FONCTIONS MODULAIRES ET FONCTIONS FUCHSIENNES

PAR H. POINCARÉ [1].

N° 1. — SÉRIES ψ A INDICE NÉGATIF.

Les fonctions modulaires ne sont qu'un cas particulier des fonctions fuchsiennes; le groupe fuchsien correspondant est celui des substitutions $\left(z, \dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right)$ où α, β, γ, δ sont des *entiers* tels que $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Le cercle fondamental se réduit à une droite, axe des quantités réelles, de telle façon que les fonctions n'existent qu'au-dessus de cet axe. Il est clair que les propriétés générales des fonctions fuchsiennes s'appliquent aux fonctions modulaires; je me suis déjà occupé de cette application dans un mémoire intitulé *Sur les invariants arithmétiques*, inséré au tome CXXIX du *Journal de Crelle*, mais j'ai laissé dans l'ombre un certain nombre de points sur lesquels je voudrais revenir. Dans les renvois qui vont suivre, la lettre A se rapportera au mémoire *Sur les fonctions fuchsiennes* (*Acta Mathematica*, tome I) et la lettre C au mémoire *Sur les invariants arithmétiques* que je viens de citer.

Rappelons d'abord les principes fondamentaux en quelques mots :

1° Une fonction fuchsienne est une fonction de z, méromorphe dans tout l'intérieur du cercle fondamental (ici pour tout point situé au-dessus de l'axe des quantités réelles, cet axe étant exclu) et satisfaisant à la condition

$$(1) \qquad f(z) = f\left(\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right).$$

[1] H. POINCARÉ n'a pu corriger les épreuves de ce Mémoire, dont il avait envoyé le manuscrit à l'impression le 7 juillet 1912.

2° Une fonction thétafuchsienne est une fonction de z, méromorphe à l'intérieur du cercle fondamental et satisfaisant à la condition

$$\Theta\left(\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right)=\Theta(z)(\gamma z+\delta)^{2m} \tag{2}$$

(la fonction est alors d'ordre m).

On peut avoir avantage à mettre une fonction thétafuchsienne sous la *forme homogène*. Posons $z=\frac{\xi}{\eta}$ et

$$\Theta(\xi,\eta)=\eta^{-2m}\Theta\left(\frac{\xi}{\eta}\right);$$

$\Theta(\xi,\eta)$ sera une fonction homogène d'ordre $-2m$ en ξ et η et la relation (2) deviendra

$$\Theta(\alpha\xi+\beta\eta,\ \gamma\xi+\delta\eta)=\Theta(\zeta,\eta). \tag{2 bis}$$

Pour revenir d'ailleurs de la forme homogène à la forme ordinaire, il suffit de faire $\xi=z$, $\eta=1$.

3° Une fonction thétafuchsienne s'exprime facilement à l'aide des fonctions fuchsiennes; donnons en particulier cette expression dans le cas des fonctions modulaires. Dans ce cas, le polygone fuchsien est un quadrilatère formé de deux triangles égaux (au point de vue non euclidien) et dont les angles sont 0, $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{3}$. Soient A, B, C les trois sommets de ce triangle, le sommet A est sur le cercle fondamental (je puis choisir mon polygone fuchsien de façon que ce sommet soit le point $z=\infty$). Il existera une fonction fuchsienne

$$x=f(z)$$

à l'aide de laquelle toutes les autres pourront s'exprimer rationnellement et telle que l'on ait

$$x=\infty \text{ en A},\qquad x=0 \text{ en B},\qquad x=1 \text{ en C};$$

on aura alors pour une fonction thétafuchsienne quelconque d'ordre m :

$$\Theta(z)=\left(\frac{dx}{dz}\right)^{m}\mathrm{R}(x), \tag{3}$$

R étant une fonction rationnelle de x; mais il convient de distinguer quatre espèces de fonctions thétafuchsiennes :

1° Celles de la première ou de la quatrième espèce seront celles qui deviennent infinies à l'intérieur du cercle fondamental. La condition pour qu'une fonction Θ ne puisse pas devenir infinie à l'intérieur de ce cercle, c'est d'abord que R ne puisse devenir infinie que quand $\frac{dx}{dz}$ s'annule, c'est-à-dire pour $x = 0$ ou $x = 1$, et que l'ordre d'infinitude de R soit moindre que l'ordre de petitesse de l'autre facteur $\left(\frac{dx}{dz}\right)^m$; on devra donc avoir

$$R = \frac{P}{x^{\lambda_1}(x-1)^{\lambda_2}}; \tag{4}$$

P étant un polynôme et λ_1 et λ_2 étant des entiers tels que

$$\lambda_1 \leqq \frac{m}{2}, \qquad \lambda_2 \leqq \frac{2m}{3}. \tag{4 bis}$$

2° Si les conditions (4) et (4 *bis*) sont remplies, la fonction Θ est de deuxième ou de troisième espèce; mais une autre distinction est nécessaire. On a démontré (A, p. 275; A, p. 215) que pour qu'une fonction thétafuchsienne de la forme (3) puisse être représentée par une série thétafuchsienne, l'expression $x^m R$ doit tendre vers zéro quand x croît indéfiniment, si $x = \infty$ correspond à un sommet situé sur le cercle fondamental, ce qui est ici le cas. Cela nous conduit à la condition

$$p \leqq \lambda_1 + \lambda_2 - m - 1. \tag{5}$$

Si plus généralement on a :

$$R = \frac{P}{Q x^{\lambda_1}(x-1)^{\lambda_2}},$$

P et Q étant des polynômes de degrés p et q ne s'annulant ni pour $x = 0$, ni pour $x = 1$, on devra avoir

$$p - q \leqq \lambda_1 + \lambda_2 - m - 1. \tag{5 bis}$$

Si les conditions (5) ou (5 *bis*) sont remplies, la fonction est de première ou de seconde espèce; dans le cas contraire, elle est de troisième ou quatrième espèce.

4° Une série thétafuchsienne est une série de la forme suivante; soit $H(\xi, \eta)$ une fonction rationnelle homogène de degré $-2m$ en ξ et en η; la série en question est

$$\sum H(\alpha\xi + \beta\eta, \gamma\zeta + \delta\eta),$$

la sommation étant étendue à toutes les substitutions du groupe fuchsien. Pour que cette série converge, il faut que m soit au moins égal à 2 et que la fonction $H(\xi, \eta)$ ne devienne infinie pour aucune valeur de $\frac{\xi}{\eta}$ située sur le cercle fondamental. Dans le cas particulier qui nous occupe et où le cercle fondamental se réduit à l'axe des quantités réelles, cette seconde condition doit s'énoncer ainsi : la fonction rationnelle $H(\zeta, \eta)$ ne doit devenir infinie pour aucun système de valeurs *réelles* de ξ et de η, le système $\xi = 0$, $\eta = 0$ étant mis à part.

Je suis obligé d'insister sur ce point à cause d'une inadvertance que j'ai commise dans le mémoire cité (C., p. 92). J'ai dit que $H(\xi, \eta)$ devait avoir un zéro d'ordre $2k$ au moins pour $\eta = 0$; cette conclusion n'était nullement justifiée par le raisonnement qui précédait et qui conduisait tout simplement à l'énoncé que je viens de donner; je n'en ai heureusement fait aucun usage et le reste du mémoire a été écrit sans en tenir aucun compte.

Quoi qu'il en soit, nous devons distinguer deux espèces de séries thétafuchsiennes : celles où H devient infini à l'intérieur du cercle fondamental, et celles où H n'y devient jamais infini. Les premières seules peuvent devenir infinies à l'intérieur du cercle fondamental. Les séries thétafuchsiennes de première espèce représentent des fonctions de première espèce, les séries de deuxième espèce représentent des fonctions de deuxième espèce; les fonctions de troisième et de quatrième espèces ne peuvent être représentées par des séries thétafuchsiennes.

5° Mais outre les séries thétafuchsiennes, nous avons d'autres séries qui peuvent représenter des fonctions thétafuchsiennes. Nous avons en premier lieu les séries

$$\sum \frac{1}{(\alpha\xi + \beta\eta)^{2m}}$$

convergentes si m est au moins égal à 2. On doit y donner à α et β toutes les valeurs entières *premières entre elles*. Ces séries ne diffèrent que par un facteur constant simple de celles que l'on obtiendrait en donnant à α et β toutes les valeurs entières sans exception, sauf bien entendu le système $\alpha = \beta = 0$.

A chaque substitution du groupe correspond un système de valeurs entières et premières entre elles de α et β; réciproquement à chaque pareil système, correspondent une infinité de substitutions du groupe, comprises dans la formule

$$\left(z, \frac{\gamma z + \delta}{\alpha z + \beta} + \mu\right),$$

γ et δ étant deux entiers tels que $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, et μ étant un autre entier arbitraire. Nous avons ensuite les séries

$$\psi(\xi, \eta; q, m) = \sum \frac{1}{(\alpha\xi + \beta\eta)^{2m}} e^{2qi\pi \frac{\gamma\xi + \delta\eta}{\alpha\xi + \beta\eta}}. \tag{6}$$

Ici encore m et q sont des entiers, le premier au moins égal à 2, le second positif ou négatif; nous donnons à α et β tous les systèmes de valeurs entières premières entre elles; enfin γ et δ sont des entiers tels que $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Peu importe d'ailleurs la façon dont on choisit γ et δ, car si l'on change γ et δ en $\gamma + \mu\alpha$ et $\delta + \mu\beta$, μ étant entier, l'exponentielle

$$e^{2qi\pi \frac{\gamma\xi + \delta\eta}{\alpha\xi + \beta\eta}}$$

ne change pas. Il est clair que les séries $\sum \frac{1}{(\alpha\xi+\beta\eta)^{2m}}$ rentrent dans le même type et peuvent s'écrire

$$\psi(\xi, \eta; 0, m).$$

Cela posé, considérons la fonction rationnelle $H(\xi, \eta)$ qui sert à former la série thétafuchsienne et décomposons-la en éléments simples par rapport à ξ; nous aurons, si tous les infinis sont simples

$$H(\xi, \eta) = \sum \frac{B_k}{\eta^{2m-1}(\xi - a_k\eta)}. \tag{7}$$

S'il y a des infinis multiples, nous aurons des termes de la forme

$$\frac{C}{\eta^{2m-q}(\xi - a_k\eta)^q}, \tag{8}$$

q pouvant être d'ailleurs plus grand que $2m$. Nous n'avons pas à nous inquiéter de la partie entière (par rapport à ξ) de la décomposition de H en éléments simples. Cette partie entière n'existe pas; car H ne doit pas devenir infinie pour $\eta = 0$.

Nous ne pouvons pas nous servir de l'un des éléments simples du second membre de (7) pour construire une série thétafuchsienne, car ces éléments simples deviennent infinis pour $\eta = 0$, Il n'en serait pas de même de l'élément simple (8) si q était au moins égal à $2m$.

D'ailleurs, pour que H ne devienne pas infinie pour $\eta = 0$, il faut certaines relations entre les résidus B_k, à savoir

$$\sum B_k a_k^q = 0. \qquad (q = 0, 1, 2, \ldots, 2m-2) \tag{9}$$

Considérons alors la série thétafuchsienne

$$\sum H(\alpha\xi + \beta\eta, \gamma\xi + \delta\eta);$$

nous pouvons, en groupant les termes d'une manière convenable, la décomposer en séries partielles; à cet effet, nous grouperons ensemble toutes les substitutions qui correspondent aux mêmes valeurs de γ et de δ, l'ensemble des termes correspondants s'écrira

$$\sum H(\alpha\xi + \beta\eta + p(\gamma\xi + \delta\eta), \gamma\xi + \delta\eta),$$

les entiers α, β, γ, δ ayant des valeurs déterminées, tandis que l'entier p est quelconque. Envisageons séparément les divers éléments simples de H; l'un de ces éléments nous donnera

$$\frac{B_k}{(\gamma\xi + \delta\eta)^{2m-1}} \sum \frac{1}{(\alpha\xi + \beta\eta) + (p - q_k)(\gamma\xi + \delta\eta)},$$

et il faut sommer par rapport à l'entier p; la sommation est aisée, on trouve

$$(10) \qquad \frac{\pi B_k}{(\gamma\xi + \delta\eta)^{2m}} \operatorname{cotg} \pi \left(\frac{\alpha\xi + \beta\eta}{\gamma\xi + \delta\eta} - a_k\right).$$

Or, la cotangente de x peut être développée suivant les puissances soit croissantes, soit décroissantes de e^{2ix}, suivant que le module de cette exponentielle est très petit ou très grand ; nous aurons, dans le premier cas :

$$\pi \operatorname{cotg} \pi x = \sum \lambda_p e^{2ip\pi x} \qquad \text{(d'ailleurs } \lambda_p = + i\pi \text{ pour } p = 0 \text{ et } 2i\pi \text{ pour } p > 0)$$

et dans le second :

$$\pi \operatorname{cotg} \pi x = - \sum \lambda_p e^{-2ip\pi x}.$$

L'expression (10) s'écrira donc, si la partie imaginaire de a_k est grande et négative :

$$B_k \sum \lambda_p e^{-2ip\pi a_k} (\gamma\xi + \delta\eta)^{-2m} e^{2ip\pi \frac{\alpha\xi + \beta\eta}{\gamma\xi + \delta\eta}},$$

et, si elle est grande et positive :

$$- B_k \sum \lambda_p e^{2ip\pi a_k} (\gamma\xi + \delta\eta)^{-2m} e^{-2ip\pi \frac{\alpha\xi + \beta\eta}{\gamma\xi + \delta\eta}}.$$

Il nous faut sommer, par rapport à p et par rapport à k, ainsi que par rapport aux systèmes d'entiers γ et δ. Nous observerons à l'égard de cette seconde sommation que

$$\sum (\gamma\xi + \delta\eta)^{-2m} e^{2ip\pi \frac{\alpha\xi + \beta\eta}{\gamma\xi + \delta\eta}} = \psi(\xi, \eta; -p, m)$$

à cause de la permutation du rôle des entiers α, β avec celui des entiers γ, δ.

Nous aurons donc, à supposer que tous les a_k aient leur partie imaginaire grande :

$$(11) \qquad \Theta = \sum B_k \lambda_p e^{-2ip\pi a_k} \psi(\xi, \eta; -p, m) - \sum B_k \lambda_p e^{2ip\pi a_k} \psi(\xi, \eta; p, m) ;$$

le premier terme du second membre se rapporte aux a_k dont la partie imaginaire est négative et le second terme aux a_k dont la partie imaginaire est positive.

Dans le cas où nous aurions des infinis multiples, nous n'aurions qu'à remarquer que (8) n'est, à un facteur constant près, que la dérivée $(q-1)^e$ du terme général du second membre de (7), dérivée prise par rapport à a_k : nous introduirions ainsi, par exemple, dans le second membre de (11), des termes de la forme

$$(11 \textit{ bis}) \qquad M \sum C p^{q-1} \lambda_p e^{-2ip\pi a_k} \psi(\xi, \eta; -p, m),$$

M étant un facteur numérique simple dépendant de q.

Il importe de nous rendre compte de ce que nous devons entendre par *grande*, quand il s'agit de la partie imaginaire de a_k. Les deux développements de $\cot \pi x$ sont toujours valables, le premier toutes les fois que la partie imaginaire de x est positive, le second toutes les fois qu'elle est négative. Considérons, d'autre part, les différentes valeurs que peut prendre l'expression

$$\frac{\alpha\xi + \beta\eta}{\gamma\xi + \delta\eta}$$

pour les différentes substitutions du groupe; ce sont les différents transformés du point $z = \frac{\xi}{\eta}$. Ils sont tous au-dessus de l'axe des quantités réelles, leur partie imaginaire est toujours positive et elle peut varier depuis o jusqu'à une certaine limite supérieure L qui correspond à ceux des transformés de z qui se trouvent dans ceux des polygones fuchsiens transformés du polygone fuchsien fondamental qui s'étendent à l'infini. Toutes les expressions

$$\frac{\alpha\xi + \beta\eta}{\gamma\xi + \delta\eta} - a_k$$

devront donc avoir leurs parties imaginaires de même signe, c'est-à-dire que a_k devra avoir sa partie imaginaire négative ou bien plus grande que L.

Supposons d'abord que tous les a_k aient leur partie réelle négative. Dans ce cas, la série thétafuchsienne sera de seconde espèce et ne pourra représenter qu'une fonction de seconde espèce; mais nous savons que le nombre des fonctions thétafuchsiennes de seconde espèce linéairement indépendantes est limité. Ce nombre est égal à

$$n, \quad n, \quad n, \quad n, \quad n+1, \quad n$$

pour

$$m = 6n+2, \quad 6n+3, \quad 6n+4, \quad 6n+5, \quad 6n+6, \quad 6n+7.$$

(C., p. 100; A., pp. 236, 275.)

Donc, pour $m = 2, 3, 4, 5$ et 7, il n'y a pas de fonction de seconde espèce et toute série de seconde espèce est identiquement nulle. Nous considérerons en particulier la série formée avec une fonction rationnelle H présentant un seul infini a d'ordre $2m$

$$\mathrm{H} = \frac{1}{(\xi - a\eta)^{2m}}.$$

Si nous lui appliquons la formule (11) convenablement modifiée, il viendra

$$\Theta = \mathrm{M} \sum p^{2m-2} \lambda_p e^{-2ip\pi a} \psi(\xi, \eta; -p, m). \tag{12}$$

Cette expression, qui est développée suivant les puissances de $e^{-2ia\pi}$, doit être identiquement nulle, quel que soit a; il faut donc que tous les coefficients de la série soient identiquement nuls; la série commence par le terme où $p=1$, le terme où $p=0$ est nul à cause du facteur p^{2m-2}. Donc *l'expression*

$$\psi(\xi, \eta, p, m)$$

est nulle identiquement toutes les fois que p est négatif et que $m=2, 3, 4, 5$ *ou* 7.

Pour d'autres valeurs de m, il y a des fonctions de première espèce, mais il n'y en a qu'un nombre fini; l'expression (12) doit donc s'écrire

$$\Theta = K_1\Theta_1 + K_2\Theta_2 + \ldots + K_q\Theta_q, \tag{12 bis}$$

où q est le nombre des fonctions de seconde espèce linéairement indépendantes, où les Θ_i sont ces fonctions elles-mêmes, où les K_i sont des coefficients qui dépendent seulement de a. En identifiant les expressions (12) et (12 *bis*), nous voyons que, l'identité devant subsister, quels que soient ξ et η, d'une part, et quel que soit a, d'autre part, les coefficients K_i sont développables suivant les puissances de $e^{-2ia\pi}$ et qu'en identifiant les coefficients des puissances de cette variable on trouve

$$\psi(\xi, \eta; -p, m) = k_1\Theta_1 + k_2\Theta_2 + \ldots + k_q\Theta_q,$$

les k étant des coefficients constants; donc :

1° *Quel que soit m, l'expression* $\psi(\xi, \eta; p, m)$, *où p est négatif, représente une fonction thétafuchsienne de seconde espèce.*

2° *Il y a toujours une relation linéaire entre* $q+1$ *de ces expressions si p est négatif.*

Il resterait à former effectivement ces relations linéaires.

N° 2. — Séries ψ a indice positif.

Pour pouvoir aborder l'étude des expressions ψ quand p est positif, il faut nous placer un instant à un autre point de vue. Considérons la fonction

$$x = f(z)$$

pour $z=\infty$, c'est-à-dire pour le sommet A du polygone fuchsien; on aura $x=\infty$. Je puis même écrire

$$\frac{1}{x} = \sum \mu_q e^{2iqz\pi} \tag{1}$$

en développant x suivant les puissances de $e^{2iz\pi}$; le développement commence par un terme du premier degré, je veux dire que $\mu_0 = 0$, $\mu_1 \gtrless 0$ (A., p. 274). Je puis d'ailleurs renvoyer, pour le cas particulier des fonctions modulaires, aux relations connues entre le module et les périodes. On tire de là un autre développement :

$$\frac{dx}{dz} = e^{-2iz\pi} \sum \nu_q e^{2iqz\pi}; \qquad (\nu_0 \gtrless 0) \tag{2}$$

donc le développement de $\frac{dx}{dz}$ commence par un terme de degré -1 en $e^{2iz\pi}$.

Soit alors une fonction R quelconque, et

$$\Theta = \left(\frac{dx}{dz}\right)^m \mathrm{R}.$$

Nous prendrons, par exemple :

$$\mathrm{R} = \frac{\mathrm{P}(x)}{x^{\lambda_1}(x-1)^{\lambda_2}(x-c)},$$

les entiers λ_1 et λ_2 et le degré p du polynôme P satisfaisant aux conditions

$$\lambda_1 \leqq \frac{m}{2}, \quad \lambda_2 \leqq \frac{2m}{3}, \quad p = \lambda_1 + \lambda_2 - m. \tag{3}$$

Cette fonction Θ ne pourra devenir infinie à l'intérieur du cercle fondamental que pour la valeur $z = a$ qui correspond à $x = c$. Si nous voulons former la série thétafuchsienne correspondante, il faudra donc que nous prenions (en renonçant à l'homogénéité et faisant, par conséquent, $\xi = z$, $\eta = 1$)

$$\mathrm{H} = \sum \frac{\mathrm{B}_k'}{z - a_k'} + \frac{\mathrm{B}}{z - a}.$$

Les a_k' sont les pôles de H qui sont à l'extérieur du cercle fondamental, les B_k' sont les résidus correspondants; a est le pôle unique intérieur au cercle fondamental et B est le résidu correspondant.

Appliquons la formule (11) du numéro précédent à cette série thétafuchsienne, il viendra

$$\Theta = \sum \mathrm{B}_k' \lambda_p e^{-2ip\pi a'_k} \psi(-p) - \mathrm{B} \sum \lambda_p e^{2ip\pi a} \psi(p). \tag{4}$$

Nous écrivons pour abréger $\psi(p)$ au lieu de $\psi(\xi, \eta; p, m)$.

Le premier terme du second membre de (4) représente une fonction thétafuchsienne de seconde espèce, que nous pourrons écrire

$$\mathrm{K}_1\Theta_1 + \mathrm{K}_2\Theta_2 + \ldots + \mathrm{K}_q\Theta_q,$$

q étant le nombre des fonctions de seconde espèce, les Θ_i ces fonctions elles-mêmes et les K des coefficients qui dépendent de a.

Nous savons, par les développements (1) et (2), que c et $\frac{dc}{da}$ sont développables suivant les puissances de $e^{2i\pi a}$, le premier développement commençant par un terme de degré 1 et le second par un terme de degré -1. Nous aurons donc

$$\Theta = -\sum\left(\frac{dx}{dz}\right)^m \frac{P(x)}{x^{\lambda_1}(x-1)^{\lambda_2}}\frac{x^h}{c^{h+1}}.$$

On peut développer $\frac{1}{c^{h+1}}$ suivant les puissances de $e^{2i\pi a}$, le développement commencera par un terme de degré $h+1$; nous en déduirons

$$\Theta = -\sum\left(\frac{dx}{dz}\right)^m \frac{P_k}{x^{\lambda_1}(x-1)^{\lambda_2}} e^{2ik\pi a},$$

le polynôme P_k étant de degré $p+k-1$.

D'autre part, nous avons

$$B = \left(\frac{dc}{da}\right)^{m-1}\frac{P(c)}{c^{\lambda_1}(c-1)^{\lambda_2}}.$$

Développons encore suivant les puissances de $e^{2i\pi a}$; nous voyons que le développement du premier facteur $\left(\frac{dc}{da}\right)^{m-1}$ commence par un terme de degré $1-m$ et celui du second facteur par un terme de degré $\lambda_1+\lambda_2-p$; donc le développement de B commencera par un terme de degré

$$(1-m)+(\lambda_1+\lambda_2-p)=1,$$

et nous pourrons écrire

$$B = \sum b_j e^{2i\pi ja}. \qquad (b_0 = 0, \quad b_1 \gtrless 0.)$$

De plus, les coefficients K_i pourront aussi être développés sous la forme

$$K_i = -\sum k_{i.q} e^{2i\pi qa},$$

de sorte que l'équation (4) deviendra

$$\sum\left(\frac{dx}{dz}\right)^m \frac{P_q}{x^{\lambda_1}(x-1)^{\lambda_2}} e^{2i\pi qa} = \sum k_{iq}\Theta_i e^{2i\pi qa} + \sum b_j \lambda_{q-j}\psi(q-j) e^{2i\pi qa},$$

d'où

$$\sum b_j \lambda_{q-j}\psi(q-j) = \left(\frac{dx}{dz}\right)^m \frac{P_q}{x^{\lambda_1}(x-1)^{\lambda_2}} - \sum k_{iq}\Theta_i$$

(le nombre j peut prendre les valeurs $1, 2, \ldots, q$). On en déduit aisément

$$\psi(q) = \left(\frac{dx}{dz}\right)^m \frac{Q_q}{x^{\lambda_1}(x-1)^{\lambda_2}} + \sum g_i\Theta_i, \tag{5}$$

Q_q étant un polynôme en x entièrement déterminé de degré $p+q-1$ et les g_i des coefficients indéterminés.

La formule (5) donne donc la valeur de la fonction $\psi(q)$ pour q nul ou positif *à une fonction thétafuchsienne de seconde espèce près.*

N° 3. — Convergence des séries thétafuchsiennes.

Jusqu'à présent, nous nous sommes astreints, dans la formation des séries thétafuchsiennes, à l'hypothèse que H ne peut devenir infinie sur le cercle fondamental; nous savons, en effet, que cette hypothèse est suffisante pour que la série converge (A., 208). Mais elle n'est pas nécessaire et il est possible de l'étendre; pour chercher les conditions de convergence, nous montrons, en effet, que

$$\sum |\gamma z + \delta|^{-2m}$$

converge (A., 196), et nous en avons conclu que la série thétafuchsienne

$$\sum \mathrm{H}\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)(\gamma z + \delta)^{-2m}$$

converge également, pourvu que l'on puisse assigner une limite supérieure au module de H, ce qui arrive quand H ne devient pas infinie sur le cercle fondamental.

Supposons maintenant que H devienne infinie au point $z = a$ situé sur le cercle fondamental; alors il pourra se faire que parmi les expressions

$$\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

il y en ait une infinité qui soient infiniment près de a, auquel cas les valeurs correspondantes de H pourront devenir infiniment grandes. Mais si le cercle fondamental a pour centre l'origine et pour rayon l'unité, on a

$$|\gamma z + \delta|^{-2} = \frac{1 - \left|\dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right|^2}{1 - |z|^2}$$

(A., 204, lemme V); de plus, il est clair que

$$\left|\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} - a\right| > |a| - \left|\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right| = 1 - \left|\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right| > \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left|\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right|^2;$$

donc

$$\left|\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} - a\right| > \frac{1}{2}(1 - |z|^2)\,|\gamma z + \delta|^{-2}.$$

Si donc H devient infinie du premier ordre pour $z = a$, l'expression $\mathrm{H}\left(\dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$

sera de l'ordre de $|\gamma z + \delta|^2$ et le terme général de la série thétafuchsienne sera de l'ordre de

$$|\gamma z + \delta|^{2-2m}.$$

Donc *la série convergera encore, pourvu que m soit au moins égal à* 3.

Le nombre m devrait pour la convergence être au moins égal à 4 ou à 5, si H possédait sur le cercle fondamental des infinis doubles ou triples.

Si nous appliquons ce principe en particulier à l'hypothèse

$$\mathrm{H} = \frac{\mathrm{C}}{\eta^{2m-q}(\xi - a_k \eta)^q}$$

(formule 8 du n° 1), nous voyons que H a un infini d'ordre $2m - q$ sur le cercle fondamental ; la condition de convergence serait

$$m \geqq 2 + 2m - q$$

ou

$$q \geqq m + 2.$$

Nous n'aurions ainsi qu'une idée inexacte de la véritable limite de convergence ; en effet, si a est un point double d'une substitution parabolique appartenant au groupe fuchsien, la différence

$$\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} - a$$

n'est pas de l'ordre de $(\gamma z + \delta)^{-2}$ comme dans le cas général, mais seulement de l'ordre de $(\gamma z + \delta)^{-1}$; on s'en rendra compte de la façon suivante : je puis d'abord supposer $a = 0$; soient ensuite

$$z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_i,\ \ldots$$

une infinité de transformés de z, choisis de telle sorte que tout transformé de z par le groupe fuchsien puisse être regardé d'une manière et d'une seule comme le transformé de l'un des z_i par une des puissances de la substitution parabolique ; tous ces transformés de z seront donc de la forme

$$\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = \frac{z_i}{mhz_i + 1},$$

m étant un entier (qui est l'exposant de la puissance à laquelle est élevée la substitution parabolique) et h une constante ; on aura d'ailleurs

$$\frac{1}{(\gamma z + \delta)^2} = \frac{dz_i}{dz}\frac{1}{(mhz_i + 1)^2}.$$

On peut choisir les z_i de façon qu'ils soient tous à distance finie du cercle fondamental. Dans ces conditions, z_i et $\frac{dz_i}{dz}$ sont finis ; on voit que $\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ est de l'ordre de $(mhz_i + 1)^{-1}$ et que $(\gamma z + \delta)^{-2}$ est de l'ordre de $(mhz_i + 1)^{-2}$, c'est-à-dire que $\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ est de l'ordre de $(\gamma z + \delta)^{-1}$. C. q. f. d.

Nous nous en rendrons d'ailleurs mieux compte en revenant à l'hypothèse

$$H = \frac{C}{\eta^{2m-q}(\xi - a\eta)^q}$$

dans le cas particulier du groupe modulaire.

Le terme général de la série est

$$\frac{C}{(\gamma\xi + \delta\eta)^{2m-q}[(\alpha\xi + \beta\eta) - a(\gamma\xi + \delta\eta)]^q}.$$

Dans le cas du groupe modulaire, α, β, γ, δ sont des entiers tels que $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Nous pouvons grouper les termes qui correspondent à un même système de valeurs de γ et δ; tous ces termes se déduisent de l'un d'entre eux en changeant α et β en $\alpha + p\gamma$ et $\beta + p\delta$, p étant un entier. Le terme général est alors

$$(1) \qquad \frac{C}{(\gamma\xi + \delta\eta)^{2m}} \frac{1}{\left[\dfrac{\alpha\xi + \beta\eta}{\gamma\xi + \delta\eta} + p - a\right]^q}.$$

L'expression

$$\frac{\alpha\xi + \beta\eta}{\gamma\xi + \delta\eta} + p - a$$

ne peut s'annuler ni devenir infinie; et en effet nous pouvons toujours choisir α et β, de telle façon que $\dfrac{\alpha\xi + \beta\eta}{\gamma\xi + \delta\eta}$ ait sa partie réelle comprise entre 0 et 1; de plus, cette expression est imaginaire, mais il n'y a qu'un nombre fini de ses déterminations dont la partie imaginaire dépasse une limite donnée; de plus, a est imaginaire; nous pouvons donc assigner une limite supérieure et une limite inférieure au module du rapport

$$\frac{1}{p}\frac{\alpha\xi + \beta\eta}{\gamma\xi + \delta\eta} + 1 - \frac{a}{p},$$

d'où l'on conclura que le second facteur de (1) est de l'ordre de p^{-q}; de sorte que la série sera convergente ou divergente avec celle dont le terme général est

$$(2) \qquad \frac{C}{(\gamma\xi + \delta\eta)^{2m}} \frac{1}{p^q}.$$

Celle-ci se présente comme le produit de deux séries, dont la première converge si $m \geqq 2$ et la seconde si $q \geqq 2$.

Notre série convergera donc pourvu que q soit au moins égal à 2. Pour $q = 1$ elle ne convergerait plus absolument, mais on pourrait en grouper les termes de façon à obtenir une série semi-convergente.

Nous pouvons définir par là des séries thétafuchsiennes que nous appellerons de troisième et de quatrième espèces. Celles de troisième espèce seront celles où H aura des infinis sur le cercle fondamental et à l'extérieur, mais pas à l'intérieur; celles de quatrième seront celles où H aura des infinis sur le cercle et à l'intérieur, et pourra en avoir aussi à l'extérieur. Il est clair qu'une série de quatrième espèce peut toujours être regardée comme la somme d'une série de première espèce et d'une série de troisième espèce.

Pour rechercher ce que représente une série de troisième espèce, il faut distinguer deux cas. Soit a la valeur de z située sur le cercle fondamental et pour laquelle H devient infinie; de deux choses l'une, ou bien a n'est pas un sommet du polygone fuchsien fondamental, ou bien c'est un sommet de ce polygone.

Dans le premier cas, la série Θ ne devient infinie pour aucun point du polygone fuchsien, ni par conséquent pour aucune valeur de la fonction fuchsienne x; elle représente donc une fonction thétafuchsienne de seconde espèce.

Dans le second cas, elle représentera encore une fonction thétafuchsienne, qui ne pourra pas devenir infinie à l'intérieur du cercle fondamental, ni par conséquent pour aucune valeur finie de x; elle satisfera donc aux conditions (4) et (4 *bis*) du n° 1. Mais elle ne satisfera plus à la condition (5); il n'est plus vrai en effet que $x^m \mathrm{R}$ tende vers 0 quand x croît indéfiniment, car la démonstration qui en a été donnée (A., p. 215) suppose expressément que H ne devient pas infinie sur le cercle fondamental. La série représente donc une fonction de troisième espèce.

N° 4. — Introduction des fonctions Λ.

Le procédé du n° 2 nous donne la somme des séries $\psi(p)$ à *une fonction près de seconde espèce*, laquelle fonction reste d'ailleurs indéterminée. On peut aller plus loin en se servant des fonctions Λ (A., p. 238); ces fonctions nous permettent en effet de calculer la somme exacte de certaines séries thétafuchsiennes. Soit donc

$$\Lambda = \left(\frac{dz}{dx}\right)^{m-1} \frac{x^{\lambda_1}(x-1)^{\lambda_2}}{(x-c_1)(x-c_2)\,\ldots\ldots\,(x-c_q)},$$

où λ_1 et λ_2 sont les plus grands entiers contenus respectivement dans $\frac{m}{2}$ et $\frac{2m}{3}$ et où le nombre q des infinis du dénominateur est égal à

$$q = \lambda_1 + \lambda_2 - m + 1$$

(C., p. 99). Nous poserons d'ailleurs :

$$\frac{1}{(x-c_1)(x-c_2)\,\ldots\ldots\,(x-c_q)} = \sum \frac{\mathrm{B}_k}{x-c_k}.$$

Les résidus B_k sont alors liés par les relations

$$\sum B_k c_k^h = 0. \qquad (h = 0, 1, 2, \ldots, q-2) \tag{1}$$

Nous savons ensuite (A., pp. 239 sqq.) que la fonction Λ peut être décomposée en éléments simples sous la forme suivante :

$$\Lambda = \sum \frac{A_k}{z - a_k}. \tag{2}$$

Nous pouvons grouper ensemble tous les termes du second nombre de (2) qui correspondent à une même valeur de c_k; nous trouverons ainsi

$$\Lambda = \sum A_k \Phi(z, a_k), \tag{3}$$

où

$$\Phi(z, \alpha_k) = \sum \frac{1}{(\gamma a_k + \delta)^{2m}} \frac{1}{z - \dfrac{\alpha a_k + \beta}{\gamma a_k + \delta}}$$

est une fonction thétafuchsienne par rapport à a_k.

Différentions l'équation (3) $2m-1$ fois par rapport à z, nous aurons

$$D\Lambda = \sum A_k D\Phi(z, a_k), \tag{4}$$

où $D = \dfrac{d^{2m-1}}{dz^{2m-1}}$ est le symbole de $2m-1$ différentiations par rapport à z et où

$$D\Phi(z, a_k) = M \sum \frac{1}{[z(\gamma a_k + \delta) - (\alpha a_k + \beta)]^{2m}}$$

est une fonction thétafuchsienne tant par rapport à z que par rapport à a_k. D'ailleurs

$$M = (-1)(2m-1)!$$

est une constante purement numérique.

Nous appliquerons à $D\Phi(z, a_k)$ les formules (11) et (11 *bis*) du n° 1 et nous trouverons

$$D\Phi = + \sum \lambda_p \mu_p e^{2ip\pi a_k} \psi(p), \tag{5}$$

où λ_p a le même sens que dans le numéro cité et où $\mu_p = + p^{2m-1}(2i\pi)^{2m-1}$. On trouve ainsi

$$D\Lambda = \sum \lambda_p \mu_p \psi(p) \left[\sum A_k e^{2ip\pi a_k}\right]. \tag{6}$$

D'autre part, en égalant les résidus, on trouve

$$A_k = B_k \left(\frac{da_k}{dc_k}\right)^m c_k^{\lambda_1}(c_k - 1)^{\lambda}.$$

Mais d'après les formules (1) et (2) du n° 2, $\frac{1}{c_k}$ est développable suivant les puissances de $e^{2i\pi a_k}$, le développement commençant par un terme du premier degré; réciproquement, $e^{2i\pi a_k}$ est développable suivant les puissances de $\frac{1}{c_k}$ et le développement commence par un terme du premier degré; on a donc

$$e^{2i\pi p a_k} = \sum \gamma_{ph} \frac{1}{c_k^h}, \tag{7}$$

les γ étant des coefficients connus et tels que $\gamma_{ph} = 0$ si $h < p$. D'autre part, les développements de

$$\left(\frac{da_k}{dc_k}\right)^m, \qquad c_k^{\lambda_1}, \qquad (c_k - 1)^{\lambda_2}, \qquad \frac{A_k}{B_k}$$

suivant les puissances de $e^{2i\pi a_k}$ commencent respectivement par des termes de degré

$$m, \ -\lambda_1, \ -\lambda_2, \qquad m - \lambda_1 - \lambda_2 = 1 - q.$$

On aura donc :

$$\frac{A_k}{B_k} = \sum \delta_j c_k^{-j} \qquad \text{où} \quad j \geqq 1 - q. \tag{8}$$

Si nous substituons les développements (7) et (8) dans le second membre de (6), il vient

$$DA = \sum \lambda_p \mu_p \psi(p) \gamma_{ph} \, \delta_j \left[\sum B_k c_k^{-h-j}\right], \tag{9}$$

où

$$p \geqq 1, \qquad h \geqq p, \qquad j \geqq 1 - q.$$

Cela nous permet d'écrire

$$DA = \sum \Omega(n) \left[\sum B_k c_k^{-n}\right], \tag{10}$$

avec

$$\Omega(n) = \sum \lambda_p \mu_p \psi(p) \gamma_{ph} \delta_j,$$

où

$$p \geqq 1, \qquad h \geqq p, \qquad j \geqq 1 - q, \qquad h + j = n;$$

d'où

$$n \geqq p + 1 - q, \qquad n \geqq 2 - q,$$

ce qui prouve que $\Omega(n)$ est une combinaison linéaire de

$$\psi(1), \ \psi(2), \ \ldots\ldots, \ \psi(n + q - 1),$$

dont les coefficients peuvent être regardés comme connus.

D'autre part, nous avons

$$\Lambda = \left(\frac{dz}{dx}\right)^{m-1} x^{-\lambda_1}(x-1)^{-\lambda_2} \sum \frac{B_k}{x-c_k} = \sum P_n \left[\sum B_k c_k^{-n}\right],$$

où

$$P_n = -\left(\frac{dz}{dx}\right)^{m-1} x^{n-1-\lambda_1}(x-1)^{-\lambda_2} \qquad (n \geqq 1).$$

En rapprochant de (10) on trouve

$$(11) \qquad \sum D P_n \left[\sum B_k c_k^{-n}\right] = \sum \Omega(n) \left[\sum B_k c_k^{-n}\right].$$

Dans le premier membre, n prend toutes les valeurs à partir de 1, et dans le second membre, à partir de $2-q$. Cela ne fait rien, car les termes du second membre correspondant à

$$n = 0, \ -1, \ -2, \ \ldots\ldots, \ 2-q$$

disparaissent en vertu des relations (1). Je dis que pour $n \geqq 1$, on aura

$$\Omega(n) = D P_n.$$

Soit en effet :

$$F(c) = \sum_{n=1}^{\infty} [\Omega(n) - D P_n] c^{-n}.$$

La relation (11) pourra s'écrire

$$\sum B_k F(c_k) = 0$$

et elle devra avoir lieu non pas quels que soient les B_k et les c_k, mais toutes les fois que les B_k et les c_k satisferont aux relations (1); il faut donc que le déterminant des

$$1, \ c_k, \ c_k^2, \ \ldots, \ c_k^{q-2}, \ F(c_k)$$

s'annule identiquement, quels que soient les c_k. En écrivant que ce déterminant est nul et donnant à $c_2, c_3, \ldots, c_q$ des valeurs constantes quelconques, on obtiendra une relation linéaire entre

$$1, \ c_1, \ c_1^2, \ \ldots, \ c_1^{q-2}, \ F(c_1),$$

c'est-à-dire que $F(c)$ devra être égal à un polynôme entier de degré $q-2$ en c. Mais $F(c)$ est développable suivant les puissances *positives* de $\frac{1}{c}$; l'égalité n'est donc possible que si le polynôme entier est identiquement nul, ce qui entraîne

$$F(c) = 0.$$

Tous les coefficients de $F(c)$ devant être nuls, on aura

$$(12) \qquad \Omega(n) = D P_n.$$

Cela permet de sommer exactement non pas sans doute les séries $\psi(p)$, mais certaines combinaisons linéaires de ces séries. Rendons-nous compte du progrès accompli; au n° 2, nous avions trouvé la somme des séries $\psi(p)$ *à une fonction près de seconde espèce*. Pour achever la détermination, il aurait donc fallu connaître pour *chacune* des séries $\psi(p)$ un certain nombre de constantes arbitraires, de sorte que le nombre de ces constantes restées inconnues pour *toutes* les séries $\psi(p)$ aurait été infini.

Mais maintenant que la formule (12) est démontrée, supposons que l'on ait déterminé ces constantes pour

$$\psi(0),\ \psi(1),\ \psi(2),\ \ldots,\ \psi(q-1), \tag{13}$$

la formule (12) nous donnera exactement $\Omega(1)$, qui est une combinaison des fonctions (13) et de $\psi(q)$; les constantes pourront donc être regardées comme déterminées pour $\psi(q)$. La formule (12) nous donnera ensuite $\Omega(2)$, qui est une combinaison linéaire des fonctions (13), de $\psi(q)$ et de $\psi(q+1)$; les constantes pourront donc être regardées comme déterminées pour $\psi(q+1)$, et ainsi de suite.

Si donc nous connaissons les constantes pour les fonctions (13), nous les connaîtrons pour *toutes* les séries $\psi(p)$. Pour déterminer toutes ces séries, il suffirait donc de déterminer un nombre *fini* de constantes jusqu'ici inconnues. Ces constantes paraissent d'ailleurs être transcendantes.

Si nous considérons une série thétafuchsienne quelconque de première espèce et, d'autre part, une fonction thétafuchsienne de première espèce qui ait les mêmes infinis à l'intérieur du cercle fondamental avec les mêmes résidus, cette série sera égale à cette fonction *à une fonction près de seconde espèce*, c'est-à-dire que sa somme serait entièrement déterminée si l'on connaissait la valeur d'un certain nombre de constantes transcendantes qui restent inconnues jusqu'ici.

Mais la série thétafuchsienne peut être développée suivant les $\psi(p)$ par la formule (11) du n° 1. On connaîtra donc les constantes transcendantes dont dépend la somme de la série thétafuchsienne quand on connaîtra celles dont dépendent les séries $\psi(p)$ et, par conséquent, quand on connaîtra celles dont dépendent les fonctions (13).

Pour achever la détermination de *toutes* les séries thétafuchsiennes (pour une valeur donnée de m, bien entendu), il nous suffirait donc de connaître un nombre *fini* de constantes transcendantes. Ces constantes sont évidemment apparentées avec ce que j'ai appelé les *périodes* de certaines expressions que j'ai considérées comme la généralisation des intégrales abéliennes de première et de seconde espèce (C., p. 104 à 108).

N° 5. — Extension aux séries ψ d'indice négatif.

Cherchons maintenant à obtenir des résultats analogues en ce qui concerne les fonctions $\psi(p)$ où p est négatif. Reprenons la formule (3) du numéro précédent :

$$\Lambda = \sum A_k \Phi(z, a_k),$$

où

$$\Phi(z, a_k) = \sum \frac{1}{(\gamma a_k + \delta)^{2m}} \frac{1}{z - \dfrac{\alpha a_k + \beta}{\gamma a_k + \delta}}$$

est une série thétafuchsienne en a_k engendrée par la fonction rationnelle

$$H(a_k) = \frac{1}{z - a_k},$$

de telle sorte que

$$\Phi(z, a_k) = \sum (\gamma a_k + \delta)^{-2m} H\left(\frac{\alpha a_k + \beta}{\gamma a_k + \delta}\right);$$

c'est ce que j'exprimerai d'une façon abrégée en écrivant avec des crochets carrés :

$$\Phi(z, a_k) = \Theta[H(a_k)] = \Theta\left[\frac{1}{z - a_k}\right].$$

Nous aurons donc, avec cette notation :

$$\Lambda = \sum A_k \Theta\left[\frac{1}{z - a_k}\right].$$

Mais ce n'est pas tout. Soit $\varphi(z)$ une fonction rationnelle quelconque n'ayant pas d'infini à l'intérieur du cercle fondamental; on aura (A., p. 239 sqq.)

$$\varphi(z)\Lambda(z) = \sum A_k \Theta\left[\frac{\varphi(a_k)}{z - a_k}\right].$$

On en déduit

$$\sum A_k \Theta\left[\frac{\varphi(z) - \varphi(a_k)}{z - a_k}\right] = 0. \tag{1}$$

Soit maintenant $H(a_k)$ une fonction rationnelle quelconque de a_k ayant tous ses infinis à l'extérieur du cercle fondamental et s'annulant pour $a_k = \infty$, engendrant, par conséquent, une série thétafuchsienne de seconde espèce; soit z_0 une valeur quelconque de z intérieure au cercle fondamental; soit

$$\varphi(a_k) = (a_k - z_0) H(a_k);$$

$\varphi(a_k)$ sera une fonction rationnelle de a_k n'ayant pas d'infini à l'intérieur du cercle fondamental et on aura

$$\varphi(z_0) = 0,$$

et par conséquent

$$H(a_k) = \frac{\varphi(z_0) - \varphi(a_k)}{z_0 - a_k}$$

et

$$\sum A_k \Theta[H(a_k)] = 0. \tag{2}$$

Soit maintenant $H(\xi, \eta)$ une fonction rationnelle quelconque homogène de degré $-2m$ en ξ, et η, ayant tous ses infinis extérieurs au cercle fondamental (ce qui veut dire, dans le cas qui nous occupe, que tous ses infinis ont leur partie imaginaire négative) de façon à engendrer une série de seconde espèce; on aura

$$\eta^{2m} H(\xi, \eta) = H\left(\frac{\xi}{\eta}, 1\right);$$

on voit que, quand η tendra vers zéro, $\frac{\xi}{\eta}$ deviendra infini, le facteur η^{2m} du premier membre s'annulera, le second facteur H restera fini, puisque H ne doit pas avoir d'infini sur le cercle fondamental, qui se réduit dans le cas particulier à l'axe des quantités réelles, ni en particulier pour $\eta = 0$; donc le second membre s'annule. Donc

$$H(\infty, 1) = 0.$$

Toute fonction rationnelle $H(a_k)$ susceptible d'engendrer une série de seconde espèce satisfera donc bien à la condition de s'annuler pour $a_k = \infty$ et, par conséquent, à la condition (2); nous pouvons donc écrire

$$\sum A_k \theta(a_k) = 0, \tag{3}$$

Θ étant le symbole d'une fonction thétafuchsienne *quelconque* de seconde espèce.

Reprenons maintenant la formule (4) du numéro précédent :

$$D\Lambda = \sum A_k D\Phi(z, a_k)$$

et voyons ce que devient le second membre quand la partie imaginaire de z est négative. L'expression $D\Phi(z, a_k)$ est une série thétafuchsienne en a_k; elle ne peut devenir infinie que pour $a_k = z$ et pour ses transformés, c'est-à-dire pour

$$a_k = \frac{-\delta z + \beta}{\gamma z - \alpha}.$$

Si donc la partie imaginaire de z est négative, tous ces infinis seront extérieurs a cercle fondamental et la série sera de seconde espèce; on aura donc

$$\sum A_k D\Phi(z, a_k) = 0. \tag{4}$$

Mais $D\Phi(z, a_k)$ est une série tétafuchsienne non seulement par rapport à a_k, mais par rapport à z. Nous pourrons lui appliquer les formules (11) et (11 *bis*) du n° 1 et nous retrouverons la formule (5) du numéro précédent :

$$D\Phi = \sum \lambda_p \mu_p e^{2ip\pi a_k} \psi(p). \tag{5}$$

L'analyse du numéro précédent nous donnait la formule suivante, équivalente à la formule (10) du numéro précédent :

$$\sum \Omega(n) \left[\sum B_k c_k^{-n} \right] = 0, \tag{6}$$

où $\Omega(n)$ est une combinaison linéaire à coefficients connus de

$$\psi(1), \ \psi(2), \ \ldots, \ \psi(n+q-1).$$

Dans la formule (6), n prend toutes les valeurs à partir de $2-q$, mais pour

$$n = 0, \ -1, \ \ldots, \ 2-q$$

le coefficient $\sum B_k c_k^{-n}$ s'annule; comme la relation (6) doit avoir lieu pour toutes les valeurs des c_k et des B_k qui satisfont aux conditions (1) du numéro précédent, on verrait, comme dans le numéro précédent, que l'on aura

$$\Omega(n) = 0. \qquad \text{(pour } n \geqq 1) \tag{7}$$

Cela a lieu pour toutes les valeurs de z dont la partie imaginaire est négative. Or, si z et z_0 sont imaginaires conjuguées, $\psi(z, 1; p, m)$ et $\psi(z_0, 1; -p, m)$ seront imaginaires conjuguées.

Soit alors

$$\Omega(n) = \sum \varepsilon_{n.p} \psi(p),$$

les ε étant des coefficients numériques.

Soit, d'autre part,

$$\Omega'(n) = \sum \varepsilon'_{n.p} \psi(-p),$$

$\varepsilon'_{n.p}$ étant imaginaire conjugué de $\varepsilon_{n.p}$; alors $\Omega'(z_0, n)$ sera imaginaire conjugué de $\Omega(z, n)$. Si donc $\Omega(n)$ s'annule quand la partie imaginaire de z est négative, $\Omega'(n)$ s'annulera quand elle sera positive. On aura donc

$$\Omega'(n) = 0, \tag{8}$$

cette fois pour toutes les valeurs de z intérieures au cercle fondamental. C'est une relation linéaire entre

$$\psi(-1),\ \psi(-2),\ \ldots,\ \psi(1-n-q).$$

Nous avons vu au n° 1 que toutes les $\psi(p)$ d'indice négatif sont des fonctions de seconde espèce; elles sont donc déterminées à un certain nombre de constantes transcendantes près; mais si ces constantes sont déterminées pour

$$\psi(-1),\ \psi(-2),\ \ldots,\ \psi(1-q),$$

les relations (8) permettront de les déterminer pour toutes les autres fonctions ψ d'indice négatif. Donc la somme de *toutes* les séries ψ d'indice négatif, et par conséquent celle de *toutes* les séries thétafuchsiennes de seconde espèce (pour une valeur donnée de m, bien entendu), ne dépend que d'un nombre fini de constantes transcendantes jusqu'ici inconnues.

N° 6. — Développement suivant les puissances de q.

Pour aller plus loin, je vais chercher à développer les fonctions

$$\psi(z,\ 1\ ;\ p,\ m)$$

suivant les puissances de $e^{2i\pi z}$, qui n'est autre chose que le q de Jacobi. Soit donc

$$\psi = \sum \frac{1}{(\gamma z+\delta)^{2m}}\, e^{-2pi\pi\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}}.$$

A chaque terme correspond un couple de nombres premiers entre eux, γ et δ, et inversement. Nous allons grouper ensemble les termes qui correspondent à une même valeur de γ et à des valeurs de δ congrues entre elles suivant le module γ. J'appellerai

$$\omega(\gamma,\ \delta)$$

l'ensemble de ces termes, et comme

$$\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta} = \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{1}{\gamma(\gamma z+\delta)},$$

il viendra

$$\omega(\gamma,\ \delta) = e^{-2i\pi p\frac{\alpha}{\gamma}} \sum \frac{1}{(\gamma z+\delta)^{2m}}\, e^{\frac{2pi\pi}{\gamma(\gamma z+\delta)}},$$

ou, en développant l'exponentielle,

$$\omega(\gamma,\ \delta) = e^{-2i\pi p\frac{\alpha}{\gamma}} \sum\sum \left(\frac{2pi\pi}{\gamma}\right)^{h} \frac{1}{(\gamma z+\delta)^{2m+h}}\, \frac{1}{h!}.$$

L'un des deux signes $\sum$ se rapporte à h, qui prend toutes les valeurs entières de o à ∞, l'autre à δ, qui prend toutes les valeurs congrues entre elles suivant le module γ. Si nous posons, pour abréger,

$$e^{-2i\pi p\frac{\alpha}{\gamma}} = \mathrm{A}, \qquad \frac{2pi\pi}{\gamma^2} = \mathrm{B},$$

nous pourrons écrire

$$\omega(\gamma, \delta) = \mathrm{A}\sum \mathrm{B}^h \frac{1}{\left(z+\frac{\delta}{\gamma}+n\right)^{2m+h}}\frac{1}{h!}.$$

Nous devrons faire varier sous le signe $\sum$ l'entier h de o à ∞ et l'entier n depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$ et attribuer à δ une valeur constante.

Rappelons que nous avons

$$\sum \frac{1}{z+n} = \pi \operatorname{cotg} z\pi = \sum \lambda_j e^{2ij\pi z},$$

et par conséquent, en différentiant $2m+h-1$ fois par rapport à z,

$$\sum \frac{1}{(z+n)^{2m+h}} = \frac{(-1)^{h-1}}{(2m+h-1)!}\lambda_j(2ij\pi)^{2m+h-1}e^{2ij\pi z}.$$

Nous n'avons qu'à substituer, en remplaçant z par $z+\frac{\delta}{\gamma}$, ce qui revient à remplacer $e^{2ij\pi z}$ par $(q\mathrm{C})^j$ en posant

$$\mathrm{C} = e^{2i\pi\frac{\delta}{\gamma}};$$

on trouve ainsi

$$\omega = -\mathrm{A}\sum \lambda_j(2ij\pi)^{2m-1}(-2ij\pi\mathrm{B})^h \frac{q^j\mathrm{C}^j}{h!(2m+h-1)!}.$$

Le coefficient de q^j dans $\omega(\gamma, \delta)$ s'écrira donc

$$-\mathrm{E}\lambda_j(2ij\pi)^{2m-1}\sum \frac{\mathrm{G}^h}{h!(2m+h-1)!},$$

où

$$\mathrm{E} = \mathrm{AC}^j = e^{\frac{2i\pi}{\gamma}(j\delta - p\alpha)}; \qquad \mathrm{G} = -2ij\pi\mathrm{B} = \frac{4pj\pi^2}{\gamma^2}.$$

Le coefficient $-\lambda_j(2ij\pi)^{2m-1}$ est une constante que je puis appeler μ_j; quant à l'expression

$$\sum \frac{\mathrm{G}^h}{h!(2m+h-1)!},$$

c'est une fonction qui se déduit immédiatement des fonctions de Bessel et que j'écrirai $J(m, G)$; on aura donc

$$\omega(\gamma, \delta) = \sum \mu_j E q^j J(m, G).$$

Nous allons maintenant grouper ensemble les termes qui correspondent aux diverses valeurs de δ non congrues entre elles suivant le module γ. Si nous appelons $\omega(\gamma)$ la somme de ces termes, le coefficient de q^j dans $\omega(\gamma)$ sera

$$\mu_j J(m, G) \sum E.$$

Il faut donc calculer $\sum E$, c'est-à-dire

$$\sum e^{\frac{2i\pi}{\gamma}(j\delta - p\alpha)}.$$

Les entiers j, p et γ sont donnés; mais on donne à α toutes les valeurs entières premières avec γ et incongrues entre elles par rapport au module γ, et à δ les valeurs correspondantes, de telle façon que

$$\alpha\delta \equiv 1 \pmod{\gamma}.$$

Je me bornerai à constater que $\sum E$ n'est pas nul en général. Il reste à sommer par rapport à γ et notre coefficient s'écrit :

$$\sum_\gamma \mu_j \left[\sum E\right] J\left(m, \frac{4pj\pi^2}{\gamma^2}\right).$$

Il n'y a aucune raison pour qu'il y ait des relations linéaires entre les valeurs des fonctions de Bessel $J\left(m, \frac{4pj\pi^2}{\gamma^2}\right)$ correspondant aux différentes valeurs de γ. Il n'y a donc aucune raison pour que ce coefficient s'annule.

Il en va tout différemment dans le cas de $p = 0$; nos fonctions J se réduisent à une constante simple que je puis faire sortir du signe $\sum$, de sorte que notre coefficient s'écrit :

$$\mu_j J(m, 0) \sum_\gamma \left[\sum E\right].$$

Ici

$$\sum E = \sum e^{\frac{2i\pi j}{\gamma}\delta},$$

δ prenant toutes les valeurs entières premières à γ. Soit γ' un diviseur quelconque de γ, de telle sorte que $\gamma = \gamma'\varepsilon$: la valeur correspondante de $\sum E$ sera

$$\sum E = \sum e^{\frac{2i\pi j\delta'}{\gamma'}} = \sum e^{\frac{2i\pi j\delta'\varepsilon}{\gamma}}.$$

où δ' est premier à γ' et où, par conséquent, $\delta'\varepsilon$ et γ ont pour plus grand commun diviseur ε. Si nous prenons en particulier $\gamma' = 1$, nous aurons $\delta' = 0$ et

$$\sum \mathrm{E} = 1.$$

Si donc nous réunissons tous les $\sum \mathrm{E}$ relatifs au nombre γ et à *tous* ses diviseurs, un compris, il viendra

$$\sum\sum \mathrm{E} = \sum e^{\frac{2i\pi j}{\gamma}\delta},$$

δ prenant cette fois toutes les valeurs entières incongrues par rapport au module γ, qu'elles soient ou non premières avec γ.

Cette expression est nulle, à moins que j ne soit divisible par γ. Donc, dans le calcul du coefficient

$$\mu_j \mathrm{J}(m, 0) \sum_\gamma \left[\sum \mathrm{E}\right],$$

il suffira de donner à γ les valeurs qui divisent j et *qui sont en nombre fini*. Ce coefficient sera donc une constante *qui ne sera pas transcendante*.

Ainsi s'explique la différence qu'il y a entre $\psi(0)$ et les autres $\psi(p)$. Pour la première, les constantes non encore déterminées dont il a été question dans les numéros précédents ne sont pas transcendantes et on peut en achever la détermination, comme on le fait facilement par la théorie des fonctions elliptiques. Pour les autres $\psi(p)$, ces constantes sont effectivement transcendantes et on ne peut pas aller plus loin.

Voilà ce que l'on peut dire au sujet de la sommation des séries

$$\psi(p) = \sum \frac{1}{(\gamma z + \delta)^{2m}} e^{-2p i\pi \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}}$$

et sur leurs relations avec les séries thétafuchsiennes des diverses espèces. Je me suis borné aux fonctions modulaires, mais on verra sans peine à quelles catégories de fonctions fuchsiennes chacun des résultats peut être étendu.