
LA

THÉORIE DES ÉQUATIONS INTÉGRALES

ET

SES APPLICATIONS A LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE,

PAR M. R. MARCOLONGO (1).

MM. E. et F. Cosserat (2), il y a déjà quelques années, ont montré l'importance de certaines équations fonctionnelles dans la théorie des corps élastiques isotropes.

Les recherches classiques de M. Fredholm (3) sur les équations et les systèmes d'équations intégrales, qui ont déjà eu de nombreuses applications à la théorie du potentiel et à l'analyse, devaient naturellement se rattacher à celles de MM. Cosserat et devaient permettre d'aborder, un peu plus simplement, le problème fondamental de la théorie de l'élasticité.

MM. Fredholm (4) et Lauricella (5) ont réduit l'intégration des équations de

(1) Ce Mémoire est, pour la plus grande partie, la traduction d'une Note que nous avons publiée, il y a quelques mois, dans les *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, 5^e série, t. XVI, 1^{er} sem. 1907, p. 742-749. Nous remercions vivement la Rédaction d'avoir bien voulu accepter cette nouvelle exposition pour les *Annales*.

(2) *Sur une application des fonctions potentielles de la théorie de l'élasticité* (*Comptes rendus*, t. CXXXIII, 2^e sem. 1901, p. 210-213).

(3) *Sur une classe d'équations fonctionnelles* (*Acta math.*, t. XXVII, 1903, p. 365-390). On peut consulter la bibliographie très étendue de cette théorie dans le Mémoire de M. BATEMAN, *The Theory of integral equations* (*Proceedings of the London mathem. Society*, 2^e série, t. IV, 1907, p. 90-115).

(4) *Solution d'un problème fondamental de la théorie de l'élasticité* (*Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, utgifvet af. K. Svenska Vetenskapsakademien i Stockholm*, Band. II, Häfte 3-4, 1905).

(5) *Sull' integrazione delle equazioni dell' equilibrio dei corpi elastici isotropi* (*Rend. Acc. Lincei*, 5^e série, t. XV, 1^{er} sem. 1906, p. 426-432). — *Sulla risoluzione del problema di Dirichlet col metodo di Fredholm e sull' integrazione delle equazioni dell' equilibrio dei solidi elastici indefiniti* (*Ibid.*, p. 611-619). — *Sul problema derivato di Dirichlet, sul problema dell' elettrostatica e sull' integrazione delle equazioni*

l'élasticité, lorsque les déplacements à la frontière sont connus, à la résolution d'un système d'équations intégrales, auquel on peut appliquer la théorie de M. Fredholm. Nous allons d'abord exposer cette réduction d'une manière fort simple.

Nous supposerons qu'on ait déjà fait l'élimination des forces de masse, et nous allons, par conséquent, considérer les équations suivantes

$$(1) \quad \Delta_2 u + k \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \quad \Delta_2 v + k \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0, \quad \Delta_2 w + k \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0;$$

ou bien, si l'on fait usage des notations du calcul vectoriel, la seule équation

$$(2) \quad (k+1) \text{grad div } \mathbf{S} - \text{rot rot } \mathbf{S} = \Delta_2 \mathbf{S} + k \text{grad div } \mathbf{S} = 0 \quad (6).$$

\mathbf{S} est le déplacement d'un point P du corps τ (dont les composantes sont u, v, w):

$$k = \frac{1}{1-2z},$$

si z est la constante de Poisson. Pour les corps élastiques isotropes on sait qu'on a

$$-1 < z < \frac{1}{2}.$$

Mais, plus généralement, nous supposerons, dans ce qui suit, que k est un nombre réel constant et tel que

$$-1 < k < +\infty.$$

Sous cette hypothèse, si à la frontière σ sont données les valeurs des fonctions inconnues u, v, w , le système (1) n'a pas plus d'une solution. Il suffit, en effet, d'observer que si \mathbf{S} est une solution régulière de (2) qui s'annule à la frontière, on a toujours, dans τ , $\mathbf{S} = 0$; ce qui résulte immédiatement de l'identité, facile à prouver,

$$(k+1) \int (\text{div } \mathbf{S})^2 d\tau + \int (\text{rot } \mathbf{S})^2 d\tau = 0.$$

dell' elasticità (Ibid., 2° sem. 1906, p. 75-83). — Alcune applicazioni della teoria delle equazioni funzionali alla fisica matematica (Nuovo Cimento, 5° série, t. XIII, 1907). — Sulla integrazione dell' equazione $\Delta^2 V = 0$ (Rend. Acc. Lincei, 5° série, t. XVI, 2° sem. 1907, p. 373-383).

(1) Nous suivons les notations de nos articles, en collaboration avec M. BURALI-FORTI. *Per l'unificazione delle notazioni vettoriali (Rendiconti Circolo matematico di Palermo, t. XXIII, 1^{er} sem. 1907, p. 324-328; t. XXIV, 2° sem. 1907, p. 65-80, 318-332; t. XXV, 1^{er} sem. 1908, p. 352-375).*

On connaît beaucoup de solutions particulières de (2); entre autres celles dont ont fait usage Betti et MM. Somigliana et Cerruti. Si nous posons

$$(3) \quad \begin{cases} u = -\lambda r \cos(rn) \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + u_1, \\ v = -\lambda r \cos(rn) \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y} + v_1, \\ w = -\lambda r \cos(rn) \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z} + w_1, \end{cases}$$

où λ est une constante à déterminer, r la distance d'un point P de τ à un point de la frontière σ , n la normale intérieure, et u_1, v_1, w_1 trois fonctions qui vérifient $\Delta_2 = 0$ dans τ ; on trouve aisément

$$-\lambda(k+2) \frac{d}{dn} \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + k \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial z} \right) = 0, \quad \dots;$$

on peut donc prendre, par exemple,

$$u_1 = \frac{d \frac{1}{r}}{dn}, \quad v_1 = 0, \quad w_1 = 0, \quad \lambda = \frac{k}{k+2};$$

λ est la constante introduite récemment par M. Korn.

Soient $\varphi(\sigma), \psi(\sigma), \chi(\sigma)$ trois fonctions finies et continues des points de la frontière σ . En ayant égard aux solutions particulières (3), si l'on fait

$$(4) \quad u = \frac{1}{2\pi} \int \varphi(\sigma) \frac{d \frac{1}{r}}{dn} d\sigma - \frac{\lambda}{2\pi} \int r \cos(rn) \left[\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} \varphi(\sigma) + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y} \psi(\sigma) + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z} \chi(\sigma) \right] d\sigma,$$

et deux formules semblables pour v et w , nous aurons encore une solution des équations (1).

Considérons d'abord les (4) pour un point i intérieur à σ .

Soit

$$(5) \quad u = U_i + U'_i, \quad v = V_i + V'_i, \quad \dots,$$

avec

$$U_i = \frac{1}{2\pi} \int \varphi(\sigma) \frac{d^{\frac{1}{r}}}{dn} d\sigma, \quad \dots$$

U_i est le potentiel d'une double couche dont la densité $\frac{1}{2\pi} \varphi(\sigma)$ est une fonction continue sur σ ; à la limite, lorsque i sera parvenu en s sur σ , nous aurons, comme il est bien connu,

$$(6) \quad U_{is} = \varphi(s) + \frac{1}{2\pi} \int \varphi(\sigma) \frac{d^{\frac{1}{r}}}{dn} d\sigma, \quad \dots$$

Ces relations, où l'on a déjà supposé φ , ψ , χ continues, ont lieu si la frontière satisfait à des conditions très générales. Mais nous supposerons seulement que les conditions de M. Liapounoff⁽¹⁾ soient satisfaites, ou celles moins générales et très clairement posées par M. E.-R. Neumann⁽²⁾.

L'intégrale du second membre est la valeur de U_i en s ; en d'autres termes, r représente maintenant la distance des deux points s et σ de la frontière. Cette intégrale est convergente; c'est une fonction continue des points de σ , et la fonction sous le signe d'intégration, lorsque σ tend vers s , devient infinie comme $\frac{1}{r}$.

Il suffit de se rappeler que

$$\text{mod} \left[\frac{\cos(rn)}{r} \right] \leq \frac{1}{2\beta_g},$$

β_g étant une constante finie et différente de zéro⁽³⁾.

Nous allons maintenant étudier la seconde partie des formules (5), c'est-à-dire U'_i , ... On peut écrire

$$\begin{aligned} & \int r \cos(rn) \frac{d^{\frac{1}{r}}}{dx^2} \varphi(\sigma) d\sigma \\ &= \int \left[3 \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 - 1 \right] \frac{d^{\frac{1}{r}}}{dn} [\varphi(\sigma) - \varphi(s)] d\sigma + \varphi(s) \int \left[3 \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 - 1 \right] \frac{d^{\frac{1}{r}}}{dn} d\sigma, \end{aligned}$$

(1) *Sur quelques questions qui se rattachent au problème de Dirichlet* (Journ. de Math., 5^e série, t. IV, 1898, p. 211-311).

(2) *Studien über die Methoden von C. Neumann und G. Robin zur Lösung der beiden Randwertaufgaben der Potentialtheorie* (Preisschriften, gekrönt u. herausgeg. v. den fürst. Jablonowki'schen Gesell. z. Leipzig, 1905, p. 1-3).

(3) E.-R. NEUMANN, *loc. cit.*, p. 5.

et

$$\int r \cos(rn) \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y} \psi(\sigma) d\sigma$$

$$= \int \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} \frac{d \frac{1}{r}}{dn} [\psi(\sigma) - \psi(s)] d\sigma + \psi(s) \int \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} \frac{d \frac{1}{r}}{dn} d\sigma, \dots$$

Si, en effet, ξ, η, ζ sont les coordonnées de σ , puisque

$$r^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2,$$

en développant les dérivations, on prouve que

$$r \cos(rn) \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} = \left[3 \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 - 1 \right] \frac{d \frac{1}{r}}{dn}, \dots$$

Mais pour toute position de i , dans l'espace τ et sur la frontière σ , on a

$$\int \left[3 \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 - 1 \right] \frac{d \frac{1}{r}}{dn} d\sigma = \int \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{d \frac{1}{r}}{dn} d\sigma = \dots = 0;$$

et alors, d'une manière bien connue ⁽¹⁾, on démontre aussitôt la continuité de U'_i, \dots . Si donc nous faisons tendre i vers s et nommons $u(s), v(s), w(s)$ les limites de u_i, \dots , nous obtiendrons

$$(7) \quad u(s) = \varphi(s) + \frac{1}{2\pi} \int \varphi(\sigma) \frac{d \frac{1}{r}}{dn} d\sigma$$

$$- \frac{\lambda}{2\pi} \int r \cos(rn) \left[\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} \varphi(\sigma) + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y} \psi(\sigma) + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z} \chi(\sigma) \right] d\sigma,$$

et deux autres expressions semblables pour $v(s)$ et $w(s)$.

Voilà donc un système d'équations intégrales du type de M. Fredholm, car les fonctions qui multiplient les inconnues dans l'intégrale deviennent infinies comme $\frac{1}{r}$ si s tend vers σ . La résolution du système (7) où $u(s), v(s), w(s)$ sont les déplacements à la frontière, nous fera connaître φ, ψ, χ ; et alors les for-

⁽¹⁾ On peut répéter la démonstration de C. NEUMANN, *Ueber die Methode des arith. Mittels* (*Abhandlungen d. math.-phys. Classe der kön. sächsischen Gesell. d. Wiss. zu Leipzig*, Band. XIII, 1887, p. 707-820).

mules (4) nous feront connaître u , v , w dans tout point de τ et le problème sera complètement résolu.

φ , ψ , χ sont des fonctions méromorphes de λ , si le déterminant de l'équation résultante du système (7), traité par la méthode de M. Fredholm, n'est pas identiquement égal à zéro. Mais pour $\lambda = 0$, le système (7) se transforme dans l'autre plus simple et bien connu

$$u(s) = \varphi(s) + \frac{1}{2\pi} \int \varphi(\sigma) \frac{d^1 r}{dn} d\sigma, \quad \dots$$

qui a toujours une et une seule solution; car l'équation homogène correspondante a la seule solution $\varphi(s) = 0$ (1). Le déterminant de (7) n'est pas identiquement égal à zéro; et le système aura toujours une solution.

On peut suivre la même méthode pour la résolution du *problème extérieur*; c'est-à-dire pour l'intégration de (1) pour l'espace e extérieur à la surface σ . Il suffit de considérer (2) en un point extérieur et ensuite de passer à la limite; nous trouverons le système intégral

$$(7') \quad u(s) = -\varphi(s) + \frac{1}{2\pi} \int \varphi(\sigma) \frac{d^1 r}{dn} d\sigma \\ - \frac{\lambda}{2\pi} \int r \cos(rn) \left[\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} \varphi(\sigma) + \dots \right] d\sigma \quad \dots$$

On sait que le système homogène correspondant admet la solution

$$\varphi = \text{const.}, \quad \psi = \text{const.}, \quad \chi = \text{const.};$$

le déterminant de l'équation résultante est donc identiquement nul; si tous ses mineurs jusqu'à l'ordre m étaient aussi nuls, le système admettrait m solutions indépendantes pour toute valeur de λ , ce qui ne peut pas être, car pour $\lambda = 0$ le système homogène de (7') a effectivement une seule solution (2). Appliquons maintenant les résultats de la théorie de M. Fredholm. Afin que dans ce cas (7') ait une solution, les $u(s)$, ... doivent vérifier une condition. Considérons le système adjoint au système homogène de (7'); soit Φ , Ψ , X sa solution (unique), en général différente de celle du système (exception faite pour quelques cas particuliers; par exemple le cercle, la sphère).

(1) C'est le théorème de la constance du moment d'une double couche de M. E.-R. NEUMANN, *loc. cit.*, p. 51. Cf. aussi la deuxième Note de M. Fredholm (4).

(2) E.-R. NEUMANN, *loc. cit.*, p. 50.

La condition qui doit être vérifiée est

$$\int [u(\sigma) \Phi(\sigma) + \dots] d\sigma = 0.$$

Si elle n'est pas satisfaite, on suivra la méthode proposée par M. Lauricella ⁽¹⁾.

Si la frontière σ est un plan (problème du sol isotrope ou problème de Boussinesq-Cerruti) on obtient tout de suite la solution du système (7). Dans ce cas, en effet, si r est la distance de deux points s et σ de la frontière, on a

$$r \cos(rn) = \frac{d \frac{1}{r}}{dn} = 0$$

et, par conséquent,

$$u(s) = \varphi(s), \quad v(s) = \psi(s), \quad w(s) = \chi(s).$$

Substituons ces valeurs dans (4) et nous aurons les formules de résolution. Si la frontière est $z = 0$, et si nous voulons calculer la déformation dans un point (x_1, y_1, z_1) de τ en prenant $n \equiv z$, on a, tout de suite,

$$\begin{aligned} r \cos(rn) &= z_1, \\ \int \varphi(\sigma) \frac{d \frac{1}{r}}{dn} d\sigma &= - \frac{\partial}{\partial z_1} \int \frac{u d\sigma}{r}, \\ \int r \cos(rn) \left[\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x_1^2} \varphi(\sigma) + \dots \right] d\sigma \\ &= z_1 \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \int \frac{u d\sigma}{r} + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y_1} \int \frac{v d\sigma}{r} + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial z_1} \int \frac{w d\sigma}{r} \right), \end{aligned}$$

et l'on obtient les formules élégantes de M. Cerruti ⁽²⁾. Dans ce cas les déplacements sont des fonctions linéaires de λ .

Si donc on veut satisfaire au problème par une série entière en λ , suivant la

⁽¹⁾ *Rend. Acc. Lincei*, 5^e série, t. XV, 1^{er} sem. 1906, p. 611-619. M. Lauricella a aussi traité élégamment le cas où $k = -1$ (*Ibid.*, t. XVI, 1907, p. 373-383).

⁽²⁾ Une chose tout à fait semblable arrive lorsqu'on veut résoudre par la méthode de Fredholm le problème (intérieur ou extérieur) de Dirichlet pour le cercle. Dans ce cas l'application des formules de Fredholm fait trouver rapidement et élégamment une formule bien connue.

méthode proposée par M. Korn ⁽¹⁾, on peut prévoir, comme Cesàro ⁽²⁾ avait déjà observé, que la série se réduira à un nombre fini de termes; voilà donc une autre manière rapide et élégante pour résoudre le problème de Boussinesq-Cerruti.

Dans le cas où, à la frontière, les tensions sont connues, Cesàro développe suivant les puissances entières de $1 - \frac{1}{k} = \frac{3\lambda - 1}{2\lambda}$, et l'on obtient encore deux termes; la même méthode est applicable non seulement dans les autres cas (problèmes alternes), mais encore dans celui de la sphère.

Soit, en effet,

$$(8) \quad \begin{cases} u = u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \dots, \\ v = v_0 + \lambda v_1 + \lambda^2 v_2 + \dots, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

nous supposons que u_0, v_0, w_0 soient des fonctions harmoniques à l'intérieur de la sphère et qu'à la frontière prennent des valeurs données $u(s), v(s), w(s)$, et que $u_1, v_1, w_1, u_2, \dots$ (biharmoniques à l'intérieur de la sphère) soient nulles à la surface. Si nous substituons (8) dans (1) et observons que

$$k = \frac{2\lambda}{1-\lambda},$$

on voit que les fonctions biharmoniques u_i, \dots satisfont aux équations

$$(9) \quad \begin{cases} \Delta_2 u_{i+1} - \Delta_2 u_i + 2 \frac{\partial \theta_i}{\partial x} = 0, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

pour $i = 0, 1, 2, \dots$; θ_i étant la dilatation correspondante au déplacement (u_i, v_i, w_i) . Posons

$$(10) \quad u_i = (\rho^2 - a^2) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}, \quad \dots,$$

φ_i est une fonction inconnue, a le rayon de la sphère, ρ la distance d'un point au centre; on trouve aussitôt

$$(11) \quad \begin{cases} \Delta_2 u_{i+1} = 2 \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

⁽¹⁾ *Comptes rendus*, t. CXLII, 1^{er} sem. 1906, p. 334-336. — *Sitzungsber. d. math.-phys. Klasse der kön. bay. Akad. d. Wiss. zu München*, Band XXXVI, p. 37-80. — *Sur les équations de l'élasticité (Annales scientifiques de l'École Norm. supér., 3^e série, t. XXIV, 1907, p. 9-75)*.

⁽²⁾ *Sul problema dei suoli elastici (Rend. R. Acc. di Scienze fisiche e mat. di Napoli, 3^e série, t. XII, 1906, p. 199-206)*.

On en déduit d'abord, en faisant $i = 0$ dans (9) et (10), que

$$\varphi_0 = -\theta_0,$$

et ensuite

$$\rho \frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial x} + \frac{1}{2} \varphi_{i+1} = \frac{1}{2} \varphi_i,$$

et, par dérivation,

$$\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial x} \right) + \frac{3}{2} \frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \quad (1).$$

Cette équation s'intègre facilement; on trouve

$$\frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial x} = \frac{1}{2} \rho^{-\frac{3}{2}} \int_0^\rho \rho^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} d\rho.$$

Il suffira donc de connaître $\varphi_0 = -\theta_0$; mais on peut trouver u_0, v_0, w_0 par la formule bien connue pour la solution du problème de Dirichlet pour la sphère; on connaîtra aussi θ_0 . Si l'on fait

$$R = \int_0^\rho \rho^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \theta_0}{\partial x} d\rho,$$

on a successivement

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} &= -\frac{1}{2} \rho^{-\frac{3}{2}} R, \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} &= -\frac{1}{4} \rho^{-\frac{3}{2}} \int_0^\rho \frac{R}{\rho} d\rho, \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} &= -\frac{1}{8} \rho^{-\frac{3}{2}} \int_0^\rho \frac{d\rho}{\rho} \int_0^\rho \frac{R d\rho}{\rho}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Mais, en intégrant par parties, on trouve

$$\begin{aligned} \int_0^\rho \rho^{-\frac{\lambda}{2}} \rho^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \theta_0}{\partial x} d\rho &= \rho^{-\frac{\lambda}{2}} \left(R + \frac{\lambda}{2} \int_0^\rho \frac{R d\rho}{\rho} + \frac{\lambda^2}{4} \int_0^\rho \frac{d\rho}{\rho} \int_0^\rho \frac{R d\rho}{\rho} + \dots \right) \\ &= -2 \rho^{\frac{3-\lambda}{2}} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \lambda^2 \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} + \dots \right), \end{aligned}$$

et enfin

$$u - u_0 = -(\rho^2 - \alpha^2) \frac{\lambda}{2} \rho^{\frac{\lambda-3}{2}} \int_0^\rho \rho^{\frac{1-\lambda}{2}} \frac{\partial \theta_0}{\partial x} d\rho, \quad \dots,$$

on obtient donc les formules de M. Almansi.

(1) Voir ma *Teoria matematica dello equilibrio dei corpi elastici*, p. 282-287. Milano, 1904.

Nous démontrerons maintenant quelques-uns des théorèmes de MM. Cosserat (¹).

Soit λ_1 un pôle d'ordre m des solutions φ, ψ, χ de (7) et posons

$$\varphi = \frac{u_1}{(\lambda - \lambda_1)^m} + \dots, \quad \psi = \frac{v_1}{(\lambda - \lambda_1)^m} + \dots, \quad \chi = \frac{w_1}{(\lambda - \lambda_1)^m} + \dots$$

Si nous substituons ces valeurs dans (7), et si, après avoir multiplié par $(\lambda - \lambda_1)^m$, nous faisons $\lambda = \lambda_1$, nous aurons

$$0 = u_1(s) + \frac{1}{2\pi} \int u_1(\sigma) \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma - \frac{\lambda_1}{2\pi} \int r \cos(rn) \left[\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} u_1(\sigma) + \dots \right] ds, \quad \dots,$$

c'est-à-dire que (u_1, v_1, w_1) est une solution *fondamentale* (*autofonction*) des équations (1) pour $\lambda = \lambda_1$, différente de zéro et qui s'annule à la frontière. Deux solutions fondamentales satisfont à une relation d'orthogonalité. Soient, en effet, k_1, k_2 les valeurs de k correspondant à λ_1 et λ_2 ; on a immédiatement

$$\int (u_2 \Delta_2 u_1 + \dots) d\tau = k_1 \int \theta_1 \theta_2 d\tau,$$

$$\int (u_1 \Delta_2 u_2 + \dots) d\tau = k_2 \int \theta_1 \theta_2 d\tau.$$

D'après le théorème de Green, les deux premières intégrales sont égales; pour $k_1 \neq k_2$, on a donc

$$\int \theta_1 \theta_2 d\tau = 0.$$

C'est la relation cherchée; on en déduit, par une méthode bien connue, que les valeurs de k et, par conséquent, celles de λ sont réelles.

On peut encore observer que

$$\int (u_1 \Delta_2 u_1 + \dots) d\tau = k_1 \int \theta_1^2 d\tau = - \int [(\text{grad } u_1)^2 + \dots] d\tau;$$

k_1 est donc négatif. On a encore

$$\int \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial v_1}{\partial y} d\tau = \int \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial v_1}{\partial x} d\tau$$

(¹) *Sur la solution des équations de l'élasticité, dans le cas où les valeurs des inconnues à la frontière sont données* (Comptes rendus, t. CXXXIII, 2^e sem. 1901, p. 145-147).

et

$$\int [(\text{grad } u_1)^2 + \dots] d\tau = \int \theta_1^2 d\tau + 4 \int \text{rot}^2 \mathbf{S}_1 d\sigma$$

(\mathbf{S}_1 est le déplacement dont les composantes sont u_1, v_1, w_1). Donc

$$|k_1| > 1.$$

Les valeurs absolues des pôles λ_i sont aussi comprises entre 1 et ∞ .

Il est bien connu qu'une classe très étendue d'équations intégrales a la propriété d'avoir les valeurs exceptionnelles (ou *autovaleurs* suivant une dénomination récemment proposée) réelles. En effet, M. Hilbert ⁽¹⁾ a montré que cela a lieu si le *noyau* (*Kern*) de l'équation intégrale est une fonction symétrique en x et y . Nous voulons faire, en terminant, quelques remarques sur ce sujet.

L'équation intégrale que nous envisagerons a la forme

$$(12) \quad \varphi(x) + \lambda \int_0^1 f(x, y) \varphi(y) dy = \psi(y);$$

elle a les deux résolvantes identiques

$$(13) \quad \mathbf{K}(x, y) + \lambda \int \mathbf{K}(x, \xi) f(\xi, y) d\xi = f(x, y),$$

$$(14) \quad \mathbf{K}(x, y) + \lambda \int f(x, \xi) \mathbf{K}(\xi, y) d\xi = f(x, y).$$

Si λ n'est pas autovaleur, on sait que

$$(15) \quad \mathbf{K}(x, y) = \frac{\mathbf{D} \begin{pmatrix} \lambda & x \\ & y \end{pmatrix}}{\mathbf{D}(\lambda)};$$

$\mathbf{D}(\lambda)$ est le déterminant de (12) et la fonction $f(x, y)$ est finie et intégrable.

On fait voir d'abord que *les racines de* $\mathbf{D}(\lambda) = 0$ *sont les pôles de* \mathbf{K} ; si, en effet, λ_i est une racine multiple d'ordre $q + 1$, en se rappelant la relation

$$\mathbf{D}'(\lambda) = \frac{d\mathbf{D}}{d\lambda} = \int \mathbf{D} \begin{pmatrix} \lambda & x \\ & x \end{pmatrix} dx,$$

⁽¹⁾ *Grundzüge einer allg. Theorie der linearen Integralgleichungen*, Erste Mitt. (*Nachrichten d. k. Gesell. d. Wiss. zu Göttingen*, 1904, Heft I, p. 63).

on déduit que $D\left(\begin{smallmatrix} \lambda & x \\ & y \end{smallmatrix}\right)$ est divisible pour $(\lambda - \lambda_1)^q$ et que $D\left(\begin{smallmatrix} \lambda & x \\ & y \end{smallmatrix}\right)$ est divisible pour $(\lambda - \lambda_1)^m$, avec $m \leq q$.

Les pôles sont réels, d'après M. Hilbert. MM. Stekloff et Picard ⁽¹⁾, appliquant une méthode très usitée en Physique mathématique, ont donné des démonstrations bien simples de ce théorème. M. Plemelj ⁽²⁾ ensuite a démontré que *les pôles de K sont simples*; sa démonstration est fondée sur les propriétés des fonctions potentielles. On peut la simplifier comme il suit. D'après (13) et (15), on a

$$D\left(\begin{smallmatrix} \lambda & x \\ & y \end{smallmatrix}\right) + \lambda \int D\left(\begin{smallmatrix} \lambda & x \\ & \xi \end{smallmatrix}\right) f(\xi, y) dy = D(\lambda) f(x, y).$$

Différentions par rapport à λ et faisons $\lambda = \lambda_1$ ($\lambda_1 \neq 0$); on trouvera

$$(16) \quad D\left(\begin{smallmatrix} \lambda_1 & x \\ & y \end{smallmatrix}\right) + \lambda_1 \int D\left(\begin{smallmatrix} \lambda_1 & x \\ & \xi \end{smallmatrix}\right) f(\xi, y) dy = 0,$$

$$D'\left(\begin{smallmatrix} \lambda_1 & x \\ & y \end{smallmatrix}\right) + \lambda_1 \int D'\left(\begin{smallmatrix} \lambda_1 & x \\ & \xi \end{smallmatrix}\right) f(\xi, y) dy + \int D\left(\begin{smallmatrix} \lambda_1 & x \\ & \xi \end{smallmatrix}\right) f(\xi, y) dy = 0,$$

et, par combinaison de ces dernières,

$$(17) \quad D'\left(\begin{smallmatrix} \lambda_1 & x \\ & y \end{smallmatrix}\right) + \lambda_1 \int D'\left(\begin{smallmatrix} \lambda_1 & x \\ & \xi \end{smallmatrix}\right) f(\xi, y) dy = -\frac{1}{\lambda_1} D\left(\begin{smallmatrix} \lambda_1 & x \\ & y \end{smallmatrix}\right).$$

Si nous multiplions (16) par $D'\left(\begin{smallmatrix} \lambda_1 & x \\ & y \end{smallmatrix}\right) dy$, (17) par $D\left(\begin{smallmatrix} \lambda_1 & x \\ & y \end{smallmatrix}\right) dy$ et si nous intégrons, on a

$$\lambda_1 \left[\int D'\left(\begin{smallmatrix} \lambda_1 & x \\ & y \end{smallmatrix}\right) dy \int D\left(\begin{smallmatrix} \lambda_1 & x \\ & \xi \end{smallmatrix}\right) f(\xi, y) dy \right. \\ \left. - \int D\left(\begin{smallmatrix} \lambda_1 & x \\ & y \end{smallmatrix}\right) dy \int D'\left(\begin{smallmatrix} \lambda_1 & x \\ & \xi \end{smallmatrix}\right) f(\xi, y) dy \right] = \frac{1}{\lambda_1} \int D^2\left(\begin{smallmatrix} \lambda_1 & x \\ & y \end{smallmatrix}\right) dy;$$

et, puisque le premier membre est nul (il suffit d'invertir les intégrations), on

⁽¹⁾ W. STEKLOFF, *Théorie générale des fonctions fondamentales* (Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse, 2^e série, t. VI, 1904, p. 351-475). — E. PICARD, *Sur quelques applications de l'équation fonctionnelle de M. Fredholm* (Rend. Circ. matem. di Palermo, t. XXII, 1906, p. 241-259).

⁽²⁾ *Zur Theorie der Fredholmschen Funktionalgleichung* (Monatshefte für Math. u. Physik, Jahrgang XV, 1904, p. 93-128).

déduit

$$D \begin{pmatrix} x \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = 0;$$

mais alors la relation (17) a la même forme que (16); un raisonnement tout à fait semblable nous permettra de démontrer que $D' \begin{pmatrix} x \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = 0$ et ainsi de suite jusqu'à la dérivée d'ordre $q - 1$; par conséquent, $D \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix}$ est divisible pour $(\lambda - \lambda_1)^q$; le théorème est prouvé. Mais on a

$$\varphi(x) = \psi(x) - \lambda \int \mathbf{K}(x, y) \psi(y) dy;$$

on pourra en conclure que $\varphi(x)$, fonction méromorphe de λ , a ses pôles réels et simples (1).

On peut aussi trouver la forme du résidu de \mathbf{K} correspondant au pôle λ_1 . Si

$$\mathbf{K}(x, y) = \frac{\mathbf{H}(x, y)}{\lambda - \lambda_1} + \mathbf{P}(\lambda - \lambda_1),$$

et si, après substitution dans (13), on fait $\lambda = \lambda_1$, on trouve

$$\mathbf{H}(x, y) + \lambda_1 \int \mathbf{H}(x, \xi) f(\xi, y) d\xi = 0.$$

Or si, pour $\lambda = \lambda_1$, D et ses mineurs jusqu'à l'ordre n sont nuls, cette équation intégrale homogène, pour une valeur fixée de x , a n solutions linéairement indépendantes $\psi_1(y), \dots, \psi_n(y)$; et l'on peut prendre

$$\mathbf{H}(x, y) = \varphi_1(x) \psi_1(y) + \dots + \varphi_n(x) \psi_n(y).$$

Si l'on avait employé l'équation (14), nous aurions trouvé

$$\begin{aligned} \varphi_1(y) \left[\varphi_1(x) + \lambda_1 \int f(x, \xi) \varphi_1(\xi) d\xi \right] + \dots \\ + \varphi_n(y) \left[\varphi_n(x) + \lambda_1 \int f(x, \xi) \varphi_n(\xi) d\xi \right] = 0; \end{aligned}$$

(1) T. BOGGIO, *Un théorème sur les équations intégrales* (Comptes rendus, t. CXLV, 2^e semestre 1907, p. 619-622).

les $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ sont les solutions indépendantes de

$$\varphi(x) + \lambda_1 \int f(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi = 0,$$

qui est l'équation adjointe de

$$\psi(y) + \lambda_1 \int f(\xi, y) \psi(\xi) d\xi = 0.$$

Le cas où f n'est pas symétrique et où λ_1 est un pôle d'ordre supérieur à 1 peut être traité de la même manière et a été envisagé par M. Plemelj.

Les mêmes observations peuvent se faire pour les systèmes d'équations.

