.

Ceci suppose toutefois que D n'est pas congru à 1 suivant suivant le module 4; dans ce cas, α, β, γ, δ, a, b, c, d seraient des entiers du corps $\sqrt{D}$ de la forme $P + Q\sqrt{D}$, P et Q étant deux entiers ordinaires quelconques et non pas de la forme $P + Q\,\frac{1+\sqrt{D}}{2}$ qui est l'expression générale des entiers d'un tel corps.

Au groupe des substitutions (S) de degré 1 correspond le groupe isomorphe des substitutions (Σ) d'ordre ± 1. Considérons deux formes à indéterminées conjuguées ψ_1 et ψ_2 du corps $\sqrt{D}$; si l'cn passe de l'une à l'autre par une substitution (Σ) d'ordre ± 1, ces deux formes seront dites *équivalentes*, l'équivalence étant *propre* si (Σ) est droite et d'ordre $+1$. Les deux formes abéliennes Ψ_1 et Ψ_2 associées à ψ_1 et ψ_2 seront alors *équivalentes* au sens que nous avons donné à ce mot dans la théorie des formes abéliennes; on passe en effet de l'une à l'autre par la substitution abélienne (S) correspondant à (Σ). Par conséquent :

Si deux formes à indéterminées conjuguées ψ_1 et ψ_2 d'un même corps quadratique sont équivalentes, les formes abéliennes associées Ψ_1 et Ψ_2 sont équivalentes.

Or, nous verrons que deux formes abéliennes définies Ψ_1 et Ψ_2 ne peuvent être équivalentes que dans des substitutions n'altérant pas le couple $[\delta]$; on en conclura l'identité complète des deux problèmes de l'équivalence des formes à indéterminées conjuguées définies et de celle des formes abéliennes définies; il en sera de même, comme nous le verrons, d'une certaine classe des formes à indéterminées conjuguées des corps réels et des formes abéliennes indéfinies de seconde espèce.

Remarques : I. — L'isomorphisme holoèdrique des groupes de substitutions abéliennes (S) n'altérant pas le couple $[\delta]$ et des groupes de substitutions (Σ) du corps $\sqrt{D}$ permet d'étendre à ces derniers quelques résultats relatifs aux substitutions (S) de degré 1.

Toute substitution (Σ) d'ordre -1 est le produit de la substitution

$$\Sigma_{-1} = (u,\ v,\ u',\ v';\ u,\ -v,\ u',\ -v')$$

par une substitution (Σ) d'ordre 1, et toute substitution (Σ) gauche est le produit de

$$\Sigma_1 = (u,\ v,\ u',\ v';\ u',\ -v',\ u,\ -v)$$

par une substitution droite de même ordre.

Nous avons défini *l'équivalence propre* de deux formes à indéterminées conjuguées; il y a *trois ordres d'équivalence impropre* qui correspondent aux substitutions (Σ) droites d'ordre -1 ou gauches d'ordre ± 1. Convenons de représenter symboliquement par (A, B, C) la forme à indéterminées conjuguées

$$\psi(u,v;\,u',v') = Auu' + \frac{B}{\sqrt{D}}uv' - \frac{B'}{\sqrt{D}}u'v + Cvv'. \tag{15}$$

Σ_{-1} change la forme (A, B, C) en (A, —B, C) que nous appelons forme *opposée* à la première; Σ_{-1} change ψ en (A, B′, C) que nous appelons *forme conjuguée* de ψ; et l'on voit que toute forme ψ équivalente à la forme (A, B, C) est proprement équivalente à l'une des quatre formes .

$$(A, B, C), \quad (A, -B, C), \quad (A, B', C), \quad (A, -B', C).$$

On voit s'introduire ainsi des ordres d'équivalence impropre différents de ceux qu'on rencontre dans la théorie des formes binaires; on doit remarquer qu'on pourrait également considérer comme équivalentes deux formes à indéterminées conjuguées transformables l'une dans l'autre par une substitution (Σ) du type (24) ou (25), telle que $\alpha\delta - \beta\gamma$ ou $ad - bc$ soit une unité quelconque du corps $\sqrt{D}$, ce qui introduirait, dans le cas du corps $\sqrt{-1}$ et des corps réels, de nouveaux ordres d'équivalence impropre. Cette notion arithmétique avait déjà été donnée par Hermite dans le cas du corps $\sqrt{-1}$; nous y reviendrons à la fin de ce travail et nous montrerons qu'elle est liée aux transformations abéliennes singulières.

II. — Posons dans l'expression de la forme (15) :

$$\frac{u}{v} = \xi, \qquad \frac{u'}{v'} = \eta;$$

cette forme se change en

$$\rho(\xi, \eta) = A\xi\eta + \frac{B}{\sqrt{D}}\xi - \frac{B'}{\sqrt{D}}\eta + C$$

aux substitutions (Σ) d'ordre ± 1 effectuées sur ψ correspondent, comme il est bien facile de le voir, les substitutions du groupe arithmétique du corps $\sqrt{D}$ effectuées sur ξ et η, et on pourrait définir l'équivalence des relations homographiques $\rho(\xi, \eta)$, établir la notion de classe, effectuer leur réduction. Ceci relie l'étude des formes à indéterminées conjuguées aux groupes modulaires et arithmétiques des corps quadratiques et nous aurons l'occasion, dans la suite, d'appliquer les propriétés de ces groupes à la réduction des formes ψ et ψ'.

III. — Nous avons défini précédemment le déterminant δ et le discriminant $-\delta$ de la forme $\psi(u, v; u', v')$; on vérifie très facilement qu'une substitution (Σ) droite d'ordre k change ψ en une forme de déterminant δ' donné par la relation

$$\delta' = (\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha'\delta' - \beta'\gamma')\delta = k^2\delta.$$

De même, la substitution gauche (25) d'ordre k change ψ en une forme de déterminant

$$\delta'' = (ad - bc)(a'd' - b'c')\delta = k^2\delta.$$

Le déterminant et le discriminant d'une forme à indéterminées conjuguées restent invariables dans les substitutions d'ordre ± 1. Ce résultat peut d'ailleurs être considéré comme une conséquence de l'invariabilité de l'invariant d'une forme abélienne dans une substitution abélienne de degré 1.

IV. — Tout ce que nous avons dit relativement aux formes à indéterminées conjuguées du type ψ s'étend aux formes des corps $\sqrt{4N+1}$; les expressions (24) et (25) des substitutions dans lesquelles on les compare sont exactement les mêmes et nous ne reprendrons pas pour ces formes les développements précédents.

[**3**] Dans son Mémoire relatif à la transformation des fonctions abéliennes, Hermite a attiré l'attention sur le rapprochement qui s'impose entre les formes abéliennes et les formes à deux indéterminées dont un certain nombre de propriétés semblables révèlent la grande analogie. et a pensé qu'il serait peut-être possible de traiter, par les méthodes propres aux formes binaires, les principales questions concernant les formes abéliennes. Si la considération des formes à deux variables joue un rôle capital dans la méthode que nous avons suivie, il importe cependant de remarquer qu'elle ne pouvait. à elle seule, conduire à la réduction des formes abéliennes et que celle-ci exigeait l'emploi de principes nouveaux et différents de ceux sur lesquels Gauss et Hermite ont fait reposer la théorie arithmétique des formes binaires.

Pour les formes définies et les formes indéfinies de première espèce, nous avons fait appel à une représentation géométrique déjà employée des formes à indéterminées conjuguées des corps imaginaires, utilisant pour la réduction de ces formes la connaissance du domaine fondamental des groupes modulaires de ces corps, et, à ce point de vue, nous trouverons une certaine analogie entre les formes binaires et l'ensemble des formes abéliennes dont la forme adjointe représente proprement un même nombre donné négatif de forme $-4N$ ou $-(4N-1)$. Quant aux formes indéfinies de seconde espèce, leur réduction repose sur des principes tout différents de ceux qu'on emploie ordinairement dans la théorie des nombres. Cette nécessité d'employer une méthode nouvelle peut sembler en contradiction avec l'analogie de certaines propriétés des formes abéliennes et de formes à deux indéterminées. Aussi, essaierons-nous d'en donner une raison ; celle-ci se trouve dans la liaison intime des formes d'Hermite avec les corps quadratiques et l'impossibilité d'étendre aux entiers de ces corps, sans modification, les propriétés de la divisibilité des entiers ordinaires. Nous traiterons comme exemple la représentation d'un nombre par une forme abélienne et nous essaierons d'en déduire un procédé de réduction de ces formes, analogue à celui qu'on emploie pour les formes binaires et qu'Hermite a étendu aux formes à indéterminées conjuguées du corps $\sqrt{-1}$.

Soit à représenter un nombre entier donné N par une forme abélienne

$f(x_0, x_1, x_2, x_3)$. En vertu des remarques du paragraphe précédent, ce problème est entièrement équivalent à celui de la représentation du nombre N par une forme abélienne du type Ψ ou par une forme à indéterminées conjuguées

$$\psi(u, v; u', v') = \mathrm{A}uu' + \frac{\mathrm{B}}{\sqrt{\Delta}}uv' - \frac{\mathrm{B}'}{\sqrt{\Delta}}u'v + \mathrm{C}vv' \tag{28}$$

d'un corps quadratique réel ou imaginaire $\sqrt{\Delta}$, 4Δ étant un nombre représenté proprement par la forme binaire adjointe à f.

Nous dirons que le nombre N est représentable proprement par ψ, si l'on peut trouver deux entiers u et v du corps $\sqrt{\Delta}$, *premiers entre eux*, tels que :

$$\psi(u, v; u', v') = \mathrm{N}.$$

N est représentable proprement par la forme abélienne f s'il existe quatre entiers ordinaires x_0, x_1, x_2, x_3 *premiers entre eux dans l'ensemble*, tels que :

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = \mathrm{N}.$$

A toute représentation propre (u, v) de N par ψ correspond la représentation propre (x_0, x_1, x_2, x_3) de ce nombre N par la forme Ψ; on l'obtient en posant

$$u = x_1 + x_0\sqrt{\Delta}, \qquad v = x_3 + x_2\sqrt{\Delta}. \tag{29}$$

Inversement, à une représentation propre (x_0, x_1, x_2, x_3) de N par Ψ, il correspond la représentation (u, v) de N par ψ, u et v étant donnés par les relations (29); il peut arriver que u et v soient premiers entre eux dans le corps $\sqrt{\Delta}$, et alors la représentation de N par ψ est propre; mais u et v peuvent admettre des diviseurs algébriques communs, auquel cas la représentation est impropre. Et ici, il apparaît une distinction capitale entre les diverses classes de formes abéliennes Ψ. Si le corps $\sqrt{\Delta}$ forme un *domaine holoïde complet*, u et v ont un plus grand commun diviseur δ dont nous désignerons la norme par $|\delta|$, et ψ représente proprement le nombre $\frac{\mathrm{N}}{|\delta|}$, d'où il résulte qu'on obtiendra toutes les représentations propres de N par la forme abélienne Ψ de la façon suivante : on déterminera tous les diviseurs de N qui sont la norme d'un entier δ du corps $\sqrt{\Delta}$; on cherchera toutes les représentations propres de chacun des nombres $\frac{\mathrm{N}}{|\delta|}$ par la forme ψ; soit (u, v) l'une d'elles, posant :

$$u\delta = x_1 + x_0\sqrt{\Delta}, \qquad v\delta = x_3 + x_2\sqrt{\Delta},$$

(x_0, x_1, x_2, x_3) donnera une représentation propre de N par Ψ et on obtiendra par ce procédé toutes les représentations propres d'un nombre donné par une forme abélienne.

Si le corps $\sqrt{\Delta}$ ne forme pas un domaine holoïde complet, deux entiers algébriques du corps n'ayant pas toujours un plus grand commun diviseur, la méthode précédente ne s'applique plus. On voit ainsi apparaître dans ce problème de la représentation d'un nombre par une forme abélienne une distinction essentielle entre les formes abéliennes dont la forme binaire adjointe représente un nombre -4Δ, tel que le corps $\sqrt{\Delta}$ constitue un domaine holoïde complet, et celles pour lesquelles la propriété n'a pas lieu. Pour les premières, le problème se traite de la même façon que pour les formes binaires, et nous allons montrer qu'on peut même, en isolant des formes abéliennes générales, celles dont la forme binaire adjointe représente proprement un nombre entier $4D$ ou $4N+1$, développer, dans le cas où le corps $\sqrt{D}$ ou $\sqrt{4N+1}$ forme un domaine holoïde complet, une théorie de la réduction et de l'équivalence de ces formes abéliennes particulières, absolument parallèle à celle des formes binaires.

[**4**] Considérons l'ensemble des formes abéliennes dont la forme binaire adjointe représente proprement un nombre donné $4D$, positif ou négatif. Nous ferons l'hypothèse tout à fait essentielle que le corps $\sqrt{D}$ forme un *domaine holoïde complet* et nous supposerons, pour éviter toute difficulté, que D n'est pas congru à 1 suivant le module 4. Chacune de ces formes est équivalente à une forme $\Psi(x_0, x_1, x_2, x_3)$ dont les coefficients vérifient les relations

$$a_{00} = -Da_{11}, \quad a_{22} = -Da_{33}, \quad a_{02} = -Da_{13}, \quad a_{01} = a_{23} = 0, \quad a_{03} = -a_{12}.$$

A cette forme est associée la forme à indéterminée conjuguée

$$\psi(u, v; u', v') = a_{11}uu' + \frac{a_{03} + a_{13}\sqrt{D}}{\sqrt{D}} uv' - \frac{a_{03} - a_{13}\sqrt{D}}{\sqrt{D}} u'v + a_{33}vv'$$

que nous noterons (A, B, C).

Nous admettrons le résultat suivant que nous démontrerons plus tard :

Deux formes abéliennes définies Ψ_1 et Ψ_2 sont équivalentes quand les deux formes associées ψ_1 et ψ_2 sont équivalentes et seulement dans ce cas. La plupart des propositions que nous établirons seront énoncées pour les formes à indéterminées conjuguées et il serait aisé d'écrire les théorèmes correspondants pour les formes abéliennes.

1° La substitution (Σ)

$$\left\{\begin{array}{ll} u = \alpha U + \beta V, & u' = \alpha' U' + \beta' V', \\ v = \gamma V + \delta V, & v' = \gamma' U' + \delta' V' \end{array}\right. \tag{30}$$

change la forme (A, B, C) en la forme $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$:

$$\psi'(U, V; U' V') = \mathcal{A} UU' + \frac{\mathcal{B}}{\sqrt{D}} UV' - \frac{\mathcal{B}'}{\sqrt{D}} U'V + \mathcal{C} VV',$$

dans laquelle les coefficients $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ sont donnés par les équations suivantes :

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned} \mathcal{A} &= A\alpha\alpha' + \frac{B}{\sqrt{D}}\alpha\gamma' - \frac{B'}{\sqrt{D}}\alpha'\gamma + C\gamma\gamma' = \psi(\alpha, \gamma; \alpha', \gamma'),\\ \frac{\mathcal{B}}{\sqrt{D}} &= A\alpha\beta' + \frac{B}{\sqrt{D}}\alpha\delta' - \frac{B'}{\sqrt{D}}\beta'\gamma + C\gamma\delta' = \alpha\frac{\partial\psi}{\partial\beta} + \gamma\frac{\partial\psi}{\partial\delta},\\ -\frac{\mathcal{B}'}{\sqrt{D}} &= A\alpha'\beta + \frac{B}{\sqrt{D}}\beta\gamma' - \frac{B'}{\sqrt{D}}\alpha'\delta + C\gamma'\delta = \alpha'\frac{\partial\psi}{\partial\beta'} + \gamma'\frac{\partial\psi}{\partial\delta'},\\ \mathcal{C} &= A\beta\beta' + \frac{B}{\sqrt{D}}\beta\delta' - \frac{B'}{\sqrt{D}}\beta'\delta + C\delta\delta' = \psi(\beta, \delta; \beta', \delta'),\end{aligned}\right.$$

et l'on a identiquement

$$(32)\qquad \mathcal{B}\mathcal{B}' + D\mathcal{A}\mathcal{C} = (\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha'\delta' - \beta'\gamma')(BB' + DAC).$$

Si le nombre N *est représentable proprement par la forme* ψ, *le déterminant* δ *de cette forme est congru suivant le module* ND *à la norme d'un entier du corps quadratique* $\sqrt{D}$.

Supposons, en effet, qu'on ait

$$N = f(\alpha, \gamma; \alpha', \gamma');$$

α et γ étant deux entiers premiers entre eux du corps $\sqrt{D}$, on peut trouver, en vertu de l'hypothèse faite sur ce corps, deux entiers de ce corps β et δ tels que :

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

La substitution (30) de coefficients α, β, γ, δ change ψ en la forme ψ' et l'égalité (32) peut s'écrire

$$(33)\qquad \delta = (x + y\sqrt{D})(x - y\sqrt{D}) + DN\psi(\beta, \delta; \beta', \delta')$$

en posant

$$(34)\qquad \sqrt{D}\left(\alpha\frac{\partial\psi}{\partial\beta} + \gamma\frac{\partial\psi}{\partial\delta}\right) = x + y\sqrt{D};$$

l'égalité (33) entraîne la congruence

$$(35)\qquad \delta \equiv x^2 - Dy^2 \pmod{DN},$$

qui contient le théorème que nous voulions démontrer.

On voit de plus que :

Si un nombre N *est représentable proprement par une forme à indéterminées conjuguées* ψ, *celle-ci est équivalente à une forme* ψ' *dont le premier coefficient est égal à* N.

Cette forme ψ' s'écrit :

$$(36)\qquad \psi' = Nuu' + \frac{x + y\sqrt{D}}{\sqrt{D}}uv' - \frac{x - y\sqrt{D}}{\sqrt{D}}u'v + \frac{\delta - (x^2 - Dy^2)}{DN}vv'$$

et elle est équivalente à ψ dans la substitution (30), α et γ donnant une représentation propre de N par ψ.

Nous n'énoncerons pas les théorèmes correspondants relatifs aux formes abéliennes; nous ferons simplement remarquer leur grande analogie avec les théorèmes relatifs aux formes binaires.

2° On obtiendra toutes les représentations propres de N par la forme ψ en calculant toutes les expressions ψ' composées avec ce nombre N et les solutions de la congruence (36), et en cherchant les transformations de chacune de ces formes ψ' dans la forme ψ. Ceci donne toutes les représentations propres de N par une forme abélienne Ψ, et on en déduit, comme nous l'avons indiqué, toutes les représentations propres d'un nombre par une forme abélienne quelconque dont la forme binaire associée représente proprement le nombre 4D.

3° Sur les résultats précédents, on peut faire reposer une réduction des formes ψ définies analogue à celle des formes binaires et tout à fait comparable à celle des formes à indéterminées conjuguées qu'a donnée Hermite. Nous ne voulons pas insister trop longuement sur ce point qu'il est extrêmement facile de développer; montrons simplement qu'on peut déduire des propositions précédentes la distribution en un nombre limité de classes des formes abéliennes dont la forme binaire adjointe représente proprement un même nombre 4D et qui ont un même invariant donné δ. Hermite a donné une limite supérieure du module du plus petit nombre entier représentable par une forme quadratique en fonction de la racine carrée de son discriminant; on en conclut qu'une forme abélienne d'invariant δ représente toujours un nombre inférieur à $\lambda|\delta|$, λ étant un coefficient numérique qu'il est inutile d'expliciter. Par conséquent, en vertu des théorèmes précédents, toute forme abélienne est équivalente à une forme Ψ dont le coefficient a_{11} est limité en fonction de l'invariant δ; or, on montre facilement qu'on peut trouver des substitutions abéliennes simples n'altérant pas le coefficient a_{11} de Ψ et changeant cette forme en une autre dans laquelle

$$0 \leqslant a_{03} < \mathrm{D}a_{11}, \qquad 0 \leqslant a_{13} < a_{11}.$$

Les coefficients a_{11}, a_{13}, a_{03} étant limités en fonction de l'invariant δ, on en conclut immédiatement la distribution en un nombre limité de classes des formes abéliennes définies ou indéfinies d'invariant donné dont la forme binaire adjointe représente proprement le nombre 4D.

On peut, pour les formes définies, faire correspondre à chaque classe une forme réduite unique définie par certaines inégalités entre ses coefficients. Mais tout ceci est subordonné à l'hypothèse que le corps $\sqrt{\mathrm{D}}$ constitue un domaine holoïde complet; c'est pourquoi nous nous bornerons à ces indications rapides; nous reprendrons au chapitre suivant, par une méthode absolument générale, la réduction des formes abéliennes définies.

CHAPITRE II.

Formes abéliennes définies.

Soit

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = \Sigma a_{ij} x_i x_j$$

une forme abélienne; nous savons que la condition nécessaire et suffisante pour que cette forme soit définie est que sa *forme binaire adjointe* $\varphi(x, y)$ soit définie négative, ou, ce qui revient au même, que la quadrique associée Q ne contienne que des couples δ imaginaires, c'est-à-dire dont l'invariant est négatif, ce qu'on peut encore exprimer autrement en disant que Q contient un couple δ d'invariant négatif et que l'invariant de f est négatif. Si $\varphi(x, y)$ représente proprement le nombre $-4D$, la forme f est équivalente à la forme abélienne Ψ :

$$(1)\quad \Psi = m(x_1^2 + Dx_0^2) + 2p(x_0 x_3 - x_1 x_2) + 2q(x_1 x_3 + Dx_0 x_2) + n(x_3^2 + Dx_2^2);$$

Ψ a même invariant

$$(2)\qquad \delta = p^2 + D(q^2 - mn)$$

que f et a également les mêmes invariants arithmétiques, c'est-à-dire que les plus grands communs diviseurs des mineurs d'ordre 1, 2, 3, 4 des discriminants de ces deux formes sont les mêmes; en outre, les deux formes binaires adjointes sont équivalentes. Comme, en réalité, on doit considérer qu'à une forme abélienne donnée il correspond une *classe de formes binaires* en désignant ainsi l'ensemble des formes proprement ou improprement équivalentes à une forme donnée, nous pouvons dire que f et Ψ ont même forme binaire adjointe $\varphi(x, y)$. Nous savons que toute forme abélienne définie est équivalente à une ou plusieurs formes du type Ψ et nous avons donné le moyen de trouver la substitution changeant f en Ψ.

Si $\varphi(x, y)$ représente proprement le nombre entier $-D = -(4N - 1)$, la forme f est équivalente à une forme

$$(3)\quad \begin{aligned}\Psi' = 2m(x_1^2 - x_0 x_1 + Nx_0^2) - 2p(x_0 x_3 + x_0 x_2 - x_1 x_2) - 2q(x_1 x_3 + Nx_0 x_2)\\ - 2n(x_3^2 + x_2 x_3 + Nx_2^2)\end{aligned}$$

d'invariant

$$(4)\qquad \delta = p^2 + pq + Nq^2 - Dmn$$

négatif si f et Ψ' sont définies. — Ψ' a mêmes invariants et même forme binaire adjointe que f.

Rappelons encore que nous avons montré qu'il revenait au même d'étudier l'équivalence des formes à indéterminées conjuguées des corps quadratiques $\sqrt{D}$ ou de comparer les formes abéliennes de l'un des types Ψ ou Ψ' dans les substitutions abéliennes d'ordre ± 1 n'altérant pas le couple réduit d'invariant 4D si D n'est pas congru à 1 suivant le module 4 et D dans le cas contraire.

Ceci posé, voici comment nous opérons la réduction des formes abéliennes définies :

1° Nous montrons que le nombre des classes de formes binaires adjointes aux formes abéliennes dont l'invariant est donné, est fini.

2° Nous établissons que si deux formes abéliennes définies d'un même type Ψ ou Ψ' sont équivalentes, elles le sont nécessairement dans une substitution abélienne n'altérant pas le couple réduit que contiennent leurs quadriques associées. Cette proposition se présente comme la conséquence d'un théorème relatif aux substitutions automorphes d'une forme abélienne définie et elle montre l'identité des deux problèmes de l'équivalence des formes d'Hermite définies et de celle des formes à indéterminées conjuguées définies des corps imaginaires.

3° Isolant des formes abéliennes celles dont la forme binaire adjointe représente proprement un même nombre donné, nous effectuons la réduction complète de ces formes, en faisant correspondre à chaque classe une et une seule réduite définie par des inégalités entre les coefficients.

4° En coordonnant les résultats précédents, nous prouvons que les formes abéliennes définies se distribuent en un nombre limité de classes et qu'à chaque classe correspond une et une seule réduite dont nous indiquons la formation.

1. — Sur le nombre des classes de formes binaires adjointes aux formes abéliennes d'invariant donné.

[**1**] Nous démontrerons la proposition suivante :

Le nombre des classes de formes binaires adjointes aux formes abéliennes définies dont l'invariant δ a une valeur donnée, est fini.

Il va nous suffire, pour établir ce théorème, de préciser un peu plus que nous ne l'avons fait jusqu'à présent la liaison des formes d'Hermite et de leurs formes binaires adjointes. Les formes abéliennes définies $f(x_0, x_1, x_2, x_3)$ dont l'invariant, nécessairement négatif

$$\delta = a_{03}^2 - a_{00}a_{33} + a_{02}a_{13} - a_{01}a_{23}, \tag{5}$$

a une valeur déterminée δ, sont équivalentes aux formes Ψ de même invariant

$$\delta = p^2 + \mathrm{D}(q^2 - mn), \tag{2}$$

où l'on considère m, n, p, q et D comme des entiers quelconques vérifiant l'égalité (2). Il nous suffit de raisonner sur les formes $\Psi(x_0, x_1, x_2, x_3)$ pour lesquelles il est très facile de calculer les coefficients de la forme binaire adjointe. Les coefficients $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ d'un couple δ tracé sur la quadrique $\Psi = 0$, vérifient (troisième Partie, chap. I$^{\text{er}}$, § 2) les équations

$$\tag{6} \left\{ \begin{aligned} 2q\mathcal{D} - n\mathcal{B} &= 0, \\ -2q\mathcal{E} + m\mathcal{B} &= 0, \\ -q\mathcal{C} + \mathrm{D}q\mathcal{A} - p\mathcal{B} &= 0, \end{aligned} \right.$$

dont nous allons chercher un système fondamental de solutions.

Nous pouvons supposer que les coefficients m, n, p, q sont premiers entre eux dans l'ensemble, ce qui revient à admettre que nous ne considérons que les formes abéliennes primitives d'invariant δ. En effet, supposons δ divisible par d^2, d étant un entier, nous savons que les formes d'invariant δ, dont le plus grand commun diviseur des coefficients est égal à d, ont les mêmes formes binaires adjointes que les formes primitives d'invariant $\dfrac{\delta}{d^2}$; on en conclut que :

Si $\delta_1^2, \delta_2^2, \ldots, \delta_l^2$ sont les diviseurs carrés de δ, le nombre des classes de formes binaires adjointes aux formes abéliennes d'invariant δ est égal à la somme des nombres de classes de formes binaires adjointes aux formes abéliennes primitives d'invariant δ, $\dfrac{\delta}{\delta_1^2}, \dfrac{\delta}{\delta_2^2}, \ldots, \dfrac{\delta}{\delta_l^2}$.

[2] Ce théorème est vrai aussi bien pour les formes indéfinies que pour les formes définies. Nous pouvons nous borner à rechercher le nombre de classes de formes binaires adjointes aux formes abéliennes f primitives d'invariant donné δ: nous distinguerons deux cas suivant que f est proprement ou improprement primitive.

1° *Formes proprement primitives.* — Les entiers m et n qui figurent dans l'expression de Ψ ne sont pas tous deux pairs; un système fondamental de solutions des équations (6) est le suivant :

$$\begin{array}{lllll} A_1 = 1, & B_1 = 0, & C_1 = \mathrm{D}, & D_1 = 0, & E_1 = 0, \\ A_2 = 0, & B_2 = 2q, & C_2 = -2p, & D_2 = n, & E_2 = m, \end{array}$$

et la forme $\varphi(x, y)$ adjointe à Ψ s'écrit :

$$\varphi(x. y) = -4[\mathrm{D}x^2 - 2pxy + (mn - q^2)y^2].$$

Tous les couples δ tracés sur la quadrique $\psi = 0$ sont d'invariant pair, c'est un résultat que nous avons déjà trouvé.

$\frac{-\varphi}{4}$ étant une forme binaire quelconque du type $ax^2 + 2bxy + cy^2$ dont le déterminant est égal à δ :

Le nombre des classes de formes binaires adjointes aux formes abéliennes proprement primitives d'invariant δ est égal au nombre de classes de formes binaires de déterminant δ.

Ce nombre est fini. Dans le cas des formes abéliennes définies, $\frac{-\varphi}{4}$ est définie positive et on peut toujours, par une substitution unimodulaire effectuée sur x et y, la ramener à la forme réduite de sa classe, ce qui montre, en vertu de résultats précédents, qu'on peut toujours, sur une quadrique abélienne définie, déterminer deux couples fondamentaux δ_1 et δ_2, tels que la forme binaire adjointe correspondante soit la forme réduite de sa classe. Deux formes abéliennes ne pouvant être équivalentes que si elles ont même forme binaire adjointe, on voit ainsi qu'aux formes définies proprement primitives ayant même forme binaire adjointe, se trouve associé l'ensemble des systèmes de deux couples δ_1 et δ_2 dont les trois invariants sont déterminés. Ces couples étant imaginaires, il est très facile de montrer que ces systèmes de couples de mêmes invariants sont réductibles à un nombre fini d'entre eux et d'en déduire les théorèmes relatifs à la réduction des formes abéliennes définies et à la distribution en un nombre limité de classes de celles qui ont un invariant déterminé. De ces propositions, on déduirait les théorèmes analogues concernant les formes à indéterminées conjuguées définies. C'est la marche inverse que nous avons suivie dans ce Mémoire; mais nous devons signaler que l'étude arithmétique des formes abéliennes peut reposer uniquement sur la considération de l'équivalence des couples δ et qu'il n'est pas sans intérêt de constater que le point de vue géométrique où nous sommes placés conduit aux résultats fondamentaux de la théorie des formes abéliennes et de celle des formes à indéterminées conjuguées.

Dans le cas des formes indéfinies, le théorème précédent est encore vrai. En effet, si f est indéfinie de première espèce, δ est positif, $\frac{\varphi(x, y)}{4}$ est indéfinie : le nombre des classes de formes binaires adjointes est encore fini, mais on doit remarquer qu'il y a en général plusieurs réduites dans chaque classe. Si f est indéfinie de seconde espèce, δ est négatif, D est toujours négatif, $\frac{\varphi}{4}$ est une forme définie positive qu'on peut ramener à la forme réduite de sa classe, mais il y a d'assez grandes difficultés à prouver que les systèmes de deux couples réels δ_1 et δ_2 de mêmes invariants sont réductibles à un nombre fini d'entre eux, et la méthode géométrique dont nous avons mentionné l'emploi pour les formes définies n'est pas aussi avantageuse que dans ce dernier cas : c'est un ordre d'idées sur lequel nous reviendrons ultérieurement.

2° *Formes improprement primitives.* — m et n sont pairs, et respectivement égaux à $2m'$ et $2n'$; un système fondamental de solutions des équations (5) s'écrit :

$$A_1 = 1, \quad B_1 = 0, \quad C_1 = D, \quad D_1 = 0, \quad E_1 = 0,$$
$$A_2 = 0, \quad B_2 = q, \quad C_2 = -p, \quad D_2 = n', \quad E_2 = m';$$

la forme $\varphi(x, y)$ adjointe à Ψ est la suivante :

$$\varphi(x, y) = -[4Dx^2 - 4pxy + (4m'n' - q^2)y^2].$$

Si q est impair, $-\varphi(x, y)$ représente proprement des nombres de forme $4N$ et des nombres de forme $4N - 1$, son déterminant est égal à 4δ, et le nombre de ces classes de formes correspondant à une valeur donnée de δ est fini.

Si q est pair et égal à $2q'$, on peut écrire

$$\varphi(x, y) = -4[Dx^2 - pxy + (m'n' - q'^2)y^2],$$

p est alors impair; tous les couples tracés sur $\Psi = 0$ sont d'invariant pair; le déterminant de $\varphi(x, y)$ est égal à δ et le nombre de ces classes de formes $\varphi(x, y)$ correspondant à une valeur déterminée de δ est fini.

On retrouve ainsi ce résultat : les formes abéliennes improprement primitives après division de leurs coefficients par leur plus grand commun diviseur sont les seules dont la quadrique associée peut contenir un couple δ d'invariant impair.

Des considérations précédentes, il résulte que le théorème que nous avions en vue est démontré et on voit de plus qu'il est également établi pour l'ensemble des formes abéliennes indéfinies de première ou de seconde espèce et d'invariant déterminé.

2. — Substitutions automorphes d'une forme abélienne définie.

[**1**] Soit $f(x_0, x_1, x_2, x_3)$ une forme abélienne dont la forme binaire adjointe est

$$\varphi(x, y) = \Delta_1 x^2 + 2\mathfrak{D}xy + \Delta_2 y^2.$$

La quadrique abélienne Q associée à la forme f contient deux couples fondamentaux δ_1 et δ_2 d'invariants Δ_1 et Δ_2 et dont l'invariant simultané est égal à $\mathfrak{D}$; tous les couples δ tracés sur Q sont représentés symboliquement par $x\delta_1 + y\delta_2$, x et y étant deux nombres entiers premiers entre eux.

Soit (S) une substitution abélienne de degré 1 conduisant des variables x_0, x_1, x_2, x_3 aux variables X_0, X_1, X_2, X_3 et telle que l'on ait

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) \equiv f(X_0, X_1, X_2, X_3),$$

(S) est une substitution automorphe de la forme f. Nous démontrerons la proposition suivante :

Si la forme binaire $\varphi(x, y)$ adjointe à la forme abélienne définie f n'appartient pas à une classe ambiguë, les substitutions abéliennes automorphes de f laissent inaltérés tous les couples δ tracés sur la quadrique associée à Q.

Il est alors très facile de trouver ces substitutions, car il suffit pour les déterminer d'écrire qu'elles n'altèrent pas les deux couples fondamentaux δ_1 et δ_2.

La substitution automorphe (S) change nécessairement un couple δ tracé sur Q en un autre couple δ également tracé sur Q; elle change donc le couple δ_1 en $x_1\delta_1 + y_1\delta_2$ et le couple δ_2 en $x_2\delta_1 + y_2\delta_2$. Soit δ le couple $x\delta_1 + y\delta_2$ d'invariant $\Delta = \varphi(x, y)$ tracé sur Q, il se trouve changé en le couple $x(x_1\delta_1 + y_1\delta_2) + y(x_2\delta_1 + y_2\delta_2)$ ou $(xx_1 + yx_2)\delta_1 + (xy_1 + yy_2)\delta_2$ qui a même invariant Δ, puisqu'une substitution abélienne de degré 1 conserve l'invariant d'un couple δ; on a donc, quels que soient x et y premiers entre eux :

$$\varphi(xx_1 + yx_2,\ xy_1 + yy_2) \equiv \varphi(x, y),$$

ce qui montre que la substitution

$$(x, y;\ x_1x + x_2y,\ y_1x + y_2y)$$

est une substitution automorphe de la forme binaire $\varphi(x, y)$; or, si $\varphi(x, y)$ est définie et n'appartient pas à une classe ambiguë, ses seules transformations en elle-même sont :

$$(x, y;\ \varepsilon x, \varepsilon y), \qquad \varepsilon = \pm 1;$$

les substitutions abéliennes (S) correspondantes sont les substitutions d'ordre ε laissant inaltérés tous les couples $x\delta_1 + y\delta_2$ et le théorème est démontré. Il est très facile de constater qu'il existe toujours de telles substitutions abéliennes.

Remarque. — Nous n'avons pas fait intervenir la condition pour $\varphi(x, y)$ d'être *négative*, on en conclut que la proposition précédente s'applique également aux formes abéliennes indéfinies de seconde espèce, leur forme binaire adjointe étant définie positive.

[**2**] *Si la forme binaire $\varphi(x, y)$ appartient à une classe ambiguë,* il peut exister des substitutions automorphes de la forme f ne laissant pas inaltérés tous les couples δ tracés sur Q. Soit σ le *plus grand diviseur* de $\varphi(x, y)$, c'est-à-dire le plus grand commun diviseur de Δ_1, $2\mathfrak{D}$, Δ_2; désignons par D le discriminant positif $\Delta_1\Delta_2 - \mathfrak{D}^2$ de la forme définie $\varphi(x, y)$, cette forme appartient à une classe ambiguë dans les deux cas suivants : $D = \sigma^2$ et $4D = 3\sigma^2$.

1° $D = \sigma^2$, la forme réduite est $\sigma(x^2 + y^2)$, et nous avons le droit de supposer que les couples fondamentaux δ_1 et δ_2 sont ceux qui correspondent à cette réduite; cette réduite admet quatre substitutions automorphes :

$$\begin{vmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 0 & -\varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{vmatrix}, \qquad \varepsilon = \pm 1;$$

aux deux premières correspondent les substitutions abéliennes d'ordre ε n'altérant pas les deux couples δ_1 et δ_2; aux deux dernières correspondent les substitutions abéliennes d'ordre ± 1 changeant respectivement δ_1 et δ_2 en δ_2 et $-\delta_1$; on constate qu'il en existe toujours. Soit Σ l'une d'elles et S l'une quelconque des substitutions transformant en lui-même chaque couple δ de Q, les substitutions $S\Sigma$ changent δ_1 en δ_2 et δ_2 en $-\delta_1$; ce sont toutes les substitutions jouissant de cette propriété.

2° $4D = 3\sigma^2$. la forme réduite est $\sigma(x^2 + xy + y^2)$; ses substitutions automorphes sont au nombre de six, à savoir :

$$\begin{vmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & -\varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -\varepsilon & -\varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{vmatrix}, \qquad \varepsilon = \pm 1;$$

les deux premières correspondent aux substitutions abéliennes n'altérant aucun couple δ, les deux suivantes à celles qui changent δ_1 en δ_2 et δ_2 en $-\delta_1 + \delta_2$, les deux dernières à celles qui transforment δ_1 en $-\delta_1 + \delta_2$ et δ_2 en $-\delta_1$. Il en existe toujours de ces deux dernières catégories; soit Σ une substitution abélienne déterminée changeant δ_1 en δ_2 et δ_2 en $-\delta_1 + \delta_2$ et S la substitution abélienne de degré 1 la plus générale n'altérant aucun des couples δ, les substitutions automorphes de la forme f sont les suivantes :

$$S, \quad S\Sigma, \quad S\Sigma^2.$$

Nous avons antérieurement déterminé les substitutions abéliennes n'altérant pas un couple δ_1; cherchons parmi elles celles qui laissent également inaltéré le couple δ_2, on en déduit l'expression générale des substitutions automorphes d'une forme abélienne définie ou indéfinie de seconde espèce si sa forme binaire adjointe n'appartient pas à une classe ambiguë. Dans le cas contraire, on détermine aisément l'une des substitutions que nous avons appelées Σ et on en déduit, dans les conditions que nous avons indiquées, l'expression générale des substitutions automorphes de la forme abélienne f.

Ces substitutions automorphes sont en nombre fini dans le cas où la forme f est définie, et en nombre infini dans le cas où elle est algébriquement réductible au type $u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2$ et d'invariant positif.

[**3**] Une conséquence très importante des propositions précédentes est la suivante :

Si deux formes abéliennes définies Ψ_1 et Ψ_2 correspondant à un même couple réduit [δ] *sont équivalentes, les formes à indéterminées conjuguées ψ_1 et ψ_2 associées à Ψ_1 et Ψ_2 sont équivalentes* (1).

---

(1) Au sens donné à ce mot au Chapitre précédent lorsque nous avons traité des formes à indéterminées conjuguées des corps quadratiques.

Soient Ψ_1 et Ψ_2 deux formes abéliennes équivalentes dont les quadriques associées Q_1 et Q_2 contiennent toutes deux le couple réduit $[\delta]$. Soit δ_2 un couple de Ψ_1 formant avec $\delta_1 \equiv [\delta]$ un système de couples fondamentaux; Ψ_1 et Ψ_2 étant équivalentes, il existe sur Q_2 un couple δ_2' formant avec $\delta_1' \equiv [\delta]$ un système fondamental et les systèmes (δ_1, δ_2) et (δ_1', δ_2') ont les mêmes invariants; les deux formes binaires adjointes à Ψ_1 et Ψ_2 sont alors identiques à une même forme $\varphi(x, y)$. Il suffit de reprendre les raisonnements précédents faits sur $\varphi(x, y)$ pour trouver que si φ n'appartient pas à une classe ambiguë, les seules substitutions changeant Ψ_1 ou Ψ_2 sont celles qui changent tout couple $x\delta_1 + y\delta_2$ de Q_1 en $x\delta_1' + y\delta_2'$ de Q_2, et qui, par conséquent, transforment le couple réduit $[\delta]$ en lui-même. Si φ appartient à une classe ambiguë, il existe des substitutions abéliennes (S) changeant Ψ_1 en Ψ_2 et changeant le couple $[\delta]$ considéré comme appartenant à Q_1 en certains couples $\alpha\delta_1' + \beta\delta_2'$ de Q_2, α et β ayant les valeurs que nous avons déterminées; mais, dans ce cas, il existe des substitutions automorphes de Q_2 changeant $\alpha\delta_1' + \beta\delta_2'$ en $[\delta]$; soit Σ l'une d'elles, $S\Sigma$ change Ψ_1 en Ψ_2 et n'altère pas le couple $[\delta]$, ce qui prouve que, dans tous les cas, Ψ_1 et Ψ_2 sont bien équivalentes dans une substitution abélienne laissant inaltéré $[\delta]$; par conséquent, les formes à indéterminées conjuguées ψ_1 et ψ_2 associées à Ψ_1 et Ψ_2 sont équivalentes.

Le procédé que nous donnerons pour constater l'équivalence de deux formes abéliennes fournissant une des substitutions abéliennes permettant de passer de l'une à l'autre, la recherche de toutes ces substitutions se trouvera complètement effectuée puisque nous savons déterminer les substitutions automorphes de l'une de ces formes.

Nous avons déjà montré que si deux formes à indéterminées conjuguées d'un même corps quadratique sont équivalentes, les formes abéliennes associées sont équivalentes; le théorème précédent conduit au résultat suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour que deux formes abéliennes définies Ψ_1 et Ψ_2 dont les quadriques associées contiennent un même couple réduit $[\delta]$ soient équivalentes est que les deux formes à indéterminées conjuguées ψ_1 et ψ_2 associées à Ψ_1 et Ψ_2 soient équivalentes.

Ce théorème est également démontré pour les formes abéliennes indéfinies de seconde espèce [1].

---

[1] Cela tient à ce que leur forme binaire adjointe φ est définie et les raisonnements qui précèdent ne font intervenir que la condition pour φ d'être définie, sans rien supposer sur son signe.

3. — Sur les formes a indéterminées conjuguées définies des corps imaginaires.

[**1**] Considérons les formes à indéterminées conjuguées

$$(1) \qquad \psi(u, v; u', v') = Auu' + \frac{B}{i\sqrt{D}}uv' - \frac{B'}{i\sqrt{D}}u'v + Cvv'$$

définies du corps $i\sqrt{D}$; A et C sont deux entiers ordinaires quelconques, B et B' deux entiers conjugués du corps $i\sqrt{D}$; si D est congru à 0, 1 ou 2 suivant le module 4, on peut écrire

$$(2) \qquad B = B_1 + iB_2\sqrt{D}, \qquad B' = B_1 - iB_2\sqrt{D};$$

si D est congru à 3 suivant le module 4, c'est-à-dire si $D = 4N - 1$, N étant un entier quelconque positif, posons

$$\omega = \frac{1 + i\sqrt{D}}{2}, \qquad \omega' = \frac{1 - i\sqrt{D}}{2},$$

on a

$$(3) \qquad B = B_1 + \omega B_2, \qquad B' = B_1 + \omega' B_2,$$

B_1 et B_2 étant dans tous les cas des entiers quelconques. Nous nommerons corps $[1, i\sqrt{D}]$ les corps quadratiques de la première catégorie et corps $[1, \omega]$ ceux de la seconde.

Nous supposerons que les formes ψ que nous considérons sont définies positives; dans ces conditions, le déterminant

$$(4) \qquad \delta = BB' - DAC$$

est essentiellement négatif et le coefficient A est positif, ainsi que le discriminant $-\delta$.

On pourrait supposer A et C réels et quelconques, B et B' étant imaginaires conjugués; cette extension ne présentant aucun intérêt pour l'étude des formes abéliennes telles que nous la traitons dans ce travail, nous la laissons de côté.

Ces formes à indéterminées conjuguées ont déjà été considérées par Hermite dans le cas du corps $[1, i]$, et par M. Bianchi dans le cas des corps négatifs quelconques; il importe cependant de remarquer que ce géomètre ne considérait comme formes arithmétiques du corps $i\sqrt{D}$ que les suivantes :

$$(5) \qquad Auu' + buv' + b'u'v + Cvv',$$

b et b' étant deux entiers conjugués du corps $i\sqrt{D}$; ces formes rentrent, comme cas particulier, dans celles que nous étudions. En effet, dans le cas d'un corps $[1, i\sqrt{D}]$, elles correspondent aux formes ψ dont le coefficient B_1 est multiple de D, et dans le cas d'un corps $[1, \omega]$ à celles dont les coefficients B_1 et B_2 vérifient les congruences

$$B_1 + 2NB_2 \equiv 2B_1 + B_2 \equiv 0 \pmod{D}. \tag{6}$$

Il n'y a aucune raison pour ne pas considérer les formes plus générales que nous avons définies, puisque celles-ci ne prennent que des valeurs entières pour des valeurs des variables u et v entières dans le corps quadratique, d'autant plus que la méthode employée par M. Bianchi pour réduire les formes (5) s'applique parfaitement à la réduction des formes ψ.

Nous nous proposons d'établir la distribution en un nombre limité de classes des formes à indéterminées conjuguées du corps $i\sqrt{D}$ dont le déterminant a une valeur négative entière donnée, *nécessairement congrue à la norme d'un entier du corps suivant le module* D, et de prouver qu'à chaque classe on peut faire correspondre une et une seule forme réduite. Nous ferons reposer cette théorie de l'équivalence et de la réduction des formes définies ψ sur l'existence d'un domaine fondamental dans l'espace à trois dimensions du groupe arithmétique d'un corps quadratique imaginaire quelconque.

Avant d'exposer cette méthode qui, nous le répétons, n'est pas nouvelle et n'est autre que celle qu'a suivie M. Bianchi, nous ferons remarquer que la considération des formes binaires adjointes aux formes abéliennes fournit une condition nécessaire pour l'équivalence de deux formes ψ. La correspondance établie entre les formes abéliennes Ψ et les formes à indéterminées conjuguées ψ, permet de définir la forme binaire adjointe à chaque forme ψ; pour que deux formes ψ soient équivalentes, il est nécessaire que leurs formes binaires adjointes soient proprement ou improprement équivalentes. Dans le cas des formes de Bianchi, on constatera que cette condition est toujours vérifiée quand les deux formes ψ ont même déterminant. Les calculs faits sur les formes abéliennes se transportent sans difficulté aux formes à indéterminées conjuguées et nous n'insisterons pas sur cet emploi des formes adjointes qui n'est pas essentiel pour les développements qui vont suivre.

[2] Soit G le groupe des substitutions modulaires droites

$$(\sigma) \quad z_1 = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

du corps imaginaire $i\sqrt{D}$, α, β, γ, δ étant des entiers quelconques de ce corps vérifiant la relation

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Posons

$$z = \xi + i\eta, \qquad z_1 = \xi_1 + i\eta_1;$$

la représentation géométrique des groupes kleinéens, due à M. Poincaré, fait correspondre à la substitution (σ) la transformation (s) du demi-espace (E) supérieur $\zeta > 0$ d'un espace à trois dimensions rapporté aux axes de coordonnées rectangulaires $o\xi$, $o\eta$, $o\zeta$, changeant le point (ξ, η, ζ) en le point (ξ_1, η_1, ζ_1) défini par les formules suivantes :

$$(7)\qquad \begin{cases} z_1 = \dfrac{\rho^2\alpha\gamma' + z\alpha\delta' + z'\beta\gamma' + \beta\delta'}{\rho^2\gamma\gamma' + z\gamma\delta' + z'\gamma'\delta + \delta\delta'}, \\[2mm] z'_1 = \dfrac{\rho^2\alpha'\gamma + z'\alpha'\delta + z\beta'\gamma + \beta'\delta}{\rho^2\gamma\gamma' + z\gamma\delta' + z'\gamma'\delta + \delta\delta'}, \\[2mm] \rho_1^2 = \dfrac{\rho^2\alpha\alpha' + z\alpha\beta' + z'\alpha'\beta + \beta\beta'}{\rho^2\gamma\gamma' + z\gamma\delta' + z'\gamma'\delta + \delta\delta'}, \\[2mm] \zeta_1 = \dfrac{\zeta}{\rho^2\gamma\gamma' + z\gamma\delta' + z'\gamma'\delta + \delta\delta'}, \end{cases}$$

où l'on a posé

$$\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2, \qquad \rho_1^2 = \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2,$$

et dans lesquelles nous désignons la conjuguée d'une quantité complexe quelconque par la même lettre accentuée. A toute substitution (σ) correspond une et une seule transformation (s), et il résulte des théorèmes généraux de M. Poincaré sur les groupes kleinéens que le groupe G a un domaine fondamental dans le demi-espace (E). M. Bianchi en a donné [1] une démonstration directe en montrant que dans toute région définie par les inégalités

$$k < \xi < l, \qquad m < \eta < n, \qquad \zeta > \varepsilon,$$

ε étant une quantité essentiellement positive, il n'y avait qu'un nombre limité de points (ξ, η, ζ) équivalents à un point de (E) par les substitutions du groupe Γ des mouvements (s) isomorphe au groupe G.

Ce domaine fondamental a été déterminé dans le cas du corps complexe $[1, i]$ par M. Picard [2], il est défini par les inégalités suivantes :

$$-\frac{1}{2} < \xi < \frac{1}{2}, \qquad -\frac{1}{2} < \eta < \frac{1}{2}, \qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 > 1.$$

M. Bianchi, en employant la méthode des symétries, a déterminé les domaines fondamentaux des groupes (G) pour un grand nombre de corps quadratiques [3].

---

(1) *Mathematische Annalen*, tome XL, p. 334.

(2) *Bulletin Soc. math. de France*, tome XII, 1883-84, p. 43; *Math. Annalen*, tome XXXIX, p. 142.

(3) Voir articles déjà cités des *Mathematische Annalen*.

[3] A la forme à indéterminées conjuguées (1) supposée définie, nous faisons correspondre le point M du demi-espace (E) que nous appellerons *point représentatif* de la forme et qui est défini par les égalités suivantes :

$$(8) \qquad \xi = -\frac{B - B'}{2iA\sqrt{D}}, \qquad \eta = -\frac{B + B'}{2A\sqrt{D}}, \qquad \zeta = \frac{\sqrt{-\delta}}{A\sqrt{D}}.$$

La substitution droite (Σ) d'ordre 1

$$(9) \qquad \begin{cases} u = \alpha U + \beta V, & u' = \alpha' U' + \beta' V', \\ v = \gamma U + \delta V, & v' = \gamma' U' + \delta' V' \end{cases}$$

change la forme [A, B, C] en une forme [A_1, B_1, C_1] qui lui est proprement équivalente et l'on a :

$$(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} A_1 &= A\alpha\alpha' + \frac{B}{i\sqrt{D}}\alpha\gamma' - \frac{B'}{i\sqrt{D}}\alpha'\gamma + C\gamma\gamma', \\ \frac{B_1}{i\sqrt{D}} &= A\alpha\beta' + \frac{B}{i\sqrt{D}}\alpha\delta' - \frac{B'}{i\sqrt{D}}\beta'\gamma + C\gamma\delta', \\ -\frac{B_1'}{i\sqrt{D}} &= A\alpha'\beta + \frac{B}{i\sqrt{D}}\beta\gamma' - \frac{B'}{i\sqrt{D}}\alpha'\delta + C\gamma'\delta, \\ C_1 &= A\beta\beta' + \frac{B}{i\sqrt{D}}\beta\delta' - \frac{B'}{i\sqrt{D}}\beta'\delta + C\delta\delta'. \end{aligned} \right.$$

Soit M_1 le point (ξ_1, η_1, ζ_1) représentatif de la forme [A_1, B_1, C_1]; à la substitution (Σ) correspond la substitution modulaire (σ) du corps $i\sqrt{D}$:

$$z_1 = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta};$$

le mouvement (s) du demi-espace (E) correspondant à (σ) change M en M_1, comme il est facile de le vérifier en remplaçant A, B, C et A_1, B_1, C_1 par leurs valeurs en fonction de ξ, η, ζ et ξ_1, η_1, ζ_1 dans les relations (10), et en constatant l'identité des nouvelles équations et des formules (7).

Appelons *forme réduite* toute forme à indéterminées conjuguées du corps quadratique $i\sqrt{D}$ dont le point représentatif se trouve dans le domaine fondamental du groupe G relatif à ce corps $i\sqrt{D}$; il est immédiat que : toute forme ψ est proprement équivalente à une forme réduite et que deux formes réduites ne peuvent pas être proprement équivalentes.

Nous démontrerons maintenant la proposition suivante :

Le nombre des formes réduites définies de déterminant δ donné est fini.

Si le domaine fondamental du groupe G n'a aucun point singulier dans le plan $\zeta = 0$, tout point de ce domaine fondamental est tel que ζ est supérieur à un certain nombre positif ε; on en conclut alors que le nombre entier A, que nous avons supposé positif, est inférieur à $\dfrac{\sqrt{-\delta}}{\varepsilon\sqrt{D}}$; il n'y a donc qu'un nombre limité de valeurs entières possibles pour A; les inégalités

$$k < \xi < l, \qquad m < \eta < n$$

montrent que, dans ces conditions, les valeurs des entiers B_1 et B_2 sont limitées, ce qui achève la démonstration.

Si le domaine fondamental de G a des points singuliers dans le plan $\zeta = 0$, on lève la difficulté comme l'a fait M. Bianchi dans le même cas (*Math. Annalen*, tome XL, p. 390).

[**4**] Si dans les inégalités définissant le domaine fondamental du groupe G, on remplace ξ, η et ζ par leurs expressions (8) en fonction de A, B, C, on obtient un système d'inégalités auxquelles satisfont les coefficients des formes réduites. Elles sont un peu différentes de celles qu'a données M. Bianchi dans le cas particulier qu'il a traité; nous en donnerons quelques exemples :

Nous n'avons pas considéré, jusqu'à présent, les trois ordres d'équivalence impropres des formes à indéterminées conjuguées; prenons d'abord le premier qui correspond aux substitutions (Σ) droites d'ordre -1, ($\alpha\delta - \beta\gamma = -1$). Considérons les substitutions (σ) telles que $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$; elles forment un groupe G′ qu'on obtient en adjoignant à G la substitution $z_1 = -z$; le groupe de transformations (s) correspondantes s'obtient par l'adjonction de la symétrie par rapport à $o\zeta$, au groupe de mouvements Γ; or, le domaine fondamental de G est symétrique par rapport à $o\zeta$; celui de G′ s'obtient en le coupant en deux par un plan passant par $o\zeta$ et en prenant une seule moitié. Assujettissons le point représentatif d'une forme à se trouver dans cette région, on définira ainsi des réduites telles que toute forme soit proprement équivalente ou improprement équivalente dans le premier ordre à une forme réduite; deux réduites ne pouvant pas être équivalentes dans l'ordre propre ou dans le premier ordre impropre. On verrait de la même manière que les deux derniers ordres d'équivalence reviennent à considérer comme forme réduite une forme dont le point représentatif se trouve dans le quart du domaine fondamental de G compris, par exemple, dans l'angle formé par les directions positives $o\xi$, $o\eta$, $o\zeta$, les quatre points représentatifs des formes

$$(A, B, C), \qquad (A - B, C), \qquad (A, B', C), \qquad (A, -B', C)$$

étant

$$(\xi, \eta, \zeta), \qquad (-\xi, -\eta, \zeta), \qquad (-\xi, \eta, \zeta), \qquad (\xi, -\eta\ \zeta).$$

Ceci montre qu'il sera toujours très facile, quel que soit le procédé de réduction qu'on ait adopté, de trouver les réduites correspondant aux classes de formes équivalentes dans l'ordre propre ou dans un ordre impropre déterminé.

Il y a, au sens général de l'équivalence dans les substitutions droites ou gauches d'ordre ± 1, une seule forme réduite parmi les quatre précédentes pour laquelle B_1 et B_2 aient des signes fixés si D n'est pas congru à 3 suivant le module 4, et telle que B_2 et $2B_1 + B_2$ soient de signes déterminés si $D \equiv 1 \pmod 4$.

Exemples : I. *Corps* $[1, i]$. — Le domaine fondamental du groupe G est défini par les inégalités

$$-\frac{1}{2} < \xi < \frac{1}{2}, \qquad -\frac{1}{2} < \eta < \frac{1}{2}, \qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 > 1.$$

Les coefficients des formes réduites satisfont aux inégalités

$$-A < 2B_1 \leqslant A, \qquad -A < 2B_2 \leqslant A, \qquad A \leqslant C;$$

ces conditions ont été données par Hermite [1]. Toute forme à indéterminées conjuguées est proprement équivalente à une et une seule forme réduite, deux formes réduites n'étant certainement pas proprement équivalentes.

Si l'on considère également les ordres d'équivalence propre et impropre, on peut définir une forme réduite positive par ces conditions :

$$0 \leqslant 2B_1 \leqslant A, \qquad 0 \leqslant 2B_2 \leqslant A, \qquad A \leqslant C,$$

et toute forme ψ du corps $[1, i]$ est équivalente proprement ou improprement à une forme réduite. A est limité en fonction du déterminant δ; on a :

$$A < \sqrt{-2\delta}.$$

II. *Corps* $[1, i\sqrt{5}]$. — Le domaine fondamental du groupe G′ est défini par les inégalités (10) suivantes :

$$-\frac{1}{2} \leqslant \xi \leqslant \frac{1}{2}, \quad 0 \leqslant \eta \leqslant \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \geqslant 1, \quad \xi^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \zeta^2 \geqslant \frac{1}{4},$$
$$\left(\xi + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + \zeta^2 \geqslant \frac{1}{20}, \qquad \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + \zeta^2 \geqslant \frac{1}{20}.$$

On pose dans ce cas :

$$\xi = -\frac{B_2}{A}, \qquad \eta = -\frac{B_1}{A\sqrt{5}}, \qquad \zeta = \frac{\sqrt{-\delta}}{A\sqrt{5}}, \qquad \rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{C}{A}.$$

---

[1] Hermite, *Sur la théorie des formes quadratiques* (Œuvres, t. I, p. 231).

On peut supposer pour une réduite $B_2 > 0$ et $B_1 \leqslant 0$, les inégalités que vérifient les coefficients d'une forme réduite s'écrivent

$$0 \leqslant B_2 \leqslant \frac{A}{2}, \quad 0 \leqslant -B_1 \leqslant \frac{5A}{2}, \quad C \geqslant A, \quad C + 5B_1 + A \geqslant 0, \quad 5C + 4B_1 + 5A \geqslant 5\,|B_2|.$$

Deux formes réduites ne peuvent être équivalentes ni proprement ni improprement.

Cherchons les formes réduites de déterminant -5; on trouve qu'il y a trois formes réduites de déterminant -5 qui sont :

$$[1, 0, 1], \qquad [2, -5; 3], \qquad [5, -10 + 2i\sqrt{5}, 5].$$

Deux formes réduites ne sont pas équivalentes ni proprement ni improprement; et toute forme ψ du corps $i\sqrt{5}$ est équivalente dans un ordre quelconque propre ou impropre à une forme réduite.

Si on ne considérait que l'équivalence propre dans l'exemple précédent, les formes réduites seraient au nombre de sept :

$$[1, 0, 1], \quad [2, 5, 3], \quad [2, -5, 3], \quad [5, \pm(10 + 2i\sqrt{5}), 5], \quad [5, \pm(10 - 2i\sqrt{5}), 5].$$

III. *Corps* $[1, i\sqrt{7}]$. — Le domaine fondamental du groupe G′ est la région

$$-\frac{1}{2} \leqslant \xi \leqslant \frac{1}{2}, \quad 0 \leqslant \eta \leqslant \frac{\sqrt{7}}{2}, \quad \eta - \xi\sqrt{7} \geqslant 0, \quad \eta + \xi\sqrt{7} \geqslant 0, \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \geqslant 1,$$

$$\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 + \zeta^2 \geqslant 1, \quad \left(\xi + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 + \zeta^2 \geqslant 1.$$

On a dans ce cas :

$$\omega = \frac{1 + i\sqrt{7}}{2}, \qquad B = B_1 + \omega B_2, \qquad \delta = B_1^2 + B_1B_2 + 2B_2^2 - 7AC,$$

on doit poser :

$$\xi = -\frac{B_2}{2A}, \qquad \eta = -\frac{2B_1 + B_2}{2A\sqrt{7}}, \qquad \zeta = \frac{\sqrt{-\delta}}{A\sqrt{7}}, \qquad \rho^2 = \frac{C}{A}.$$

Dans la forme réduite, on peut supposer B_2 positif ou nul et $2B_1 + B_2$ négatif ou nul; il y aura ainsi une et une seule réduite par classe; les coefficients d'une telle forme réduite positive vérifient les inégalités suivantes :

$$0 \leqslant B_2 \leqslant A, \qquad 0 \leqslant -(2B_1 + B_2) \leqslant 7A, \qquad B_1 + 4B_2 \leqslant 0, \qquad C \geqslant A,$$
$$C + B_1 + B_2 + A \geqslant 0, \qquad 2C + 2B_1 - B_2 + 2A \geqslant 0.$$

A est inférieur à $\frac{\sqrt{-\delta}}{3}$.

Cherchons les formes réduites de déterminant -3; A ne peut être égal qu'à o ou I; on trouve qu'il y a une et une seule forme réduite de déterminant -3 qui est la forme $[1, -2, 1]$ ou

$$uu' - \frac{2}{i\sqrt{7}} uv' + \frac{2}{i\sqrt{7}} u'v + vv'.$$

Toutes les formes de déterminant -3 lui sont proprement ou improprement équivalentes; elles sont toutes proprement équivalentes à l'une des deux formes $[1, -2, 1]$ et $[1, 2, 1]$.

[5] Le problème de la réduction des formes abéliennes pose relativement aux formes à indéterminées conjuguées des corps $i\sqrt{4N-1}$ une question un peu différente de celle que nous avons traitée.

Considérons l'ensemble des formes ψ d'un tel corps dans lesquelles le coefficient B_2 est un nombre pair; on a alors

$$B = B_1 + A\omega B_2 = \beta_1 + i\sqrt{D}\,\beta_2$$

en posant

$$B_1 + \frac{B_2}{2} = \beta_1, \qquad \frac{B_2}{2} = \beta_2.$$

Une telle forme se change en une forme de même nature par toute substitution (Σ) droite ou gauche effectuée sur les variables u, v, u', v' dont les coefficients sont des entiers du corps $i\sqrt{D}$ de la forme $M + Ni\sqrt{D}$ et non pas de la forme plus générale $M + N\omega$.

On est amené à comparer les formes spéciales ψ que nous venons de définir dans ces substitutions particulières et à établir à ce nouveau point de vue la notion de classe. Remarquons que le groupe des substitutions (Σ) d'ordre ± 1 est un sous-groupe du groupe arithmétique du corps $[1, \omega]$.

Le groupe (g) des substitutions (Σ) droites d'ordre I est un sous-groupe du groupe G du corps $[1, \omega]$; on obtient toutes les substitutions de G en faisant suivre celles du groupe (g) de la substitution unité et de la substitution $\sigma' = (z, z - \omega)$. A cette substitution σ' correspond dans le demi-espace (E) le mouvement

$$s = \left(\xi, \eta, \zeta;\ \xi - \frac{1}{2},\ \eta - \frac{\sqrt{D}}{2},\ \zeta\right);$$

le domaine fondamental de (g) s'obtient en ajoutant au domaine fondamental D de G la région D' obtenue en faisant subir à ce D le mouvement

$$s^{-1} = \left(\xi, \eta, \zeta;\ \xi + \frac{1}{2},\ \eta + \frac{\sqrt{D}}{2},\ \zeta\right);$$

il est évident que D′ n'a aucun point commun avec D en vertu même de la définition de ce dernier domaine. On appellera forme réduite toute forme du type considéré dont le point représentatif se trouve dans la région $(D + D')$ et on effectuera la réduction de ces formes spéciales de la même manière que dans le cas général.

Pratiquement, supposons faite la réduction des formes du corps $i\sqrt{D}$ telle que nous l'avons indiquée; soit [A, B, C] une forme réduite, appliquons-lui la substitution $\Sigma' = (u, v, u', v'; u + \omega, v, u' + \omega', v')$ qui correspond à σ'; à chaque forme [A, B, C] correspond ainsi une forme [A′, B′, C′]; choisissons parmi les formes [A, B, C] et [A′, B′, C′] celles dont le coefficient B_2 est pair, nous aurons ainsi toutes les formes réduites à indéterminées conjuguées dont le coefficient B_2 est pair, quand on compare ces formes dans les substitutions (Σ) spéciales que nous avons définies.

4. — Réduction des formes abéliennes définies.

[**1**] Considérons l'ensemble $E(\Delta)$ des formes abéliennes définies dont la forme binaire adjointe représente proprement un nombre négatif $\Delta = -4D$, tel que D soit congru à 0, 1 ou 2 suivant le module 4, ces formes sont équivalentes aux formes abéliennes du type $\Psi(x_0, x_1, x_2, x_3)$ auxquelles sont associées les formes à indéterminées conjuguées définies $\psi(u, v; u', v')$ du corps $i\sqrt{D}$, le déterminant de ψ étant égal à l'invariant de Ψ. Les théorèmes établis au paragraphe 3 permettent de déduire de la réduction de ces formes ψ celle des formes Ψ. Aux formes ψ réduites correspondent certaines formes abéliennes réduites Ψ que nous appellerons *formes abéliennes réduites de l'ensemble* $E(\Delta)$, et il suffit de se reporter à l'expression des coefficients A, B, C de ψ en fonction des coefficients a_{ik} de Ψ pour déduire des inégalités entre les coefficients d'une réduite ψ, celles qui sont vérifiées par les coefficients d'une forme abélienne définie réduite. Nous énoncerons les propositions les plus importantes et nous donnerons quelques exemples.

Les formes abéliennes définies d'invariant donné δ dont la forme binaire adjointe représente proprement le nombre $-4D$ *se distribuent en un nombre limité de classes et à chaque classe correspond une et une seule forme réduite de l'ensemble* $E(-4D)$ [1].

Exemples : I. $D = 1$. — *Toute forme abélienne définie positive dont la forme binaire adjointe représente proprement le nombre* -4 *est équivalente à une et une seule des formes réduites de l'ensemble* $E(-4)$ *satisfaisant aux conditions suivantes :*

$$1)\quad \begin{cases} a_{00} = a_{11}, \quad a_{22} = a_{33}, \quad a_{02} = a_{13}, \quad a_{01} = a_{23} = 0, \quad a_{12} = -a_{03}, \\ a_{11} > 0, \quad 0 \leqslant a_{03} \leqslant \dfrac{a_{11}}{2}, \quad 0 \leqslant a_{13} \leqslant \dfrac{a_{11}}{2}, \quad a_{33} \geqslant a_{11}. \end{cases}$$

[1] Il importe de remarquer que nous ne définissons des *réduites* que pour un ensemble $E(\Delta)$.

II. $D=5$. — *Toute forme abélienne définie positive de l'ensemble* $E(-20)$, *c'est-à-dire dont la forme binaire adjointe représente proprement le nombre* -20, *est équivalente à une et une seule des formes réduites dont les coefficients* a_{ik} *satisfont aux conditions*

$$(2)\quad \begin{cases} a_{00}=5a_{11}, \quad a_{22}=5a_{33}, \quad a_{02}=5a_{13}, \quad a_{01}=a_{23}=0, \quad a_{12}=-a_{03}, \\ a_{11}>0, \quad 0\leqslant a_{03}\leqslant \dfrac{5a_{11}}{2}, \quad 0\leqslant a_{13}\leqslant \dfrac{a_{11}}{2}, \quad a_{33}\geqslant a_{11}, \quad a_{33}+5a_{03}+a_{11}\geqslant 0, \\ 5a_{33}+4a_{03}+5a_{11}\geqslant 5a_{13}. \end{cases}$$

La réduction des formes à indéterminées conjuguées du corps $i\sqrt{5}$ et d'invariant -5 montre que les formes abéliennes définies dont l'invariant est égal à -5 se répartissent en trois classes correspondant aux trois formes réduites :

$$5x_0^2+x_1^2+5x_2^2+x_3^2,$$
$$10x_0^2+2x_1^2+15x_2^2+3x_3^2+10x_0x_3-10x_1x_2,$$
$$25x_0^2+5x_1^2+25x_2^2+5x_3^2+20x_0x_2+20x_0x_3-20x_1x_2+x_1x_3.$$

Les considérations précédentes s'étendent au cas où la forme binaire adjointe aux formes abéliennes que l'on envisage représente proprement un nombre $-D$, D étant congru à 3 suivant le module 4. Nous n'énoncerons pas à nouveau le théorème sur la distribution en un nombre limité de classes des formes de même invariant; nous donnerons un exemple :

$D=-7$. — *Toute forme abélienne définie positive dont la forme binaire adjointe représente proprement le nombre* -7 *est équivalente à une et une seule des formes réduites; ces dernières sont celles qui satisfont aux égalités et inégalités suivantes :*

$$(3)\quad a_{00}=2a_{11}=-4a_{01}, \quad a_{22}-2a_{33}=4a_{23}, \quad a_{02}=a_{03}+2a_{13}, \quad a_{03}=-a_{12};$$

$$(4)\quad \begin{cases} 0\leqslant a_{13}\leqslant a_{01}, \quad 0\leqslant -(2a_{03}+a_{13})\leqslant 7a_{01}, \quad a_{03}+4a_{13}\leqslant 0, \quad -a_{23}\geqslant a_{01}, \\ -a_{23}+a_{03}+a_{13}+a_{01}\geqslant 0, \quad -2a_{23}+2a_{03}-a_{13}+2a_{01}\geqslant 0. \end{cases}$$

Les formes abéliennes précédentes définies positives d'invariant -3 constituent une seule classe et sont toutes équivalentes à la réduite

$$4x_0^2+2x_1^2+4x_2^2+2x_3^2-2x_0x_1-4x_0x_2-4x_0x_3+4x_1x_2+2x_2x_3.$$

Dans le cas où les formes binaires adjointes aux formes abéliennes considérées représentent toutes proprement un nombre $-4D$, D étant congru à 3 suivant le module 4, on effectue la réduction de ces formes abéliennes de la même manière en utilisant la réduction des formes particulières à indéterminées conjuguées du corps $i\sqrt{D}$ qui leur correspondent. Par exemple, on déduit de résultats antérieurement établis que les formes abéliennes d'invariant -3 dont la forme binaire adjointe représente proprement le nombre -28, constituent une seule classe; elles sont toutes équivalentes à la forme réduite

$$7x_0^2 + x_1^2 + 7x_2^2 + x_3^2 - 4x_0x_3 + 4x_1x_2.$$

En résumé :

Les formes abéliennes définies d'invariant donné de l'ensemble E(Δ), *c'est-à-dire dont la forme binaire adjointe représente proprement le nombre négatif* Δ *nécessairement congru à* 0 *ou à* 1 *suivant le module* 4, *se distribuent en un nombre limité de classes, et, à chaque classe, correspond une et une seule réduite.*

[2] Définition. — *Nous appelons* forme abélienne définie réduite *toute forme abélienne définie* F, *réduite dans l'ensemble* E(Δ), *telle que* $-\Delta$ *soit le plus petit entier représenté proprement par la forme* $-\varphi(x, y)$, *en désignant par* $\varphi(x, y)$ *la forme binaire adjointe à* F.

Ces formes réduites jouissent des propriétés suivantes :

1° *Toute forme abélienne définie f est équivalente à une et à une seule réduite.*

Soit $\varphi(x, y)$ la forme binaire adjointe à f; elle est définie négative. La forme $-\varphi(x, y)$ est définie positive; il existe, par conséquent, un entier positif bien déterminé $-\Delta$ qui est le plus petit des nombres représentés proprement par la forme $-\varphi$, et à chaque forme abélienne il correspond ainsi un et un seul nombre Δ. D'autre part, la forme f considérée comme appartenant à l'ensemble E(Δ) des formes abéliennes dont la forme binaire adjointe représente proprement le nombre Δ est équivalente à une et à une seule réduite de cet ensemble, ce qui achève la démonstration du théorème.

2° *Deux formes réduites ne peuvent pas être équivalentes.*

Cette proposition est une conséquence de la précédente et il est d'ailleurs facile de l'établir directement. Elle met bien en évidence le caractère de la réduction que nous effectuons. Nous avons, pour chaque ensemble E(Δ) de formes abéliennes définies dont la quadrique associée contient un couple δ d'invariant négatif Δ déterminé, défini des réduites; deux réduites du même ensemble ne pouvaient pas être équivalentes, mais deux réduites correspondant à des valeurs différentes de Δ pouvaient l'être; nous choisissons maintenant dans chacun de ces ensembles E(Δ) des formes réduites telles que deux quelconques appartenant à des ensembles différents ne puissent pas non plus être équivalentes, et nous sommes ainsi conduits à la réduction complète des formes abéliennes définies. En résumé, prenons parmi les réduites de tous les ensembles E(Δ) celles qui sont telles que le plus petit entier positif représenté par la forme obtenue en changeant de signe tous les coefficients de la forme binaire adjointe, soit précisément $-\Delta$, nous obtenons l'ensemble des formes abéliennes réduites.

3° *Le nombre des formes abéliennes définies réduites d'invariant donné δ est fini.*

En effet, le nombre des classes de formes binaires $\varphi(x, y)$ adjointes aux formes abéliennes d'invariant δ donné étant fini, les plus petits entiers représentés proprement par les formes $-\varphi$ sont *a fortiori* en nombre fini; comme, d'autre part, le nombre des réduites d'invariant δ dont la forme binaire adjointe représente proprement un nombre donné est également fini, la proposition est établie. On peut l'énoncer ainsi :

Les formes abéliennes définies d'invariant donné se distribuent en un nombre limité de classes.

[**3**] Les considérations précédentes conduisent à une réduction des formes abéliennes qui, pratiquement, peut être effectuée d'une manière remarquablement simple.

S it à trouver les formes réduites d'invariant donné δ, nécessairement négatif. On cherche d'abord les classes $C_1, C_2, \ldots, C_n$ de formes binaires adjointes qui leur sont associées (chap. II, § 1) et on prend dans chacune de ces classes la forme réduite φ_i; il convient toutefois de remarquer qu'une de nos classes de formes binaires comprenant l'ensemble des formes proprement ou improprement équivalentes à une forme donnée, il importe d'avoir choisi parmi les deux formes réduites de deux classes ordinaires opposées, celle qu'on prend comme réduite de la classe totale (pour $ax^2 + 2bxy + cy^2$, il suffit, par exemple, si $a \mathrel{=}\!\!|\!\!= c$, de se fixer le signe de b). Soient $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ les premiers coefficients de $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ réduites, $-\Delta_i$ est le plus petit entier représenté proprement par $-\varphi_i$. On choisit parmi les formes abéliennes d'invariant δ réduites dans l'ensemble $E(\Delta_i)$, celles dont la forme binaire adjointe est de même classe que φ_i, soient F_i ces formes. Les formes $F_1, F_2, \ldots, F_n$ donnent l'ensemble des formes abéliennes réduites d'invariant δ.

Exemple. — *Soit à trouver les formes abéliennes définies positives proprement primitives réduites d'invariant* -2.

La forme binaire adjointe à une telle forme est du type $-4\theta(x, y)$, θ étant une forme définie de déterminant -2; or, les formes binaires de discriminant 2 constituent une seule classe dont la réduite correspondante est $x^2 + 2y^2$. Cherchons donc parmi les formes abéliennes d'invariant -2, réduites dans l'ensemble $E(-4)$, celles dont la forme binaire adjointe est de même classe que $-4(x^2 + 2y^2)$; soit

$$F(x_0, x_1, x_2, x_3) = \Sigma a_{ij} x_i x_j$$

une telle forme, ses coefficients satisfont aux conditions suivantes :

$$(1)\quad \begin{cases} a_{00} = a_{11}, \quad a_{22} = a_{33}, \quad a_{02} = a_{13}, \quad a_{01} = a_{23} = 0, \quad a_{12} = -a_{03}, \\ a_{11} > 0, \quad 0 \leqslant a_{03} \leqslant \dfrac{a_{11}}{2}, \quad 0 \leqslant a_{13} \leqslant \dfrac{a_{11}}{2}, \quad a_{33} \geqslant a_{11}, \end{cases}$$

on trouve une seule forme réduite

$$x_0^2 + x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2$$

dont la forme binaire adjointe est bien de même classe que $-4(x^2 + 2y^2)$. On en conclut que les formes abéliennes définies proprement primitives d'invariant -2 constituent une seule classe à laquelle correspond la réduite $x_0^2 + x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2$.

Nous devons faire remarquer que le calcul effectif des réduites n'est possible qu'autant que le domaine fondamental du groupe modulaire du corps quadratique correspondant à chacun des ensembles $E(\Delta)$ que l'on doit considérer, est connu; or, ce domaine n'a pas été déterminé dans tous les cas par M. Bianchi, et la méthode qu'il a employée ne semble pas devoir s'appliquer à tous les corps quadratiques; on voit qu'il y aurait pour la théorie des formes abéliennes un grand intérêt à reprendre ces travaux et à les compléter.

[**4**] On peut présenter d'une manière un peu différente la réduction des formes abéliennes en prenant comme point de départ la considération des formes binaires.

A toute classe (C) de formes binaires définies négatives de l'un des deux types

$$-4(ax^2 + bxy + cy^2), \qquad -4(ax^2 + bxy + cy^2) - y^2,$$

correspond un nombre fini de classes de formes abéliennes réduites admettant comme forme binaire adjointe une forme de (C). A chaque classe de formes binaires définies positives $\theta(x, y)$ correspondent les formes réduites en nombre fini dont l'adjointe est de même classe que $-4\theta(x, y)$. Par exemple, à la classe dont la réduite est $x^2 + 5y^2$ correspondent les formes réduites proprement primitives d'invariant -5 de l'ensemble $E(-4)$, dont la forme binaire adjointe est $-4(x^2 + 5y^2)$; ces formes réduites d'invariant -5 de $E(-4)$ sont au nombre de trois :

$$\begin{aligned}
F &= x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2,\\
F' &= 2x_0^2 + 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^3 + 2x_0x_3 - 2x_1x_2,\\
F'' &= 2x_0^2 + 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_0x_2 + 2x_1x_3.
\end{aligned}$$

On les déterminera en utilisant le système d'égalités et d'inégalités (1) entre leurs coefficients; on voit que leurs formes binaires adjointes sont toutes les trois de même classe que $-4(x^2 + 5y^2)$; F, F' et F'' sont donc trois formes abéliennes réduites.

Les formes abéliennes définies proprement primitives dont la forme binaire adjointe est de même classe que la forme $-4(x^2 + 5y^2)$ *se distribuent en trois classes correspondant aux trois formes réduites* F, F', F''.

On pourrait ainsi classer les réduites abéliennes en prenant comme base de cette classification celle des classes de formes binaires.

Remarque. — Les deux formes F' et F'' sont équivalentes dans la substitution

$$S = (x_0, x_1, x_2, x_3;\ x_1, -x_0, x_2, x_3)$$

qui n'est pas une substitution abélienne. Ce résultat n'a rien de surprenant, puisque nous comparons les formes abéliennes uniquement dans les substitutions particulières à quatre variables dont les coefficients vérifient les relations d'Hermite. Si l'on prend les deux formes à indéterminées conjuguées associées à F′ et F″, elles s'écrivent

$$\psi' = 2uu' - iuv' + iu'v + 3vv', \qquad \psi'' = 2uu' + uv' + u'v + 3vv';$$

on passe de la première à la seconde par la substitution

$$\Sigma = (u, v, u', v'; iu, v, -iu', v')$$

en revenant aux notations employées dans l'étude des formes à indéterminées conjuguées $\alpha\delta - \beta\gamma = i$; on a ainsi un exemple d'un ordre d'équivalence impropre que nous avons laissé de côté; il n'est pas sans intérêt de le relier aux substitutions singulières n'altérant pas le couple réduit d'invariant -4; on vérifie aisément que S est une de ces substitutions. Nous reviendrons sur ce point à propos des formes à indéterminées conjuguées des corps réels.

Il nous reste à indiquer comment une forme abélienne étant numériquement donnée, on peut trouver la forme réduite qui lui est équivalente. Soit f cette forme et $\varphi(x, y)$ sa forme binaire adjointe; on détermine par les méthodes courantes de la théorie des formes à deux variables, la substitution $(x, y; \lambda x + \mu y, \lambda' x + \mu' y)$ qui transforme φ en la forme réduite équivalente $(\Delta_1 x^2 + 2\mathfrak{D} xy + \Delta_2 y^2)$; ceci donne, comme nous l'avons montré, les coordonnées du couple δ_1 d'invariant Δ_1 tracé sur la quadrique associée à f.

Uue substitution abélienne quelconque de degré 1 changeant δ_1 en le couple réduit d'invariant Δ_1 transforme f en une forme Ψ ou Ψ' équivalente. On cherche la réduite F équivalente à cette forme Ψ, ce qui peut se faire en réduisant la forme à indéterminées conjuguées associée à Ψ, et F est la réduite cherchée.

Remarque. — On peut, tout au moins théoriquement, définir les formes abéliennes réduites par un système d'inégalités entre leurs coefficients. Soit $C(\Delta)$ l'ensemble des égalités et inégalités définissant une réduite de l'ensemble $E(\Delta)$.

Le plus grand nombre négatif représenté proprement par la forme binaire adjointe à une forme abélienne f étant le premier coefficient Δ de cette forme, c'est une fonction des coefficients a_{ij} de f; en le considérant comme tel, $C(\Delta)$ est un ensemble d'égalités et d'inégalités entre les coefficients d'une forme abélienne définie et il caractérise les formes abéliennes définies réduites.

CHAPITRE III.

Formes abéliennes indéfinies.

[**1**] Tous les principes sur lesquels repose la réduction des formes abéliennes indéfinies de première espèce ayant été énoncés dans les précédents chapitres, nous indiquerons très brièvement les propositions fondamentales concernant l'équivalence de ces formes, en nous attachant surtout à prouver la distribution en un nombre limité de classes des formes de même invariant. Le cas des formes de seconde espèce, plus difficile à traiter et particulièrement intéressant par sa liaison avec les fonctions abéliennes singulières, nous conduira à la réduction des formes à indéterminées conjuguées des corps quadratiques réels et nous permettra de donner une application assez inattendue de la théorie des fonctions à la théorie des nombres.

I. — Formes abéliennes indéfinies de première espèce.

Ces formes abéliennes $f(x_0, x_1, x_2, x_3)$ sont algébriquement réductibles au type $u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2$, leur invariant δ est positif et leur forme binaire adjointe est indéfinie. Comme nous l'avons déjà montré, si la forme binaire $\varphi(x, y)$ adjointe à f représente proprement le nombre négatif $-4D$, f est équivalente à une forme abélienne du type $\Psi(x_0, x_1, x_2, x_3)$ dont la quadrique associée contient le couple réduit d'invariant $-4D$; à cette forme Ψ correspond une forme à indéterminées conjuguées $\psi(u, v; u', v')$ du corps $i\sqrt{D}$, qui est indéfinie et de déterminant positif et égal à l'invariant δ de Ψ et de f. Comme pour les formes définies, on détermine encore les substitutions automorphes d'une forme abélienne indéfinie de première espèce f, en s'aidant de la considération des transformations en elle-même de la forme binaire adjointe $\varphi(x, y)$; celle-ci, étant indéfinie, en admet une infinité. Ces transformations dépendent des solutions (t_n, u_n) d'une équation de Pell, auxquelles correspondent des systèmes de deux couples (δ_1^n, δ_2^n) tracés sur la quadrique Q associée à f et ayant mêmes invariants que le système fondamental (δ_1, δ_2). Soient S les substitutions abéliennes du premier degré *en nombre infini* n'altérant aucun des couples δ tracés sur Q, et Σ une substitution abélienne déterminée d'ordre ± 1, changeant les deux couples fondamentaux (δ_1, δ_2) en (δ_1^k, δ_2^k); les substitutions $S\Sigma$ transforment (δ_1, δ_2) en (δ_1^k, δ_2^k), et ce sont toutes les substitutions abéliennes jouissant de cette propriété. Cherchons alors la plus petite valeur de k, telle que (δ_1^k, δ_2^k) soit équivalent à (δ_1, δ_2) et soit Σ une substitution abélienne de degré 1 changeant (δ_1, δ_2) en (δ_1^k, δ_2^k), les substitutions automorphes de f sont toutes les substitutions $S, S\Sigma, S\Sigma^2, \ldots, S\Sigma^n, \ldots$. En général, cet entier k est égal à l'unité. S'il est différent de 1, deux formes abéliennes Ψ_1 et Ψ_2, dont la forme binaire adjointe est de la même classe, peuvent être équivalentes sans que cette équivalence ait lieu dans une substitution abélienne n'altérant pas le couple réduit d'invariant $-4D$, c'est-à-dire sans que les deux formes à indéterminées conjuguées ψ_1 et ψ_2, associées à Ψ_1 et Ψ_2, soient équivalentes.

[2] Démontrons la proposition suivante :

Les formes abéliennes indéfinies de première espèce d'invariant donné se distribuent en un nombre limité de classes.

Soit δ cet invariant positif donné, nous avons déjà montré que les classes de formes binaires adjointes aux formes abéliennes de même invariant sont en nombre fini, et nous avons indiqué comment on trouvait ces classes quand δ est donné. Dans chaque classe (1) de formes binaires indéfinies $\varphi(x, y)$, il existe un nombre fini de formes réduites dont les coefficients vérifient certaines inégalités; en particulier, si $ax^2 + 2bxy + cy^2$ est réduite, on a : $a > 0$, $c < 0$. A chaque classe de formes binaires adjointes aux formes f d'invariant δ, il correspond un nombre fini de réduites et par conséquent un nombre limité d'entiers négatifs c. Comme dans le cas des formes définies, on peut réduire la forme adjointe φ à une forme réduite équivalente $ax^2 + 2bxy + cy^2$, c est négatif, f est équivalente à une forme Ψ ou Ψ' dont la quadrique associée contient le couple réduit d'invariant négatif c. Si l'on montre que les substitutions abéliennes n'altérant pas un couple réduit permettent de réduire à un nombre fini de types les formes Ψ ou Ψ' correspondant à ce couple et de même invariant δ, la proposition annoncée sera démontrée.

Tout revient à montrer que les formes à indéterminées conjuguées indéfinies d'un corps imaginaire et dont le déterminant a une valeur positive donnée se distribuent en un nombre limité de classes. Bien que les formes à indéterminées conjuguées que nous considérons soient un peu plus générales que celles de Bianchi, elles peuvent être réduites exactement de la même manière. A chaque forme [A, B, C] indéfinie du corps $[1, i\sqrt{D}]$:

$$\psi(u, v; u', v') = Auu' + \frac{B}{i\sqrt{D}} uv' - \frac{B'}{i\sqrt{D}} u'v + Cvv'$$

(1) Quel que soit le procédé de réduction adopté pour les formes binaires indéfinies, notre raisonnement s'applique; il suppose seulement que le nombre des classes de même discriminant est fini ainsi que le nombre des formes binaires réduites de chaque classe.

faisons correspondre la *sphère représentative* (k) décrite sur le cercle

$$\mathrm{A}zz' + \frac{\mathrm{B}}{i\sqrt{\mathrm{D}}}z - \frac{\mathrm{B}'}{i\sqrt{\mathrm{D}}}z' + \mathrm{C} = 0 \tag{1}$$

du plan analytique de la variable $z = \xi + i\eta$. Si B est égal à $\mathrm{B}_1 + i\mathrm{B}_2\sqrt{\mathrm{D}}$, l'équation de (k) s'écrit :

$$\left(\xi + \frac{\mathrm{B}_2}{\mathrm{A}}\right)^2 + \left(\eta + \frac{\mathrm{B}_1}{\sqrt{\mathrm{D}}\mathrm{A}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{\delta}{\mathrm{DA}^2}. \tag{2}$$

La forme [A, B, C] est réduite si sa sphère représentative (k) coupe le domaine fondamental dans l'espace à trois dimensions (ξ, η, ζ), du groupe modulaire du corps $i\sqrt{\mathrm{D}}$. Une forme [A, B, C] est toujours équivalente à une réduite au moins, et on démontre, en calquant la démonstration de M. Bianchi, que :

Le nombre des formes à indéterminées conjuguées réduites, dont le déterminant δ a une valeur positive donnée, est fini.

Ces formes réduites jouissent des mêmes propriétés que celles de M. Bianchi; on pourrait chercher à les retrouver en effectuant la réduction continuelle des formes ψ en opérant comme M. Picard dans le cas du corps $\sqrt{-1}$. Du théorème précédent, on déduit la distribution en un nombre limité de classes des formes abéliennes de même invariant positif. Mais à chaque classe de formes abéliennes, il correspond plusieurs réduites, si on définit ces réduites de la même façon que dans le cas des formes définies. Nous ne pouvons pas développer suffisamment ce sujet; il est très facile de donner des exemples de réduites analogues à ceux que nous avons donnés pour les formes définies, en utilisant les résultats de Bianchi relatifs aux domaines fondamentaux des groupes modulaires des corps imaginaires.

[**3**] Au groupe des substitutions automorphes (S) d'une forme abélienne Ψ, *n'altérant aucun couple* δ, correspond un groupe de substitutions semblables de la forme à indéterminées conjuguées ψ qui lui est associée; ce groupe est isomorphe à un groupe Γ de substitutions automorphes $\left(z, \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$ conservant le cercle (1) représentatif de ψ. Chacun de ces *groupes* Γ *à cercle principal* est isomorphe au groupe des substitutions abéliennes laissant inaltérés deux couples δ, l'un réduit d'invariant négatif, l'autre d'invariant positif. M. Picard[1] a étudié certains de ces groupes liés au corps $\sqrt{-1}$; ils ont un domaine fondamental dans le plan analytique de la variable z limité par des arcs de cercles orthogonaux au cercle représentatif de la forme à indéterminées conjuguées ψ. Il ne serait peut-être pas sans intérêt d'étendre aux corps imaginaires quelconques les recherches de M. Picard sur les formes à indéterminées conjuguées d'Hermite et de déterminer les domaines fondamentaux des groupes à cercle principal qui se rattachent à ces formes.

---

[1] *Annales de l'École Normale supérieure* (1884).

2. — FORMES ABÉLIENNES INDÉFINIES DE SECONDE ESPÈCE.

[1] Les formes abéliennes indéfinies de seconde espèce f sont algébriquement réductibles au type $u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2$; leur invariant δ est négatif et leur forme binaire adjointe est définie positive; les quadriques abéliennes associées à ces formes ne contiennent que des couples δ d'invariant positif. Toute substitution abélienne de degré quelconque change une telle forme f en une autre forme indéfinie de seconde espèce; mais il existe des substitutions non abéliennes, à coefficients entiers réels changeant une forme f en une forme abélienne indéfinie de première espèce, nous en donnerons plus loin des exemples. La forme binaire adjointe à une forme abélienne f étant définie, ces formes f jouissent de propriétés qui les rapprochent des formes définies. La plupart des résultats qui suivent ont été obtenus dans les chapitres précédents.

1° *Si la forme binaire $\varphi(x, y)$ adjointe à f représente proprement le nombre* $4D$, *la forme f est équivalente à la suivante :*

$$\Psi(x_0, x_1, x_2, x_3) = m(x_1^2 - Dx_0^2) + 2p(x_0x_3 - x_1x_2) + 2q(x_1x_3 - Dx_0x_2) + n(x_3^2 - Dx_2^2).$$

Ψ a les mêmes invariants arithmétiques que f et en particulier même discriminant et même invariant δ :

$$\delta = p^2 - D(q^2 - mn).$$

2° *Si $\varphi(x, y)$ représente proprement le nombre positif* $D = 4N + 1$, *la forme f est équivalente à la forme abélienne*

$$\Psi'(x_0, x_1, x_2, x_3) = 2m(x_1^2 - x_0x_1 - Nx_0^2) - 2p(x_0x_3 + x_0x_2 - x_1x_2)$$
$$- 2q(x_1x_3 - Nx_0x_2) - 2n(x_3^2 + x_2x_3 - Nx_2^2)$$

d'invariant δ égal à celui de f :

$$\delta = p^2 + pq - Nq^2 + Dmn.$$

3° *Le nombre des classes* (¹) *de formes binaires adjointes aux formes abéliennes indéfinies de seconde espèce dont l'invariant δ a une valeur négative donnée est fini.*

Les formes binaires adjointes aux formes abéliennes indéfinies de seconde espèce f, proprement primitives après division de leurs coefficients par leur plus

(¹) Deux formes sont de même classe si elles sont proprement ou improprement équivalentes; une de nos classes comprend en général deux classes ordinaires opposées; il n'y a d'exception que pour les classes ambiguës.

grand commun diviseur, sont du type $4\theta(x, y)$, θ désignant une forme à deux variables définie positive quelconque, et le nombre des classes de formes binaires associées aux formes f proprement primitives d'invariant δ est égal au nombre des classes de formes binaires de discriminant positif $-\delta$.

4° *Si la forme binaire $\varphi(x, y)$ adjointe à f n'appartient pas à une classe ambigüe, les substitutions abéliennes automorphes de f laissent inaltérés tous les couples δ tracés sur la quadrique associée à f.*

Ces substitutions se déterminent comme dans le cas des formes définies, mais il importe de remarquer que, dans le cas présent, *elles sont en nombre infini*. Si $\varphi(x, y)$ appartient à une classe ambiguë, on doit, pour avoir toutes les substitutions automorphes, combiner les précédentes avec une ou deux substitutions, comme nous l'avons indiqué à propos des formes définies.

5° *A la forme abélienne Ψ est associée la forme à indéterminées conjuguées ψ du corps quadratique réel* $\sqrt{D}$:

$$\psi(u, v; u', v') = muu' + \frac{p+q\sqrt{D}}{\sqrt{D}}uv' - \frac{p-q\sqrt{D}}{\sqrt{D}}u'v + nvv'.$$

Le déterminant δ de ψ est égal à l'invariant de Ψ.

A une substitution abélienne (S) d'ordre ± 1 n'altérant pas le couple réduit $[\delta]$ d'invariant 4D, il correspond une substitution (Σ) effectuée sur les variables u, v, u', v' et de l'un ou l'autre des deux types

$$\begin{aligned}&(u, v, u', v'; \quad \alpha u + \beta v, \quad \gamma u + \delta v, \quad \alpha' u' + \beta' v', \quad \gamma' u' + \delta' v'),\\ &(u, v, u', v'; \quad au' + bv', \quad cu' + dv', \quad a'u + b'v, \quad c'u + d'v),\end{aligned}$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta, a, b, c, d$ sont des entiers quelconques (1) du corps $\sqrt{D}$ vérifiant les relations

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1, \qquad ad - bc = \pm 1,$$

$\alpha', \beta', \ldots, d'$ étant les conjugués de $\alpha, \beta, \ldots, d$. Réciproquement, à toute substitution (Σ) du premier ou du second type (nous dirons aussi *droite* ou *gauche*) changeant ψ en une forme à indéterminées conjuguées équivalente, il correspond une substitution abélienne (S) n'altérant pas le couple réduit $[\delta]$ d'invariant 4D et changeant Ψ en une forme abélienne équivalente. Le groupe des substitutions abéliennes de degré 1 n'altérant pas $[\delta]$ est isomorphe holoèdriquement au groupe des substitutions (Σ) de déterminant $\alpha\delta - \beta\gamma$ (ou $ad - bc$) égal à ± 1. De plus, ces deux groupes sont isomorphes holoèdriquement au groupe arithmétique du corps $\sqrt{D}$.

(1) Si $D \equiv 1 \pmod 4$, on doit supposer que ce sont des entiers du corps de la forme $P + Q\sqrt{D}$, P et Q étant des entiers ordinaires.

Les considérations précédentes s'étendent aux formes Ψ' et aux formes à indéterminées conjuguées des corps $\sqrt{4N+1}$.

Remarque. — Dans le cas où l'équation $x^2 - Dy^2 = -1$ a des solutions, il existe des substitutions (Σ) de degré -1 et des substitutions (S) singulières de degré -1 n'altérant pas $[\delta]$. Une telle substitution (Σ) change une forme ψ de discriminant $-\delta$ positif en une autre de discriminant δ qui est négatif; la substitution singulière correspondante change une forme abélienne Ψ indéfinie de seconde espèce (invariant δ négatif) en une forme Ψ indéfinie de première espèce. On peut utiliser ce résultat pour ramener la réduction des formes de seconde espèce à celle des formes de première espèce; cette méthode n'étant pas générale et ne s'appliquant que pour certaines valeurs de D, doit être abandonnée.

6° *Si deux formes abéliennes Ψ_1 et Ψ_2 (correspondant à une même valeur de* D) *sont équivalentes, les formes à indéterminées conjuguées ψ_1 et ψ_2 du corps $\sqrt{D}$ associées à Ψ_1 et Ψ_2 sont équivalentes. La réciproque est vraie.*

Ce théorème montre la parfaite identité de l'étude arithmétique des formes abéliennes indéfinies de seconde espèce et de celle des formes à indéterminées conjuguées des corps réels, dont le déterminant est négatif (¹).

[**2**] Comme nous l'avons montré, la réduction des formes à indéterminées conjuguées des corps réels ne peut être effectuée aisément par une méthode analogue à celle qu'on emploie pour les formes binaires que dans le cas des corps dont les entiers forment un domaine holoïde complet. Pour les corps imaginaires, nous avons eu recours au domaine fondamental des groupes modulaires et nous avons pu faire reposer sur la connaissance de ces domaines la réduction effective des formes à indéterminées conjuguées des corps imaginaires. Les formes ψ des corps réels ne semblent pas se prêter à une réduction géométrique basée sur l'existence du domaine fondamental du groupe modulaire de chacun de ces corps. En outre, si l'on sait que ce domaine existe, on ne le connaît pour aucun corps et, en suivant la voie que nous indiquons, on n'obtiendrait qu'une réduction purement théorique des formes à indéterminées conjuguées des corps positifs. Au fond, la méthode que nous suivrons dans ce travail ne diffère peut-être pas essentiellement de la précédente; nous n'utilisons pas les domaines fondamentaux des groupes modulaires, mais c'est sur certaines propriétés des fonctions de ces groupes que nous ferons reposer la démonstration des principales propositions relatives à l'équivalence des formes ψ et des formes abéliennes indéfinies de seconde espèce. Cette méthode consiste essentiellement à appliquer aux formes abéliennes certains résultats relatifs aux fonctions

(¹) Les formes à indéterminées conjuguées des corps réels dont le discriminant est négatif correspondent aux formes abéliennes indéfinies de première espèce.

abéliennes singulières dus à M. Humbert. Avant de l'exposer, montrons en quel rapport étroit se trouve l'étude arithmétique des formes abéliennes indéfinies de seconde espèce et la recherche des propriétés des fonctions abéliennes doublement singulières.

[**3**] Dans un Mémoire inséré au *Journal de mathématiques pures et appliquées* (5ᵉ série, t. IX, 1903), M. Humbert a appelé *fonction abélienne doublement singulière* toute fonction de deux variables u et v, admettant les quatre paires de périodes normales : $(1,0)$; $(0,1)$; (g, h); (h, g') dans le cas où il existe entre ces périodes deux *relations singulières distinctes* et deux seulement :

$$F_1 = A_1 g + B_1 h + C_1 g' + D_1(h^2 - gg') + E_1 = 0,$$
$$F_2 = A_2 g + B_2 h + C_2 g' + D_2(h^2 - gg') + E_2 = 0;$$

g, h, g' vérifient toutes les relations singulières $xF_1 + yF_2 = 0$, x et y étant deux entiers quelconques.

Soient δ_1 et δ_2 les couples δ associés aux relations singulières $F_1 = 0$ et $F_2 = 0$; aux relations $xF_1 + yF_2 = 0$ sont associés les couples $x\delta_1 + y\delta_2$; tous ces couples sont tracés sur la quadrique abélienne Q contenant δ_1 et δ_2. Soit $f(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0$ l'équation de Q, la forme abélienne f est indéfinie de seconde espèce, car les invariants de tous les couples δ tracés sur Q sont positifs, puisque ce sont des invariants de relations singulières. Ainsi, à toute forme abélienne indéfinie de seconde espèce f correspond un seul faisceau de relations singulières $xF_1 + yF_2 = 0$ associées aux couples $x\delta_1 + y\delta_2$ tracés sur la quadrique Q d'équation $f = 0$. Inversement, à tout faisceau de relations singulières $xF_1 + yF_2 = 0$, il correspond une seule forme abélienne f *primitive* indéfinie de seconde espèce. Il est nécessaire de supposer f primitive, sinon il correspondrait au faisceau $xF_1 + yF_2 = 0$ l'infinité de formes abéliennes kf, k étant un entier quelconque. Nous ne considérerons dans la suite que des formes abéliennes primitives; en vertu de remarques déjà faites, il n'y a aucun inconvénient à faire cette hypothèse, les propositions relatives à la réduction de ces formes particulières s'étendant aux formes générales.

A l'équivalence de deux faisceaux $xF_1 + yF_2 = 0$ et $xF_1' + yF_2' = 0$ de relations singulières, telle que l'a définie M. Humbert, correspond l'équivalence des deux formes abéliennes f et f' qui leur sont rattachés, telle que nous l'avons définie. Le problème de la réduction des systèmes de fonctions abéliennes doublement singulières est donc équivalent au problème de la réduction des formes abéliennes indéfinies de seconde espèce. Des résultats dus à M. Humbert, concernant le premier problème, nous déduirons la solution du second.

[**4**] Deux formes abéliennes ne peuvent être équivalentes que si leurs formes binaires adjointes sont de même classe. Aux formes indéfinies de seconde espèce f

dont l'invariant a une valeur donnée sont associées des classes de formes binaires définies positives en nombre fini; pour effectuer la réduction des formes f, nous pouvons opérer cette réduction pour les formes dont la forme binaire associée appartient à une classe déterminée. Montrons qu'il est possible de réduire à un nombre limité de types les formes f d'invariant négatif δ donné, dont la forme adjointe est d'une certaine classe, nous en conclurons que les formes f d'invariant δ se distribuent en un nombre limité de classes.

Il ne serait pas sans intérêt de reprendre, au point de vue géométrique où nous nous sommes placés, les recherches de M. Humbert sur les fonctions abéliennes doublement singulières; nous ne pourrions le faire ici sans allonger par trop ce travail, aussi nous bornerons-nous à énoncer les résultats les plus importants relatifs aux formes abéliennes, tels qu'on peut les déduire des propositions contenues dans le Mémoire déjà cité.

Les formes abéliennes indéfinies de seconde espèce dont la forme binaire adjointe est de la même classe que la forme $\varphi(x, y)$ sont toutes équivalentes entre elles et constituent par conséquent une seule classe dans les cas suivants :

1° *La forme φ, après division par 4, est proprement ou improprement primitive et de discriminant impair ou impairement pair.*

2° *La forme φ, après division par 2, est improprement primitive.*

3° *La forme φ est primitive et le quotient de son discriminant par 4 est impair ou impairement pair.*

Ceci donne une classe assez étendue de formes abéliennes telles qu'à une classe de formes binaires adjointes se trouve attachée une seule classe de formes abéliennes indéfinies d'invariant négatif. Les propositions correspondantes relatives aux fonctions abéliennes ont été établies par M. Humbert en utilisant une méthode qui revient au fond à étudier l'équivalence des ensembles de deux couples δ d'invariants positifs. Comme nous l'avons déjà signalé, dans le cas où la forme $\varphi(x, y)$ est quelconque, on éprouve d'assez grandes difficultés à traiter par cette méthode la réduction des formes abéliennes. C'est pourquoi M. Humbert a fait reposer la réduction des systèmes de fonctions doublement singulières sur un principe tout différent en employant une interprétation géométrique des nombres et des formes binaires qui met en évidence d'une façon remarquablement simple certaines propositions de la théorie des nombres et de celle des fonctions abéliennes singulières.

[**5**] Au point de vue de la théorie des formes abéliennes, voici comment on peut présenter cette interprétation. Sur une quadrique abélienne Q, associée à une forme f indéfinie de seconde espèce, il existe deux systèmes de génératrices rectilignes : celles du premier système comprennent une infinité de couples δ; celles du second, une

infinité de droites d imaginaires joignant deux points $(1, 0, h, g)$, $(0, 1, g', h)$, tels que l'on ait

$$g = g_0 + ig_1, \quad h = h_0 + ih_1, \quad g' = g'_0 + ig'_1, \quad g_1 > 0, \quad g'_1 > 0, \quad h_1^2 - g_1 g'_1 < 0.$$

A chaque droite d correspondent les trois *modules* (λ, μ, ν) du système de fonctions abéliennes aux périodes normales g, h, g'. Soit Δ_i l'invariant d'un couple δ_i tracé sur Q, on sait qu'il existe entre λ, μ, ν une relation algébrique $F_{\Delta_i}(\lambda, \mu, \nu) = 0$ (*équation modulaire d'invariant* Δ_i) dépendant uniquement de l'entier positif Δ_i. A une droite d faisons correspondre le point (λ, μ, ν) d'un espace E; aux droites d rencontrant un couple δ d'invariant Δ_i correspondent les points de la surface $F_{\Delta_i}(\lambda, \mu, \nu) = 0$; cette surface S_{Δ_i} est une *surface hyperabélienne*, puisque λ, μ, ν sont des *fonctions hyperabéliennes*. Aux droites d de la quadrique Q passant par deux couples δ_1 et δ_2 d'invariants Δ_1 et Δ_2 correspondent les points de la *courbe hyperabélienne* (C), intersection des deux surfaces hyperabéliennes S_{Δ_1} et S_{Δ_2}.

Ceci posé, soit Δ_i un nombre représenté proprement par la forme binaire $\varphi(x, y)$ adjointe à la forme abélienne f, la quadrique Q contenant un couple d'invariant Δ_i, la courbe hyperabélienne (C) associée à f est tracée sur la surface S_{Δ_i}; réciproquement, si (C) est sur S_{Δ_i}, Q contient un couple d'invariant Δ_i; donc :

Si la forme binaire adjointe à une forme abélienne f indéfinie de seconde espèce représente proprement un nombre Δ_i, la courbe hyperabélienne (C) *associée à f est sur la surface hyperabélienne S_{Δ_i}. La réciproque est vraie.*

Une substitution abélienne de degré 1 laissant inaltérés les modules λ, μ, ν, liés à toute droite d, toutes les formes abéliennes équivalentes ont même courbe hyperabélienne (C); *à chaque classe de formes abéliennes indéfinies de seconde espèce se trouve associée une courbe algébrique* (C) *que nous appelons courbe hyperabélienne de cette classe.*

Considérons une classe (k) de formes binaires positives ne représentant que des nombres de forme $4N$ ou $4N + 1$, et soit (K) une classe de formes abéliennes dont la forme binaire adjointe est de la classe (k). La courbe hyperabélienne (C) de la classe (K) appartient à toutes les surfaces S_{Δ_i}, Δ_i étant l'un quelconque des nombres représentés proprement par la classe (k).

Or, deux surfaces hyperabéliennes n'ayant évidemment pas de portion commune, l'intersection des surfaces S_{Δ_i} ne peut comprendre qu'un nombre fini de courbes hyperabéliennes (C); donc :

Le nombre des classes de formes abéliennes indéfinies de seconde espèce dont la forme binaire adjointe est d'une classe déterminée est fini.

Par conséquent :

Les formes abéliennes indéfinies de seconde espèce d'invariant donné se distribuent en un nombre limité de classes.

[**6**] Au groupe des substitutions abéliennes automorphes d'une forme indéfinie f d'invariant négatif, correspond un *groupe fuchsien* (le groupe fuchsien de la courbe hyperabélienne (C)). M. Humbert a rencontré ce groupe dans son étude des fonctions abéliennes doublement singulières. Si $\varphi(x, y)$ est la forme binaire adjointe à f, ce groupe fuchsien se rattache aux substitutions semblables de la forme ternaire indéfinie $\Phi = z^2 - \varphi(x, y)$; on a une interprétation géométrique très simple de ce fait en remarquant que Φ représente proprement les invariants des complexes arithmétiques auxquels appartient une des deux séries réglées de la quadrique Q associée à f. Les substitutions singulières de degré 1 jouissent, comme les substitutions ordinaires, de la propriété de ne pas altérer les invariants des complexes précédents, il leur correspond aussi des substitutions fuchsiennes liées aux transformations semblables de Φ. On est ainsi amené à comparer les formes abéliennes dans les substitutions (S) singulières. On peut, pour la solution de ce nouveau problème, utiliser encore les travaux de M. Humbert sur les fonctions abéliennes singulières. Nous reviendrons, dans un autre travail, sur ce nouveau mode de réduction des formes abéliennes; on est conduit à des applications assez intéressantes de la théorie des fonctions à la théorie des nombres.

3. — Sur les formes a indéterminées conjuguées des corps réels.

[**1**] Soit [A, B, C] une forme à indéterminées conjuguées

$$\psi(u, v; u', v') = Auu' + \frac{B}{\sqrt{\Delta}}uv' - \frac{B'}{\sqrt{\Delta}}u'v + C'vv$$

du corps réel $\sqrt{\Delta}$; A et C sont deux entiers ordinaires, B et B′ sont deux entiers conjugués du corps $\sqrt{\Delta}$; u, u' et v, v' sont deux couples d'entiers conjugués quelconques du corps $\sqrt{\Delta}$: ψ ne représente que des nombres entiers. Les formes ψ se partagent en deux catégories suivant que leur déterminant

$$\delta = BB' + \Delta AC$$

est positif ou négatif. Deux formes ψ et ψ' sont équivalentes si l'une est la transformée de l'autre par une substitution (Σ) de l'un ou l'autre des deux types

$$\begin{aligned}&(u, v, u', v'; \quad \alpha u + \beta v, \quad \gamma u + \delta v, \quad \alpha' u' + \beta' v', \quad \gamma' u' + \delta' v'),\\ &(u, v, u', v'; \quad au' + bv', \quad cu' + dv', \quad a'u + b'v, \quad c'u + d'v),\end{aligned}$$

où $\alpha, \beta, \ldots, c, d$ sont des entiers du corps $\sqrt{\Delta}$ satisfaisant aux conditions

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1, \qquad ad - bc = \pm 1;$$

α', β', ..., d' sont les conjugués de α, β, ..., d. L'invariant δ d'une forme ψ n'est pas altéré par une substitution (Σ) de degré 1 (déterminant $\alpha\delta - \beta\gamma$ ou $ad - bc$ égal à ± 1).

Nous énoncerons relativement aux formes à indéterminées conjuguées les propositions qui sont les conséquences directes des théorèmes concernant l'équivalence et la réduction des formes abéliennes indéfinies.

[**2**] A toute forme ψ se trouve associée une *forme binaire adjointe* $\varphi(x, y)$, c'est celle qui est associée à la forme abélienne Ψ ou Ψ' correspondante; par exemple, si A et C ne sont pas simultanément pairs et si $\Delta \equiv 0, 2, 3 \pmod 4$, $\varphi(x, y)$ s'écrit :

$$4[\Delta x^2 - 2B_1 xy + (B_2^2 - AC)y^2]$$

en supposant B égal à $B_1 + B_2\sqrt{\Delta}$.

La forme $\varphi(x, y)$ est définie positive si le déterminant δ de ψ est négatif et indéfinie si δ est positif.

Deux formes à indéterminées conjuguées ne peuvent être équivalentes que si leurs formes binaires adjointes sont de même classe.

[**3**] Appelons *classe* de formes ψ l'ensemble des formes équivalentes à l'une d'elles :

Les formes à indéterminées conjuguées du corps $\sqrt{\Delta}$ dont le déterminant a une valeur donnée se distribuent en un nombre fini de classes.

Cette proposition est vraie quel que soit le signe du déterminant δ et est la conséquence directe de théorèmes relatifs à la réduction des formes abéliennes. Entièrement analogue à celle qui concerne les formes à indéterminées conjuguées des corps imaginaires, elle doit s'étendre aux formes à indéterminées conjuguées à un nombre quelconque de variables. De la proposition analogue concernant les corps imaginaires, Hermite a déduit d'importantes conséquences relativement au nombre limité d'irrationnalités auxquelles se réduisent les racines des équations à coefficients entiers complexes, d'un degré et d'un discriminant donnés.

En général, à une classe de formes binaires définies positives ne représentant que des nombres $4N$ ou $4N + 1$ et susceptible de représenter proprement 4Δ si $\Delta \equiv 0, 2, 3 \pmod 4$ et Δ si $\Delta \equiv 1 \pmod 4$, il correspond plusieurs classes de formes à indéterminées conjuguées du corps $\sqrt{\Delta}$ dont le discriminant a une même valeur positive ; dans certains cas, à une classe de formes binaires φ correspond une seule classe de formes à indéterminées conjuguées ψ. Par exemple, si Δ est un nombre premier de forme $4N - 1$ et si $\varphi(x, y)$ est divisible par 4, non divisible par Δ et de discriminant impair ou impairement pair, les formes ψ admettant comme forme binaire adjointe $\varphi(x, y)$ constituent une seule classe ; la conclusion est la même si φ, après division par 2, est improprement primitive. Si Δ est un nombre premier $4N + 1$ et si φ est primitive de discriminant impair ou impairement pair, les formes ψ du corps $\sqrt{4N+1}$, dont la forme binaire adjointe est de même classe que φ, sont toutes équivalentes.

[**4**] On pourrait concevoir l'étude arithmétique des formes à indéterminées conjuguées des corps réels à un point de vue un peu plus général. Effectuons sur la forme [A, B, C] la substitution (Σ) dans laquelle on suppose que α, β, γ, δ sont des entiers du corps $\sqrt{\Delta}$ absolument arbitraires. La forme [A, B, C] de déterminant δ se change en une forme [A′, B′, C′] de déterminant δ', et l'on a :

$$\delta' = (\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha'\delta' - \beta'\gamma')\delta.$$

Assujettissons $\alpha\delta - \beta\gamma$ à être une *unité* du corps $\sqrt{\Delta}$; dans ces conditions, δ' est égal à δ et on peut regarder les formes [A, B, C] et [A′, B′, C′] comme équivalentes improprement et l'on voit ainsi s'introduire une infinité d'ordres d'équivalence impropre. C'est une notion qui s'est présentée pour la première fois à Hermite dans l'étude des formes à indéterminées conjuguées du corps $\sqrt{-1}$; dans ce corps, il y a quatre unités 1, -1, i, $-i$. Pour les corps réels $\sqrt{\Delta}$, il y a une infinité d'unités dépendant des solutions de l'équation de Pell :

$$x^2 - \Delta y^2 = \pm 1$$

si Δ est congru à 0, 2 ou 3 (mod 4) et

$$x^2 - \Delta y^2 = \pm 4$$

si Δ est congru à 1 (mod 4). Nous n'étudierons pas ici ces ordres d'équivalence impropre, mais nous ferons remarquer que ces substitutions [Σ] de degré ± 1 correspondent aux substitutions (S) singulières de degré ± 1 n'altérant pas le couple [δ] réduit d'invariant Δ, si $\Delta \equiv 1 \pmod 4$, et 4Δ dans les autres cas et se rattachent par conséquent aux transformations abéliennes singulières qui laissent inaltérée une relation singulière réduite. On peut donc trouver dans l'étude des fonctions abéliennes singulières l'origine des principales notions propres aux corps quadratiques réels, et, bien que nous ne puissions pas développer ce dernier point, nous tenons à signaler cette nouvelle application de la théorie des fonctions abéliennes à la théorie des nombres.

La méthode que nous avons suivie dans l'étude arithmétique des formes abéliennes est susceptible de s'appliquer à d'autres classes de formes quadratiques; nous en donnerons quelques exemples :

1° Soit

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = \Sigma a_{ij} x_i x_j, \qquad (i, j = 0, 1, 2, 3), \qquad a_{ij} = a_{ji}$$

une forme quadratique à coefficients entiers. Disons que cette forme appartient au complexe linéaire $\Sigma A_{ik} p_{ik} = 0$, les quantités p_{ik} étant les coordonnées pluckériennes d'une droite dans un espace où les coordonnées tétraédriques sont x_0, x_1, x_2, x_3 si l'une des deux séries réglées de la quadrique $f=0$ fait partie du complexe. Considérons les formes f appartenant à un complexe arithmétique (k) d'invariant 1 ; les a_{ij} sont liés par cinq relations homogènes du second degré et à coefficients entiers. Considérons, d'autre part, les substitutions homographiques (a_i, b_i, c_i, d_i) effectuées sur les x_i, à coefficients entiers et de déterminant 1 laissant inaltéré le complexe (k). Les a_i, b_i, c_i, d_i sont liés par six relations homogènes du second degré et à coefficients entiers. On peut se proposer d'étudier l'équivalence de ces formes f dans ces substitutions spéciales. Ces formes constituent une généralisation des formes abéliennes; leur étude se ramène à celle de ces dernières et il est aisé de définir les formes binaires adjointes et de prouver la distribution en un nombre limité de classes de ces formes de discriminant donné.

2° Une seconde généralisation plus importante des formes abéliennes est fournie par les formes du complexe $p_{03} + np_{12} = 0$, que nous avons rencontrées (I, ch. II, § 2) en étudiant la transformation des fonctions abéliennes relatives aux tableaux de périodes T_n d'indice quelconque. L'étude de ces formes se fait exactement comme celle des formes abéliennes qui en sont un cas particulier; de même que ces dernières sont liées aux corps quadratiques, les secondes sont liées à certains *modules de nombres algébriques du second degré* dont l'étude n'est pas sans intérêt pour la théorie des nombres.

Enfin, on trouve à appliquer les principes sur lesquels repose la réduction des formes abéliennes à deux variables, à l'étude arithmétique des formes abéliennes à un nombre quelconque de variables. L'interprétation géométrique des transformations des fonctions abéliennes est susceptible d'être étendue aux fonctions de plus de deux variables et pourra simplifier beaucoup l'étude de ces fonctions.

Quant à la théorie des nombres, nous croyons que la théorie des fonctions abéliennes sera pour elle une source abondante de problèmes nouveaux et intéressants. Il semble bien que l'utilisation des fonctions abéliennes puisse être considérée comme un procédé de généralisation puissant lorsqu'il s'agit d'étendre aux corps quadratiques les propriétés du corps des entiers ordinaires ou plutôt les notions qui le concernent. C'est du moins ce que nous avons essayé de mettre en évidence sur quelques points; nous sommes bien loin d'avoir épuisé ce sujet. Peut-être est-il permis d'espérer que les fonctions abéliennes viendront apporter à l'Arithmétique transcendante une contribution comparable à celle que lui fournirent les fonctions elliptiques.

TABLE DES MATIÈRES

TROISIÈME PARTIE