SUR LA

TRANSFORMATION DE SÉRIES ASYMPTOTIQUES

EN SÉRIES DE POLYNÔMES TAYLORIENS,

PAR M. A. BUHL.

INTRODUCTION.

[**1**] Je me propose, dans ce Mémoire, d'étudier certaines séries à convergence asymptotique imaginées par M. H. Poincaré, et de montrer qu'à des développements tayloriens toujours divergents, on peut substituer des séries *de polynômes tayloriens* convergeant sous certaines conditions.

Pour mieux situer ces nouvelles recherches, je demande la permission de résumer très brièvement les points de départ de la théorie des séries sommables, tels que je les ai toujours décrits dans mes travaux. Il me suffira pour cela de raisonner sur la fonction

$$F(x) = \frac{1}{1-x}.$$

On a, quel que soit x,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \ldots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x} = s_n + \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Soit

$$f(\xi) = \gamma_0 + \gamma_1 \xi + \gamma_2 \xi^2 + \ldots$$

une fonction entière. En multipliant les membres extrêmes de la formule précédente par $c_n = \gamma_n \xi^n$ et en sommant de $n = 0$ à $n = \infty$, il vient

$$(\alpha) \qquad f(\xi)\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{n=\infty} c_n s_n + \frac{x}{1-x} f(\xi x).$$

A mon humble avis, cette formule (α) existe d'une manière plus ou moins évidente dans toutes les méthodes qui ont pour but de développer une fonction analytique $F(x)$ en série de polynômes tayloriens s_n, à la généralité près, bien entendu, puisqu'ici nous raisonnons sur une fonction F extrêmement particulière.

Les plus célèbres méthodes ne commencent à différer entre elles que lorsqu'il s'agit de détruire le dernier terme du second membre de (α), de manière à n'y conserver que la série de polynômes. M. E. Borel a d'abord fait $f(\xi) = e^\xi$, ce qui transforme (α) en

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c_n s_n}{e^\xi} + \frac{x}{1-x} e^{\xi(x-1)}.$$

Dès lors, si, par le point 1, on mène une perpendiculaire à l'axe réel, on aura, pour des x toujours situés à gauche de cette perpendiculaire,

$$\frac{1}{1-x} = \lim_{\xi=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c_n s_n}{e^\xi},$$

ξ croissant indéfiniment par valeurs réelles et positives.

Si, au lieu du point 1, nous avions plusieurs points singuliers, il faudrait, par chacun, élever une perpendiculaire au rayon joignant ce point à l'origine. La région finalement permise à x serait l'intérieur du *polygone de sommabilité*.

M. Mittag-Leffler a perfectionné cette méthode en lui conservant le même esprit. Il construit une fonction entière $f(\xi)$ spéciale, croissant incomparablement plus vite dans une direction privilégiée (le long de la partie positive de $O\xi$, par exemple) que dans toute autre. Alors le rapport de $f(\xi x)$ à $f(\xi)$ tend vers zéro quand ξ croît indéfiniment, x étant seulement assujetti à ne pas se trouver dans le prolongement positif du segment $0 - 1$. Quand il y a des points singuliers en nombre quelconque, x n'est jamais exclu que de demi-droites analogues dont l'ensemble forme *l'étoile*.

[**2**] Je rappelle maintenant une conception différente dans le choix de la fonction sommatrice, conception que j'ai déjà indiquée, à propos de la représentation des fonctions méromorphes, dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* (1908), dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (1908), et, avec plus de développements, dans un récent Mémoire (¹) des *Acta Mathematica* (1911). Je prends pour $f(\xi)$ une fonction entière *pourvue de zéros*, la distribution de ceux-ci étant bien connue. Soit

$$f(\xi) = \sin\frac{\pi\xi}{2}.$$

(¹) J'ai ajouté ici les paragraphes 15 et 16 pour compléter un point important de ce Mémoire des *Acta*. Le lecteur peut s'y reporter tout de suite sans inconvénient.

Alors la formule (α) devient

$$(\beta) \qquad \sin\frac{\pi\xi}{2}\,\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{n=\infty} c_n s_n + \frac{x}{1-x}\sin\frac{\pi\xi x}{2}.$$

Soient maintenant

$$x = \frac{2x_1}{2p+1}, \qquad \xi = (2k+1)(2p+1),$$

x_1, p, k étant des entiers. Alors, $\sin\frac{\pi\xi x}{2}$ sera toujours nul et $\sin\frac{\pi\xi}{2}$ ne le sera jamais.

On pourrait généraliser, passer de x réel à x complexe en substituant au sinus une fonction entière ayant des zéros dans tout le plan, la fonction σ par exemple.

Quels sont les caractères des nouveaux développements ainsi obtenus?

Ils ne nécessitent pas toujours que l'on fasse croître ξ indéfiniment. Ils exigent seulement que ξ soit d'autant plus grand qu'on veut faire des calculs plus approchés.

Ainsi, si x n'était pas naturellement de la forme $\frac{2x_1}{2p+1}$, on pourrait cependant le mettre sous cette forme avec l'approximation qu'on voudrait; mais alors p pourrait être très grand et il en serait de même de ξ. C'est justement quand l'ensemble dénombrable des x ressemble de plus en plus au continu que ξ croît indéfiniment.

[**3**] Quelles sont les conditions générales de convergence des séries précédentes? Elles ont été données par M. Mittag-Leffler dans son Cinquième Mémoire inséré aux *Acta Mathematica* (t. XXIX, p. 167). Il me suffira de rappeler ici la démonstration de l'éminent géomètre, en l'abrégeant légèrement.

Dans un certain cercle ayant l'origine pour centre, soit, en général,

$$(\gamma) \qquad F(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots.$$

Si r est le module d'un x inclus dans ledit cercle, on a sûrement

$$|b_n|\,r^n < g, \qquad |b_n| < g\,r^{-n},$$

g étant une constante finie. Donc

$$|s_n| < g\left(1 + \frac{|x|}{r} + \ldots + \frac{|x|^n}{r^n}\right) = g\,\frac{\dfrac{|x|^{n+1}}{r^{n+1}} - 1}{\dfrac{|x|}{r} - 1},$$

et, quel que soit x, on voit aisément que $\sqrt[n]{|s_n|}$ reste fini. Par suite, $\sqrt[n]{|\gamma_n s_n|}$ tend vers zéro comme $\sqrt[n]{|\gamma_n|}$ quand n croît indéfiniment.

Cette démonstration ne suppose pas que la série (γ) *ait une véritable existence dans* *un certain cercle de convergence;* elle peut fort bien diverger toujours, tout en ayant tous ses termes inférieurs à g. La démonstration ne suppose pas non plus un choix de la fonction sommatrice entière $f(\xi)$.

On peut dès lors imaginer des perfectionnements apportant un peu plus de précision.

Les termes de la série (γ) pourraient croître, par exemple, au delà de toute limite, et il en serait naturellement de même pour s_n. Mais $\sqrt[n]{|\gamma_n s_n|}$ resterait cependant nul ou tout au moins fini pour un choix convenable des γ_n, c'est-à-dire de $f(\xi)$.

Ce sont de telles circonstances que nous allons rencontrer dans ce qui suit en étudiant toujours les mêmes séries (1) du paragraphe 5. Nous verrons que, suivant le mode de croissance des a_n, elles se peuvent développer en séries de polynômes tayloriens comme de simples fonctions méromorphes ou s'y refusent, ces deux cas extrêmes étant séparés par un cas conditionnel.

[**4**] L'existence d'expressions qui non seulement peuvent réaliser un prolongement analytique, mais qui gardent encore un sens vis-à-vis de séries tayloriennes dont le rayon de convergence devient nul, a été signalée en différents Mémoires brièvement résumés par M. J. Hadamard dans son remarquable opuscule sur *La série de Taylor et son prolongement analytique* (Scientia, 1901, pp. 83 à 86).

Dans les *Leçons sur les séries divergentes,* de M. E. Borel, le chapitre Ier est consacré aux séries asymptotiques étudiées surtout au point de vue de M. Poincaré.

Les chapitres III, IV, V du même ouvrage sont consacrés surtout aux méthodes de sommabilité dues à l'auteur lui-même. Les deux études semblent séparées; on peut les considérer comme indépendantes sans nuire ni à l'une ni à l'autre. J'espère avoir jeté un pont entre elles en appliquant des méthodes de sommabilité justement à des expressions asymptotiques imaginées par M. Poincaré.

Enfin, les séries (1) sont évidemment des séries de fractions rationnelles, et cette remarque rapproche ce qui suit du Mémoire *Sur les séries de polynômes et de fractions rationnelles*, publié par M. Borel dans les *Acta Mathematica* (1901).

C'est même ce dernier travail qui me semble fournir les comparaisons les plus importantes.

Dans une première partie (p. 313), M. Borel rappelle d'abord des travaux, dus à M. Painlevé et à lui-même, d'après lesquels on peut former des séries de fractions rationnelles n'ayant que des pôles simples et représentant dans des régions séparées du plan des fonctions très diverses. En de nombreuses pages de la seconde partie, le savant auteur forme des séries qui, dans des domaines continus à deux dimensions, ne convergent vers une expression donnée que sur certains ensembles de lignes. Dans une troisième partie, il se propose aussi d'obtenir des séries de polynômes convergentes en partant de séries entières toujours divergentes. Ce qui suit illustre à nouveau ces diverses questions avec adjonction de nouvelles séries représentant une fonction donnée seulement quand la variable est dans de certains ensembles dénombrables.

Ce Mémoire est le développement d'une Note insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences* du 13 juin 1910.

LES DIVERS DÉVELOPPEMENTS DES EXPRESSIONS $F(w, x)$.

[5] Considérons, avec M. H. Poincaré (*Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. I, p. 351; t. II, p. 3), la série

$$F(w, x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{w^n}{1 + a_n x} \tag{1}$$

où, pour faciliter la comparaison avec ce qui précède, j'appelle x la variable μ de M. Poincaré. Je rappelle que cette série converge uniformément quand x reste positif et que w reste plus petit en valeur absolue qu'un nombre positif w_0 plus petit que 1, mais d'ailleurs quelconque. De même, la série

$$\frac{1}{p!} F^{(p)}(w, x) = (-1)^p \sum \frac{w^n a_n^p}{(1 + a_n x)^{p+1}} \tag{2}$$

converge uniformément.

La fonction $F(w, x)$, définie par (1), n'est pas développable en série entière en x. Cela se voit immédiatement en considérant les points singuliers $-\frac{1}{a_n}$ qui s'approchent indéfiniment de l'origine quand n croît indéfiniment *si a_n croît toujours avec n*, ce que je supposerai encore avec M. Poincaré.

Toutefois, il faut bien observer que cela ne signifie pas que la fonction $F(w, x)$ est *formellement* rebelle au développement taylorien; un développement formel, à termes bien déterminés, peut être obtenu. Seulement, il est toujours divergent.

Dans un tel développement, les coefficients doivent être, d'après (2),

$$\frac{1}{p!} F^{(p)}(w, 0) = (-1)^p \sum w^n a_n^p; \tag{3}$$

chacun est nettement représenté par une série convergente *si a_n croît indéfiniment avec n sans que la plus grande limite de $a_{n+1} : a_n$ puisse surpasser* 1.

Dans la suite, cette hypothèse relativement au mode de croissance des a_n sera toujours supposée réalisée. Dans l'exemple envisagé directement par M. Poincaré, on a $a_n = n$.

[**6**] Pourrait-on étudier la divergence de la série entière de coefficients (3) par l'examen de ces coefficients eux-mêmes? Cette question, superflue par elle-même, sera plus loin matière à comparaisons intéressantes. Si R est le rayon de convergence de la série, on a la formule générale

$$\frac{1}{R} = \lim_{p=\infty} \sqrt[p]{\left|\sum w^n a_n^p\right|} \tag{4}$$

de laquelle, à vrai dire, il semble difficile de tirer quelque chose sans préciser davantage la nature des a_n.

Prenons un exemple sur lequel nous pourrons raisonner de manière approchée. Soit $a_n = n^k$, k étant un nombre *positif* fixe.

L'expression

$$\sum w^n n^{kp}$$

peut être remplacée approximativement par

$$\int_0^\infty w^n n^{kp}\,dn = \left(\log\frac{1}{w}\right)^{-kp-1} \int_0^\infty e^{-z} z^{kp}\,dz = \frac{\Gamma(kp+1)}{\left(\log\frac{1}{w}\right)^{kp+1}}.$$

En employant la formule de Stirling,

$$\Gamma(a+1) \equiv a^a e^{-a}\sqrt{2\pi a},$$

on peut écrire, toujours de manière approchée,

$$\sum w^n n^{kp} \equiv \frac{(kp)^{kp} e^{-kp}\sqrt{2\pi kp}}{\left(\log\frac{1}{w}\right)^{kp+1}},$$

et (4) donne

$$\frac{1}{R} = \lim_{p=\infty} \frac{(kp)^k e^{-k}}{\left(\log\frac{1}{w}\right)^k} = \infty.$$

Donc, $R = 0$.

Les difficultés qui viennent d'être examinées sont, on le sait, des images extrêmement réduites des difficultés qui se présentent dans l'étude des séries entières en μ qui se rencontrent dans le problème des trois corps, μ représentant un rapport de masses toujours positif et très petit. Ces séries existaient si bien au point de vue *formel* que les astronomes n'en connaissaient point d'autres et les employaient sans défiance. M. Poincaré montra qu'elles n'avaient qu'une convergence asymptotique.

Sans préjuger de la possibilité de l'extension de mes résultats aux séries de la Mécanique céleste, je vais reprendre la fonction F définie par (1) et montrer qu'on peut, sous certaines conditions, la développer en séries de polynômes tayloriens convergentes.

Ces développements n'en faciliteront point le calcul pratique, pas plus que les nombreux développements en séries de polynômes donnés pour $\frac{1}{1-x}$ ne facilitent le calcul de cette expression. Mais ils ajouteront quelque intérêt au problème de la transformation de séries divergentes en séries convergentes. Ce qui suit est le développement de la note précitée insérée aux *Comptes rendus* du 13 juin 1910. J'ai trouvé avantage à faire ici quelques légers changements dans les notations.

[**7**] Je reprends la formule (1) et je l'écris

$$F(w, x) = \sum w^n \left[1 - a_n x + a_n^2 x^2 - \ldots + (-a_n x)^m + \frac{(-a_n x)^{m+1}}{1 + a_n x} \right]$$

ou

$$F(w, x) = s_m + \sum w^n \frac{(-a_n x)^{m+1}}{1 + a_n x}. \tag{5}$$

Ceci définit fort nettement le *polynôme taylorien* s_m qui est de degré m.

On sait que, de cette dernière formule, on conclut immédiatement que, si x tend vers zéro,

$$\lim \frac{F(w, x) - s_m}{x^m} = 0,$$

ce qui est la propriété capitale utilisée par M. Poincaré pour définir la convergence asymptotique.

Je vais procéder autrement. Comme dans mon Mémoire des *Acta Mathematica* (1911, p. 75), soit

$$f(\xi) = \gamma_0 + \gamma_1 \xi + \gamma_2 \xi^2 + \ldots$$

une fonction entière. Je pose $c_m = \gamma_m \xi^m$ et aussi

$$\varphi_p(\xi) = f(\xi) - c_0 - c_1 - \ldots - c_{p-1} = \gamma_p \xi^p + \gamma_{p+1} \xi^{p+1} + \ldots$$

Si alors on multiplie tous les termes de la formule (5) par c_{m+p} et si l'on somme de $m = 0$ à $m = \infty$, il vient

$$\varphi_p(\xi) F(w, x) = \sum_{m=0}^{m=\infty} c_{m+p} s_m + \sum_n \frac{w^n \varphi_p(-\xi a_n x)}{(-a_n x)^{p-1} (1 + a_n x)}. \tag{A}$$

Telle est la *formule fondamentale* qui réalisera un développement de $F(w, x)$ en série de polynômes s_m, *si l'on peut annuler le dernier sigma et prouver la convergence du premier*. En pratique, il vaut mieux étudier d'abord la convergence des deux; puis, parmi les valeurs de x et de ξ assurant cette convergence, choisir celles pour lesquelles $-\xi a_n x$ est toujours un zéro de φ_p. On remarquera que la formule (A) prend une simplicité particulière si $p = 1$, c'est-à-dire si la fonction sommatrice φ_0 possède un zéro simple à l'origine, seul cas envisagé dans ma Note des *Comptes rendus*.

[**8**] Il est très aisé d'assurer un sens au *second* sigma de (A). Il suffit de choisir la fonction φ_p et les valeurs de ξ et de x de telle sorte que $\varphi_p(-\xi a_n x)$ ne soit jamais infini, même quand a_n le devient. On voit sans peine que cette condition peut se réaliser d'une foule de manières, et qu'alors le sigma en question converge comme celui de la formule (1).

Mais cela ne suffit pas pour assurer un sens à la formule (A) prise au complet.

Écrivons

$$\Phi(\xi) = \varphi_p(\xi)\,\mathrm{F}(w, x) - \sum_n \frac{w^n \varphi_p(-\xi a_n x)}{(-a_n x)^{p-1}(1 + a_n x)}. \tag{6}$$

De là, il faut pouvoir déduire

$$\Phi(\xi) = \sum_{m=0}^{m=\infty} c_{m+p} s_m. \tag{7}$$

On a, en dérivant par rapport à ξ,

$$\Phi^{(j+p)}(\xi) = \varphi_p^{(j+p)}(\xi)\,\mathrm{F}(w, x) - \sum_n \frac{w^n(-a_n x)^{j+1} \varphi_p^{(j+p)}(-\xi a_n x)}{1 + a_n x}, \tag{8}$$

$$\Phi^{(j+p)}(0) = \varphi_p^{(j+p)}(0)\left[\mathrm{F}(w, x) - \sum_n \frac{w^n(-a_n x)^{j+1}}{1 + a_n x}\right],$$

ou, d'après (5),

$$\Phi^{(j+p)}(0) = s_j \varphi_p^{(j+p)}(0).$$

Donc

$$\frac{\Phi^{(j+p)}(0)}{(j+p)!} = \gamma_{j+p} s_j$$

et le développement (7) est à nouveau établi, au moins de manière formelle.

Or (7), étant un développement taylorien en ξ, n'a de sens, pour une valeur de ξ, que si ce sens se conserve pour toutes les valeurs de ξ inférieures en module à la précédente et d'argument quelconque. Donc *il est inutile d'introduire dans le second membre de* (6) *des valeurs de* ξ *donnant un sens à ce membre, si ce sens ne se conserve pas pour toutes les valeurs de* ξ *inférieures en module.*

On peut encore dire que, pour obtenir le développement taylorien (7) de $\Phi(\xi)$, on cherche d'abord les points singuliers de la fonction $\Phi(\xi)$ définie par (6) et qu'on ne développe, naturellement, que dans un cercle ayant pour centre l'origine du plan des ξ et ne contenant à son intérieur aucun point singulier.

Mais il est temps maintenant de raisonner sur un exemple concret en mettant une fonction entière particulièrement simple à la place de $f(\xi)$, soit e^ξ ou $\sin\xi$ quand nous aurons besoin d'une fonction pourvue de zéros.

D'ailleurs, quand une formule (A) sera établie en vertu des considérations précédentes, je m'efforcerai encore de vérifier les conditions de convergence du premier sigma au moyen de critères relatifs à la série entière en ξ qu'il représente.

[**9**] *Emploi de e^ξ comme fonction sommatrice.* — Reprenons (A) et faisons, pour plus de simplicité, $p=0$. Prenons $\varphi_0(\xi)=f(\xi)=e^\xi$. Il viendra

$$e^\xi F(w, x) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{\xi^m}{m!} s_m - \sum_n \frac{w^n a_n x\, e^{-\xi a_n x}}{1+a_n x}. \tag{9}$$

Pour étudier la convergence de la série représentée par le second sigma, prenons le rapport d'un terme au précédent

$$w \frac{a_{n+1}}{a_n} \frac{1+a_n x}{1+a_{n+1} x} e^{-\xi x (a_{n+1}-a_n)}.$$

On peut toujours, x étant donné, supposer n assez grand pour remplacer cette expression par

$$w\, e^{-\xi x (a_{n+1}-a_n)}. \tag{10}$$

Il faut chercher d'abord si cette expression peut rester inférieure à 1 pour une certaine valeur de ξ et toutes les valeurs de module inférieur. Cela mène à la considération de trois cas (a), (b), (c).

a) *La différence $a_{n+1}-a_n$ tend vers zéro quand n croît indéfiniment.* — Ce cas serait, par exemple, celui de $a_n = n^k$ si k est un nombre positif plus petit que 1. Ce serait encore celui de $a_n = \log n$. Alors l'expression (10) tend vers $w < w_0 < 1$, et la formule (9) doit posséder un sens *pour toutes les valeurs de ξ et de x.*

b) *La différence $a_{n+1}-a_n$ tend vers une limite finie non nulle quand n croît indéfiniment.* — Ce cas est, par exemple, celui de $a_n = n$, dans lequel s'est placé M. Poincaré. Alors l'expression (10) ne reste inférieure à 1 et, par suite, la formule (9) n'est valable que pour ξ et x dans de certaines régions à délimiter.

c) *La différence $a_{n+1}-a_n$ croît indéfiniment avec n.* — Ce cas est, par exemple, celui de $a_n = n^k$ si k est plus grand que 1. Alors la formule (9) ne sera jamais valable; le procédé de développement ici étudié deviendra inapplicable (du moins avec e^ξ comme fonction sommatrice).

[**10**] Je vais retrouver ces trois conclusions différentes en étudiant directement la convergence de la série entière en ξ représentée par le premier sigma de la formule (9). Soit ρ le rayon de convergence de ladite série. On aura

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{m=\infty} \sqrt[m]{\frac{|s_m|}{m!}}.$$

D'après la définition de s_m, donnée au début du numéro 7, il vient

$$s_m = \sum w^n \frac{1-(-a_n x)^{m+1}}{1+a_n x} = F(w, x) - \sum w^n \frac{(-a_n x)^{m+1}}{1+a_n x},$$

ce qui n'est, d'ailleurs, que la formule (5).

Par définition de $F(w, x)$, cette expression est toujours finie et on peut la négliger dans l'expression de s_m qui croît indéfiniment avec m. On pourra donc écrire

$$|s_m| \equiv \sum w^n \frac{(a_n x)^{m+1}}{1+a_n x} < \sum w^n (a_n x)^m = x^m \sum w^n a_n^m.$$

Pour étudier ce dernier sigma, même approximativement, on ne peut guère faire autrement que de supposer une certaine forme aux a_n. Reprenons les hypothèses signalées à la fin du paragraphe précédent, c'est-à-dire posons $a_n = n^k$.

Alors, par le raisonnement approché déjà fait au numéro 6, on aura

$$\sum w^n a_n^m = \sum w^n n^{km} \equiv \frac{\Gamma(km+1)}{\left(\log \frac{1}{w}\right)^{km+1}},$$

d'où

$$\frac{1}{\rho} = \frac{x}{\left(\log \frac{1}{w}\right)^k} \lim_{m=\infty} \sqrt[m]{\frac{\Gamma(km+1)}{\Gamma(m+1)}}.$$

Si, toujours comme au numéro 6, on évalue les fonctions eulériennes au moyen de la formule de Stirling, on trouve finalement

$$\frac{1}{\rho} = \frac{x}{\left(\log \frac{1}{w}\right)^k} k^k e^{1-k} \lim_{m=\infty} m^{k-1}.$$

Le rayon de convergence ρ est donc nul si $k>1$, et infini si $k<1$. Si $k=1$, on a

$$\frac{1}{\rho} = \frac{x}{\log \frac{1}{w}}. \tag{11}$$

Il importe de remarquer que cette dernière formule, obtenue par un raisonnement approché, est cependant rigoureusement exacte, ce qu'on voit en reprenant l'expression (10) pour $a_n = n$ et en écrivant qu'elle est au plus égale à 1 pour une certaine valeur de ξ et toutes les valeurs inférieures en module.

Les assertions émises en (a), (b), (c) au paragraphe précédent se trouvent donc parfaitement vérifiées.

[**11**] *Étude d'un cas* (*a*). — On sait que, dans ce cas, la différence $a_{n+1} - a_n$ tend vers zéro quand n croît indéfiniment. Alors la formule

$$(9) \qquad e^{\xi} F(w, x) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{\xi^m}{m!} s_m - \sum_n \frac{w^n a_n x \, e^{-\xi a_n x}}{1 + a_n x}$$

est valable quel que soit ξ réel ou complexe.

Pour réaliser un développement de $F(w, x)$ en série de polynômes s_m, il reste à détruire le second sigma. D'après ce que j'ai déjà dit à la fin du numéro 7, il faudrait, dans le sigma à détruire, remplacer la fonction exponentielle par une fonction entière pourvue de zéros, un sinus par exemple. Point n'est besoin, pour cela, de repasser par la formule générale (A). Dans (9), remplaçons ξ par $\frac{i\pi\xi}{2}$, puis par $-\frac{i\pi\xi}{2}$, et retranchons les deux équations ainsi obtenues; il vient

$$(12) \qquad \sin\frac{\pi\xi}{2} F(w, x) = \sum_{m=0}^{m=\infty} (-1)^m \left(\frac{\pi\xi}{2}\right)^{2m+1} \frac{s_{2m+1}}{(2m+1)!} + \sum_n \frac{w^n a_n x}{1 + a_n x} \sin\frac{\pi\xi a_n x}{2}.$$

Pour réaliser le développement cherché, il n'y a plus qu'à s'arranger de manière à ce que ξ soit toujours un entier impair et $\xi a_n x$ toujours un entier pair.

Si q, r', r, α_n désignent des nombres toujours entiers, r et r' étant choisis, si l'on veut, une fois pour toutes, posons

$$(13) \qquad a_n = \frac{\alpha_n}{2r' + 1}, \qquad x = \frac{2q}{2r + 1}, \qquad \xi = (2r + 1)(2r' + 1).$$

Dans ces conditions, il vient finalement

$$(14) \qquad (-1)^{r-r'} F(w, x) = \sum_{m=0}^{m=\infty} (-1)^m \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m+1} \frac{[(2r+1)(2r'+1)]^{2m+1}}{(2m+1)!} s_{2m+1},$$

formule où les entiers r et r' sont arbitraires à un certain point de vue.

Évidemment, rien n'indique *a priori* que les a_n et x doivent avoir les formes rationnelles indiquées en (13), mais on pourra toujours prendre r et r' assez grand pour les mettre sous cette forme avec l'approximation qu'on voudra.

Ajoutons une remarque curieuse. On peut prétendre que le développement (14) trouvé pour $F(w, x)$ ne suppose pas la connaissance des points singuliers a_n de cette fonction [1]. Dans ce Mémoire, la définition seule de $F(w, x)$ suppose qu'on connaît les a_n, mais il n'est pas impossible d'imaginer qu'il en soit autrement; $F(w, x)$ pour-

---

[1] Une telle remarque serait plus importante encore s'il s'agissait de représenter une fonction méromorphe dont on ne connaîtrait pas les pôles. Je n'ai pas assez insisté sur ce point dans mon Mémoire des *Acta Mathematica*, et j'y reviens ici aux paragraphes 16 et 17.

rait être, par exemple, l'intégrale d'une certaine équation différentielle, intégrale dont on saurait seulement qu'elle a *la forme* (1) et dont on pourrait, à l'aide de l'équation différentielle, former un développement taylorien toujours divergent, mais donnant les polynômes s. Et alors on pourrait former (14), *le choix de r' n'indiquant nullement qu'on connaît les valeurs des a_n, mais seulement qu'on suppose ces valeurs exprimables à $\frac{1}{2r'+1}$ près.* Une des plus grosses difficultés serait, à coup sûr, sans connaître les a_n, d'être renseigné cependant sur les limites de la différence et du rapport de a_{n+1} et a_n.

Ces hypothèses non seulement n'ont rien d'extraordinaire, mais rappellent encore ce qu'on fait en Mécanique céleste lorsqu'on cherche des développements tayloriens en μ par la méthode de Lagrange. Qu'il y ait là des fonctions de μ avec points singuliers empêchant toujours la convergence du développement taylorien, c'est ce qui ne fait plus aucun doute depuis les retentissantes découvertes de M. Poincaré. Et cependant on peut *formellement* établir un développement taylorien utile, dans la méthode de Lagrange, parce qu'il converge dans ses premiers termes, et qui serait encore utile ici parce qu'il donnerait les polynômes s.

Pour pouvoir poursuivre l'analogie, c'est-à-dire pour montrer définitivement que les séries de la méthode de Lagrange peuvent être remplacées par des séries de polynômes convergentes ayant le type (14), il faudrait pouvoir approfondir encore l'étude des solutions asymptotiques de M. Poincaré (*Méthodes nouvelles*, t. I, n° 104), qui se présentent sous une forme dont la série (1) est une image excessivement simplifiée. Il ne faut pas perdre de vue que les développements ici étudiés n'existent sans restrictions que dans le cas (a).

Dans le cas (b), des restrictions surviennent, et, dans le cas (c), tout disparaît. Pour les solutions asymptotiques de M. Poincaré, il faudrait vraisemblablement établir des classifications analogues avant de pouvoir dire si leur développement en séries de polynômes est possible.

[**12**] *Étude d'un cas* (b). — Dans ce cas, la différence $a_{n+1} - a_n$ tend vers une limite finie, que j'appellerai λ, quand n croît indéfiniment. Dans ces conditions, pour que l'expression (10) soit inférieure à 1, quel que soit le module de ξ, on doit avoir

$$|\xi|\, x < \frac{1}{\lambda} \log \frac{1}{w}. \tag{15}$$

Il est clair que si l'on peut agir sur λ ou sur w ou sur ces deux quantités à la fois, on pourra toujours s'arranger à vérifier une telle inégalité. Alors on pourrait toujours raisonner comme au paragraphe précédent. Mais, en général, λ et w seront des données non modifiables. On pourra encore essayer de se servir de la formule (12) en remplaçant dans (15) ξ par $\dfrac{i\pi\xi}{2}$. Dans les expressions (13), l'entier r' ne sera plus arbitraire; il devra satisfaire à l'inégalité

$$(16) \qquad \frac{\pi}{2}.2q(2r'+1) < \frac{1}{\lambda}\log\frac{1}{w} \quad \text{ou} \quad q(2r'+1) < \frac{1}{\lambda\pi}\log\frac{1}{w},$$

certainement invérifiable si q et r' sont trop grands. Or, faire grandir q et r n'entraîne pas forcément que l'on fasse varier x ou les a_n de façon notable; cela peut signifier seulement qu'on perfectionne leur approximation.

Supposons, par exemple, que λ et w soient tels que l'on ait

$$1 < \frac{1}{\lambda\pi}\log\frac{1}{w} < 2$$

et que les a_n soient des entiers comme dans l'exemple de M. Poincaré ($a_n = n$).

Alors on aura $r' = 0$, on pourra prendre $q = 1$ et obtenir des séries (14) valables pour des valeurs de x, telles que

$$(17) \qquad \frac{2}{1},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{5},\ \frac{2}{7},\ \ldots,$$

quelle que soit la grandeur des nombres impairs pris pour dénominateur. Mais aucune de ces séries (14) ne sera plus valable si x a une valeur d'une autre nature; pour $q = 2$, elles divergeront fatalement dès que l'on cherchera à choisir ξ de manière à n'avoir que la série de polynômes elle-même à l'exclusion du second sigma qui figure dans (12).

Ces séries de polynômes qui convergent et représentent une fonction bien déterminée quand la variable est dans un certain ensemble dénombrable [tel (17)], mais qui représentent autre chose ou divergent quand la variable s'écarte d'un des éléments dudit ensemble, me paraissent constituer une curiosité analytique dont on ne doit pas posséder encore beaucoup d'exemples *explicites*.

Au point de vue des généralités théoriques, outre ce que j'ai déjà dit au paragraphe 4, on pourra rapprocher un tel résultat de celui que donne M. P. Montel dans ses *Leçons sur les séries de polynômes à une variable complexe* (1910, p. 111). Après les séries qui convergent dans des domaines distincts, mais dont chacun est continu, il faudrait probablement placer celles du type précédent qui ne peuvent converger que lorsque la variable est dans un ensemble dénombrable possédant tout au plus la propriété d'être dense dans certains domaines.

Remarquons encore que si l'on ne voulait introduire dans (14) qu'une seule valeur de ξ, de manière à n'avoir qu'une seule série de polynômes à coefficients fixes pour représenter $F(w, x)$, cela entraînerait, d'après la troisième égalité (13), que les entiers r et r' seraient en nombre limité. D'après (16) il en serait de même des q, et nous pourrions concevoir ainsi des séries de polynômes ne pouvant converger vers une fonction donnée que pour un nombre fini de valeurs de la variable x.

[**13**] *Dérivabilité.* — Les séries formées dans ce qui précède sont-elles dérivables? D'une manière plus précise, si l'une des séries précédentes représente $F(w, x)$, pour x dans un certain ensemble dénombrable, peut-on, en dérivant la série terme à terme, obtenir, pour les mêmes valeurs de x, qu'elle représente $F_x^{(k)}(w, x)$?

Rien ne s'oppose *formellement* à ce que l'on dérive k fois les trois parties de la formule (A), ce qui donne

$$(B) \qquad \varphi_p(\xi) D^{(k)} F(w, x) = \sum_{m=0}^{m=\infty} c_{m+p} D^{(k)} s_m + \sum_n w_n D^{(k)} \frac{\varphi_p(-\xi a_n x)}{(-a_n x)^{p-1}(1 + a_n x)}.$$

Même si, dans (A), on traite les deux sigmas comme des séries uniformément convergentes pour de certaines valeurs de ξ et de x, il n'est pas certain que cette propriété de convergence uniforme subsiste dans la formule précédente. Le second sigma sera ici une forme linéaire et homogène par rapport à

$$(18) \qquad \varphi_p(-\xi a_n x), \quad \varphi_p^{(1)}(-\xi a_n x), \quad \ldots\ldots, \quad \varphi_p^{(k)}(-\xi a_n x),$$

si bien que ce sigma se composera en réalité de $k + 1$ séries distinctes, qu'il faudra d'abord rendre convergentes par un choix convenable des x, non seulement pour une certaine valeur de ξ, mais pour toutes les valeurs de module inférieur.

Discuter ces $k + 1$ séries suppose que l'on soit renseigné sur le mode de croissance des $k + 1$ expressions (18). Or, bien que l'on connaisse les relations entre les modes de croissance de beaucoup de fonctions entières et de leurs dérivées, il y a là des difficultés que je ne chercherai pas à mêler à celles du présent Mémoire.

Je me bornerai à utiliser encore, comme fonction sommatrice, la fonction qui a le privilège d'être identique à ses dérivées, c'est-à-dire la fonction exponentielle.

A supposer maintenant que toutes les difficultés de convergence soient vaincues quant à l'établissement de la formule (B), il resterait encore à détruire le second sigma de cette formule. Pour cela, on prendra pour φ_p une fonction entière ayant des zéros tous de l'ordre $k + 1$, par exemple la puissance $k + 1$ d'une fonction entière à zéros simples. Alors les valeurs de ξ et de x, qui rendent nul le premier des $k + 1$ termes (18), rendent également nuls tous les autres.

Il est possible que les valeurs de ξ et x permettant la destruction du second sigma de (B) ne soient pas de celles qui assurent la convergence de la formule complète. Ces difficultés ne semblent guère discutables que sur des cas particuliers.

[**14**] Reprenons la formule (9) et dérivons-la k fois par rapport à x. Cela peut s'écrire

$$(19) \qquad e^{\xi} D^{(k)} F(w, x) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{\xi^m}{m!} D^{(k)} s_m - \sum_n w^n D^{(k)} \left[\left(1 - \frac{1}{1 + a_n x}\right) e^{-\xi a_n x} \right].$$

Dans le second sigma, formons la dérivée d'ordre k du crochet au moyen de la formule de Leibnitz. Cette dérivée est composée linéairement de termes tels que

$$\frac{(\xi a_n)^{k-j} e^{-\xi a_n x}}{(1 + a_n x)^{j+1}}.$$

Dans les séries de tels termes, obtenues en faisant varier l'indice n, le rapport d'un terme au précédent tend vers l'expression (10) quand n croît indéfiniment.

Donc, *la formule* (9) *et toutes celles qu'on en déduit par des dérivations relatives à x sont valables pour les mêmes valeurs de ξ et de x*, c'est-à-dire quels que soient ξ et x dans le cas (a), et ξ et x satisfaisant à l'inégalité (15) dans le cas (b).

Renseignés sur ces points, voyons si l'on peut détruire le second sigma de l'égalité précédente en raisonnant comme il a été indiqué à la fin du numéro 13.

Partons de l'identité

$$\left(2i \sin \frac{\pi\xi}{2}\right)^{k+1} = \left(e^{\frac{i\pi\xi}{2}} - e^{-\frac{i\pi\xi}{2}}\right)^{k+1}$$

et développons le second membre par la formule du binôme, ce qui nous donne $k+2$ termes de la forme

$$\mathrm{A} e^{l\frac{i\pi\xi}{2}}.$$

Dans (19), remplaçons ξ par $l\frac{i\pi\xi}{2}$ et, tenant compte des coefficients A, remplaçons cette formule (19) par $k+2$ autres formules qui, additionnées, donneront

$$(20)\qquad \left(\sin \frac{\pi\xi}{2}\right)^{k+1} \mathrm{D}^{(k)}\mathrm{F}(w, x) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \gamma_m \xi^m \mathrm{D}^{(k)} s_m - \sum_n w^n \mathrm{D}^{(k)} \left[\frac{a_n x}{1 + a_n x}\left(-\sin \frac{\pi\xi a_n x}{2}\right)^{k+1}\right].$$

Pour $k = 0$, cette formule doit redonner (12). Je néglige le calcul des coefficients γ_m qui est d'ailleurs fort simple.

Le crochet qui est dans le second sigma est maintenant une fonction entière en ξ dont les zéros sont d'ordre $k+1$; ce sont des zéros non seulement pour la fonction entière considérée, mais encore pour toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre k inclus.

Remarquons aussi que la formule précédente n'est autre chose que (B) pour $p = 0$ et

$$\varphi_0(\xi) = \left(\sin \frac{\pi\xi}{2}\right)^{k+1};$$

mais, en la déduisant indirectement de (19), nous allons avoir un procédé meilleur pour la discuter.

Nous pouvons maintenant reprendre les hypothèses (13); elles feront disparaître le second sigma dans la formule (20) et, avec lesdites hypothèses, $\mathrm{F}(w, x)$ sera développé en une série de polynômes s_m qui, dérivée k fois, *mais k fois seulement*, donnera d'autres séries susceptibles [toujours pour les valeurs de a_n, x, ξ définies en (13)] de représenter les dérivées de $F(w, x)$ jusqu'à l'ordre k.

Du moins il semble qu'il en soit ainsi au point de vue formel. Mais ces $k+1$ séries sont-elles convergentes en même temps que la série (19) d'où l'on est parti? C'est ici que des distinctions intéressantes interviennent.

Si, avec $F(w, x)$, nous sommes dans le cas (a), la formule (19) est valable pour toutes les valeurs de ξ et de x, et, dans les transformations effectuées, rien ne peut changer cette manière de voir.

Au contraire, si nous sommes dans le cas (b), la formule (19) n'est valable que sous la condition

$$|\xi|x < \frac{1}{\lambda}\log\frac{1}{w}. \tag{15}$$

Or, il a fallu, dans le cours de ce paragraphe, remplacer ξ par des quantités $l\frac{i\pi\xi}{2}$, les l étant des entiers qui atteignent la valeur $k+1$. La condition (15) est donc à remplacer par

$$\frac{\pi}{2}(k+1)|\xi|x < \frac{1}{\lambda}\log\frac{1}{w},$$

ce qui, avec les hypothèses (13), donne

$$(k+1)q(2r'+1) < \frac{1}{\lambda\pi}\log\frac{1}{w}.$$

Pour $k=0$, cette inégalité redonne (16), ce qui doit évidemment être.

On voit que, dans un cas (b), l'indice de dérivation k de la formule (20) ne peut être quelconque, même en introduisant comme fonction sommatrice une fonction entière à zéros d'ordre $k+1$. Si λ et w sont donnés (ce qui, en général, aura naturellement lieu), la grandeur de k dépend de celle de r'. Voilà donc des séries de polynômes qui sont plus ou moins dérivables en raison inverse de l'approximation adoptée pour la représentation des singularités a_n des fonctions que ces séries peuvent représenter. Il semble que ce soit là une conclusion peu banale.

En résumé, les fonctions $F(w, x)$ définies par (1) peuvent, dans le cas (a), se développer en séries de polynômes tayloriens par des méthodes qui appartiennent aux fonctions méromorphes. Dans le cas (b), de nombreuses restrictions surgissent; mais ces restrictions, à cause de leur bizarrerie, rendent les cas (b) peut-être plus intéressants que les cas (a).

[**15**] *Généralisations diverses.* — Il est évident que la construction des séries précédentes pourrait être variée d'une infinité de manières. On pourrait d'abord se proposer d'employer une fonction sommatrice qui ne soit pas du type exponentiel. Dans ces conditions, on pourrait probablement espérer que certains cas (b) deviendraient des cas (a) ou même que certains cas (c) deviendraient (b) ou (a).

Sans sortir de ce qui précède et avec le sinus comme fonction sommatrice, des formules telles que (12) et (14) pourraient être modifiées au moyen de considérations très élémentaires.

Remplaçons les hypothèses (13) par les suivantes :

$$(21) \qquad a_n = \frac{4\alpha_n + 1}{2r' + 1}, \qquad x = \frac{\frac{2a+1}{2b+1} + 2q}{2r+1}, \qquad \xi = (2b+1)(2r+1)(2r'+1),$$

où α_n, a, b, r, r', q sont des entiers.

Alors

$$\sin\frac{\pi\xi}{2} = (-1)^{b+r+r'}, \qquad \sin\frac{\pi\xi a_n x}{2} = (-1)^{q+a}.$$

Le dernier sigma de (12) devient

$$(-1)^{q+a}\left[-F(w, x) + \sum w^n\right]$$

et la formule (14) est remplacée par

$$[(-1)^{b+r+r'} + (-1)^{q+a}]\,F(w, x) - \frac{(-1)^{q+a}}{1-w}$$

$$= \sum_{m=0}^{m=\infty} (-1)^m \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m+1} \frac{[(2b+1)(2r+1)(2r'+1)]^{2m+1}}{(2m+1)!} s_{2m+1}.$$

Suivant la parité ou l'imparité de $b + r + r'$ et de $q + a$, le coefficient de $F(w, x)$ est égal à ± 2 ou à zéro. On voit qu'aux séries ici étudiées on peut attacher *plusieurs* ensembles dénombrables également remarquables. Quand la variable x sera dans l'un, la série sera propre à représenter $2\,F(w, x)$; quand x sera dans l'autre, la série représentera $-2\,F(w, x)$; quand x sera dans un troisième ensemble, la série représentera zéro ou une constante. Il semble que de tels résultats puissent être variés de bien des manières.

Bornons-nous, en tout ceci, à supposer que $F(w, x)$ appartient au cas (a), ce qui dispense de discuter la convergence de la série précédente. Dans un cas (b) il faudrait réétudier la condition (15) avec les hypothèses (21), ce qui restreindrait certainement le choix des entiers α_n, a, b, r, r', q.

REMARQUE SUR LES FONCTIONS MÉROMORPHES.

[16] J'ai brièvement indiqué au paragraphe 11 comment la représentation des expressions $F(w, x)$ peut être considérée comme indépendante de la connaissance des points singuliers a_n.

Un tel résultat serait beaucoup plus important encore pour une fonction méromorphe $F(x)$; or, il est implicitement contenu dans mon Mémoire des *Acta Mathematica* (t. XXXV, pp. 80, 81), ce qu'un lecteur attentif remarquerait certainement. Je saisis toutefois l'occasion qui m'est offerte ici de m'étendre un peu plus sur ce point.

Soit a_i un pôle quelconque de $F(x)$ et soit C_k le cercle ayant son centre à l'origine et dont la circonférence passe entre a_k et a_{k+1}. Pour x dans ce cercle, on aura (en supposant les pôles simples)

$$F(x) = \sum_{i=1}^{i=k} \frac{A_i}{x - a_i} + a_{k0} + a_{k1}x + \ldots$$

ou

$$F(x) = \sum_{i=1}^{i=k} A_i \left[-\frac{1}{a_i} - \frac{x}{a_i^2} - \ldots - \frac{x^n}{a_i^{n+1}} + \frac{x^{n+1}}{a_i^{n+1}(x - a_i)} \right] + (a_{k0} + a_{k1}x + \ldots + a_{kn}x^n) + a_{k,n+1}x^{n+1} + \ldots$$

ou

$$(1) \qquad F(x) = s_n + \sum_{i=1}^{i=k} \frac{A_i x^{n+1}}{a_i^{n+1}(x - a_i)} + \sum_{j=n+1}^{j=\infty} a_{k,j} x^j.$$

Soit maintenant

$$f(\xi) = \gamma_1 \xi + \gamma_2 \xi^2 + \ldots$$

une fonction entière à laquelle on peut tout de suite supposer un zéro à l'origine.

Multipliant tous les termes de (1) par $c_{n+1} = \gamma_{n+1}\xi^{n+1}$ et sommant de $n = 0$ à $n = \infty$, il vient

$$f(\xi)F(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} c_{n+1} s_n + \sum_{i=1}^{i=k} f\left(\frac{\xi x}{a_i}\right) \frac{A_i}{x - a_i} + \sum_{n=1}^{n=\infty} (c_1 + \ldots + c_n) a_{kn} x^n.$$

Ceci est la formule (A) du Mémoire des *Acta* pour $p = 1$.

Dans ce qui suit, on aura

$$f(\xi) = \sigma\xi = \xi + \star - \frac{g_2 \xi^5}{2^4.3.5} - \frac{g_3 \xi^7}{2^3.3.5.7} - \ldots,$$

$\sigma\xi$ étant la fonction fondamentale de Weierstrass, admettant pour zéros toutes les intersections du quadrillage orthogonal formé par les axes et des parallèles à ceux-ci d'abscisses et d'ordonnées ± 2, ± 4, ± 6, ... Alors $\sigma\xi$, pour les valeurs impaires 1, 3, 5, ..., croît indéfiniment et exponentiellement.

[**17**] Il s'agit maintenant dans (A) de faire disparaître les deux derniers sigmas, de manière à représenter $F(x)$, dans le cercle C_k, seulement par le premier.

Je suppose qu'on ne connaît pas les pôles a_i.

Ceci n'empêche pas que je puis supposer à ces pôles la forme

$$\frac{1}{p}(a_{i1} + i a_{i2}), \tag{2}$$

a_{i1}. a_{i2} et p étant des entiers dont les deux premiers sont de parité différente et dont le dernier p est choisi une fois pour toutes. Il est clair que de telles hypothèses, non seulement n'ont rien d'extraordinaire, mais sont imposées, *en général*, qu'on le veuille ou non. Ainsi les pôles inconnus peuvent n'être déterminables que par des opérations transcendantes et avoir des coordonnées irrationnelles que je ne pourrai jamais me représenter exactement, mais seulement en les remplaçant par des coordonnées rationnelles voisines.

Je pose de même, x_1 et x_2 étant des entiers pairs,

$$x = \frac{1}{p}(x_1 + i x_2).$$

Enfin, dans le cercle C_k, je considère *tous les points, en nombre fini*, dont l'affixe est de la forme (2), et je forme le produit

$$\prod (a_{i1}^2 + a_{i2}^2). \tag{3}$$

Si ξ est pris égal à ce produit, $\dfrac{\xi x}{a_i}$ doit être un entier complexe dont les deux parties sont paires, et, par suite, $\sigma\dfrac{\xi x}{a_i}$ est toujours nul. De plus, $\sigma\xi$ n'est jamais nul.

Donc, en supposant que les x et les a_i inconnus soient exprimables avec le procédé d'approximation indiqué, la formule (A) se réduit à

$$f(\xi)\,F(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} c_{n+1}\, s_n + \sum_{n=1}^{n=\infty} (c_1 + \ldots + c_n)\, a_{kn}\, x^n.$$

Si maintenant le rayon de C_k croît indéfiniment, ξ croît indéfiniment, et il en est de même de $f(\xi) = \sigma\xi$, de telle sorte que la formule précédente peut se réduire à

$$F(x) = \lim_{\xi=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c_{n+1}\, s_n}{\sigma\xi},$$

ξ croissant de la manière indiquée. Alors le produit (3) a une infinité de facteurs; mais c'est là, évidemment, une infinité dénombrable. Pour plus de détails et de rigueur, je renvoie à mon Mémoire des *Acta*. On y verra notamment comment on peut étendre le procédé à une fonction méromorphe dont les pôles ont un ordre quelconque de multiplicité.