ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE.

SUR UN PROBLÈME

RELATIF A

LA DÉFORMATION DES SURFACES,

PAR É. GOURSAT.

Dans un mémoire sur la *Théorie des Caractéristiques*, publié dans ce *Journal* (2e série, t. VIII, pp. 427-476, 1906), j'ai fait l'étude générale des singularités mobiles que peut posséder une intégrale d'une équation aux dérivées partielles du premier ou du second ordre sur une caractéristique déterminée, et j'ai montré comment une équation de Riccati jouait un rôle essentiel dans la question. Dans ce nouveau travail, j'applique la théorie générale à l'équation aux dérivées partielles du second ordre dont dépend la détermination des surfaces admettant un élément linéaire donné. Le problème auquel on est conduit, ainsi que tous les éléments qui interviennent dans la solution, ont alors une interprétation géométrique très simple, et l'équation de Riccati dont dépend la discussion s'obtient très facilement en partant de l'élément linéaire [1].

[1] Soit

$$Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0 \tag{1}$$

[1] Les conclusions de ce mémoire ont été résumées dans une note présentée à l'Académie des Sciences (*Comptes rendus*, 25 janvier 1909).

une équation de Monge-Ampère, admettant la multiplicité caractéristique du premier ordre $\mathfrak{M}_0$, définie par les relations

$$y = z = p = q = 0. \tag{2}$$

Le long de cette multiplicité, les valeurs de r et de s sont nulles, en vertu des conditions $dp = r dx + s dy$, $dq = s dx + t dy$, et la valeur de t est donnée par l'équation

$$\mathrm{L}t + \mathrm{M} = 0. \tag{3}$$

Pour que la multiplicité $\mathfrak{M}_0$ soit une multiplicité caractéristique, il faut et il suffit que la valeur de t soit indéterminée, c'est-à-dire que l'on ait

$$\mathrm{L} = 0, \qquad \mathrm{M} = 0, \tag{4}$$

quel que soit x, pourvu que l'on ait $y = z = p = q = 0$. Nous supposerons de plus que les coefficients H, K, L, M, N sont des fonctions analytiques régulières des variables x, y, z, p, q, lorsque la variable x reste comprise dans un intervalle réel (a, b), et que les modules de y, z, p, q restent plus petits qu'un nombre positif ρ. Ces fonctions peuvent alors être développées en séries entières ordonnées suivant les puissances de y, z, p, q, dont les coefficients sont des fonctions holomorphes de x dans l'intervalle (a, b), et les développements de L et de M ne renferment aucun terme indépendant de y, z, p, q. Nous admettons encore que le coefficient K est différent de zéro pour tout élément de la multiplicité $\mathfrak{M}_0$, ce qui revient à supposer que les deux directions caractéristiques issues de cet élément sont distinctes.

On sait, d'après la théorie générale, que tous les éléments de $\mathfrak{M}_0$ appartiennent à une infinité d'intégrales de l'équation (1). Soit S une de ces intégrales; le long de $\mathfrak{M}_0$, la dérivée $t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ se réduit à une fonction $\varphi(x)$ qui est déterminée par une équation de Riccati. En effet, différentions les deux membres de l'équation (1) par rapport à y; il vient

$$\begin{aligned}\mathrm{H}\frac{\partial r}{\partial y} + r\frac{d\mathrm{H}}{dy} + 2\mathrm{K}\frac{\partial s}{\partial y} + 2s\frac{d\mathrm{K}}{dy} + \mathrm{L}\frac{\partial t}{\partial y} + t\frac{d\mathrm{L}}{dy}&\\ + \frac{d\mathrm{M}}{dy} + \frac{d\mathrm{N}}{dy}(rt - s^2) + \mathrm{N}\left(r\frac{\partial t}{\partial y} + t\frac{\partial r}{\partial y} - 2s\frac{\partial s}{\partial y}\right) &= 0,\end{aligned}$$

en posant

$$\frac{d}{dy} = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}q + \frac{\partial}{\partial p}s + \frac{\partial}{\partial q}t.$$

En un point de $\mathfrak{M}_0$, on a

$$y = z = p = q = r = s = 0, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial s}{\partial x} = 0, \quad \mathrm{L} = \mathrm{M} = 0, \quad \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial x} = \varphi'(x).$$

et l'équation précédente se réduit à

$$(5) \qquad 2K_0\varphi'(x) + \varphi(x)\left\{\left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)_0 + \left(\frac{\partial L}{\partial q}\right)_0 \varphi(x)\right\} + \left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)_0 + \left(\frac{\partial M}{\partial q}\right)_0 \varphi(x) = 0,$$

où l'on a posé, d'une façon générale,

$$U_0(x, y, z, p, q) = U(x, 0, 0, 0, 0).$$

Connaissant la valeur de t le long de $\mathfrak{M}$, les valeurs des dérivées suivantes $\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$, $\frac{\partial^4 z}{\partial y^4}$, ... se déterminent de proche en proche par l'intégration d'équations différentielles linéaires, et cette intégration n'introduit aucune singularité n'appartenant pas à $\varphi(x)$; de sorte que c'est uniquement à l'étude des singularités des intégrales de l'équation (5) que se ramène la recherche des singularités mobiles des intégrales de l'équation (1) sur la caractéristique $\mathfrak{M}$.

L'équation (1), considérée comme une équation en s, admet une racine qui tend vers zéro avec y, z, r, p, q, t, racine qui a pour expression

$$(1)' \qquad s = -\frac{Hr + Lt + M + Nrt}{K\left\{1 + \sqrt{1 + \frac{N}{K^2}(Hr + Lt + M + Nrt)}\right\}}$$

et qui peut être développée en série entière ordonnée suivant les puissances de y, z, p, q, r, t, où t est toujours associée à l'un des facteurs y, z, p, q, r; cette série est convergente pour toute valeur de x dans l'intervalle (a, b), pourvu que les modules de y, z, p, q, r, t soient inférieurs à un nombre positif convenable. En cherchant un développement de la forme

$$(6) \qquad z = \varphi_2 \frac{y^2}{2} + \varphi_3 \frac{y^3}{1.2.3} + \ldots$$

satisfaisant formellement à l'équation (1), on retrouve l'équation (5) pour déterminer $\varphi_2(x)$, tandis que φ_3, φ_4, ... sont déterminées par des équations différentielles linéaires. Soit $\varphi_2(x)$ une intégrale de l'équation de Riccati (5), régulière dans un intervalle (α, β), intérieur à l'intervalle (a, b). Dans le mémoire précédent (n^os 16-18), j'ai démontré qu'il était possible, et d'une infinité de façons, de choisir les valeurs initiales, pour $x = \alpha$, des fonctions $\varphi_3, \varphi_4, \ldots$, de façon que la série (6) soit convergente pour toute valeur de x dans l'intervalle (α, β), si le module de y reste plus petit qu'un nombre convenable. Il existe donc une infinité d'intégrales de l'équation (1) n'ayant aucun point singulier sur le segment (α, β) de la caractéristique $\mathfrak{M}$. Au contraire, si l'équation (5) n'admet aucune intégrale régulière dans l'intervalle (α, β), toute intégrale de l'équation (1), renfermant la caractéristique $\mathfrak{M}$, possède au moins un point singulier sur le segment (α, β) de cette caractéristique.

Il est à remarquer que nous avons obtenu l'équation (5) sans supposer les coefficients analytiques. L'hypothèse de l'analycité n'est indispensable, au moins provisoirement, que pour établir l'existence des intégrales de l'équation (1), admettant tous les éléments de la caractéristique $\mathfrak{M}$.

Considérons plus généralement la multiplicité $\mathfrak{M}$ définie par les formules

$$y = 0, \qquad z = \varphi_0(x), \qquad p = \varphi_0'(x), \qquad q = \varphi_1(x),$$

φ_0 et φ_1 étant des fonctions régulières dans l'intervalle (a, b). On déduit de ces formules

$$r = \varphi_0''(x), \qquad s = \varphi_1'(x),$$

et la valeur de t, en un point de $\mathfrak{M}$, pour une intégrale renfermant cette multiplicité, est donnée par l'équation

$$H_0\varphi_0''(x) + 2K_0\varphi_1'(x) + L_0 t + M_0 + N_0\left\{\varphi_0''(x)t - \varphi_1'(x)^2\right\} = 0.$$

La multiplicité $\mathfrak{M}$ sera donc caractéristique si l'on a à la fois

$$(7)\qquad \left\{\begin{array}{l} L_0 + N_0\varphi_0''(x) = 0, \\ H_0\varphi_0''(x) + 2K_0\varphi_1'(x) + M_0 - N_0\left\{\varphi_1'(x)\right\}^2 = 0. \end{array}\right.$$

Ces deux équations étant supposées vérifiées, la valeur de t en un point de $\mathfrak{M}$ est une fonction $\varphi_2(x)$ qui satisfait à une équation de Riccati. Cette équation s'obtient soit en différentiant l'équation (1) par rapport à y et remplaçant dans le résultat y, z, p, q, r, s par $0, \varphi_0, \varphi_0', \varphi_1, \varphi_0'', \varphi_1'$ respectivement, soit en cherchant à satisfaire formellement à l'équation (1) par un développement

$$z = \varphi_0(x) + y\varphi_1(x) + \frac{y^2}{2}\varphi_2(x) + \frac{y^3}{6}\varphi_3(x) + \dots$$

[2] Parmi les divers problèmes que l'on peut se proposer sur la déformation des surfaces, M. Darboux [1] a étudié en particulier le problème suivant :

Déformer une surface S *de façon qu'une courbe* Γ *de cette surface vienne coïncider avec une autre courbe donnée* D *dans l'espace* (la correspondance entre les points de Γ et de D étant supposée connue).

La solution de ce problème se ramène précisément à la solution du problème de Cauchy pour l'équation aux dérivées partielles de la déformation, et ce problème n'admet en général qu'une solution, à moins qu'il ne résulte des données que la

(1) Darboux, *Leçons sur la Théorie générale des surfaces*, t. III, pp. 277 et suiv.

courbe D doit être une ligne asymptotique de la surface déformée. L'étude des intégrales d'une équation du second ordre, dans le voisinage d'une caractéristique, appliquée à la déformation des surfaces, conduit donc à l'étude du problème spécial ci-dessous :

Déformer une surface S *de façon qu'une courbe* Γ *de cette surface devienne une ligne asymptotique de la surface déformée.*

M. Darboux s'est borné à faire observer que le problème admettait une infinité de solutions. Nous nous proposons d'examiner si la déformation est possible de façon que sur un segment déterminé de la courbe Γ il n'y ait, après la déformation, aucun point singulier.

Soit D la courbe gauche sur laquelle vient s'appliquer la courbe Γ après la déformation ; si cette courbe D est une ligne asymptotique de la surface déformée, il résulte des propriétés générales des surfaces, ainsi que l'a observé M. Darboux, que la courbure de D doit être égale à la courbure géodésique de Γ au point correspondant, et le rayon de torsion de D doit lui-même être égal à la racine carrée de l'inverse de la courbure totale de la surface S au point correspondant de Γ. D'ailleurs, les arcs des deux courbes Γ et D devant être égaux, il s'ensuit que l'on connaît les rayons de courbure et de torsion de la courbe D en fonction de l'arc. Cette courbe D est donc complètement définie quant à la forme, à une symétrie près ; en termes plus précis, toutes les courbes répondant à la question sont égales à l'une d'elles ou à sa symétrique. La courbe D peut donc être considérée comme connue ; le plan tangent à la surface cherchée en chaque point de D est connu également, puisqu'il n'est autre que le plan osculateur à D. Soit AB un arc de la courbe Γ et A'B' l'arc correspondant de D ; imaginons que l'on découpe sur la surface S de part et d'autre de Γ une bande de surface (E) aussi étroite qu'on le voudra. Nous voulons rechercher s'il est possible de déformer cette bande de surface, sans déchirure ni duplicature, de façon que l'arc AB de Γ vienne s'appliquer sur l'arc A'B' de D.

Pour cela nous rapporterons la bande de surface (E) à un système orthogonal formé des lignes géodésiques normales à Γ, et de leurs trajectoires orthogonales voisines de Γ. Avec ce système de coordonnées on a pour le ds^2 de la surface considérée S

$$ds^2 = du^2 + C^2 dv^2; \tag{8}$$

les courbes $v = C^{te}$ sont les lignes géodésiques normales à Γ, et la courbe Γ elle-même a pour équation $u = 0$. Si la variable v représente l'arc lui-même de Γ, comme on peut le supposer, on a $C(0, v) = 1$. Nous supposerons dans la suite que $C(u, v)$ est une fonction analytique régulière des variables u, v, lorsque la variable v reste comprise dans un intervalle réel (a, b) et que $|u|$ est plus petit qu'un nombre positif ρ. Si la courbe Γ était une courbe fermée de longueur l, nous devrions en outre supposer que $C(u, v)$ est une fonction périodique de v de période l.

La courbure totale Υ de la surface S est égale à

$$\Upsilon = -\frac{1}{C}\frac{\partial^2 C}{\partial u^2};$$

pour un point de Γ elle se réduit à $-\left(\frac{\partial^2 C}{\partial u^2}\right)_{u=0}$. Pour que la surface déformée soit réelle, lorsque Γ est devenue une ligne asymptotique, il faut évidemment que l'on ait $\left(\frac{\partial^2 C}{\partial u^2}\right)_{u=0} > 0$. Nous supposerons désormais que la courbure totale est positive en tous les points de Γ. Écrivons le développement de $C(u, v)$ suivant les puissances de u :

$$C(u, v) = 1 + C_1(v)u + C_2(v)\frac{u^2}{1 \cdot 2} + C_3(v)\frac{u^3}{6} + \dots$$

Les coefficients $C_1(v)$, $C_2(v)$, $C_3(v)$, qui figureront seuls dans les calculs qui vont suivre, ont des significations géométriques simples ; $-C_2(v)$ est égal, comme on vient de le dire, à la courbure totale de la surface en un point de Γ. Le coefficient $C_1(v)$ représente la courbure géodésique de Γ. De la valeur de la courbure totale Υ, on tire la formule

$$\frac{d\Upsilon}{du} = \frac{1}{C^2}\frac{\partial C}{\partial u}\frac{\partial^2 C}{\partial u^2} - \frac{1}{C}\frac{\partial^3 C}{\partial u^3},$$

qui, pour $u = 0$, se réduit à

$$\left(\frac{d\Upsilon}{du}\right)_0 = C_1 C_2 - C_3;$$

l'expression $C_1 C_2 - C_3$ représente donc, en chaque point de Γ, la dérivée de la courbure totale prise suivant la géodésique normale. Remarquons que C_1 et C_3 se changent en $-C_1$ et $-C_3$ quand on change u en $-u$.

[**3**] Soient

(9) $$x_0 = \varphi_0(v), \qquad y_0 = \psi_0(v), \qquad z_0 = \pi_0(v)$$

les équations, en coordonnées rectangulaires, de la courbe D définie plus haut. Le problème qu'il s'agit de résoudre peut analytiquement s'exprimer ainsi :

Trouver trois fonctions x, y, z, des variables (u, v), satisfaisant aux trois relations

(10) $$S\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = 1, \qquad S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = 0, \qquad S\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = C^2,$$

et se réduisant, pour $u = 0$, aux trois fonctions x_0, y_0, z_0 respectivement.

Les trois équations (10) sont équivalentes à l'équation

$$(11)\qquad -\left(\frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv\right)^2 + du^2 + C^2 dv^2 = dy^2 + dz^2,$$

et, en écrivant que la forme quadratique du premier membre a une courbure totale nulle, on voit que x doit vérifier l'équation classique du problème de la déformation [1]

$$(12)\qquad C(rt - s^2) + r\left[C^2\frac{\partial C}{\partial u}\,p - \frac{\partial C}{\partial v}\,q\right] + 2qs\,\frac{\partial C}{\partial u} - C^2\frac{\partial^2 C}{\partial u^2}\,p^2 - q^2\left[\frac{\partial^2 C}{\partial u^2} + \frac{1}{C}\left(\frac{\partial C}{\partial u}\right)^2\right] + C^2\frac{\partial^2 C}{\partial u^2} = 0.$$

où on a posé

$$p = \frac{\partial x}{\partial u},\qquad q = \frac{\partial x}{\partial v},\qquad r = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2},\qquad s = \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v},\qquad t = \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}.$$

Pour $u = o$, on connaît les fonctions $\varphi_1(v)$, $\psi_1(v)$, $\pi_1(v)$, auxquelles se réduisent les dérivées $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$. Ce sont en effet les cosinus directeurs de la normale à la courbe D située dans le plan tangent à la surface cherchée, c'est-à-dire les cosinus directeurs de la normale principale à D, puisque cette courbe doit être une ligne asymptotique. L'intégrale $x(u, v)$ de l'équation (12) doit donc satisfaire aux conditions initiales

$$(13)\qquad x = \varphi_0(v),\qquad \frac{\partial x}{\partial u} = \varphi_1(v),\qquad \text{pour}\qquad u = 0.$$

Avant d'aller plus loin, nous allons d'abord vérifier que la multiplicité $\mathfrak{M}$ définie par les relations

$$(14)\qquad u = 0,\qquad x = \varphi_0(v),\qquad p = \varphi_1(v),\qquad q = \varphi_0'(v)$$

est une multiplicité caractéristique de l'équation (12) si la courbe D satisfait aux conditions expliquées plus haut. Des relations (14) on tire en effet

$$s = \varphi_1'(v),\qquad t = \varphi_0''(v);$$

en portant les valeurs précédentes de p, q, s, t dans l'équation (12), et supposant ensuite $u = 0$, on a, pour déterminer la valeur de r, l'équation

$$r\varphi_0''(v) - \{\varphi_1'(v)\}^2 + rC_1\varphi_1(v) + 2C_1\varphi_0'(v)\varphi_1'(v) - C_2\varphi_1^2(v) - \{\varphi_0'(v)\}^2[C_2 + C_1^2] + C_2 = 0.$$

(1) DARBOUX, *loc. cit.*, p. 262.

La multiplicité $\mathfrak{M}$ est caractéristique si l'on a à la fois

$$(15)\quad \begin{cases} \varphi_0''(v) + C_1\varphi_1(v) = 0, \\ \{\varphi_1'(v)\}^2 - 2C_1\varphi_0'(v)\varphi_1'(v) + C_1^2\{\varphi_0'(v)\}^2 + C_2\{\varphi_1^2 + \varphi_0'^2 - 1\} = 0. \end{cases}$$

On tire de la dernière équation

$$\varphi_1' = C_1\varphi_0' \pm \sqrt{C_2(1 - \varphi_0'^2 - \varphi_1^2)};$$

si nous posons maintenant

$$C_1 = \frac{1}{\rho}, \qquad C_2 = \frac{1}{T^2}, \qquad \varphi_0' = \alpha, \qquad \varphi_1 = -\alpha', \qquad \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1,$$

les deux équations (15) deviennent

$$\frac{d\alpha}{dv} = \frac{\alpha'}{\rho}, \qquad \frac{d\alpha'}{dv} = -\frac{\alpha}{\rho} - \frac{\alpha''}{T},$$

et de la relation $\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1$, on tire ensuite

$$\frac{d\alpha''}{dv} = \frac{\alpha'}{T}.$$

Le système (15) est donc remplacé par le système d'équations linéaires

$$(15)'\quad \frac{d\alpha}{dv} = \frac{\alpha'}{\rho}, \qquad \frac{d\alpha'}{dv} = -\frac{\alpha}{\rho} - \frac{\alpha''}{T}, \qquad \frac{d\alpha''}{dv} = \frac{\alpha'}{T},$$

qui est précisément le système que l'on a à intégrer dans la recherche d'une courbe gauche dont on connaît le rayon de courbure et le rayon de torsion en fonction de l'arc. Comme on peut changer T en $-$T dans ces équations, on obtient deux courbes symétriques.

Soit

$$(16)\quad x = \varphi_0(v) + u\varphi_1(v) + u^2\varphi_2(v) + u^3\varphi_3(v) + \ldots$$

le développement, suivant les puissances de u, d'une intégrale de l'équation (12) satisfaisant aux conditions initiales (13); les fonctions $\varphi_0(v)$ et $\varphi_1(v)$ vérifient par hypothèse les relations (15). Pour obtenir l'équation de Riccati à laquelle satisfait la fonction $\varphi_2(v)$, on peut différentier les deux membres de l'équation (12) par rapport à u, et faire ensuite $u = 0$ dans le résultat, ou remplacer C et x par leurs développements suivant les puissances de u, et égaler à zéro le coefficient de u.

On obtient ainsi l'équation différentielle suivante :

$$(17)\quad \begin{cases} (4C_1\varphi_0' - 4\varphi_1')\dfrac{d\varphi_2}{dv} + 4C_1\varphi_2^2 + \left(2C_1\varphi_0'' + 2\varphi_1'' - 2C_2\varphi_1 + 4C_1^2\varphi_1 - 2\dfrac{\partial C_1}{\partial v}\varphi_0'\right)\varphi_2 \\ \qquad + C_1'(\varphi_1')^2 + 2C_2\varphi_0'\varphi_1' - (2C_1C_2 + C_3)\varphi_1^2 + (\varphi_0')^2\{C_1^3 - C_3 - 2C_1C_2\} \\ \qquad - 2\varphi_0'\varphi_1(C_1^2 + C_2) + C_3 + 2C_1C_2 = 0. \end{cases}$$

Les coefficients de cette équation peuvent encore s'écrire, en tenant compte des relations (15) :

$$4C_1\varphi_0' - 4\varphi_1' = 4\frac{\alpha}{\rho} - 4\left(\frac{\alpha}{\rho} + \frac{\alpha''}{T}\right) = -4\frac{\alpha''}{T}$$

$$4C_1 = \frac{4}{\rho}$$

$$2C_1\varphi_0'' + 2\varphi_1'' - 2C_2\varphi_1 + 4C_1^2\varphi_1 - 2\frac{\partial C_1}{\partial v}\varphi_0' = \frac{2\alpha'}{\rho^2} + 2\alpha'\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{T^2}\right) - 2\alpha\frac{\rho'}{\rho^2} - 2\alpha''\frac{T'}{T^2}$$

$$+ \frac{2\alpha'}{T^2} - 4\frac{\alpha'}{\rho^2} + 2\alpha\frac{\rho'}{\rho^2} = \frac{4\alpha'}{T^2} - \frac{2\alpha''T'}{T^2},$$

ρ' et T' désignant les dérivées par rapport à v.

Le terme indépendant de φ_2 est de même égal à

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\alpha}{\rho} + \frac{\alpha''}{T}\right)^2 + \frac{2\alpha}{T^2}\left(\frac{\alpha}{\rho} + \frac{\alpha''}{T}\right) - \alpha''^2\left(\frac{2}{\rho T^2} + C_3\right) - \alpha^2 C_3 - \frac{2\alpha^2}{\rho T^2} + \frac{\alpha^2}{\rho^3}$$

$$- 2\alpha\left(\frac{\alpha}{\rho} + \frac{\alpha''}{T}\right)\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{T^2}\right) + C_3 + \frac{2}{\rho T^2} = \alpha''^2\left\{C_3 + \frac{3}{\rho T^2}\right\},$$

et l'équation (17) prend la forme plus simple

$$(17)' \qquad -\frac{4\alpha''}{T}\frac{d\varphi_2}{dv} + \frac{4}{\rho}\varphi_2^2 + \left(\frac{4\alpha'}{T^2} - 2\alpha''\frac{T'}{T^2}\right)\varphi_2 + \left\{C_3 + \frac{3}{\rho T^2}\right\}\alpha''^2 = 0.$$

Pour faire disparaître α' et α'', il suffit de faire le changement d'inconnue

$$\varphi_2 = \alpha''\Phi,$$

et l'équation $(17)'$ devient, en divisant par α''^2,

$$(18) \qquad -\frac{4}{T}\frac{d\Phi}{dv} + \frac{4}{\rho}\Phi^2 - \frac{2T'}{T^2}\Phi + C_3 + \frac{3}{\rho T^2} = 0.$$

Si $C_1 = 0$, on a $\frac{1}{\rho} = 0$, et l'équation (18) se réduit à une équation linéaire

$$(19) \qquad 4\frac{d\Phi}{dv} + 2\frac{T'}{T}\Phi - C_3 T = 0.$$

Comme C_2 est supposé positif dans l'intervalle (a, b), T ne s'annule pas et reste fini dans cet intervalle. Les coefficients de l'équation linéaire (19) sont continus dans l'intervalle (a, b), et par suite il en est de même de toutes les intégrales. La condition $C_1 = 0$ exprime que la courbe $\Gamma (u = 0)$ est une ligne géodésique. La courbe D devant être à la fois une ligne géodésique et une ligne asymptotique de la surface déformée est nécessairement une ligne droite. Si l'on suppose qu'on a pris cette droite pour axe des z, on a $\varphi_0(v)=0$, $\alpha=0$, tandis que α' et α'' sont déterminés par les relations

$$\frac{d\alpha'}{dv}=-\frac{\alpha''}{T}, \qquad \frac{d\alpha''}{dv}=\frac{\alpha'}{T}, \qquad \alpha'^2+\alpha''^2=1,$$

qui se réduisent à l'équation

$$\frac{d\Theta}{dv}=\frac{1}{T},$$

en posant $\alpha'=\cos\Theta$, $\alpha''=\sin\Theta$.

Laissant de côté ce cas particulier, supposons que $C_1(v)$ ne soit pas nul. L'équation (18) est une équation de Riccati qui devient, en posant $\Phi=-\frac{\rho}{T}\Psi$,

$$(18)' \qquad \Psi'+\Psi^2+\left(\frac{\rho'}{\rho}-\frac{1}{2}\frac{T'}{T}\right)\Psi+\frac{C_3T^2}{4\rho}+\frac{3}{4\rho^2}=0.$$

L'intégrale générale de cette nouvelle équation est donnée par la formule

$$\Psi=\frac{1}{Z}\frac{dZ}{dv},$$

Z étant l'intégrale générale de l'équation différentielle linéaire

$$(20) \qquad \frac{d^2Z}{dv^2}+\left(\frac{\rho'}{\rho}-\frac{1}{2}\frac{T'}{T}\right)\frac{dZ}{dv}+\left(\frac{C_3T^2}{4\rho}+\frac{3}{4\rho^2}\right)Z=0,$$

et par suite l'intégrale générale de l'équation (17) a pour expression

$$(21) \qquad \varphi_2=-\frac{\alpha''\rho}{TZ}\frac{dZ}{dv}.$$

Remarque. — Il est facile de s'expliquer pourquoi la transformation $\varphi_2=\alpha''\Phi$ conduit à une équation différentielle dont les coefficients ne dépendent que de l'élément linéaire donné. Il suffit de chercher la signification géométrique de Φ. Pour cela, imaginons écrites les trois formules analogues à la formule (16), qui donneraient les développements de x, y, z suivant les puissances de u. Si dans ces formules on suppose v constant, on a les développements des coordonnées d'un point de la ligne géodésique (v) suivant les puissances de l'arc u de cette ligne. Or, si l'on se reporte aux formules classiques donnant les coordonnées d'un point d'une courbe en fonction de l'arc de cette courbe, quand on prend pour axes la tangente, la normale principale et la binormale au point choisi pour origine des arcs, on voit immédiatement que le coefficient φ_2 de $\frac{u^2}{2}$ dans x est égal au produit de la courbure au point $u=0$ par le cosinus de l'angle que fait la normale principale avec $0x$. Dans le cas actuel, la ligne D étant une ligne asymptotique, sa binormale coïncide avec la normale à la surface et par conséquent avec la normale principale à la ligne géodésique (v). Il s'ensuit que $\Phi = \frac{\varphi_2}{\alpha''}$ représente la moitié de la courbure de la ligne géodésique (v) au point $u = 0$ sur la surface déformée. La signification géométrique de cet élément explique bien pourquoi il est déterminé par une équation différentielle indépendante du choix des axes de coordonnées.

Comme vérification, nous allons montrer que les formules habituelles de la théorie des surfaces conduisent bien à l'équation (18). Les lettres p, q, r, p_1, q_1, r_1 ayant la signification habituelle, on a les relations [1], en supposant l'élément linéaire $ds^2 = du^2 + C^2dv^2$,

$$r = 0, \qquad r_1 = \frac{\partial C}{\partial u}, \qquad q_1 = -Cp,$$

$$\frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\partial p_1}{\partial u} = q\frac{\partial C}{\partial u}, \qquad \frac{\partial q}{\partial v} = -C\frac{\partial p}{\partial u} - 2p\frac{\partial C}{\partial u}, \qquad \frac{\partial^2 C}{\partial u^2} = Cp^2 + qp_1,$$

d'où l'on déduit, en différentiant la dernière par rapport à u, et remplaçant $\frac{\partial p}{\partial u}$ et $\frac{\partial p_1}{\partial u}$ par leurs valeurs tirées des précédentes,

$$\frac{\partial^3 C}{\partial u^3} = \frac{\partial C}{\partial u}p^2 + 2p\left\{-\frac{\partial q}{\partial v} - 2p\frac{\partial C}{\partial u}\right\} + q\left(\frac{\partial p}{\partial v} - q\frac{\partial C}{\partial u}\right) + p_1\frac{\partial q}{\partial u}.$$

L'équation différentielle des lignes asymptotiques étant

$$q\,du^2 - Cp_1\,dv^2 + (q_1 - Cp)\,du\,dv = 0,$$

pour que la ligne $u = 0$ soit une ligne asymptotique, il faut et il suffit que p_1 soit nul pour $u = 0$, puisque C se réduit à l'unité pour $u = 0$.

On aura donc, pour $u = 0$:

$$(p_0)^2 = C_2(v), \qquad \left(\frac{\partial p_0}{\partial v}\right)_0 = \frac{\frac{\partial C_2}{\partial v}}{2\sqrt{C_2}},$$

et l'équation précédente se réduit à

$$C_3 = C_1C_2 - 2\sqrt{C_2}\left\{\frac{dq_0}{dv} + 2C_1\sqrt{C_2}\right\} + q_0\left\{\frac{\frac{\partial C_2}{dv}}{2\sqrt{C_2}} - q_0C_1\right\},$$

ou

$$2\sqrt{C_2}\frac{dq_0}{dv} + C_1q_0^2 - \frac{\frac{\partial C_2}{\partial v}}{2\sqrt{C_2}}q_0 + C_3 + 3C_1C_2 = 0,$$

---

[1] Darboux, *Leçons sur la Théorie générale des surfaces*, t. II, pp. 369-371.

$q_0(v)$ désignant la fonction de v à laquelle se réduit $q(u, v)$ pour $u = 0$. Il suffit de remplacer q_0 par -2Φ pour retrouver l'équation (18). Or q représente précisément la courbure de la ligne géodésique $v = C^{te}$ au point de coordonnées (u, v).

[4] Soit $\Phi(v)$ une intégrale de l'équation (18) régulière dans un intervalle (a', b') intérieur à l'intervalle (a, b), auquel correspond un arc A'B' de la ligne D. A cette intégrale correspondent une infinité de surfaces provenant de la déformation de la surface donnée, pour lesquelles la courbe $D(u = 0)$ est une ligne asymptotique, et qui ne présentent aucun point singulier sur l'arc A'B' de D. Nous prendrons d'abord

$$\varphi_2(v) = \alpha''\Phi(v);$$

$\varphi_2(v)$ sera donc une fonction régulière dans l'intervalle (a', b'). Pour déterminer les coefficients suivants $\varphi_3(v), \ldots \varphi_n(v), \ldots$ de la série (16), on égalera à zéro les coefficients de $u^2, u^3, \ldots u^{n-1}, \ldots$ du premier membre de l'équation (12) après la substitution. On obtient ainsi pour déterminer $\varphi_n(v)$ une équation différentielle linéaire

$$-\frac{4\alpha''}{T}\frac{d\varphi_n}{dv} + A\varphi_n + B = 0, \tag{22}$$

A et B étant des fonctions entières de $C_1, C_2, \ldots C_{n+1}$, et des coefficients déjà déterminés $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n-1}$, et de leurs dérivées. Nous supposerons tout d'abord qu'il est possible de choisir les axes de coordonnées de telle façon que α'' ne soit nul en aucun point de l'arc A'B'. On voit alors, de proche en proche, que toutes les fonctions $\varphi_3, \varphi_4 \ldots \varphi_n, \ldots$ sont des fonctions régulières de v dans tout l'intervalle (a', b'). Il est donc possible de former une infinité de développements, de la forme (16), dépendant d'une infinité dénombrable de constantes arbitraires, et satisfaisant formellement à l'équation (12). La convergence de ce développement dans tout l'intervalle (a', b'), pour des valeurs de $|u|$ suffisamment petites, sera assurée si l'on a choisi les valeurs des fonctions $\varphi_3(v), \varphi_4(v), \ldots \varphi_n(v), \ldots$ pour une valeur v_0 de l'intervalle (a', b') de façon que, pour $v = v_0$, le développement (16) se réduise à une fonction $P(u)$ holomorphe dans le domaine de $u = 0$. On aura donc ainsi une infinité d'intégrales de l'équation (12), régulières dans le domaine $\mathcal{D}$ défini par les inégalités

$$|u| \leqslant \rho, \qquad a' \leqslant v \leqslant b',$$

et satisfaisant aux conditions initiales

$$x = \varphi_0(v), \qquad \frac{\partial x}{\partial u} = \varphi_1(v), \qquad \text{pour} \qquad u = 0.$$

Pour déterminer les valeurs correspondantes de y et de z, remarquons que la forme quadratique

$$\mathcal{F} = du^2 + C^2dv^2 - \left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right)^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

étant à courbure totale nulle, est décomposable en un produit de deux différentielles $d\mathrm{U}\,d\mathrm{V}$. Pour que y et z soient réels, il faut et il suffit que U et V soient des imaginaires conjuguées, ou que le discriminant de la forme $\mathcal{F}$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2-\left[1-\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2\right]\left[\mathrm{C}^2-\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\right]=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\mathrm{C}^2\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2-1$$

soit négatif. Or, pour $u=0$, ce discriminant se réduit à

$$\{\varphi_0'(v)\}^2+\{\varphi_1(v)\}^2-1=\alpha^2+\alpha'^2-1=-\alpha''^2;$$

Le discriminant est donc négatif pour $u=0$, et par suite pour les valeurs de u voisines de zéro, et la forme $\mathcal{F}$ se décompose en un produit de deux facteurs imaginaires conjugués

$$\mathcal{F}=\left(\sqrt{\mathrm{E}}\,du+\frac{\mathrm{F}+i\mathrm{H}}{\sqrt{\mathrm{E}}}\,dv\right)\left(\sqrt{\mathrm{E}}\,du+\frac{\mathrm{F}-i\mathrm{H}}{\sqrt{\mathrm{E}}}\,dv\right),$$

où E et $\mathrm{H}=\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}$ sont positifs. Puisque la courbure totale de $\mathcal{F}$ est nulle, le premier facteur $\sqrt{\mathrm{E}}\,du+\dfrac{\mathrm{F}+i\mathrm{H}}{\sqrt{\mathrm{E}}}\,dv$ admet un facteur intégrant $e^{i\mu}$, tandis que $e^{-i\mu}$ est un facteur intégrant pour $\sqrt{\mathrm{E}}\,du+\dfrac{\mathrm{F}-i\mathrm{H}}{\sqrt{\mathrm{E}}}\,dv$.

En écrivant les conditions d'intégrabilité, on a les deux équations

$$(23)\qquad\left\{\begin{aligned}\frac{\partial\mu}{\partial u}&=\frac{1}{\mathrm{H}}\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial u}-\frac{\mathrm{F}}{2\mathrm{EH}}\frac{\partial\mathrm{E}}{\partial u}-\frac{1}{2\mathrm{H}}\frac{\partial\mathrm{E}}{\partial v},\\ \frac{\partial\mu}{\partial v}&=\frac{1}{2\mathrm{H}}\frac{\partial\mathrm{G}}{\partial u}-\frac{\mathrm{F}}{2\mathrm{EH}}\frac{\partial\mathrm{E}}{\partial v},\end{aligned}\right.$$

d'où l'on tirera pour μ une fonction réelle de u, v régulière dans $\mathcal{D}$. On aura donc aussi pour U et V des fonctions régulières dans le même domaine, et imaginaires conjuguées; enfin y et z seront des fonctions réelles et régulières dans $\mathcal{D}$. La surface ainsi déterminée satisfait donc à toutes les conditions du problème et ne présente aucun point singulier sur l'arc A′B′.

S'il est impossible de choisir les axes de coordonnées de façon que α'' soit différent de zéro en tous les points de l'arc A′B′, on tournera la difficulté en partageant cet arc en plusieurs autres pour chacun desquels la condition précédente soit satisfaite. Supposons, par exemple, qu'on puisse le partager en deux arcs A′C′, C′B′ pour chacun desquels la condition soit satisfaite. Il existe, nous venons de le démontrer, une infinité de surfaces S_1 répondant à la question et n'ayant aucun point singulier sur l'arc A′C′; il en existe de même une infinité S_2 n'ayant aucun point singulier sur C′B′; la fonction $\Phi(v)$ est supposée la même pour ces deux familles de surfaces.

Or, si l'on choisit les constantes arbitraires dont dépendent ces deux surfaces de façon qu'elles se raccordent au point C', il est clair que S_2 sera le prolongement de S_1. On raisonnerait de la même façon, quel que soit le nombre d'arcs qu'il faut considérer successivement sur l'arc total A'B'.

[**5**] On peut encore traiter le même problème d'une façon plus symétrique en cherchant à développer simultanément les trois coordonnées x, y, z d'un point de la surface cherchée suivant les puissances de u. Plus généralement, proposons-nous de déterminer une surface S, dont l'élément linéaire a la forme $ds^2 = du^2 + C^2 dv^2$, où

$$C = 1 + C_1(v)u + \frac{C_2(v)}{1 \cdot 2} u^2 + \frac{C_3(v)}{1 \cdot 2 \cdot 3} u^3 + \ldots$$

connaissant la courbe D qui a pour équation $u = 0$ sur la surface. Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées rectangulaires d'un point de cette courbe exprimées en fonction de l'arc v; x_0, y_0, z_0 sont trois fonctions données de v, vérifiant la relation

$$(x'_0)^2 + (y'_0)^2 + (z'_0)^2 = 1.$$

Désignons par ρ et T les rayons de courbure et de torsion, par α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ'' les cosinus directeurs de la tangente, de la normale principale et de la binormale par rapport aux trois axes fixes ox, oy, oz. Il est naturel d'introduire les coordonnées X, Y, Z d'un point de la surface cherchée par rapport au trièdre mobile formé par la tangente, la normale principale et la binormale à la courbe D; X, Y, Z sont des fonctions inconnues des variables indépendantes u et v, s'annulant pour $u = 0$. Les coordonnées rectangulaires (x, y, z) du même point par rapport aux axes fixes ont pour expressions

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \alpha X + \alpha' Y + \alpha'' Z, \\ y &= y_0 + \beta X + \beta' Y + \beta'' Z, \\ z &= z_0 + \gamma X + \gamma' Y + \gamma'' Z. \end{aligned}$$

On en déduit, en différentiant et remplaçant $d\alpha$, $d\alpha'$, $d\alpha''$ par leurs valeurs,

$$dx = (\alpha X'_u + \alpha' Y'_u + \alpha'' Z'_u)du + \left[\alpha\left(1 + X'_v - \frac{Y}{\rho}\right) + \alpha'\left(Y'_v + \frac{X}{\rho} + \frac{Z}{T}\right) + \alpha''\left(Z'_v - \frac{Y}{T}\right)\right]dv.$$

et dy et dz ont des expressions analogues; par suite, on a

$$\begin{aligned} ds^2 = {} & [(X'_u)^2 + (Y'_u)^2 + (Z'_u)^2]\,du^2 \\ & + 2\left[X'_u\left(1 + X'_v - \frac{Y}{\rho}\right) + Y'_u\left(Y'_v + \frac{X}{\rho} + \frac{Z}{T}\right) + Z'_u\left(Z'_v - \frac{Y}{T}\right)\right]du\,dv \\ & + \left[\left(1 + X'_v - \frac{Y}{\rho}\right)^2 + \left(Y'_v + \frac{X}{\rho} + \frac{Z}{T}\right)^2 + \left(Z'_v - \frac{Y}{T}\right)^2\right]dv^2. \end{aligned}$$

L'équation $ds^2 = du^2 + C^2 dv^2$ donne donc les trois relations

$$(X'_u)^2 + (Y'_u)^2 + (Z'_u)^2 = 1, \tag{24}$$

$$X'_u\left(1 + X'_v - \frac{Y}{\rho}\right) + Y'_u\left(Y'_v + \frac{X}{\rho} + \frac{Z}{T}\right) + Z'_u\left(Z'_v - \frac{Y}{T}\right) = 0, \tag{25}$$

$$\left(1 + X'_v - \frac{Y}{\rho}\right)^2 + \left(Y'_v + \frac{X}{\rho} + \frac{Z}{T}\right)^2 + \left(Z'_v - \frac{Y}{T}\right)^2 = C^2. \tag{26}$$

Les trois équations précédentes sont les équations *intrinsèques* du problème, car il n'y figure que C, ρ et T, c'est-à-dire des éléments indépendants du choix des axes.

Par hypothèse, X, Y, Z sont nuls pour $u = 0$. Cherchons à calculer les coefficients de leurs développements suivant les puissances de u,

$$\left\{\begin{aligned} X &= X_1 u + X_2 u^2 + \ldots\ldots + X_n u^n + \ldots \\ Y &= Y_1 u + Y_2 u^2 + \ldots\ldots + Y_n u^n + \ldots \\ Z &= Z_1 u + Z_2 u^2 + \ldots\ldots + Z_n u^n + \ldots; \end{aligned}\right. \tag{27}$$

X_i, Y_i, Z_i sont des fontions inconnues de v, dont nous représenterons les dérivées par les lettres accentuées X'_i, Y'_i, Z'_i. On a, d'après cela,

$$\left\{\begin{aligned} X'_u &= X_1 \quad + 2X_2 u + \ldots\ldots + nX_n u^{n-1} + \ldots \\ X'_v &= X'_1 u + X'_2 u^2 + \ldots\ldots + X'_n u^n \quad + \ldots \end{aligned}\right. \tag{28}$$

et Y'_u, Y'_v, Z'_u, Z'_v ont des expressions analogues. En substituant ces valeurs de X, Y, Z, X'_u, X'_v, Y'_u, Y'_v, Z'_u, Z'_v dans les trois relations (24), (25) et (26), et en écrivant qu'on a des identités, on obtient évidemment une suite indéfinie d'équations entre les fonctions X_i, Y_i, Z_i. Pour voir si ces relations déterminent complètement les fonctions inconnues, prenons d'abord les premières. En prenant les termes indépendants de u dans les relations (24) et (25), et le terme en u dans la troisième, on trouve que l'on doit avoir

$$(X_1)^2 + (Y_1)^2 + (Z_1)^2 = 1, \qquad X_1 = 0, \qquad \left(X'_1 - \frac{Y_1}{\rho}\right) = C_1.$$

Posons $Y_1 = \cos\Theta$, $Z_1 = \sin\Theta$; la dernière condition devient

$$\cos\Theta = -C_1\rho, \tag{29}$$

et détermine l'angle Θ et par suite le plan tangent à la surface en un point de D. On n'obtient de valeurs réelles pour Θ que si l'on a $|C_1\rho| \leqslant 1$. Nous supposerons d'abord que l'on a

$$|C_1\rho| < 1; \tag{30}$$

on obtient alors pour Θ deux valeurs Θ_0, $-\Theta_0$, et par suite le plan tangent peut occuper deux positions symétriques par rapport au plan osculateur. Tout cela est bien d'accord avec les résultats rappelés plus haut (n° 2). Ayant choisi une valeur de Θ, on a ainsi les premiers termes des développements cherchés

$$X_1 = 0, \qquad Y_1 = \cos\Theta, \qquad Z_1 = \sin\Theta, \qquad \cos\Theta = -C_1\rho.$$

Pour obtenir les coefficients suivants, supposons que l'on ait calculé X_1, X_2, $\ldots X_{n-1}$, Y_1, Y_2, $\ldots Y_{n-1}$, Z_1, Z_2, $\ldots Z_{n-1}$. Pour calculer X_n, Y_n, Z_n, écrivons d'abord que le coefficient de u^{n-1} dans les premiers membres des équations (24), (25) est nul. On obtient ainsi deux relations de la forme

$$(31) \qquad \left\{ \begin{array}{l} Y_1 Y_n + Z_1 Z_n + \mathcal{F}_n = 0, \\ n X_n + \mathcal{G}_n = 0, \end{array} \right.$$

$\mathcal{F}_n$ et $\mathcal{G}_n$ ne dépendant que des coefficients X_i, Y_i, Z_i, d'indice inférieur à n, et de leurs dérivées. D'autre part, en égalant les coefficients de u^n dans les deux membres de l'équation (26), on a une égalité de la forme

$$(32) \qquad 2\left(X'_n - \frac{Y_n}{\rho}\right) + \mathcal{H}_n = F(C_1, C_2, \ldots C_n),$$

$\mathcal{H}_n$ étant une expression de même espèce que $\mathcal{F}_n$ et $\mathcal{G}_n$ et $F(C_1, C_2, \ldots C_n)$ s'exprimant uniquemement au moyen des coefficients C_1, C_2, $\ldots C_n$ du développement de C. Les trois équations (31) et (32) déterminent donc X_n, Y_n, Z_n en fonction des coefficients précédents, de ρ, T, et des coefficients C_1, C_2, $\ldots C_n$. On formera donc ainsi trois séries entières satisfaisant formellement aux équations du problème (24), (25) et (26). Leur convergence dans un domaine suffisamment restreint résulte des théorèmes classiques d'existence [1]. En effet, x, y, z sont des intégrales de l'équation (12) satisfaisant à des conditions initiales connues. Elles sont donc représentées par des séries entières convergentes, d'où résulte la convergence des développements obtenus pour X, Y, Z.

Les circonstances sont toutes différentes lorsque l'on a $|C_1\rho| = 1$, c'est-à-dire lorsque le rayon de courbure de la courbe D est égal en valeur absolue au rayon de courbure géodésique de la courbe $u = 0$ sur la surface. Supposons que l'on ait $C_1\rho = 1$; le cas où l'on aurait $C_1\rho = -1$ se ramène à celui-là en changeant u en $-u$. On a alors

$$X_1 = 0, \qquad Y_1 = -1, \qquad Z_1 = 0,$$

ce qui prouve déjà que le plan tangent à la surface S en un point de D est le plan osculateur, puisque la tangente à la ligne géodésique (v) au point $u = 0$ est la normale principale à D.

---

(1) Nous laissons de côté le cas où, pour certains points isolés de D, on aurait $|C_1\rho| = 1$, et par suite $\sin\Theta = 0$, et aussi le cas où ρ serait infini en certains points de D. Il faudrait nécessairement qu'en ces points on eût $C_1(v) = 0$.

Pour avoir les coefficients suivants X_2, Y_2, Z_2, ..., égalons à zéro les coefficients de u dans les premiers membres des équations (24) et (25). On a immédiatement $Y_2 = 0$, $X_2 = 0$. De même, en égalant à zéro les coefficients de u^2 dans les deux membres de l'équation (26), on trouve la relation

$$\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{T^2} = C_1^2 + C_2,$$

qui se réduit, puisque $|C_1\rho| = 1$, à

$$\frac{1}{T^2} = C_2. \tag{33}$$

Pour que le problème soit possible, il faut donc que le carré de la torsion de la courbe D soit égal à la courbure totale changée de signe de la surface. Cette condition étant supposée vérifiée, égalons à zéro les coefficients de u^2 dans les premiers membres des équations (24) et (25), et égalons les coefficients de u^3 dans les deux membres de l'équation (26). Il vient :

$$Y_3 = \frac{2}{3} Z_2^2, \qquad X_3 = -\frac{1}{3}\frac{Z_2}{T}, \qquad 2X_3' - \frac{2Y_3}{\rho} + \frac{2Z_2'}{T} = C_1 C_2 + \frac{C_3}{3}, \tag{34}$$

et l'on en déduit, pour déterminer Z_2, l'équation de Riccati

$$\frac{4}{T} Z_2' - \frac{4}{\rho} Z_2^2 + 2\frac{T'}{T^2} Z_2 - 3C_1 C_2 - C_3 = 0, \tag{35}$$

qui est identique à l'équation (18); Y_3 et X_3 s'en déduisent ensuite par les deux premières formules (34).

Supposons qu'on ait déterminé les coefficients $X_3, \dots X_n$, $Y_3, \dots Y_n$, $Z_2, \dots Z_{n-1}$ ($n \geqslant 3$). On obtient trois équations permettant de déterminer X_{n+1}, Y_{n+1}, Z_n, en égalant à zéro les coefficients de u^n dans les premiers membres des équations (24) et (25), et en égalant les coefficients de u^{n+1} dans les deux membres de (26). Ces relations sont de la forme

$$-2(n+1)Y_{n+1} + 4nZ_2 Z_n + \mathcal{F}_n = 0,$$

$$(n+1)X_{n+1} + (n-1)\frac{Z_n}{T} + \mathcal{G}_n = 0,$$

$$2X'_{n+1} - 2\frac{Y_{n+1}}{\rho} + \frac{2Z'_n}{T} + \mathcal{H}_n = F(C_1, C_2, \dots C_{n+1}),$$

$\mathcal{F}_n$, $\mathcal{G}_n$, $\mathcal{H}_n$ s'exprimant au moyen des coefficients X_i, Y_i, Z_i, déjà calculés, et de leurs dérivées, par des additions et des multiplications seulement. L'élimination de X_{n+1}, Y_{n+1} conduit à une équation linéaire pour déterminer Z_n.

Si la fonction Z_2 est régulière dans l'intervalle (a', b'), il en sera de même de toutes les fonctions X_i, Y_i, Z_i, quelles que soient les valeurs initiales choisies pour $Z_3, Z_4, \ldots Z_n, \ldots$ Supposons qu'en un point v_0 de l'arc A'B', on ait choisi les axes de façon que l'on ait $\alpha = \alpha' = 0$, $\alpha'' = 1$. Pour $v = v_0$, la série qui représente x se réduit à

$$x = Z_2(v_0)u^2 + Z_3(v_0)u^3 + \ldots + Z_n(v_0)u^n + \ldots \tag{36}$$

On sera sûr de la convergence des séries (27) dans tout l'intervalle (a', b') si les valeurs initiales $Z_i(v_0)$ ont été choisies de façon que la série entière (36) ait un rayon de convergence différent de zéro.

En définitive, la recherche des points singuliers de la surface déformée, le long de la ligne asymptotique D, revient uniquement à la recherche des points singuliers de la fonction $\Phi(v)$ ou $Z_2(v)$ dans l'intervalle correspondant (a, b).

[**6**] Supposons d'abord que la courbure géodésique $C_1(v)$ de la courbe Γ ne soit nulle en aucun point de l'arc AB. Le rayon de courbure géodésique ρ restera fini, et par suite tous les coefficients de l'équation linéaire (20) sont continus dans l'intervalle (a, b). Il en est de même de toutes les intégrales, et par suite les points singuliers de $\Phi(v)$ sont des pôles correspondant aux racines de $Z(v)$. Pour qu'il existe une fonction $\Phi(v)$, continue entre a et b, il faut et il suffit que l'équation linéaire (20) admette une intégrale qui n'ait pas de racines dans cet intervalle. La discussion est toute pareille à celle que l'on rencontre dans le calcul des variations, en étudiant la condition de Jacobi. Soit Z_a une intégrale s'annulant pour $v = a$, et $v = v'$ la première racine de cette intégrale supérieure à a; pour qu'il existe une intégrale ne s'annulant pas entre a et b, il faut et il suffit que v' soit supérieur à b; si Z_a n'a aucune racine supérieure à a, on supposera dans cet énoncé $v' = \infty$.

Lorsque $C_1(v)$ a des racines dans l'intervalle (a, b), la distribution des pôles des intégrales de l'équation (18) dans cet intervalle n'est plus aussi simple. Les fonctions $C_1(v)$, $C_2(v)$, $C_3(v)$ étant des fonctions analytiques quelconques de v (avec la restriction $C_2(v) > 0$), régulières dans l'intervalle (a, b), nous sommes ramenés en définitive à étudier la distribution des pôles des intégrales d'une équation de Riccati :

$$\frac{dy}{dv} + A(v)y^2 + B(v)y + C(v) = 0, \tag{37}$$

A, B, C étant des fonctions analytiques régulières dans un intervalle (a, b).

L'intégrale générale de cette équation est donnée par la formule

$$y = \frac{1}{Au}\frac{du}{dv}, \tag{38}$$

u désignant l'intégrale générale de l'équation linéaire

$$\frac{d^2u}{dv^2} + \left(B - \frac{A'}{A}\right)\frac{du}{dv} + ACu = 0. \tag{39}$$

Toute racine de u, n'annulant pas $A(v)$, est un pôle simple de y, et il nous reste à étudier la fonction y dans le domaine d'une racine $v = v_0$ de la fonction $A(v)$. Le point $v = v_0$ est un pôle du premier ordre pour le coefficient de $\frac{du}{dv}$ dans l'équation (39), et par suite un point singulier (réel ou *apparent*) pour les intégrales.

Supposons, pour simplifier l'écriture, $v_0 = 0$; si $v = 0$ est une racine d'ordre n de $A(v)$, l'équation (39) s'écrit, dans le domaine de ce point,

$$\frac{d^2u}{dv^2} - \left\{\frac{n}{v} + \alpha_0 + \alpha_1 v + \ldots\right\}\frac{du}{dv} + v^n\left\{\beta_0 + \beta_1 v + \ldots\right\}u = 0. \tag{40}$$

L'équation déterminante fondamentale est ici

$$r(r-1) - nr = 0,$$

et admet les deux racines $r = 0$, $r = n+1$. Il est facile de vérifier que l'intégrale générale ne renferme pas de terme logarithmique, car si l'on cherche à satisfaire à l'équation (40) par un développement de la forme

$$u = c_0 + c_{n+1}v^{n+1} + c_{n+2}v^{n+2} + \ldots + c_{n+p}v^{n+p} + \ldots$$

le résultat de la substitution est une série entière en v, commençant par un terme en v^n. En égalant à zéro le coefficient de v^{n+p-1} on a une relation de la forme

$$(n+p+1)p\,c_{n+p+1} = F(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \beta_0, \beta_1, \ldots, c_0, c_{n+1}, \ldots, c_{n+p}),$$

permettant d'exprimer de proche en proche tous les coefficients c_{n+2}, c_{n+3}, ... au moyen des deux coefficients c_0, c_{n+1} qui restent arbitraires. Le point $v = 0$ est donc un *point singulier apparent* pour l'équation (39) qui admet deux intégrales particulières holomorphes, dans le domaine de $v = 0$, de la forme

$$u_1 = 1 + c_{n+2}v^{n+2} + \ldots$$
$$u_2 = v^{n+1} + c'_{n+2}v^{n+2} + \ldots$$

L'intégrale générale de l'équation de Riccati, dans le même domaine, a pour expression

$$y = \frac{1}{A(v)}\,\frac{C_1\frac{du_1}{dv} + C_2\frac{du_2}{dv}}{C_1u_1 + C_2u_2} = \frac{1}{A(v)}\cdot\frac{C_2(n+1)v^n + \ldots}{C_1 + C_2v^{n+1} + \ldots}.$$

Si C_1 n'est pas nul, le point $v = 0$ est un point ordinaire pour y; si C_1 est nul, le point $v = 0$ est un pôle d'ordre $n+1$ pour y. En résumé, *les pôles de $y(v)$ proviennent uniquement des racines de $u(v)$; une racine de $u(v)$, n'annulant pas A, est un pôle simple de y; une racine de $u(v)$, qui est en même temps racine d'ordre n de $A(v)$, est un pôle de y, d'ordre $n+1$ de multiplicité.*

Pour nous rendre compte de la façon dont varient les racines d'une intégrale de l'équation (39), considérons une intégrale particulière $u_1(v)$, et soient $v_0, v_1, \ldots v_n, \ldots$ les zéros consécutifs de cette intégrale dans l'intervalle (a, b). Nous supposerons que ces zéros sont simples, et par suite n'annulent pas $\mathrm{A}(v)$. Toute autre intégrale $u_2(v)$ satisfait à la relation

$$(41) \qquad \frac{d}{dv}\left(\frac{u_2}{u_1}\right) = \frac{\mathrm{K}}{u_1^2} e^{-\int\left(\mathrm{B}-\frac{\mathrm{A}'}{\mathrm{A}}\right)dv} = \mathrm{K}\frac{\mathrm{A}(v)}{u_1^2} e^{-\int \mathrm{B}dv},$$

K désignant un facteur constant. Admettons d'abord que $\mathrm{A}(v)$ ne change pas de signe dans l'intervalle (v_0, v_1) compris entre deux racines consécutives de $u_1(v)$. Le second membre de l'égalité précédente conserve un signe constant dans cet intervalle, et par suite le rapport $\frac{u_2}{u_1}$ varie constamment dans le même sens quand v croît de v_0 à v_1. Or, il est infini pour $v = v_0$ et pour $v = v_1$; il croît donc de $-\infty$ à $+\infty$, ou décroît de $+\infty$ à $-\infty$ lorsque v croît de v_0 à v_1. L'intégrale $u_2(v)$ a donc *une racine et une seule* entre v_0 et v_1.

Supposons en second lieu que $\mathrm{A}(v)$ ait une racine c, d'ordre impair de multiplicité, entre v_0 et v_1; que l'on ait par exemple $\mathrm{A} > 0$ pour $v_0 < v < c$, et $\mathrm{A} < 0$ pour $c < v < v_1$. Lorsque v croît de v_0 à c, le rapport $\frac{u_2}{u_1}$ croît de $-\infty$ à un maximum μ; v croissant de c à v_1, $\frac{u_2}{u_1}$ décroît de μ à $-\infty$. L'équation $u_2(v) = 0$ a donc *zéro ou deux racines* entre v_0 et v_1.

D'une façon générale, soient $c_1, c_2, \ldots c_p$ les racines d'ordre *impair* de multiplicité de $\mathrm{A}(v)$ dans l'intervalle (v_0, v_1), rangées par ordre de grandeur croissante. Dans chacun des intervalles partiels

$$(v_0, c_1), \qquad (c_1, c_2), \qquad \ldots \qquad (c_p, v_1)$$

le rapport $\frac{u_2}{u_1}$ varie constamment dans le même sens, et il est égal à $\pm\infty$ pour les deux limites v_0, v_1. Il a donc au plus une racine dans chaque intervalle partiel. Si p est pair, il y a un nombre impair d'intervalles; le rapport $\frac{u_2}{u_1}$ est croissant ou décroissant dans les deux intervalles (v_0, c_1) et (c_p, v_1). Il va donc de $-\infty$ à $+\infty$, ou de $+\infty$ à $-\infty$, quand v croît de v_0 à v_1, et par conséquent $u_2(v)$ a au moins une racine entre v_0 et v_1. Plus généralement, si p et n désignent les nombres des racines des deux équations $\mathrm{A}(v) = 0$, $u_2(v) = 0$, comprises entre v_0 et v_1, *ces deux nombres p et n sont de parités différentes.*

Soient $v_0, v_1, v_2, \ldots v_n, \ldots$ la suite des zéros successifs de l'intégrale $u(v)$ qui est nulle pour $v = v_0$. Formons la suite $\mathrm{A}(v_0), \mathrm{A}(v_1), \ldots \mathrm{A}(v_n), \ldots$ et arrêtons-nous après la première permanence. Si $A(v_p)$ et $A(v_{p+1})$ sont du même signe, on peut affirmer que toute intégrale de l'équation (39) a une racine entre v_p et v_{p+1}; mais, alors même que la suite

$$A(v_0), \quad A(v_1), \quad \ldots \quad A(v_p) \tag{42}$$

ne présenterait que des variations, on ne peut pas affirmer qu'il existe des intégrales de l'équation (39) ne s'annulant pas entre v_0 et v_p.

Pour fixer les idées, supposons que l'équation $A(v) = 0$ ait une racine simple c_1 comprise entre v_0 et v_1, et une autre racine simple c_2 comprise entre v_1 et v_2, de telle façon que $A(v)$ soit négatif entre v_0 et c_1, positif entre c_1 et c_2, négatif entre c_2 et v_2. La fonction $z = \frac{A(v)}{u_1^2} e^{\int_{v_0}^{v} B dv}$ est de même signe que $A(v)$ dans ces différents intervalles. Soit u_2 une seconde intégrale de l'équation linéaire telle que le rapport $w = \frac{u_2}{u_1}$ ait pour dérivée z; ce rapport est décroissant de v_0 à c_1, croissant de c_1 à v_1 et de v_1 à c_2, et enfin décroissant de c_2 à v_2; il est égal à $+\infty$ pour $v = v_1$. Il passe donc par un minimum m_1 pour $v = c_1$ et par un maximum M_1 pour $v = c_2$. Si l'on a $m_1 > M_1$, il existe des intégrales de l'équation (39) qui ne s'annulent pas entre v_0 et v_2. Soit en effet m un nombre compris entre M_1 et m_1 ($M_1 < m < m_1$); la différence $\frac{u_2}{u_1} - m$ a un minimum positif $(m_1 - m)$ et un maximum négatif $(M_1 - m)$, quand v croît de v_0 à v_2, et par suite l'intégrale $u_2 - m u_1$ n'a pas de racine entre v_0 et v_2. Supposons au contraire $M_1 > m_1$; le rapport $\frac{u_2}{u_1}$ prend toutes les valeurs possibles lorsque v croît de v_0 à v_2. Toute intégrale $u_2 + K u_1$ s'annule donc au moins une fois entre v_0 et v_2, car le rapport $\frac{u_2 + K u_1}{u_1} = \frac{u_2}{u_1} + K$ passe au moins une fois par la valeur zéro dans cet intervalle.

Ainsi, quoiqu'il existe certainement des intégrales ne s'annulant pas entre v_0 et v_1, et d'autres qui ne s'annulent pas entre v_1 et v_2, on ne peut pas affirmer qu'il en existe ne s'annulant pas entre v_0 et v_2. D'une façon générale, si la suite (42) ne présente que des variations, pour qu'il existe des intégrales de l'équation (39) n'ayant pas de racines dans l'intervalle (v_0, v_p), il faut et il suffit que le plus petit des minimums du rapport $\frac{u_2}{u_1}$ dans cet intervalle soit supérieur au plus grand des maximums.

Cela posé, cherchons comment on pourra reconnaître s'il existe des intégrales de l'équation linéaire (39) ne s'annulant pas dans l'intervalle (a, b). Soit $u_1(v)$ une intégrale particulière s'annulant pour $v = a$; il peut se présenter deux cas :

1° Si cette intégrale n'a aucune autre racine dans l'intervalle (a, b), il est clair qu'il y aura des intégrales ne s'annulant pas dans l'intervalle (a, b).

2° Supposons que $u_1(v)$ ait un certain nombre de racines $v_0 = a$, v_1, ... v_n entre a et b. Formons la suite :

$$A(v_0), \quad A(v_1), \quad \ldots \quad A(v_p), \quad \ldots \quad A(v_n);$$

si deux termes consécutifs de cette suite $A(v_p)$, $A(v_{p+1})$ sont de même signe, toute intégrale a une racine au moins entre v_p et v_{p+1}.

Il n'y a doute que lorsque la suite précédente ne présente que des variations. Une étude spéciale est alors nécessaire dans chaque cas particulier.

[**7**] Considérons en particulier une surface de courbure constante totale égale à -1.

La fonction C est de la forme

$$C = \Psi(v) \sinh u + \Psi_1(v) \cosh u;$$

puisque l'on doit avoir $C = 1$ pour $u = 0$, nous devons prendre $\Psi_1(v) = 1$, la fonction $\Psi(v)$ étant quelconque. Nous aurons donc dans ce cas

$$C_1 = \Psi(v), \qquad C_2 = 1, \qquad C_3 = \Psi(v),$$
$$T = 1, \qquad \rho = \frac{1}{\Psi(v)},$$

et l'équation (20) devient

$$\frac{d^2Z}{dv^2} - \frac{\Psi'(v)}{\Psi(v)}\frac{dZ}{dv} + \Psi^2(v)Z = 0. \tag{43}$$

L'intégrale générale est

$$Z = C_1 e^{i\int \Psi(v)\,dv} + C_2 e^{-i\int \Psi(v)\,dv},$$

ce qu'on peut encore écrire

$$Z = \alpha \cos\left(\int_a^v \Psi(v)\,dv + \beta\right),$$

C_1, C_2, α, β désignant des constantes arbitraires. Pour qu'il existe une intégrale ne s'annulant pas dans l'intervalle (a, b), il faut et il suffit que l'intégrale définie

$$\int_{v_1}^{v_2} \Psi(v)\,dv$$

soit moindre que π en valeur absolue, quelles que soient les valeurs de v_1, v_2 dans l'intervalle (a, b). Cette condition peut s'interpréter comme il suit, en observant que v représente l'arc de la courbe Γ et $\Psi(v) = \dfrac{1}{\rho g}$ la courbure géodésique. Pour que l'on puisse déformer une surface de courbure totale égale à -1, de façon qu'une courbe Γ de cette surface devienne une ligne asymptotique, sans que la surface déformée présente de points singuliers sur cette ligne asymptotique, il faut et il suffit que l'intégrale définie $\int \frac{ds}{\rho_g}$, étendue à un arc quelconque de Γ, soit inférieure à π en valeur absolue.

Remarque. — Il est facile de démontrer directement le résultat qui précède, en s'appuyant sur les formules connues de la théorie des surfaces à courbure constante négative. Si l'on suppose, en effet, la surface rapportée à ses deux familles de lignes asymptotiques, on a

$$ds^2 = du^2 + dv^2 + 2\cos\alpha\, du\, dv,$$

et le rayon de courbure ρ_{g_v} de la ligne asymptotique $u = 0$ a pour expression

$$\frac{1}{\rho_{g_v}} = \frac{\partial \alpha}{\partial v}.$$

On a donc

$$\int_{v_1}^{v_2} \frac{ds}{\rho_g} = \int_{v_1}^{v_2} \frac{\partial \alpha}{\partial v}\, dv = [\alpha]_{v_1}^{v_2},$$

et l'angle α, qui est l'angle de deux lignes asymptotiques, reste compris entre 0 et π.

Si la courbe Γ est un cercle géodésique dont le rayon de courbure géodésique a pour valeur l, pour que Γ devienne une ligne asymptotique, il faudra l'appliquer sur une hélice circulaire, dont les rayons de courbure et de torsion soient respectivement l et 1. Mais la surface déformée présentera au moins un point singulier sur cette ligne asymptotique si la longueur est supérieure à πl.

[8] Si l'intégrale $Z_2(v)$ de l'équation (35), qui prend la valeur initiale $Z_2(v_0)$ pour $v = v_0$, admet pour pôle le point $v = v'$, on a vu dans le Mémoire cité que tous les coefficients suivants $Z_3(v), \ldots, Z_n(v), \ldots$ admettront aussi pour pôle le point $v = v'$, mais qu'il ne s'introduira jamais de terme logarithmique dans l'intégration des équations différentielles linéaires qui déterminent ces coefficients (n° 21). En effet, les développements de x, y, z suivant les puissances de u ne peuvent avoir des coefficients renfermant des logarithmes, et par suite il en est de même des développements de X, Y, Z. Dans le voisinage du point M', correspondant aux valeurs $u = 0$, $v = v'$, la surface est représentée par des formules de la forme

$$\left\{\begin{aligned} x &= F_1\left(v - v', \frac{u}{(v - v')^2}\right), \\ y &= F_2\left(v - v', \frac{u}{(v - v')^2}\right), \\ z &= F_3\left(v - v', \frac{u}{(v - v')^2}\right), \end{aligned}\right.$$

F_1, F_2, F_3 étant des séries entières ordonnées suivant les puissances de $v - v'$ et de $\frac{u}{(v - v')^2}$. Ce point M′ est un point singulier isolé sur la ligne asymptotique, car x, y, z sont des fonctions régulières de u et de v, dans le voisinage des autres points de la ligne asymptotique, de part et d'autre de M′. Ce point singulier est sans doute analogue à un point de l'arête de rebroussement sur une surface développable, mais une étude plus approfondie serait nécessaire pour élucider cette question.