SUR LES ÉQUATIONS DES TIGES DROITES,

PAR LOUIS ROY.

INTRODUCTION.

Les équations du mouvement des tiges droites homogènes et isotropes, de section circulaire, ont été données autrefois par Poisson. On sait que ce géomètre identifiait les deux coefficients de Lamé λ et μ; mais, si l'on reprend la méthode qu'il a suivie, en laissant ces deux coefficients distincts, on retrouve les équations obtenues après lui par Kirchhoff. Sa méthode, toutefois, n'est pas à l'abri de toute critique et laisse à désirer au point de vue de la clarté. Plus tard, Kirchhoff et Clebsch reprirent la théorie de la déformation des tiges de forme quelconque, en appliquant à chaque tronçon de la tige les formules de la flexion et de la torsion des prismes. L'application de ces formules prête encore à certaines critiques, qui ont été formulées notamment par E. Mathieu dans sa *Théorie de l'élasticité des corps solides*, mais la méthode de Kirchhoff paraît, cependant, susceptible de donner des résultats très approchés, quand la tige est droite et très peu déformée.

Voulant soumettre à l'épreuve les résultats de cette théorie, E. Mathieu (1) a considéré une tige droite isotrope de section circulaire et a cherché les équations de son mouvement transversal d'une manière plus analytique, en partant de l'expression du travail des forces élastiques et en appliquant le principe des travaux virtuels.

Dans cette analyse, E. Mathieu suppose, qu'en chaque point de l'axe, le déplacement longitudinal est constamment nul, ce qui revient à admettre, *a priori*, l'indépendance mutuelle des mouvements longitudinaux et transversaux. De plus, en calculant certaines dérivées des déplacements, il commet une faute de calcul, ce qui le conduit à des équations de mouvement de même forme que celles de Kirchhoff, mais qui ne coïncident avec elles que dans l'hypothèse $\lambda = \mu$. La même remarque est à faire, quand il applique la méthode de Poisson en rendant distincts les deux coeffi-

(1) E. MATHIEU, *Théorie de l'élasticité des corps solides*, ch. VII.

cients de Lamé. Aussi, ne s'étant pas aperçu de son erreur, il n'hésite pas à affirmer que le désaccord est dû à ce que ses équations sont plus approchées que celles de Kirchhoff et de Poisson.

Nous nous proposons de reprendre l'analyse de E. Mathieu, mais en lui donnant une plus grande généralité. Tout d'abord, nous n'annulerons pas, *a priori*, le déplacement longitudinal sur l'axe; d'autre part, nous ne supposerons pas que la température de la tige soit uniforme et constante, comme on le fait habituellement dans la théorie de l'élasticité, et nous tiendrons compte des déformations thermiques. Au lieu du travail des forces élastiques que considérait E. Mathieu, nous considérerons le potentiel thermodynamique interne de la tige, dont nous commencerons par rechercher l'expression; nous en déduirons les équations du mouvement par l'emploi de l'équation fondamentale de l'Energétique, qui généralise le théorème de d'Alembert.

Cette analyse nous conduira à ce résultat que les équations du mouvement transversal, tant indéfinies qu'aux limites, sont indépendantes de la température. Ces équations coïncident bien avec celles données, antérieurement, par Kirchhoff. La température n'intervient que dans les équations du mouvement longitudinal, qu'on peut, du reste, obtenir par une méthode plus rapide, ainsi que nous l'avons montré ailleurs (1), sans faire d'hypothèse aussi particulière sur la forme et la contexture de la tige.

Nous terminerons en formant les équations complémentaires de la température, déduites de la théorie de la conductibilité. Ces équations, jointes à celles déjà obtenues, permettront de traiter, dans toute leur généralité, les deux problèmes inséparables du mouvement et de la distribution de la température.

Formules préliminaires.

Nous considérons une tige de section circulaire, dont les bases sont deux sections droites de rayon ε, et dont l'axe est dirigé suivant l'axe des z. Aucune pression extérieure n'est censée s'exercer sur la surface latérale. Nous ferons usage des coordonnées rectangulaires x, y, z, en même temps que des coordonnées cylindriques r, φ, z.

Soient α, β, γ les cosinus directeurs de la normale extérieure à la surface de la tige, N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3 les composantes de la pression intérieure en un point; puisque, sur la surface latérale, la pression est nulle, nous avons, pour $r=\varepsilon$:

$$\left\{\begin{aligned} &N_1\alpha+T_3\beta=0,\\ &T_3\alpha+N_2\beta=0,\\ &T_2\alpha+T_1\beta=0.\end{aligned}\right. \tag{1}$$

(1) *Journ. de math.* (6e série), t. VI, fasc. III, 1910, p. 244.

En général, Φ étant une fonction quelconque de x, y, z, t, nous poserons, pour abréger :

$$\Phi(o, o, z, t) = \varphi, \quad \left(\frac{\partial^{\alpha+\beta}\Phi}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}\right)_{r=0} = \frac{\partial^{\alpha+\beta}\varphi}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}.$$

D'après cela, en développant N_1 et T_3 suivant les puissances croissantes de x et de y, et en remplaçant chaque fois x et y, respectivement, par $r\alpha$ et $r\beta$, la première équation (1) donne :

$$n_1\alpha + \left(\frac{\partial n_1}{\partial x}\alpha + \frac{\partial n_1}{\partial y}\beta\right)\varepsilon\alpha + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 n_1}{\partial x^2}\alpha^2 + 2\frac{\partial^2 n_1}{\partial x \partial y}\alpha\beta + \frac{\partial^2 n_1}{\partial y^2}\beta^2\right)\varepsilon^2\alpha + \ldots$$

$$+ t_3\beta + \left(\frac{\partial t_3}{\partial x}\alpha + \frac{\partial t_3}{\partial y}\beta\right)\varepsilon\beta + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 t_3}{\partial x^2}\alpha^2 + 2\frac{\partial^2 t_3}{\partial x \partial y}\alpha\beta + \frac{\partial^2 t_3}{\partial y^2}\beta^2\right)\varepsilon^2\beta + \ldots = o.$$

Nous aurions deux égalités analogues pour les deux autres équations (1).

En se limitant, dans ces développements, aux termes en ε^2, en y remplaçant α^3 par $\alpha(1-\beta^2)$, β^3 par $\beta(1-\alpha^2)$, et en égalant à zéro les coefficients de α, β, α^2, $\alpha\beta$, β^2, $\alpha\beta^2$, $\alpha^2\beta$, on obtient un certain nombre de relations, dont nous retiendrons seulement les suivantes :

$$(2) \qquad \left\{\begin{array}{ll} n_1 + \dfrac{\varepsilon^2}{2}\dfrac{\partial^2 n_1}{\partial x^2} = o, & t_3 + \dfrac{\varepsilon^2}{2}\dfrac{\partial^2 t_3}{\partial y^2} = o, \\ t_3 + \dfrac{\varepsilon^2}{2}\dfrac{\partial^2 t_3}{\partial x^2} = o, & n_2 + \dfrac{\varepsilon^2}{2}\dfrac{\partial^2 n_2}{\partial y^2} = o, \\ t_2 + \dfrac{\varepsilon^2}{2}\dfrac{\partial^2 t_2}{\partial x^2} = o, & t_1 + \dfrac{\varepsilon^2}{2}\dfrac{\partial^2 t_1}{\partial y^2} = o; \end{array}\right.$$

$$(3) \qquad \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial n_1}{\partial x} = o, & \dfrac{\partial t_3}{\partial y} = o, \\ \dfrac{\partial t_3}{\partial x} = o, & \dfrac{\partial n_2}{\partial y} = o, \\ \dfrac{\partial t_2}{\partial x} = o, & \dfrac{\partial t_1}{\partial y} = o; \end{array}\right.$$

$$(4) \qquad \frac{\partial n_1}{\partial y} + \frac{\partial t_3}{\partial x} = o, \quad \frac{\partial t_3}{\partial y} + \frac{\partial n_2}{\partial x} = o, \quad \frac{\partial t_2}{\partial y} + \frac{\partial t_1}{\partial x} = o.$$

Nous supposerons que la tige se refroidit par rayonnement dans l'espace ambiant, dont la température absolue T_0 sera prise pour origine thermométrique. Soit, alors, ϑ la température en un point, K et k les coefficients de conductibilité intérieure et extérieure ; nous avons, pour $r = \varepsilon$,

$$K\frac{d\vartheta}{dn} + k\vartheta = o,$$

n désignant la normale extérieure. En posant $h = \frac{k}{K}$, nous pourrons écrire l'égalité précédente

$$\alpha \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \beta \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + h\vartheta = 0.$$

Développons le premier membre de cette équation, comme nous avons développé les équations (1). En nous limitant également aux termes en ε^2, nous arriverons à des relations dont nous utiliserons seulement les suivantes :

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \theta}{\partial x}(1 + h\varepsilon) + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^3} = 0, \qquad \frac{\partial \theta}{\partial y}(1 + h\varepsilon) + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^3 \theta}{\partial y^3} = 0, \\ h\theta + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}(2 + h\varepsilon) = 0, \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} = 0, \qquad h\theta + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}(2 + h\varepsilon) = 0. \end{array} \right.$$

Cela posé, considérons le développement de la fonction ϑ :

$$\vartheta = \theta + \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \alpha + \frac{\partial \theta}{\partial y} \beta\right) r + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \alpha^2 + 2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \alpha\beta + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \beta^2\right) r^2 + \ldots ;$$

d'après les égalités (5), on voit aisément que ce développement peut s'écrire

$$(6) \qquad \vartheta = \left[1 - \frac{h}{\varepsilon(2 + h\varepsilon)} r^2\right] \theta + \ldots,$$

les termes non écrits étant, au moins, du troisième ordre de petitesse.

Désignons par U, V, W les trois composantes du déplacement et par D_1, D_2, D_3, G_1, G_2, G_3 les six déformations en un point quelconque de la tige. Nous nous proposons de calculer les quantités

$$d_1, \quad \frac{\partial d_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial d_1}{\partial y},$$

$$d_2, \quad \frac{\partial d_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial d_2}{\partial y},$$

$$\frac{\partial d_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial d_3}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 d_3}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 d_3}{\partial y^2},$$

au moyen des fonctions u, v, w et θ. Les relations entre les pressions intérieures, les déformations et la température, prises sur l'axe de la tige, nous donnent tout d'abord

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} n_1 = (\lambda + 2\mu) d_1 + \lambda(d_2 + d_3) - \nu\theta, \\ n_2 = (\lambda + 2\mu) d_2 + \lambda(d_3 + d_1) - \nu\theta, \\ n_3 = (\lambda + 2\mu) d_3 + \lambda(d_1 + d_2) - \nu\theta, \\ t_1 = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right), \quad t_2 = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right), \quad t_3 = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \end{array} \right.$$

ν étant un troisième coefficient d'élasticité, qu'il faut considérer en plus des deux coefficients de Lamé λ et μ, quand on veut tenir compte des effets de la température.

La première et la quatrième des égalités (2) s'écrivent, en tenant compte des deux premières égalités (7) :

$$(\lambda + 2\mu)d_1 + \lambda d_2 = -\lambda d_3 + \nu\theta - \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2 n_1}{\partial x^2},$$

$$\lambda d_1 + (\lambda + 2\mu)d_2 = -\lambda d_3 + \nu\theta - \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2 n_2}{\partial y^2},$$

d'où nous déduisons

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} d_1 &= \frac{-\lambda d_3 + \nu\theta}{2(\lambda+\mu)} - \frac{\varepsilon^2}{8\mu(\lambda+\mu)}\left[(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 n_1}{\partial x^2} - \lambda\frac{\partial^2 n_2}{\partial y^2}\right],\\ d_2 &= \frac{-\lambda d_3 + \nu\theta}{2(\lambda+\mu)} - \frac{\varepsilon^2}{8\mu(\lambda+\mu)}\left[-\lambda\frac{\partial^2 n_1}{\partial x^2} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 n_2}{\partial y^2}\right].\end{aligned}\right.$$

La première égalité (3) et la deuxième égalité (4) nous donnent, en tenant compte de la deuxième égalité (3) et des deux premières égalités (7) :

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} (\lambda + 2\mu)\frac{\partial d_1}{\partial x} + \lambda\frac{\partial d_2}{\partial x} &= -\lambda\frac{\partial d_3}{\partial x} + \nu\frac{\partial\theta}{\partial x},\\ \lambda\frac{\partial d_1}{\partial x} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial d_2}{\partial x} &= -\lambda\frac{\partial d_3}{\partial x} + \nu\frac{\partial\theta}{\partial x}.\end{aligned}\right.$$

La première égalité (4) jointe à la troisième égalité (3) et la quatrième égalité (3) nous donnent de même

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} (\lambda + 2\mu)\frac{\partial d_1}{\partial y} + \lambda\frac{\partial d_2}{\partial y} &= -\lambda\frac{\partial d_3}{\partial y} + \nu\frac{\partial\theta}{\partial y},\\ \lambda\frac{\partial d_1}{\partial y} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial d_2}{\partial y} &= -\lambda\frac{\partial d_3}{\partial y} + \nu\frac{\partial\theta}{\partial y}.\end{aligned}\right.$$

D'autre part, les deux dernières égalités (2) s'écrivent, d'après les quatrième et cinquième des égalités (7) :

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\varepsilon^2}{2\mu}\frac{\partial^2 t_2}{\partial x^2} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\varepsilon^2}{2\mu}\frac{\partial^2 t_1}{\partial y^2} = 0.$$

Comme elles ont lieu quel que soit z, on en déduit en différentiant

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial d_3}{\partial x} &= -\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\varepsilon^2}{2\mu}\frac{\partial^3 t_2}{\partial x^2\partial z},\\ \frac{\partial d_3}{\partial y} &= -\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{\varepsilon^2}{2\mu}\frac{\partial^3 t_1}{\partial y^2\partial z}.\end{aligned}\right.$$

D'après cela, les équations (9) et (10) nous donnent, en les résolvant et en remarquant que, d'après les deux premières égalités (5), les dérivées $\frac{\partial\theta}{\partial(x, y)}$ sont du second ordre :

$$(12) \qquad \frac{\partial d_1}{\partial x}=\frac{\partial d_2}{\partial x}=\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\text{des termes en } \varepsilon^2,$$

$$(13) \qquad \frac{\partial d_1}{\partial y}=\frac{\partial d_2}{\partial y}=\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+\text{des termes en } \varepsilon^2.$$

Enfin, les deux dernières équations (3) s'écrivent

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}=0, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0;$$

d'où, en différentiant par rapport à z,

$$(14) \qquad \frac{\partial^2 d_3}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 d_1}{\partial z^2}, \qquad \frac{\partial^2 d_3}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 d_2}{\partial z^2}.$$

et les formules (8) différentiées achèveront de faire connaître ces dérivées.

Potentiel thermodynamique interne de la tige.

Le potentiel thermodynamique interne de la tige a pour expression générale :

$$(15) \quad \mathcal{F}=\int\left[\varphi(\mathfrak{S})+\frac{\lambda}{2}(D_1+D_2+D_3)^2+\mu\left(D_1^2+D_2^2+D_3^2+\frac{G_1^2+G_2^2+G_3^2}{2}\right)-\nu(D_1+D_2+D_3)\mathfrak{S}\right]d\varpi,$$

$d\varpi$ étant un élément de volume de la tige et $\varphi(\mathfrak{S})$ une fonction de la température seule.

Nous allons remplacer, sous le signe $\int$, les déformations et la température par leurs développements, en nous limitant, pour l'expression entre crochets, aux termes du second ordre de petitesse.

D'après la deuxième égalité (2), g_3 est du second ordre et, d'après les deuxième et troisième des égalités (3), $\frac{\partial g_3}{\partial y}$ et $\frac{\partial g_3}{\partial x}$ sont nuls. Donc, le glissement G_3 est du second ordre de petitesse et son carré, qui est du quatrième, doit être négligé dans l'expression (15).

D'après les deux dernières égalités (2) et (3), nous pouvons écrire

$$(16) \qquad \begin{cases} G_1=-\dfrac{\varepsilon^2}{2\mu}\dfrac{\partial^2 t_1}{\partial y^2}+\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)r\alpha+\ldots, \\ G_2=-\dfrac{\varepsilon^2}{2\mu}\dfrac{\partial^2 t_2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)r\beta+\ldots, \end{cases}$$

l'ensemble des termes non écrits étant du second ordre. Or, la troisième égalité (4) peut s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}=0.$$

Supposons, avec E. Mathieu, que, pendant son mouvement, la tige ne subisse pas de rotation autour de son axe, on aura

$$\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}=0.$$

On déduit de ces deux dernières égalités

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}=\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z}=-\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y};$$

par suite, dans les développements de G_1 et de G_2 fournis par les égalités (16), les termes en $r\alpha$ et $r\beta$ sont nuls. Les glissements G_1 et G_2 sont donc aussi du second ordre et leurs carrés peuvent être négligés dans l'expression (15).

Nous allons remplacer, dans l'égalité (15), les dilatations et la température par leurs développements; celui de D_1 est

$$D_1=d_1+\left(\frac{\partial d_1}{\partial x}\alpha+\frac{\partial d_1}{\partial y}\beta\right)r+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 d_1}{\partial x^2}\alpha^2+2\frac{\partial^2 d_1}{\partial x \partial y}\alpha\beta+\frac{\partial^2 d_1}{\partial y^2}\beta^2\right)r^2+\ldots,$$

et ceux de D_2 et D_3 ont des formes analogues; celui de $\mathfrak{S}$ est donné par l'égalité (6). Nous obtenons ainsi, en remplaçant α et β respectivement par $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$:

$$(17)\qquad \mathcal{F}=\int\varphi(\mathfrak{S})\,d\varpi+\iiint\Big[\mathcal{A}+(\mathcal{B}\cos\varphi+\mathcal{C}\sin\varphi)r$$
$$+\frac{1}{2}\left(\mathcal{D}\cos^2\varphi+2\mathcal{E}\sin\varphi\cos\varphi+\mathcal{G}\sin^2\varphi+\mathcal{H}\right)r^2+\ldots\Big]r\,dr\,d\varphi\,dz,$$

les coefficients $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, ..., $\mathcal{H}$, ... étant des fonctions de z et de t seulement. Si nous intégrons par rapport à φ de o à 2π, puis par rapport à r de o à ε, nous aurons

$$(18)\qquad \mathcal{F}=\int\varphi(\mathfrak{S})\,d\varpi+\pi\varepsilon^2\int\left(\mathcal{A}+\frac{\mathcal{D}+\mathcal{G}+2\mathcal{H}}{8}\varepsilon^2\right)dz,$$

la dernière intégrale étant prise tout le long de l'axe de la tige. On vérifie que les coefficients restants de l'égalité (18) ont pour expressions

$$(19)\qquad \mathcal{A} = \frac{\lambda}{2}(d_1 + d_2 + d_3)^2 + \mu(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2) - \nu(d_1 + d_2 + d_3)\theta,$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D} = \lambda & \left[(d_1 + d_2 + d_3)\left(\frac{\partial^2 d_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 d_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 d_3}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial d_1}{\partial x} + \frac{\partial d_2}{\partial x} + \frac{\partial d_3}{\partial x}\right)^2 \right] \\
& + 2\mu\left[d_1 \frac{\partial^2 d_1}{\partial x^2} + d_2 \frac{\partial^2 d_2}{\partial x^2} + d_3 \frac{\partial^2 d_3}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial d_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial d_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial d_3}{\partial x}\right)^2 \right] \\
& - \nu\theta\left(\frac{\partial^2 d_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 d_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 d_3}{\partial x^2}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G} = \lambda & \left[(d_1 + d_2 + d)\left(\frac{\partial^2 d_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 d_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 d_3}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial d_1}{\partial y} + \frac{\partial d_2}{\partial y} + \frac{\partial d_3}{\partial y}\right)^2 \right] \\
& + 2\mu\left[d_1 \frac{\partial^2 d_1}{\partial y^2} + d_2 \frac{\partial^2 d_2}{\partial y^2} + d_3 \frac{\partial^2 d_3}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial d_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial d_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial d_3}{\partial y}\right)^2 \right] \\
& - \nu\theta\left(\frac{\partial^2 d_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 d_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 d_3}{\partial y^2}\right),
\end{aligned}$$

$$(20)\qquad \mathcal{H} = \frac{2h\nu}{\varepsilon(2 + h\varepsilon)}\theta(d_1 + d_2 + d_3).$$

En tenant compte des trois premières relations (7), nous obtenons

$$\begin{aligned}
(21)\qquad \mathcal{D} + \mathcal{G} = \lambda & \left[\left(\frac{\partial d_1}{\partial x} + \frac{\partial d_2}{\partial x} + \frac{\partial d_3}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial d_1}{\partial y} + \frac{\partial d_2}{\partial y} + \frac{\partial d_3}{\partial y}\right)^2 \right] \\
& + 2\mu\left[\left(\frac{\partial d_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial d_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial d_3}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial d_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial d_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial d_3}{\partial y}\right)^2 \right] \\
& + n_1\left(\frac{\partial^2 d_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 d_1}{\partial y^2}\right) + n_2\left(\frac{\partial^2 d_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 d_2}{\partial y^2}\right) + n_3\left(\frac{\partial^2 d_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 d_3}{\partial y^2}\right).
\end{aligned}$$

Il nous reste à remplacer, dans les expressions (19), (20) et (21), les dilatations et leurs dérivées par leurs valeurs. Dans le calcul de $\mathcal{A}$, nous devrons, eu égard au degré d'approximation adopté, nous limiter aux termes en ε^2 et, dans celui de $\mathcal{D} + \mathcal{G}$ et de $\mathcal{H}$, aux termes indépendants de ε. Nous voyons donc, dès à présent, d'après les première et quatrième des égalités (2), que, dans l'expression de $\mathcal{D} + \mathcal{G}$, les termes en n_1 et n_2 doivent être négligés. En remplaçant d_3 par $\frac{\partial w}{\partial z}$, on obtient pour $\mathcal{A}$, d'après les formules (8) et en posant

$$\mathcal{E} = \mu\frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu},$$

$$(22)\qquad \mathcal{A} = \frac{1}{2}\mathcal{E}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 - \frac{\mu}{\lambda + \mu}\nu\theta\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\nu^2}{2(\lambda + \mu)}\theta^2;$$

car on vérifie que les termes en ε^2 se détruisent. Il n'y a pas non plus de termes en ε, car toutes les quantités que nous remplaçons par leurs valeurs, aussi bien dans l'expression (19) que dans les expressions (20) et (21), sont des fonctions linéaires en ε^2. Remarquons que $\mathcal{A}$ ne dépend que de w et de θ.

Passons au calcul de $\mathcal{D} + \mathcal{G}$: d'après les égalités (11), (12), (13), où nous devons négliger les quantités en ε^2, nous voyons que les deux premières lignes du second membre de l'égalité (21) ne dépendent que de u et de v. D'autre part, d'après les égalités (14) et (8), la troisième ligne, que nous devons réduire à son dernier terme, d'après ce qui a été dit plus haut, ne dépend que de w et de θ, étant donnée la troisième égalité (7); nous pouvons donc, dans l'expression (18), négliger son produit par ε^2 vis-à-vis de $\mathcal{A}$ et limiter $\mathcal{D} + \mathcal{G}$ à ses deux premières lignes. Nous obtenons ainsi, d'après les formules (11), (12), (13),

$$\mathcal{D} + \mathcal{G} = \mathcal{E}\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)^2\right]. \tag{23}$$

Quant à la quantité $\mathcal{H}$, on voit, d'après les formules (8), qu'elle ne dépend que de w et de θ. Son produit par ε^2 peut donc être aussi négligé vis-à-vis de $\mathcal{A}$ dans l'expression de $\mathcal{F}$.

L'égalité (18) devient ainsi :

$$\begin{aligned}\mathcal{F} = & \int \varphi(\mathfrak{I})\, d\varpi \\ & + \frac{\pi\varepsilon^2}{2}\int \left\{ \mathcal{E}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 - \frac{2\mu}{\lambda+\mu}\nu\theta\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\nu^2}{\lambda+\mu}\theta^2 + \frac{\varepsilon^2}{4}\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)^2\right]\right\} dz.\end{aligned} \tag{24}$$

Equations du mouvement.

Pour obtenir les équations du mouvement de la tige, nous devons écrire, d'après les principes de l'Energétique, qu'on a, dans toute modification virtuelle isothermique compatible avec les liaisons,

$$\delta\mathcal{C}_e - \delta_\theta\mathcal{F} + \delta\mathcal{J} = 0, \tag{25}$$

$\delta\mathcal{C}_e$ désignant le travail élémentaire des forces extérieures, $\delta\mathcal{J}$ celui des forces d'inertie et $\delta_\theta\mathcal{F}$ la variation isothermique du potentiel thermodynamique interne.

Soient X, Y, Z les composantes par unité de masse de la force extérieure appliquée à chaque élément de volume, ρ la densité, P_x, P_y, P_z les composantes de la pression extérieure qui s'exerce sur les bases de la tige, on a

$$\delta\mathcal{E}_e = \iiint \rho(X\delta U + Y\delta V + Z\delta W)r\,dr\,d\varphi\,dz$$
$$+\iint(P_x\delta U + P_y\delta V + P_z\delta W)r\,dr\,d\varphi,$$

δU, δV, δW désignant les variations des déplacements dans la modification virtuelle considérée, et l'intégrale double s'étendant aux deux bases de la tige.

En développant, comme nous l'avons déjà fait, les déplacements virtuels et les composantes des forces extérieures et en intégrant deux fois, on obtient, en négligeant les termes en ε^4 :

$$\delta\mathcal{E}_e = \pi\varepsilon^2 \int \rho(X\delta u + Y\delta v + Z\delta w)dz + \pi\varepsilon^2(P_x\delta u + P_y\delta v + P_z\delta w), \tag{26}$$

X, Y, ..., P_z désignant maintenant les composantes des actions extérieures pour $r = 0$. Nous aurions de même

$$\delta\mathcal{J} = -\pi\varepsilon^2 \int \rho\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\delta u + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\delta v + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\delta w\right)dz. \tag{27}$$

On a, d'autre part :

$$\delta_\theta\mathcal{F} = \pi\varepsilon^2 \int \left[\mathcal{E}\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial\delta w}{\partial z} - \frac{\mu}{\lambda+\mu}\nu\theta\frac{\partial\delta w}{\partial z} + \frac{\varepsilon^2}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\frac{\partial^2\delta u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\frac{\partial^2\delta v}{\partial z^2}\right)\right]dz. \tag{28}$$

Soient $z = (0, l)$ les équations des deux bases de la tige. En intégrant par parties, nous obtenons successivement

$$\int\left(\mathcal{E}\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\mu}{\lambda+\mu}\nu\theta\right)\frac{\partial\delta w}{\partial z}dz = \left[\left(\mathcal{E}\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\mu}{\lambda+\mu}\nu\theta\right)\delta w\right]_0^l - \int\left(\mathcal{E}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\mu}{\lambda+\mu}\nu\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)\delta w\,dz.$$

$$\int\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\frac{\partial^2\delta u}{\partial z^2}dz = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\frac{\partial\delta u}{\partial z} - \frac{\partial^3 u}{\partial z^3}\delta u\right)_0^l + \int\frac{\partial^4 u}{\partial z^4}\delta u\,dz,$$

$$\int\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\frac{\partial^2\delta v}{\partial z^2}dz = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\frac{\partial\delta v}{\partial z} - \frac{\partial^3 v}{\partial z^3}\delta v\right)_0^l + \int\frac{\partial^4 v}{\partial z^4}\delta v\,dz.$$

D'après cela, l'égalité (28) devient

$$\begin{aligned}\delta_\theta\mathcal{F} = {} & \frac{\pi\varepsilon^4}{4}\mathcal{E}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\frac{\partial\delta u}{\partial z} - \frac{\partial^3 u}{\partial z^3}\delta u + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\frac{\partial\delta v}{\partial z} - \frac{\partial^3 v}{\partial z^3}\delta v\right)_0^l \\ & + \pi\varepsilon^2\left[\left(\mathcal{E}\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\mu}{\lambda+\mu}\nu\theta\right)\delta w\right]_0^l \\ & + \pi\varepsilon^2\int\left[\frac{\varepsilon^2}{4}\mathcal{E}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial z^4}\delta u + \frac{\partial^4 v}{\partial z^4}\delta v\right) - \left(\mathcal{E}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\mu}{\lambda+\mu}\nu\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)\delta w\right]dz.\end{aligned} \tag{29}$$

Supposons les trois quantités, qui figurent dans l'équation (25), remplacées par leurs valeurs d'après les égalités (26), (27) et (29). En égalant à zéro successivement la somme des coefficients du δu, δv et δw qui figurent sous les signes $\int$, nous obtenons les équations indéfinies du mouvement :

$$(30)\qquad \begin{cases} \dfrac{\varepsilon^2}{4}\mathcal{E}\dfrac{\partial^4 u}{\partial z^4} - \rho\left(X - \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = 0, \\ \dfrac{\varepsilon^2}{4}\mathcal{E}\dfrac{\partial^4 v}{\partial z^4} - \rho\left(Y - \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right) = 0, \end{cases}$$

$$(31)\qquad \mathcal{E}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\mu}{\lambda+\mu}\nu\frac{\partial\theta}{\partial z} + \rho\left(Z - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) = 0.$$

En annulant, de même, les coefficients de $\dfrac{\partial\delta u}{\partial z}$, $\dfrac{\partial\delta v}{\partial z}$ et la somme des coefficients de δu, δv, δw qui figurent dans la partie tout intégrée, nous obtenons les conditions aux bases de la tige :

$$(32)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \qquad \dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0, \\ \pm\dfrac{\varepsilon^2}{4}\mathcal{E}\dfrac{\partial^3 u}{\partial z^3} + P_x = 0, \qquad \pm\dfrac{\varepsilon^2}{4}\mathcal{E}\dfrac{\partial^3 v}{\partial z^3} + P_y = 0, \end{cases}$$

$$(33)\qquad \pm\mathcal{E}\frac{\partial w}{\partial z} \mp \frac{\mu}{\lambda+\mu}\nu\theta - P_z = 0,$$

dans lesquelles le signe supérieur se rapporte à la base $z = l$ et le signe inférieur à la base $z = 0$.

Nous voyons que les équations (30) et (32) du mouvement transversal sont indépendantes de la température; elles coïncident avec celles qui ont été données par Kirchhoff et avec celles qui ont été données par Poisson, quand on y fait $\lambda = \mu$.

Equations de la température.

Considérons un tronçon de la tige limité par deux sections droites; nous allons calculer la quantité de chaleur δQ qu'il dégage, quand on lui impose une modification virtuelle.

Soit f le potentiel thermodynamique interne par unité de volume, représenté par la quantité entre crochets de l'expression (15); la thermodynamique nous enseigne qu'on a

$$\delta Q = \int \frac{T}{E}\delta\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{S}}\, d\varpi,$$

E désignant l'équivalent mécanique de la chaleur, T la température absolue au point où se trouve l'élément $d\varpi$ et l'intégration s'étendant à tout le volume occupé par le tronçon. Si nous posons

$$C = -\frac{T}{E}\frac{\partial^2 f}{\partial \mathfrak{I}^2},$$

C désignant la capacité calorifique par unité de volume, nous reconnaîtrons, d'après l'égalité (15), que l'expression de δQ peut s'écrire

$$\delta Q = -\int\left[\frac{T}{E}\nu\delta(D_1 + D_2 + D_3) + C\delta\mathfrak{I}\right]d\varpi.$$

Remplaçons les dilatations et la température par leurs développements et intégrons dans toute l'étendue d'une section droite, comme nous l'avons fait pour arriver à l'égalité (18); en négligeant les termes en ε^4, nous aurons

$$\delta Q = -\pi\varepsilon^2\int\left[\frac{T}{E}\nu\delta(d_1 + d_2 + d_3) + C\delta\theta\right]dz,$$

l'intégration s'étendant à toute la hauteur du tronçon et T désignant, maintenant, la température absolue sur l'axe de la tige. Tenons compte des égalités (8) et posons

$$C' = C\left[1 + \frac{T\gamma^2}{E(\lambda + \mu)}\right],$$

il viendra

$$\delta Q = -\pi\varepsilon^2\int\left(\frac{T}{E}\frac{\mu}{\lambda + \mu}\nu\delta d_3 + C'\delta\theta\right)dz.$$

Comme on a $T = T_0 + \mathfrak{I}$ et que $\mathfrak{I}$ est toujours très petit vis-à-vis de T_0, C' est sensiblement constant et diffère peu de C.

Soit dQ la quantité de chaleur dégagée pendant une modification réelle de durée dt; nous aurons, d'après l'égalité précédente :

$$dQ = -\pi\varepsilon^2\,dt\int\left(\frac{T}{E}\frac{\mu}{\lambda + \mu}\nu\frac{\partial^2 w}{\partial z\,\partial t} + C'\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)dz. \tag{34}$$

Mais, la théorie de la propagation de la chaleur nous enseigne qu'on a aussi

$$dQ = dt\left(-\int F_n dS + \int \chi\, d\varpi\right), \tag{35}$$

$F_n dS$ désignant le flux de chaleur qui pénètre dans le tronçon de tige par l'élément dS de sa surface latérale, et χ, le débit par unité de volume de la source de chaleur au point où se trouve l'élément $d\varpi$. La première intégrale se compose de deux parties qui correspondent, l'une aux bases du tronçon, l'autre à sa surface latérale; celle qui correspond aux bases a pour expression, d'après l'égalité (6) :

$$\iint K\gamma \frac{\partial \vartheta}{\partial z} r\,dr\,d\varphi = \iint K \frac{\partial \theta}{\partial z}\left[1 - \frac{h}{\varepsilon(2+h\varepsilon)} r^2\right] r\,dr\,d\varphi - \iint K \frac{\partial \theta}{\partial z}\left[1 - \frac{h}{\varepsilon(2+h\varepsilon)} r^2\right] r\,dr\,d\varphi,$$

la première intégrale du second membre étant étendue à la base supérieure, la deuxième à la base inférieure du tronçon. Si l'on intègre par rapport à φ et à r, on reconnaît que le second membre de l'égalité précédente peut s'écrire

$$\pi\varepsilon^2 \int K \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} dz,$$

au même degré d'approximation que précédemment.

D'après la condition de refroidissement à la surface

$$K \frac{d\vartheta}{dn} + k\vartheta = 0,$$

le flux de chaleur qui pénètre par la surface latérale du tronçon a pour expression

$$\iint K \frac{d\vartheta}{dn} \varepsilon\,dz\,d\varphi = -\iint k\theta\left[1 - \frac{h}{\varepsilon(2+h\varepsilon)} \varepsilon^2\right] \varepsilon\,dz\,d\varphi = -\pi\varepsilon^2 \int \frac{4k}{\varepsilon(2+h\varepsilon)} \theta\,dz,$$

de sorte qu'en définitive nous avons

$$\int F_n\,dS = \pi\varepsilon^2 \int \left[K \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} - \frac{4k}{\varepsilon(2+h\varepsilon)}\theta\right] dz. \tag{36}$$

Nous verrions également qu'on a

$$\int \chi\,d\varpi = \pi\varepsilon^2 \int (-S + L\theta)\,dz. \tag{37}$$

S désignant le débit de la source de chaleur sur l'axe de la tige et L son coefficient de diathermanéité.

Si nous substituons les expressions (36) et (37) dans l'égalité (35), nous en déduirons, par comparaison avec l'égalité (34), qu'on doit avoir

$$\int \left(\frac{T}{E}\frac{\mu}{\lambda+\mu}\nu \frac{\partial^2 w}{\partial z\,\partial t} + C' \frac{\partial \theta}{\partial t} - K \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - S + \mathfrak{L}\theta\right) dz = 0, \tag{38}$$

en posant, pour abréger,

$$\mathfrak{L} = L + \frac{4k}{\varepsilon(2+h\varepsilon)}.$$

L'équation (38) devant avoir lieu quelle que soit la hauteur du tronçon suivant laquelle on intégre, il s'ensuit, d'après un raisonnement usuel en physique mathématique, qu'on doit avoir en tout point de l'axe

$$C' \frac{\partial \theta}{\partial t} = K \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + S - \mathcal{L}_0 \theta - \frac{\mu}{\lambda + \mu} \nu \frac{T}{E} \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial t}. \tag{39}$$

C'est l'équation indéfinie que nous voulions établir, qui devient linéaire par rapport aux déformations et à la température. si l'on y remplace T par T_0, et ceci constitue une approximation bien suffisante si, dans son état naturel, la tige, qui est alors à la température de l'espace ambiant, est suffisamment éloignée du zéro absolu.

A l'équation précédente nous devons adjoindre la condition aux limites

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} \pm h\theta = 0, \tag{40}$$

dans laquelle le signe supérieur se rapporte à la base $z = l$ et le signe inférieur à la base $z = 0$.

Les équations (39) et (40), jointes à celles que nous avons établies dans le précédent paragraphe, permettent de traiter dans toute sa généralité le problème du mouvement de la tige.