

ANNALES  
DE LA  
FACULTÉ DES SCIENCES  
DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE.

---

RECHERCHES  
SUR LES  
ÉQUATIONS INTÉGRALES LINÉAIRES,

PAR M. É. GOURSAT.

---

L'étude des équations intégrales linéaires, où la fonction inconnue figure sous le signe d'intégration, a fait depuis quelques années l'objet d'un grand nombre de travaux, parmi lesquels on doit citer au premier rang le Mémoire fondamental de Fredholm, dans le Tome XXVII des *Acta mathematica*. Depuis l'apparition de ce Mémoire, plusieurs géomètres ont entrepris des recherches dans la voie ouverte par Fredholm, mais la plupart de ces travaux ont eu pour objet soit de retrouver les résultats de Fredholm par d'autres méthodes, soit d'appliquer ces résultats aux équations aux dérivées partielles qui se présentent dans les questions les plus importantes de la Physique mathématique. Ce fait s'explique suffisamment par la facilité vraiment merveilleuse avec laquelle le théorème de Fredholm donne la solution générale de problèmes dont la solution, dans quelques cas particuliers, avait longtemps arrêté les géomètres.

L'objet de ce Mémoire est tout différent. Je me suis proposé de continuer l'étude de la fonction méromorphe  $\Gamma(x, y; \lambda)$ , qui joue un rôle essentiel dans la solution de l'équation de Fredholm, et en particulier de déterminer la partie principale dans le domaine d'un de ses pôles. Lorsque le noyau est symétrique en  $x$

et  $y$ , tous ces pôles sont du premier ordre, et le résidu s'exprime très simplement au moyen des fonctions fondamentales. Mais il n'en est plus de même, en général, avec un noyau non symétrique. Il est alors nécessaire d'adjoindre aux fonctions fondamentales un certain nombre de fonctions, que j'ai appelées *fonctions principales*. L'introduction de ces fonctions, bien loin d'être artificielle, est imposée par la nature même du problème. Il serait aussi impossible de s'en passer que de faire l'étude complète des intégrales d'une équation différentielle linéaire dans le domaine d'un point critique en négligeant les intégrales dont le développement renferme des termes logarithmiques.

Pour ne pas renvoyer constamment le lecteur, désireux de s'initier à cette théorie, à des Mémoires antérieurs, écrits avec des notations variées et à des points de vue différents, j'ai repris rapidement l'exposition des points essentiels, au moins de ceux dont je me sers, mais je donne ci-dessous une liste de quelques travaux sur le sujet, liste qui est sans doute fort incomplète <sup>(1)</sup> :

VOLTERRA. — *Sopra alcune questioni di inversione di integrali definiti* (*Annali di Matematica*, 2<sup>e</sup> série, t. XXV, 1897).

ERIK HOLMGREN. — *Sur un théorème de M. Volterra sur l'inversion des intégrales définies* (*Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino*, t. XXXV, 1900).

FREDHOLM. — *Sur la résolution de quelques équations fonctionnelles* (*Acta mathematica*, t. XXVII, 1903). — *Solution d'un problème fondamental de la théorie de l'élasticité* (*Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik*, Band II; 1905).

D. HILBERT. — *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen* (*Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 1904-1905-1906).

E. SCHMIDT. — *Zur theorie der linearen und nicht linearen Integralgleichungen* (*Mathematische Annalen*, t. LXIII, p. 433-476, et t. LXIV, p. 161-174). — *Ueber die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. XXV, 1908).

ÉMILE PICARD. — *Sur quelques applications de l'équation fonctionnelle de M. Fredholm* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 1906). — Voir aussi du même auteur plusieurs articles dans les *Annales de l'École Normale supérieure*, 1906-1907, et les *Comptes rendus* (1904-1907).

---

<sup>(1)</sup> Les principaux résultats de ce travail ont été résumés dans deux Notes présentées à l'Académie des Sciences (*Comptes rendus*, 21 octobre et 4 novembre 1907). M. Heywood avait obtenu de son côté quelques-uns de ces résultats (*Comptes rendus*, 25 novembre 1907).

- HADAMARD. — *Recherches sur les solutions fondamentales et l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1903 et 1905).
- OLIVER DIMEN KELLOGG. — *Zur Theorie der Integralgleichungen und der Dirichlet'schen Principis* (*Inaugural-Dissertation*, Göttingen, 1902).
- ANDRAE. — *Hilfsmittel zu einer allgemeinen Theorie linearen elliptischen Differentialgleichungen 2. Ordnung* (*Inaugural-Dissertation*, Göttingen, 1903).
- JOSEF PLEMELJ. — *Ueber lineare Randwertaufgaben der Potentialtheorie* (*Monatshefte für Mathematik und Physik*, Jahrgang 1904, p. 93-128 et 337-411).
- WERA LEBEDEFF. — *Die Theorie der Integralgleichungen in Anwendung auf einige reihenentwickelungen* (*Inaugural-Dissertation*, Göttingen, 1906).
- A. KNESER. — *Die Theorie der Integralgleichungen und die Darstellung willkürlicher Funktionen in der mathematischen Physik* (*Mathematische Annalen*, t. LXIII, p. 477-524). — *Ein Beitrag zur Theorie der Integralgleichungen* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 1906).
- H. BATEMAN. — *The inversion of a definite integral* (*Ibid.*, p. 525-548).
- WILLIAM DEWEENE CAIRUS. — *Die Anwendung der Integralgleichungen auf die zweite Variation bei isoperimetrischen Problemen* (*Inaugural-Dissertation*, Göttingen, 1907).
- E. BOUNITSKY. — *Un système particulier d'équations intégrales* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2<sup>e</sup> série, t. XXXI, 1907).
- LAURICELLA. — *Sull' integrazione delle equazioni dell' equilibrio dei corpi elastici isotropi* (*Lincei Rendiconti*, t. XV; avril, juin et juillet 1906). — *Sulla integrazione dell' equazione  $\Delta^4 V = 0$*  (*Lincei Rendiconti*, t. XVI, p. 373-383, 15 septembre 1907).
- MARCOLONGO. — *La Teoria delle equazioni integrale ei le sue applicazioni alla Fisica matematica* (*Lincei Rendiconti*, t. XVI, mai 1907).
- BOGGIO. — *Nuova risoluzione di un problema fondamentale della teoria dell' elasticità* (*Lincei Rendiconti*, t. XVI, août 1907). — *Determinazione della deformazione di un corpo elastico per date tensioni superficiali* (*Lincei Rendiconti*, t. XVI, octobre 1907).
- ERIK HOLMGREN. — *Sur une application de l'équation intégrale de M. Volterra* (*Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik*, Band III, 1906). — *Sur la Théorie des équations intégrales linéaires* (*Ibid.*).
- LALESKO. — *Sur l'équation de Volterra* (*Thèse de Doctorat*; 1908).
- BURGATTI. — *Diverses notes dans les Lincei Rendiconti* (1903).

## I.

1. Une équation intégrale linéaire de seconde espèce, ou, plus brièvement, une équation de Fredholm est une équation de la forme

$$(1) \quad \varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \mathbf{H}(x, s) \varphi(s) ds;$$

$f(x)$  et  $\mathbf{H}(x, y)$  sont des fonctions données, déterminées dans le domaine R défini par les inégalités

$$(2) \quad a \leq x \leq b, \quad a \leq y \leq b,$$

$\lambda$  un paramètre,  $\varphi(x)$  la fonction inconnue. La fonction  $\mathbf{H}(x, y)$  est appelée le *noyau* <sup>(1)</sup> (Kern).

Supposons d'abord ce noyau continu, ou tout au moins borné et intégrable dans le domaine R, ainsi que  $f(x)$ , et cherchons un développement en série entière, ordonné suivant les puissances croissantes de  $\lambda$ , satisfaisant *formellement* à l'équation (1),

$$(3) \quad \varphi(x) = \mathbf{A}_0(x) + \mathbf{A}_1(x)\lambda + \mathbf{A}_2(x)\lambda^2 + \dots + \mathbf{A}_n(x)\lambda^n + \dots$$

En substituant ce développement à la place de  $\varphi$ , dans les deux membres de l'équation (1), il vient

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}_0(x) + \mathbf{A}_1(x)\lambda + \mathbf{A}_2(x)\lambda^2 + \dots + \mathbf{A}_n(x)\lambda^n + \dots \\ &= f(x) + \lambda \int_a^b \mathbf{H}(x, s) [\mathbf{A}_0(s) + \mathbf{A}_1(s)\lambda + \dots + \mathbf{A}_n(s)\lambda^n + \dots] ds. \end{aligned}$$

En égalant les coefficients des mêmes puissances de  $\lambda$  dans les deux membres, on obtient les relations

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0(x) &= f(x), \\ \mathbf{A}_1(x) &= \int_a^b \mathbf{H}(x, s) f(s) ds, \\ \mathbf{A}_2(x) &= \int_a^b \mathbf{H}(x, s) \mathbf{A}_1(s) ds, \\ &\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

---

<sup>(1)</sup> Les variables  $x$  et  $y$  sont supposées réelles, mais les fonctions  $\mathbf{H}$ ,  $f$ ,  $\varphi$  peuvent être complexes.

On voit que les coefficients  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  se déterminent de proche en proche au moyen de la relation générale de récurrence

$$(4) \quad A_n(x) = \int_a^b \mathbf{H}(x, s) A_{n-1}(s) ds.$$

Considérons d'abord  $A_2(x)$ ; nous pouvons l'écrire

$$A_2(x) = \int_a^b \mathbf{H}(x, t) A_1(t) dt,$$

ou, en remplaçant  $A_1(t)$  par sa valeur

$$A_1(t) = \int_a^b \mathbf{H}(t, s) f(s) ds,$$

il vient

$$A_2(x) = \int_a^b \int_a^b \mathbf{H}(x, t) \mathbf{H}(t, s) f(s) ds dt,$$

ou, en intervertissant l'ordre des intégrations,

$$A_2(x) = \int_a^b f(s) ds \int_a^b \mathbf{H}(x, t) \mathbf{H}(t, s) dt.$$

Cette formule peut encore s'écrire

$$A_2(x) = \int_a^b \mathbf{H}^{(2)}(x, s) f(s) ds,$$

en posant

$$\mathbf{H}^{(2)}(x, y) = \int_a^b \mathbf{H}(x, t) \mathbf{H}(t, y) dt.$$

On verra de même qu'on a

$$A_3(x) = \int_a^b \mathbf{H}^{(3)}(x, s) f(s) ds,$$

en posant

$$\mathbf{H}^{(3)}(x, y) = \int_a^b \mathbf{H}(x, t) \mathbf{H}^{(2)}(t, y) dt.$$

Nous sommes ainsi conduits à introduire une suite indéfinie de noyaux

$$(5) \quad \mathbf{H}^{(1)}(x, y) = \mathbf{H}(x, y), \quad \mathbf{H}^{(2)}(x, y), \quad \mathbf{H}^{(3)}(x, y), \quad \dots, \quad \mathbf{H}^{(n)}(x, y), \quad \dots,$$

se déduisant du premier au moyen de la formule de récurrence

$$(6) \quad \mathbf{H}^{(n)}(x, y) = \int_a^b \mathbf{H}(x, t) \mathbf{H}^{(n-1)}(t, y) dt.$$

Le coefficient  $A_n(x)$  a pour expression

$$(7) \quad A_n(x) = \int_a^b \mathbf{H}^{(n)}(x, s) f(s) ds;$$

il suffit évidemment de vérifier que, si la loi est vraie pour  $A_{n-1}(x)$ , elle est vraie aussi pour  $A_n(x)$ . Or on a, d'après la relation (4),

$$A_n(x) = \int_a^b \mathbf{H}(x, s) A_{n-1}(s) ds;$$

si la loi est vraie pour  $A_{n-1}(x)$ , on a

$$A_{n-1}(s) = \int_a^b \mathbf{H}^{(n-1)}(s, t) f(t) dt$$

et, par suite,

$$A_n(x) = \int_a^b \int_a^b \mathbf{H}(x, s) \mathbf{H}^{n-1}(s, t) f(t) dt ds,$$

ce qu'on peut encore écrire

$$A_n(x) = \int_a^b f(t) dt \int_a^b \mathbf{H}(x, s) \mathbf{H}^{(n-1)}(s, t) ds,$$

ou

$$A_n(x) = \int_a^b \mathbf{H}^{(n)}(x, t) f(t) dt,$$

relation qui est évidemment équivalente à la relation (7). Donc la loi est générale, et nous obtenons pour l'équation (1) une solution formelle

$$(8) \quad \varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \Gamma(x, s; \lambda) f(s) ds,$$

où l'on a posé

$$(9) \quad \Gamma(x, y; \lambda) = \mathbf{H}^{(1)}(x, y) + \lambda \mathbf{H}^{(2)}(x, y) + \dots + \lambda^{n-1} \mathbf{H}^n(x, y) + \dots$$

2. L'opération par laquelle on déduit  $\mathbf{H}^{(2)}(x, y)$  de  $\mathbf{H}(x, y)$  s'appelle une *itération*; les noyaux suivants  $\mathbf{H}^{(3)}(x, y)$ , ...,  $\mathbf{H}^{(n)}(x, y)$ , ... se déduisent tous du noyau primitif par des itérations successives. De la définition de ces noyaux successifs on déduit aisément un certain nombre de propriétés qui seront utiles dans la suite. Ainsi le  $n^{\text{ième}}$  noyau itéré  $\mathbf{H}^{(n)}(x, y)$  peut se mettre sous forme d'une intégrale multiple d'ordre  $n - 1$

$$(10) \quad \mathbf{H}^{(n)}(x, y) = \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b \mathbf{H}(x, t_1) \mathbf{H}(t_1, t_2) \dots \mathbf{H}(t_{n-1}, y) dt_1 \dots dt_{n-1}.$$

On a, quels que soient les entiers positifs  $\mu$  et  $\nu$ ,

$$(11) \quad \mathbf{H}^{(\mu+\nu)}(x, y) = \int_a^b \mathbf{H}^{(\mu)}(x, t) \mathbf{H}^{(\nu)}(t, y) dt,$$

et il serait facile de généraliser cette dernière formule. On en déduit, par exemple, que les noyaux  $\mathbf{H}^{(2\mu)}(x, y)$ ,  $\mathbf{H}^{(3\mu)}(x, y)$ , ... se déduisent par des itérations successives du noyau  $\mathbf{H}^{(\mu)}(x, y)$ .

Supposons que, dans tout le domaine R, on ait

$$|\mathbf{H}(x, y)| < \mathbf{M};$$

de la relation générale de récurrence (6) on déduit aisément de proche en proche qu'on a, dans tout le domaine R,

$$|\mathbf{H}^{(n)}(x, y)| < \mathbf{M}^n (b - a)^{n-1}.$$

Par suite, si l'on donne à  $\lambda$  une valeur telle que

$$(12) \quad |\lambda| < \frac{1}{\mathbf{M}(b-a)},$$

la série (9) est uniformément convergente dans le domaine R. Inversement, si l'on donne à  $x$  et  $y$  des valeurs constantes, la série entière en  $\lambda$  a un rayon de convergence <sup>(1)</sup> au moins égal à  $\frac{1}{\mathbf{M}(b-a)}$ .

Si le paramètre  $\lambda$  satisfait à la relation (12), ou, plus généralement, si la série (9) est uniformément convergente pour la valeur attribuée à ce paramètre, on vérifie immédiatement que la fonction  $\Gamma(x, y; \lambda)$  satisfait aux deux équations fonctionnelles

$$(13) \quad \Gamma(x, y; \lambda) = \mathbf{H}(x, y) + \lambda \int_a^b \mathbf{H}(x, t) \Gamma(t, y; \lambda) dt,$$

$$(14) \quad \Gamma(x, y; \lambda) = \mathbf{H}(x, y) + \lambda \int_a^b \mathbf{H}(t, y) \Gamma(x, t; \lambda) dt.$$

(1) M. SCHMIDT a indiqué une limite plus avantageuse pour le rayon de convergence (*Mathematische Annalen*, Band 64, p. 162-163). De l'inégalité de Schwarz, on déduit en effet l'inégalité

$$[\mathbf{H}^{(n)}(x, y)]^2 \leq \left\{ \int_a^b \int_a^b [\mathbf{H}(x, y)]^2 dx dy \right\}^{n-2} \times \int_a^b [\mathbf{H}(x, z)]^2 dz \times \int_a^b [\mathbf{H}(t, y)]^2 dt.$$

La série (9) sera donc sûrement convergente pourvu que l'on ait  $|\lambda| < \frac{1}{\sqrt{L}}$ , L désignant l'expression

$$\int_a^b \int_a^b [\mathbf{H}(x, y)]^2 dx dy.$$

Ces deux relations permettent aisément de vérifier que la fonction  $\varphi(x)$ , donnée par la formule (8), satisfait bien à l'équation de Fredholm et, de plus, que c'est la seule solution.

De l'équation (8) nous tirons, en effet,

$$\int_a^b \mathbf{H}(x, t) \varphi(t) dt = \int_a^b \mathbf{H}(x, t) f(t) dt + \lambda \int_a^b \int_a^b \Gamma(t, s, \lambda) \mathbf{H}(x, t) f(s) ds dt,$$

ce qui, d'après la relation (13), peut encore s'écrire

$$\int_a^b \mathbf{H}(x, t) \varphi(t) dt = \int_a^b \mathbf{H}(x, t) f(t) dt + \int_a^b f(s) ds [\Gamma(x, s, \lambda) - \mathbf{H}(x, s)]$$

ou

$$\int_a^b \mathbf{H}(x, t) \varphi(t) dt = \int_a^b \Gamma(x, s, \lambda) f(s) ds.$$

On a donc aussi, en combinant cette relation avec la formule (8),

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \mathbf{H}(x, t) \varphi(t) dt.$$

Inversement, soit  $\varphi(x)$  une solution de l'équation (1). On déduit de cette équation

$$\int_a^b \Gamma(x, s; \lambda) \varphi(s) ds = \int_a^b \Gamma(x, s; \lambda) f(s) ds + \lambda \int_a^b \int_a^b \mathbf{H}(s, t) \Gamma(x, s; \lambda) \varphi(t) ds dt$$

ou, en tenant compte de la formule (14),

$$\int_a^b \Gamma(x, s, \lambda) \varphi(s) ds = \int_a^b \Gamma(x, s; \lambda) f(s) ds + \int_a^b \varphi(t) [\Gamma(x, t; \lambda) - \mathbf{H}(x, t)] dt,$$

c'est-à-dire

$$\int_a^b \Gamma(x, s; \lambda) f(s) ds = \int_a^b \mathbf{H}(x, t) \varphi(t) dt.$$

En combinant cette dernière égalité avec l'équation (1) elle-même, on retrouve la formule (8).

En résumé, *pourvu que la valeur absolue de  $\lambda$  soit suffisamment petite, l'équation de Fredholm admet une solution et une seule, qui est donnée par la formule (8).*

La fonction  $\Gamma(x, y; \lambda)$ , qui figure dans cette formule, s'appelle, pour ce motif, le *noyau résolvant*.

En permutant les variables  $x$  et  $y$  dans le noyau  $\mathbf{H}(x, y)$ , on obtient un nouveau noyau  $\mathbf{H}(y, x)$  qui est, en général, différent du premier. L'équation de Fredholm correspondante

$$(15) \quad \psi(x) = g(x) + \lambda \int_a^b \mathbf{H}(s, x) \psi(s) ds$$

est dite *associée* à l'équation (1). On voit immédiatement que les noyaux tirés de  $\mathbf{H}(y, x)$  par des itérations répétées se déduisent aussi des noyaux correspondants  $\mathbf{H}^{(n)}(x, y)$  en permutant  $x$  et  $y$ , de sorte que le noyau résolvant relatif à l'équation (15) est précisément  $\Gamma(y, x; \lambda)$ . La conclusion est la même que pour l'équation (1); si la valeur absolue de  $\lambda$  est suffisamment petite, l'équation (15) admet une solution et une seule, donnée par la formule

$$(16) \quad \psi(x) = g(x) + \lambda \int_a^b \Gamma(s, x; \lambda) g(s) ds.$$

3. On a souvent à étudier des équations de Fredholm où le noyau  $\mathbf{H}(x, y)$  devient infini dans le domaine  $\mathbf{R}$ , quoique l'intégrale conserve un sens. Si l'on applique l'itération à ce noyau  $\mathbf{H}(x, y)$ , il arrive généralement (1), dans les applications les plus usuelles, qu'à partir d'une certaine valeur de  $n$  tous les noyaux successifs  $\mathbf{H}^{(n)}(x, y)$ ,  $\mathbf{H}^{(n+1)}(x, y)$ , ... restent finis. Nous nous bornerons à ce cas. La série  $\Gamma(x, y; \lambda)$  présente alors au début un certain nombre de termes qui peuvent devenir infinis pour certains systèmes de valeurs de  $x$  et de  $y$ , mais à partir du terme  $\lambda^{n-1} \mathbf{H}^{(n)}(x, y)$ , tous les coefficients restent finis. Cette série est encore uniformément convergente dans le domaine  $\mathbf{R}$ , pourvu que la valeur

(1) Il peut arriver qu'on n'arrive jamais à un noyau borné, aussi loin qu'on aille dans la suite des itérations. Prenons, par exemple,

$$\mathbf{H}(x, y) = \sqrt{\frac{y}{x}}, \quad a = 0, \quad b = 1;$$

on a

$$\mathbf{H}^{(2)}(x, y) = \int_0^1 \sqrt{\frac{s}{x}} \sqrt{\frac{y}{s}} ds = \sqrt{\frac{y}{x}}.$$

Tous les noyaux successifs  $\mathbf{H}^{(l)}(x, y)$  sont égaux au premier. Le noyau résolvant est égal à une fonction rationnelle de  $\lambda$

$$\Gamma(x, y; \lambda) = \sqrt{\frac{y}{x}} (1 + \lambda + \lambda^2 + \dots) = \sqrt{\frac{y}{x}} \frac{1}{1 - \lambda}.$$

absolue de  $\lambda$  soit inférieure à une certaine limite. On le démontre aisément en montrant, comme plus haut, que les séries

$$\begin{aligned} & \lambda^{n-1} \mathbf{H}^{(n)} + \lambda^{2n-1} \mathbf{H}^{(2n)} + \dots + \lambda^{np-1} \mathbf{H}^{(pn)} + \dots, \\ & \lambda^n \mathbf{H}^{(n+1)} + \lambda^{2n} \mathbf{H}^{(2n+1)} + \dots + \lambda^{np} \mathbf{H}^{(pn+1)} + \dots, \\ & \dots \end{aligned}$$

ont des rayons de convergence finis.

Tout ce qu'on vient de dire relativement au cas où le noyau  $\mathbf{H}(x, y)$  est fini s'applique donc sans modification au cas plus général envisagé ici.

4. La formule (8) donne la solution de l'équation (1), quelle que soit la valeur de  $\lambda$ , lorsque le noyau résolvant  $\Gamma(x, y; \lambda)$  est une fonction entière de  $\lambda$ . Il en est ainsi dans le cas étudié d'abord par M. Volterra (1), où le noyau  $\mathbf{H}(x, y)$  est nul pour  $y > x$ , mais ce n'est pas le seul cas.

Supposons, par exemple, que le noyau  $\mathbf{H}(x, y)$  soit *orthogonal à lui-même*, c'est-à-dire vérifie la relation

$$\int_a^b \mathbf{H}(x, s) \mathbf{H}(s, y) ds = 0,$$

quels que soient  $x$  et  $y$ . On a alors  $\mathbf{H}^{(2)}(x, y) = 0$  et, par suite,

$$\mathbf{H}^{(3)}(x, y) = 0, \quad \dots, \quad \mathbf{H}^{(n)}(x, y) = 0, \quad \dots$$

Le noyau résolvant  $\Gamma(x, y; \lambda)$  se réduit à  $\mathbf{H}(x, y)$ , et la solution de l'équation de Fredholm a pour expression

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \mathbf{H}(x, s) f(s) ds.$$

Comme exemple de noyau orthogonal à lui-même on peut citer la série

$$\mathbf{H}(x, y) = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i \sin(ix) \cos(iy),$$

la série  $\sum |a_i|$  étant convergente, et les limites  $a$  et  $b$  étant 0 et  $2\pi$ .

Il peut aussi arriver que la série se réduise à un polynôme de degré quelconque.

(1) *Annali di Matematica*, 1896.

Par exemple, si l'on prend

$$\mathbf{H}(x, y) = a_1 \sin x \sin 2y + a_2 \sin 2x \sin 3y + \dots + a_p \sin px \sin (p+1)y,$$

les limites  $a$  et  $b$  étant 0 et  $2\pi$ ,  $\Gamma(x, y; \lambda)$  est un polynome de degré  $p - 1$  en  $\lambda$ .

Mais, dans le cas général, si l'on donne à  $x$  et à  $y$  des valeurs déterminées, la série entière  $\Gamma(x, y; \lambda)$  a un rayon de convergence *fini*. L'étude de l'équation (1) conduisait tout naturellement à étudier le prolongement analytique de cette série entière en dehors de son cercle de convergence. On aurait pu penser *a priori* qu'on obtiendrait ainsi des fonctions analytiques de natures très différentes, suivant le noyau  $\mathbf{H}(x, y)$ . Il résulte, au contraire, du théorème fondamental de M. Fredholm que *le noyau*  $\Gamma(x, y; \lambda)$  *est une fonction méromorphe du paramètre*  $\lambda$ , *dont les pôles sont indépendants de*  $x$  *et de*  $y$ .

Nous établirons auparavant quelques propriétés de  $\Gamma(x, y; \lambda)$ , qui se déduisent facilement du développement (9). Ces propriétés, que nous démontrons seulement pour les valeurs du paramètre  $\lambda$  dont le module est assez petit, subsistent, d'après leur nature même, pour toutes les valeurs de la variable complexe  $\lambda$ .

Soit  $\Gamma_n(x, y; \lambda)$  le noyau résolvant correspondant au noyau  $\mathbf{H}^{(n)}(x, y)$ ; d'après la formule (11), on a

$$\Gamma_n(x, y; \lambda) = \mathbf{H}^{(n)}(x, y) + \lambda \mathbf{H}^{(2n)}(x, y) + \lambda^2 \mathbf{H}^{(3n)}(x, y) + \dots;$$

cette fonction  $\Gamma_n(x, y; \lambda)$  s'exprime très simplement au moyen de  $\Gamma(x, y; \lambda)$ . Multiplions, en effet, les deux termes de la formule (9) par  $\lambda$ , et remplaçons successivement  $\lambda$  par  $\omega\lambda$ ,  $\omega^2\lambda$ ,  $\dots$ ,  $\omega^{n-1}\lambda$ ,  $\omega$  désignant une racine primitive de l'équation  $\omega^n = 1$ . En ajoutant, membre à membre, les relations ainsi obtenues, il reste

$$\begin{aligned} & \lambda[\Gamma(x, y; \lambda) + \omega\Gamma(x, y; \omega\lambda) + \dots + \omega^{n-1}\Gamma(x, y; \omega^{n-1}\lambda)] \\ &= n\lambda^n [\mathbf{H}^{(n)}(x, y) + \lambda^n \mathbf{H}^{(2n)}(x, y) + \dots] \\ &= n\lambda^n \Gamma_n(x, y; \lambda^n). \end{aligned}$$

On en tire

$$\Gamma_n(x, y; \lambda^n) = \frac{\Gamma(x, y; \lambda) + \omega\Gamma(x, y; \omega\lambda) + \dots + \omega^{n-1}\Gamma(x, y; \omega^{n-1}\lambda)}{n\lambda^{n-1}}$$

et, par suite, en remplaçant  $\lambda$  par  $\lambda^{\frac{1}{n}}$ ,

$$(17) \quad \Gamma_n(x, y; \lambda) = \frac{\Gamma\left(x, y; \lambda^{\frac{1}{n}}\right) + \omega\Gamma\left(x, y; \omega\lambda^{\frac{1}{n}}\right) + \dots + \omega^{n-1}\Gamma\left(x, y; \omega^{n-1}\lambda^{\frac{1}{n}}\right)}{n\lambda^{1-\frac{1}{n}}}.$$

Inversement on peut déduire  $\Gamma(x, y; \lambda)$  de  $\Gamma_n(x, y; \lambda)$ . Nous avons, en

effet,

$$\int_a^b \mathbf{H}^{(i)}(x, s) \Gamma_n(s, y; \lambda) ds = \mathbf{H}^{(n+i)}(x, y) + \lambda \mathbf{H}^{(2n+i)}(x, y) + \lambda^2 \mathbf{H}^{(3n+i)}(x, y) + \dots,$$

et, par conséquent, on peut encore écrire la formule (9), en groupant les termes de  $n$  en  $n$  à partir du  $n^{\text{ième}}$ ,

$$\begin{aligned} \Gamma(x, y; \lambda) &= \mathbf{H}^{(1)}(x, y) + \lambda \mathbf{H}^{(2)}(x, y) + \dots + \lambda^{n-2} \mathbf{H}^{(n-1)}(x, y) \\ &\quad + \lambda^{n-1} \Gamma_n(x, y; \lambda^n) + \lambda^n \int_a^b \mathbf{H}(x, s) \Gamma_n(s, y; \lambda^n) ds + \dots \\ &\quad + \lambda^{2n-2} \int_a^b \mathbf{H}^{(n-1)}(x, s) \Gamma_n(s, y; \lambda^n) ds, \end{aligned}$$

ou encore

$$(18) \quad \Gamma(x, y; \lambda) = \mathbf{H}^{(1)}(x, y) + \dots + \lambda^{n-2} \mathbf{H}^{(n-1)}(x, y) \\ + \lambda^{n-1} \Gamma_n(x, y; \lambda^n) + \lambda^n \int_a^b \mathbf{K}(x, s) \Gamma_n(s, y; \lambda^n) ds,$$

en posant

$$\mathbf{K}(x, y) = \mathbf{H}^1(x, y) + \lambda \mathbf{H}^{(2)}(x, y) + \dots + \lambda^{n-2} \mathbf{H}^{(n-1)}(x, y).$$

Signalons encore les propriétés suivantes dont la démonstration est bien facile. Considérons la fonction  $\Gamma(x, y; \lambda)$  comme un noyau, et appliquons-lui le même procédé d'itération; nous obtenons une suite de fonctions, dont la première  $\Gamma^{(1)} = \Gamma(x, y; \lambda)$ , et que nous désignerons par une notation analogue

$$\Gamma^{(2)}(x, y; \lambda), \quad \Gamma^{(3)}(x, y; \lambda), \quad \dots, \quad \Gamma^{(n)}(x, y; \lambda), \quad \dots;$$

ces fonctions se calculent de proche en proche par la formule de récurrence

$$\Gamma^{(n)}(x, y; \lambda) = \int_a^b \Gamma(x, s; \lambda) \Gamma^{(n-1)}(s, y; \lambda) ds.$$

On vérifie aisément, de proche en proche, qu'on a

$$\Gamma^{(2)}(x, y; \lambda) = \frac{\partial \Gamma^{(1)}}{\partial \lambda}, \quad \Gamma^{(3)}(x, y; \lambda) = \frac{1}{1 \cdot 2} \frac{\partial^2 \Gamma^{(1)}}{\partial \lambda^2}, \quad \dots$$

et, d'une façon générale,

$$\Gamma^{(n)}(x, y; \lambda) = \frac{1}{(n-1)!} \frac{\partial^n \Gamma^{(1)}}{\partial \lambda^n}.$$

Le développement de la fonction  $\Gamma(x, y; \lambda + \mu)$  suivant les puissances de  $\lambda$

par la formule de Taylor a donc la forme suivante :

$$(19) \quad \Gamma(x, y; \lambda + \mu) = \Gamma(x, y; \mu) + \lambda \Gamma^{(2)}(x, y; \mu) + \dots + \lambda^{n-1} \Gamma^{(n)}(x, y; \mu) + \dots$$

On voit donc que, si l'on considère  $\Gamma(x, y; \mu)$  comme le noyau d'une équation de Fredholm, le noyau résolvant correspondant est précisément  $\Gamma(x, y; \lambda + \mu)$ . Ceci permet de généraliser les relations fonctionnelles (13) et (14) qui ne sont que des cas particuliers de la relation générale

$$(20) \quad \Gamma(x, y; \lambda + \mu) = \Gamma(x, y; \mu) + \lambda \int_a^b \Gamma(x, t; \mu) \Gamma(t, y; \lambda + \mu) dt.$$

En supposant  $\mu = 0$ , on retrouve la formule (13); en remplaçant  $\lambda$  par  $-\lambda$  et  $\mu$  par  $\lambda$ , on obtient la formule (14).

Cette formule (20) peut encore s'écrire, d'une façon plus symétrique, en remplaçant  $\mu$  par  $\lambda$  et  $\lambda$  par  $\lambda' - \lambda$ ,

$$(20') \quad \Gamma(x, y; \lambda') - \Gamma(x, y; \lambda) = (\lambda' - \lambda) \int_a^b \Gamma(x, t; \lambda) \Gamma(t, y; \lambda') dt,$$

et il suffit de faire tendre  $\lambda'$  vers  $\lambda$  pour retrouver la relation

$$\frac{\partial \Gamma(x, y; \lambda)}{\partial \lambda} = \int_a^b \Gamma(x, t; \lambda) \Gamma(t, y; \lambda) dt,$$

qui caractérise le noyau résolvant, jointe à la condition initiale

$$\Gamma(x, y; 0) = \mathbf{H}(x, y).$$

L'équation de Fredholm (1) et l'équation (8) qui en donne la solution peuvent être considérées comme inverses l'une de l'autre. En effet, considérons, dans l'équation (8),  $\varphi(x)$  comme donnée et  $f(x)$  comme la fonction inconnue, et écrivons-la, sous une forme un peu plus générale,

$$f(x) = \varphi(x) + \mu \int_a^b \Gamma(x, s; \lambda) f(s) ds.$$

C'est une équation de Fredholm, où le noyau est  $\Gamma(x, y; \lambda)$ . Le noyau résolvant correspondant est  $\Gamma(x, y; \lambda + \mu)$  et, pour la valeur  $\mu = -\lambda$  du paramètre, ce noyau résolvant se réduit à  $\Gamma(x, y; 0) = \mathbf{H}(x, y)$ . La solution  $f(x)$  de l'équation (8) a donc pour expression

$$f(x) = \varphi(x) - \lambda \int_a^b \mathbf{H}(x, s) \varphi(s) ds,$$

et nous retrouvons précisément l'équation (1) elle-même.

Tous ces calculs supposent, bien entendu, que les modules de  $\lambda$  et de  $\bar{\mu}$  sont suffisamment petits, mais il résulte des propriétés générales des fonctions analytiques qu'elles subsistent dans tout le domaine d'existence de la fonction analytique  $\Gamma(x, y; \lambda)$  du paramètre  $\lambda$ .

*Remarque.* — La relation (13)

$$(13) \quad \Gamma(x, y; \lambda) = \mathbf{H}(x, y) + \lambda \int_a^b \mathbf{H}(x, t) \Gamma(t, y; \lambda) dt$$

caractérise le noyau résolvant  $\Gamma(x, y; \lambda)$  car, si l'on cherche à développer  $\Gamma(x, y; \lambda)$  suivant les puissances de  $\lambda$  en tenant compte de la condition (13), on retrouve précisément le développement (9).

Soit  $r(x)$  une fonction quelconque de  $x$ ; de la relation (13) on tire une relation de même forme

$$(13') \quad \Gamma_1(x, y; \lambda) = \mathbf{H}_1(x, y) + \lambda \int_a^b \mathbf{H}_1(x, t) \Gamma_1(t, y; \lambda) dt,$$

où l'on a posé

$$\mathbf{H}_1(x, y) = \frac{r(x)}{r(y)} \mathbf{H}(x, y), \quad \Gamma_1(x, y; \lambda) = \frac{r(x)}{r(y)} \Gamma(x, y; \lambda).$$

Par suite, si l'on multiplie  $\mathbf{H}(x, y)$  par un facteur de la forme  $\frac{r(x)}{r(y)}$ , le noyau résolvant correspondant  $\Gamma(x, y; \lambda)$  est multiplié par le même facteur.

Nous supposons, bien entendu, que les intégrales telles que

$$\int_a^b \mathbf{H}(x, s) \frac{r(x)}{r(s)} f(s) ds$$

ont un sens lorsque  $f(s)$  est une fonction bornée quelconque.

§. M. Fredholm a démontré son théorème en considérant l'équation (1) comme limite d'une équation aux différences finies. Je rappellerai en quelques mots ses principaux résultats.

Supposons le noyau  $\mathbf{H}(x, y)$  borné, et posons

$$\mathbf{H} \begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_p \\ y_1, y_2, \dots, y_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{H}(x_1, y_1) & \mathbf{H}(x_1, y_2) & \dots & \mathbf{H}(x_1, y_p) \\ \mathbf{H}(x_2, y_1) & \mathbf{H}(x_2, y_2) & \dots & \mathbf{H}(x_2, y_p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{H}(x_p, y_1) & \mathbf{H}(x_p, y_2) & \dots & \mathbf{H}(x_p, y_p) \end{vmatrix},$$

et

$$(21) \quad \mathbf{D}(\lambda) = 1 + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p \lambda^p}{p!} \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b \mathbf{H} \begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_p \\ x_1, x_2, \dots, x_p \end{pmatrix} dx_1 \dots dx_p,$$

$$(22) \quad \mathfrak{H}(x, y; \lambda) = \mathbf{H}(x, y) + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p \lambda^p}{p!} \int_a^b \dots \int_a^b \mathbf{H} \begin{pmatrix} x, x_1, x_2, \dots, x_p \\ y, x_1, x_2, \dots, x_p \end{pmatrix} dx_1 \dots dx_p;$$

$\mathbf{D}(\lambda)$  et  $\mathfrak{H}(x, y; \lambda)$  sont des fonctions entières <sup>(1)</sup> de  $\lambda$  vérifiant les relations

$$(23) \quad \mathfrak{H}(x, y; \lambda) = \mathbf{H}(x, y) \mathbf{D}(\lambda) + \lambda \int_a^b \mathbf{H}(x, s) \mathfrak{H}(s, y; \lambda) ds,$$

$$(24) \quad \mathfrak{H}(x, y; \lambda) = \mathbf{H}(x, y) \mathbf{D}(\lambda) + \lambda \int_a^b \mathbf{H}(s, y) \mathfrak{H}(x, s; \lambda) ds.$$

Ces relations sont tout à fait analogues aux relations (13) et (14), et deviennent identiques à celles-ci, en divisant par  $\mathbf{D}(\lambda)$  et remplaçant le quotient  $\mathfrak{H}(x, y; \lambda) : \mathbf{D}(\lambda)$  par  $\Gamma(x, y; \lambda)$ . Les calculs du n° 2 prouvent donc que, si  $\lambda$  n'est pas racine de l'équation  $\mathbf{D}(\lambda) = 0$ , l'équation (1) admet une solution et une seule représentée par la formule

$$(25) \quad \varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \frac{\mathfrak{H}(x, s; \lambda)}{\mathbf{D}(\lambda)} f(s) ds.$$

Les relations (23) et (24) sont établies directement par Fredholm; il nous suffira de vérifier que l'on a

$$(26) \quad \frac{\mathfrak{H}(x, y; \lambda)}{\mathbf{D}(\lambda)} = \Gamma(x, y; \lambda);$$

cette vérification se fait aisément comme il suit :

Désignons par  $(-1)^n \mathfrak{a}_n$  et par  $(-1)^n \mathfrak{b}_n$  les coefficients de  $\lambda^n$  dans  $\mathbf{D}(\lambda)$  et  $\mathfrak{H}(x, y; \lambda)$  respectivement; on a

$$\int_a^b \dots \int_a^b \mathbf{H} \begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_n \\ x_1, x_2, \dots, x_n \end{pmatrix} dx_1 \dots dx_n = n! \mathfrak{a}_n,$$

$$\int_a^b \dots \int_a^b \mathbf{H} \begin{pmatrix} x, x_1, \dots, x_n \\ y, x_1, \dots, x_n \end{pmatrix} dx_1 \dots dx_n = n! \mathfrak{b}_n.$$

<sup>(1)</sup> Ce point résulte d'un théorème de M. Hadamard sur les déterminants (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1893, p. 240). D'après ce théorème, la valeur absolue d'un déterminant d'ordre  $n$ , dont tous les éléments sont inférieurs en valeur absolue à un nombre  $M$ , est inférieure à  $M^n n^{\frac{n}{2}}$ . Une démonstration élémentaire de cette propriété a été donnée par M. Wirtinger (*Ibid.*, 1907, p. 175).

Si l'on développe le déterminant  $\mathbf{H}\left(\begin{smallmatrix} x, x_1, \dots, x_n \\ y, x_1, \dots, x_n \end{smallmatrix}\right)$ , on a comme premier terme le produit

$$\mathbf{H}(x, y) \mathbf{H}\left(\begin{smallmatrix} x_1, \dots, x_n \\ x_1, \dots, x_n \end{smallmatrix}\right).$$

Tout autre terme de ce déterminant contient un élément de la première ligne, tel que  $\mathbf{H}(x, x_i)$  et un élément de la première colonne, soit  $\mathbf{H}(x_k, y)$ ,  $i$  pouvant être égal à  $k$ . Les facteurs de ce terme peuvent être rangés de la façon suivante. Prenons pour premier facteur  $\mathbf{H}(x, x_i)$ ; la variable  $x_i$  figurant dans la  $i^{\text{ième}}$  ligne et la  $i^{\text{ième}}$  colonne, ce terme contiendra un élément de la  $i^{\text{ième}}$  ligne tel que  $\mathbf{H}(x_i, x_j)$ , où  $i \neq j$ . Le même terme contient aussi en facteur un élément de la  $j^{\text{ième}}$  ligne, tel que  $\mathbf{H}(x_j, x_h)$ , où  $h$  est différent de  $i$  et de  $j$ , puisque chacune des variables  $x_\alpha$  ne peut figurer que deux fois dans un terme. En continuant de la sorte, on finira par rencontrer l'élément  $\mathbf{H}(x_k, y)$ . Le terme en question contiendra donc un produit de  $p + 1$  éléments tels que

$$\mathbf{H}(x, x_i) \mathbf{H}(x_i, x_j) \mathbf{H}(x_j, x_h) \dots \mathbf{H}(x_k, y);$$

si l'on supprime les  $p + 1$  lignes et les  $p + 1$  colonnes qui contiennent ces éléments, il reste un déterminant à  $n - p$  lignes et à  $n - p$  colonnes, qui est de la forme

$$\mathbf{H}\left(\begin{smallmatrix} x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-p} \\ x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-p} \end{smallmatrix}\right),$$

$x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-p}$  étant les  $n - p$  variables restantes après la suppression des  $p$  variables  $x_i, x_j, x_h, \dots, x_k$ . Le développement du déterminant considéré contient donc le produit

$$\pm \mathbf{H}(x, x_i) \mathbf{H}(x_i, x_j) \dots \mathbf{H}(x_k, y) \mathbf{H}\left(\begin{smallmatrix} x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-p} \\ x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-p} \end{smallmatrix}\right),$$

et l'on voit facilement que l'on doit prendre le signe  $+$  ou le signe  $-$  devant le produit, suivant que  $p$  est pair ou impair. L'intégrale multiple de ce produit a pour valeur

$$(-1)^p \mathbf{H}^{(p+1)}(x, y) \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b \mathbf{H}\left(\begin{smallmatrix} x_1, \dots, x_{n-p} \\ x_1, \dots, x_{n-p} \end{smallmatrix}\right) dx_1 dx_2 \dots dx_{n-p}$$

ou

$$(-1)^p (n - p)! \mathfrak{A}_{n-p} \mathbf{H}^{(p+1)}(x, y).$$

Cette intégrale figurera dans l'intégrale du déterminant complet un nombre de fois égal au nombre des arrangements  $p$  à  $p$  des  $n$  variables  $x_1, \dots, x_n$ , c'est-à-dire  $n(n-1)\dots(n-p+1)$  fois. On a donc, d'après la notation expliquée plus

haut,

$$n! \mathfrak{H}_n = \mathbf{H}(x, y) n! \mathfrak{A}_n - \mathbf{H}^{(2)}(x, y) n! \mathfrak{A}_{n-1} + \dots \pm n! \mathbf{H}^{(n+1)}(x, y),$$

ce qui montre bien que le coefficient de  $\lambda^n$  dans  $\mathfrak{H}(x, y; \lambda)$  est identique au coefficient de  $\lambda^n$  dans le produit  $\Gamma(x, y; \lambda) \mathbf{D}(\lambda)$ .

Dans la suite nous appellerons  $\mathbf{D}(\lambda)$  et  $\mathfrak{H}(x, y; \lambda)$  les *fonctions de Fredholm*;  $\mathbf{D}(\lambda)$  est la *fonction déterminante*,  $\mathfrak{H}(x, y; \lambda)$  la *fonction résolvante*. Nous désignerons par  $\Gamma(x, y; \lambda)$  le quotient de ces deux fonctions, c'est-à-dire la fonction méromorphe de  $\lambda$  qui coïncide avec la série entière (9) à l'intérieur de son cercle de convergence.

6. Dans un article récent <sup>(1)</sup>, j'ai montré comment on pouvait arriver par une autre voie à la solution de l'équation de Fredholm, en traitant d'abord le cas élémentaire où le noyau  $\mathbf{H}(x, y)$  est de la forme

$$(27) \quad \mathbf{H}(x, y) = \mathbf{X}_1 \mathbf{Y}_1 + \mathbf{X}_2 \mathbf{Y}_2 + \dots + \mathbf{X}_n \mathbf{Y}_n,$$

$\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$  étant  $n$  fonctions linéairement distinctes de  $x$ ,  $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_n$   $n$  fonctions linéairement distinctes de  $y$ . La solution est alors donnée par la formule (25),  $\mathbf{D}(\lambda)$  et  $\mathfrak{H}(x, y; \lambda)$  ayant les expressions suivantes :

$$(28) \quad \mathbf{D}(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 + \lambda \mathbf{A}_{11} & \lambda \mathbf{A}_{21} & \dots & \lambda \mathbf{A}_{n1} \\ \lambda \mathbf{A}_{12} & 1 + \lambda \mathbf{A}_{22} & \dots & \lambda \mathbf{A}_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda \mathbf{A}_{1n} & \lambda \mathbf{A}_{2n} & \dots & 1 + \lambda \mathbf{A}_{nn} \end{vmatrix},$$

$$(29) \quad \mathfrak{H}(x, y; \lambda) = \begin{vmatrix} 0 & -\mathbf{X}_1 & -\mathbf{X}_2 & \dots & -\mathbf{X}_n \\ \mathbf{Y}_1 & 1 + \lambda \mathbf{A}_{11} & \lambda \mathbf{A}_{21} & \dots & \lambda \mathbf{A}_{n1} \\ \mathbf{Y}_2 & \lambda \mathbf{A}_{12} & 1 + \lambda \mathbf{A}_{22} & \dots & \lambda \mathbf{A}_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{Y}_n & \lambda \mathbf{A}_{1n} & \lambda \mathbf{A}_{2n} & \dots & 1 + \lambda \mathbf{A}_{nn} \end{vmatrix},$$

où l'on a posé

$$\mathbf{A}_{ik} = - \int_a^b \mathbf{X}_i(s) \mathbf{Y}_k(s) ds.$$

Quelques transformations des deux déterminants  $\mathbf{D}(\lambda)$  et  $\mathfrak{H}(x, y; \lambda)$  permettent de mettre la solution sous la forme même de M. Fredholm, et il suffit

---

<sup>(1)</sup> E. GOURSAT, *Sur un cas élémentaire de l'équation de Fredholm* (Bulletin de la Société mathématique, t. XXXV, 1907, p. 163-173).

ensuite d'un passage à la limite pour étendre la formule au cas d'un noyau continu quelconque, et même d'un noyau borné, comme l'a remarqué M. Lebesgue (1).

7. La solution précédente n'est plus applicable lorsque le noyau devient infini dans le domaine R. Par exemple, si  $H(x, y)$  devient infini pour  $x = y$ , tous les éléments de la diagonale principale des déterminants  $H \begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_n \\ x_1, x_2, \dots, x_n \end{pmatrix}$  et  $H \begin{pmatrix} x, x_1, \dots, x_n \\ y, x_1, \dots, x_n \end{pmatrix}$  sont infinis et les deux séries de Fredholm n'ont plus aucun sens. Lorsque tous les noyaux obtenus par itération à partir de  $H(x, y)$  sont finis, à partir d'un certain rang, le noyau résolvant  $\Gamma(x, y; \lambda)$  est encore une fonction méromorphe de  $\lambda$ .

Il suffit, pour le démontrer, de se reporter à la formule (18). Supposons que tous les noyaux obtenus par l'itération soient finis à partir de  $H^{(n)}(x, y)$ ;  $\Gamma_n(x, y; \lambda)$  est encore une fonction méromorphe de  $\lambda$  donnée par la formule de Fredholm

$$(26)' \quad \Gamma_n(x, y; \lambda) = \frac{\mathfrak{H}_n(x, y; \lambda)}{D_n(\lambda)},$$

$D_n(\lambda)$  et  $\mathfrak{H}_n(x, y; \lambda)$  étant les fonctions de Fredholm relatives au noyau  $H^{(n)}(x, y)$ , et la formule (18) montre immédiatement que  $\Gamma(x, y; \lambda)$  est aussi une fonction méromorphe du paramètre  $\lambda$ .

Les formules (17) et (18) montrent nettement la correspondance entre les pôles des deux fonctions  $\Gamma(x, y; \lambda)$  et  $\Gamma_n(x, y; \lambda)$ . Si la fonction  $\Gamma(x, y; \lambda)$  est régulière pour  $\lambda = \lambda_0$ , il résulte de la formule (17) que  $\Gamma_n(x, y; \lambda)$  est régulière pour  $\lambda = \lambda_0^n$ . Inversement, si la fonction  $\Gamma_n(x, y; \lambda)$  est régulière pour  $\lambda = \lambda_1$ , la formule (18) prouve que la fonction  $\Gamma(x, y; \lambda)$  est régulière dans le domaine des  $n$  points

$$\frac{1}{\lambda_1^n}, \quad \omega \frac{1}{\lambda_1^n}, \quad \omega^2 \frac{1}{\lambda_1^n}, \quad \dots, \quad \omega^{n-1} \frac{1}{\lambda_1^n},$$

$\omega$  étant une racine primitive de l'équation  $\omega^n = 1$ .

Soit maintenant  $\lambda = c$  un pôle de  $\Gamma(x, y; \lambda)$ ;  $\lambda = c^n$  est un pôle de  $\Gamma_n(x, y; \lambda)$ ; car, dans le contraire, le point  $\lambda = c$  ne pourrait être un pôle de  $\Gamma(x, y; \lambda)$ . Inversement, si  $\lambda = c_1$  est un pôle de  $\Gamma_n(x, y; \lambda)$ , l'un au moins des points

$$\frac{1}{c_1^n}, \quad \omega \frac{1}{c_1^n}, \quad \omega^2 \frac{1}{c_1^n}, \quad \dots, \quad \omega^{n-1} \frac{1}{c_1^n}$$

---

(1) LEBESGUE, *Sur la méthode de M. Goursat pour la résolution de l'équation de Fredholm* (*Bulletin de la Société mathématique*, t. XXXVI, 1908, p. 3-19).

Il est à remarquer que l'on peut aussi supposer que les fonctions  $X_i, Y_k$  ne restent pas bornées pourvu que les intégrales  $A_{ik}$  existent.

est un pôle de  $\Gamma(x, y; \lambda)$ . On voit qu'à un pôle de  $\Gamma$  correspond toujours un pôle et un seul de  $\Gamma_n$ ; mais à un pôle de  $\Gamma_n$  peuvent correspondre plusieurs pôles de  $\Gamma$ . Il en est ainsi lorsque  $\Gamma(x, y; \lambda)$  admet deux ou plusieurs pôles, tels que le rapport de deux quelconques d'entre eux soit une racine  $n^{\text{ième}}$  de l'unité.

Il est évident d'ailleurs que les relations précédentes subsistent lorsque le noyau  $H(x, y)$  reste fini.

Lorsque le noyau  $H(x, y)$  est fini, les pôles de  $\Gamma(x, y; \lambda)$  sont racines de l'équation déterminante  $D(\lambda) = 0$ . Inversement toute racine de  $D(\lambda)$  est un pôle du noyau résolvant, mais l'ordre de multiplicité du pôle n'est pas forcément égal à l'ordre de multiplicité de la racine de  $D(\lambda)$ . C'est ce qui arrive lorsque  $\mathcal{K}(x, y; \lambda)$  et  $D(\lambda)$  sont divisibles par un facteur commun  $(\lambda - c)^r$ . Nous allons montrer, en effet, que si  $D(\lambda)$  est divisible par  $(\lambda - c)^n$ , sans être divisible par  $(\lambda - c)^{n+1}$ , la fonction  $\mathcal{K}(x, y; \lambda)$  ne peut pas être divisible par  $(\lambda - c)^n$ . Cela résulte de la relation facile à vérifier

$$\frac{\partial^n D(\lambda)}{\partial \lambda^n} = \int_a^b \frac{\partial^{n-1} \mathcal{K}(x, x; \lambda)}{\partial \lambda^{n-1}} dx;$$

si  $\lambda = c$  est une racine d'ordre  $n$  de multiplicité de  $D(\lambda)$ ,  $\mathcal{K}(x, y; \lambda)$  ne peut être divisible par  $(\lambda - c)^n$ , car, s'il en était ainsi,  $\frac{\partial^{n-1} \mathcal{K}(x, x; \lambda)}{\partial \lambda^{n-1}}$  serait identiquement nul pour  $\lambda = c$ , et, par suite,  $\frac{\partial^n D}{\partial \lambda^n}$  serait nul aussi pour  $\lambda = c$ , et  $c$  serait racine de  $D(\lambda)$  d'un ordre de multiplicité supérieur à  $n$ .

*Remarque.* — Lorsque  $H(x, y)$  devient infini seulement pour  $x = y$ , et comme  $(x - y)^\alpha$ ,  $\alpha$  étant inférieur à  $\frac{1}{2}$ , M. Hilbert (1) a montré qu'on pouvait conserver pour le noyau résolvant la forme de Fredholm, à condition de remplacer par zéro, dans tous les déterminants, les termes des diagonales principales qui sont nécessairement infinis. Cette proposition a été généralisée récemment par M. Lalesco (2).

## II.

8. Tous les résultats qui viennent d'être rappelés peuvent, en définitive, se résumer ainsi :

(1) *Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 1904, p. 81.

(2) *Comptes rendus*, 9 décembre 1907.

Si  $\lambda$  n'est pas un pôle de la fonction méromorphe  $\Gamma(x, y; \lambda)$ , l'équation de Fredholm admet une solution et une seule, donnée par la formule (8)

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \Gamma(x, s; \lambda) f(s) ds;$$

lorsque le noyau reste fini,  $\Gamma(x, y; \lambda)$  a pour expression

$$\Gamma(x, y; \lambda) = \frac{\mathfrak{H}(x, y; \lambda)}{\mathbf{D}(\lambda)},$$

$\mathfrak{H}(x, y; \lambda)$  et  $\mathbf{D}(\lambda)$  étant les fonctions de Fredholm; si  $\mathbf{H}(x, y)$  devient infini, de telle façon que  $\mathbf{H}^{(n)}(x, y)$  reste fini,  $\Gamma(x, y; \lambda)$  est représentée pour toute valeur de  $\lambda$  par la formule (18).

Nous nous proposons, dans ce qui suit, d'étudier cette fonction méromorphe  $\Gamma$  dans le voisinage d'un de ses pôles. Cette recherche est liée d'une façon très étroite avec une question importante, l'étude des fonctions fondamentales.

Considérons l'équation intégrale homogène

$$(30) \quad \varphi(x) = c \int_a^b \mathbf{H}(x, s) \varphi(s) ds;$$

si  $\lambda = c$  n'est pas un pôle de  $\Gamma(x, y; \lambda)$ , la formule générale de résolution de l'équation (1), où l'on suppose  $f(x) = 0$ , nous montre immédiatement que cette équation (30) n'admet pas d'autre solution que  $\varphi(x) = 0$ . Pour que l'équation homogène (30) admette une solution différente de zéro, il est donc *nécessaire* que  $c$  soit un pôle de  $\Gamma(x, y; \lambda)$ . Cette condition est aussi *suffisante*.

Soit, en effet,  $\lambda = c$  un pôle d'ordre  $r$  de  $\Gamma$ , et soit

$$\begin{aligned} \Gamma(x, y; \lambda) = & \frac{\mathbf{B}_r(x, y)}{(\lambda - c)^r} + \frac{\mathbf{B}_{r-1}(x, y)}{(\lambda - c)^{r-1}} + \dots + \frac{\mathbf{B}_1(x, y)}{\lambda - c} \\ & + \mathbf{A}_0(x, y) + \mathbf{A}_1(x, y)(\lambda - c) + \mathbf{A}_2(x, y)(\lambda - c)^2 + \dots \end{aligned}$$

le développement de  $\Gamma(x, y; \lambda)$  dans le domaine de ce pôle. Posons  $\lambda = c + h$ , et remplaçons  $\Gamma$  par son développement dans les deux membres de la relation (13); il vient

$$\begin{aligned} (31) \quad & \frac{\mathbf{B}_r(x, y)}{h^r} + \frac{\mathbf{B}_{r-1}(x, y)}{h^{r-1}} + \dots + \frac{\mathbf{B}_1(x, y)}{h} + \mathbf{A}_0(x, y) + \dots \\ & = \mathbf{H}(x, y) + (c + h) \int_a^b \mathbf{H}(x, t) \left[ \frac{\mathbf{B}_r(t, y)}{h^r} + \frac{\mathbf{B}_{r-1}(t, y)}{h^{r-1}} + \dots \right] dt. \end{aligned}$$

Égalons les coefficients de  $h^{-r}$  dans les deux membres, et nous obtenons l'égalité

$$(32) \quad B_r(x, y) = c \int_a^b H(x, t) B_r(t, y) dt.$$

On voit que la fonction  $B_r(x, y)$  est une solution de l'équation homogène (30), quelle que soit la valeur attribuée à  $y$ . Par hypothèse, cette fonction  $B_r(x, y)$  n'est pas identiquement nulle; pour avoir une solution de l'équation homogène, il suffira donc de donner à  $y$  une valeur constante  $y_1$  telle que  $B_r(x, y_1)$  ne soit pas identiquement nulle. On verrait, de même, en substituant le développement de  $\Gamma$  dans les deux membres de la relation (14), que  $B_r(x, y)$  est une solution de l'équation homogène associée

$$(30)' \quad \psi(y) = c \int_a^b H(t, y) \psi(t) dt,$$

quelle que soit la valeur de  $x$ .

Toute fonction  $\varphi(x)$ , différente de zéro, satisfaisant à une équation homogène de la forme (30), est appelée une *fonction fondamentale* et la valeur correspondante de  $c$  est un *nombre fondamental*. Les seuls nombres fondamentaux sont donc les pôles du noyau résolvant  $\Gamma(x, y; \lambda)$ , et à chacun de ces pôles correspond au moins une fonction fondamentale.

9. La recherche des fonctions fondamentales se ramène à une question classique, la réduction d'une substitution linéaire à sa forme canonique, lorsque le noyau  $H(x, y)$  est de la forme particulière (27) citée plus haut (n° 6)

$$H(x, y) = X_1 Y_1 + \dots + X_n Y_n.$$

L'équation homogène peut s'écrire dans ce cas

$$\varphi(x) = \lambda \left[ X_1 \int_a^b Y_1(s) \varphi(s) ds + \dots + X_n \int_a^b Y_n(s) \varphi(s) ds \right],$$

et l'on voit que toute fonction fondamentale  $\varphi(x)$  est de la forme

$$\varphi(x) = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_n X_n,$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  étant des coefficients constants. La fonction  $\varphi(x)$  étant de cette forme, l'équation homogène devient

$$\begin{aligned} & \alpha_1 X_1(x) + \dots + \alpha_n X_n(x) \\ &= \lambda \int_a^b [X_1(x) Y_1(s) + \dots + X_n(x) Y_n(s)] [\alpha_1 X_1(s) + \dots + \alpha_n X_n(s)] ds, \end{aligned}$$



ces noyaux correspondent deux fonctions de Fredholm. Nous les désignerons par

$$D(\lambda), \quad D'(\lambda), \quad D''(\lambda), \quad \mathcal{K}(x, y; \lambda), \quad \mathcal{K}'(x, y; \lambda), \quad \mathcal{K}''(x, y; \lambda).$$

THÉORÈME I. — *Si les deux noyaux  $H(x, y)$ ,  $H'(x, y)$  sont orthogonaux ou semi-orthogonaux, on a la relation*

$$(36) \quad D''(\lambda) = D(\lambda) D'(\lambda).$$

Il est clair que cette relation (36) est équivalente à la relation

$$(36)' \quad D''(-\lambda) = D(-\lambda) D'(-\lambda).$$

Pour démontrer cette relation (36)', nous supposons par exemple que la relation (35) est vérifiée identiquement. Considérons le déterminant

$$H'' \begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_p \\ x_1, x_2, \dots, x_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} H(x_1, x_1) + H'(x_1, x_1) & H(x_1, x_2) + H'(x_1, x_2) & \dots & H(x_1, x_p) + H'(x_1, x_p) \\ H(x_2, x_1) + H'(x_2, x_1) & H(x_2, x_2) + H'(x_2, x_2) & \dots & H(x_2, x_p) + H'(x_2, x_p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H(x_p, x_1) + H'(x_p, x_1) & H(x_p, x_2) + H'(x_p, x_2) & \dots & H(x_p, x_p) + H'(x_p, x_p) \end{vmatrix};$$

il est égal à la somme des  $2^p$  déterminants qu'on obtient en prenant les termes  $H(x_i, x_k)$  dans  $r$  colonnes et les termes  $H'(x_i, x_k)$  dans les  $p - r$  autres colonnes,  $r$  variant de 0 à  $p$ . Pour  $r = 0$ , on a le déterminant

$$H' \begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_p \\ x_1, x_2, \dots, x_p \end{pmatrix}$$

et, pour  $r = p$ , le déterminant

$$H \begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_p \\ x_1, x_2, \dots, x_p \end{pmatrix}.$$

Soit  $0 < r < p$ ; en prenant toutes les combinaisons possibles de colonnes, on a en tout  $C_p^r$  déterminants de cette espèce, dont nous n'écrirons qu'un seul

$$\delta = \begin{vmatrix} H(x_1, x_1) & \dots & H(x_1, x_r) & H'(x_1, x_{r+1}) & \dots & H'(x_1, x_p) \\ H(x_2, x_1) & \dots & H(x_2, x_r) & H'(x_2, x_{r+1}) & \dots & H'(x_2, x_p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ H(x_r, x_1) & \dots & H(x_r, x_r) & H'(x_r, x_{r+1}) & \dots & H'(x_r, x_p) \\ H(x_{r+1}, x_1) & \dots & H(x_{r+1}, x_r) & H'(x_{r+1}, x_{r+1}) & \dots & H'(x_{r+1}, x_p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ H(x_p, x_1) & \dots & H(x_p, x_r) & H'(x_p, x_{r+1}) & \dots & H'(x_p, x_p) \end{vmatrix}.$$

Nous allons calculer l'intégrale définie

$$\int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b \delta dx_1 dx_2 \dots dx_p.$$

On sait que ce déterminant  $\delta$  est égal à la somme des produits obtenus en multipliant un déterminant d'ordre  $r$  formé avec les éléments communs aux  $r$  premières colonnes et à  $r$  lignes quelconques par le mineur correspondant de  $\delta$ , et affectant le produit d'un signe convenable. En prenant les  $r$  premières lignes de  $\delta$ , on a tout d'abord le produit

$$\mathbf{H} \begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_r \\ x_1, x_2, \dots, x_r \end{pmatrix} \times \mathbf{H}' \begin{pmatrix} x_{r+1}, \dots, x_p \\ x_{r+1}, \dots, x_p \end{pmatrix}.$$

Prenons un autre déterminant partiel, contenant par exemple les éléments de la  $(r+i)$ <sup>ième</sup> ligne ( $i > 0$ ); ce déterminant est de la forme

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{H}(x_{r+i}, x_1) + \mathbf{A}_2 \mathbf{H}(x_{r+i}, x_2) + \dots + \mathbf{A}_r \mathbf{H}(x_{r+i}, x_r),$$

$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_r$  ne dépendant pas de la variable  $x_{r+i}$ . Le déterminant par lequel on doit le multiplier ne contient la variable  $x_{r+i}$  que dans les éléments d'une seule colonne; il est donc de la forme

$$\sum_h \mathbf{B}_h \mathbf{H}'(x_h, x_{r+i}),$$

l'indice  $h$  ne pouvant prendre la valeur  $r+i$ , et les coefficients  $\mathbf{B}_h$  étant indépendants de  $x_{r+i}$ . Le produit de ces deux mineurs est donc lui-même de la forme

$$\sum_{j,h} \mathbf{C}_{j,h} \mathbf{H}(x_{r+i}, x_j) \mathbf{H}'(x_h, x_{r+i}),$$

les indices  $j$  et  $h$  étant différents de  $r+i$ , et les coefficients  $\mathbf{C}_{j,h}$  étant indépendants de  $x_{r+i}$ . L'intégrale multiple d'un produit de cette forme est nulle, car, si l'on commence par une intégration relative à la variable  $x_{r+i}$ , le résultat de cette première intégration est nul. On a en effet, par hypothèse, quels que soient  $x_j$  et  $x_h$ ,

$$\int_a^b \mathbf{H}(s, x_j) \mathbf{H}'(x_h, s) ds = 0.$$

Il s'ensuit que l'intégrale multiple de  $\delta$  se réduit à l'intégrale multiple de son

premier terme, et l'on a

$$(37) \quad \int_a^b \dots \int_a^b \delta dx_1 \dots dx_p \\ = \int_a^b \dots \int_a^b \mathbf{H} \begin{pmatrix} x_1, \dots, x_r \\ x_1, \dots, x_r \end{pmatrix} dx_1 \dots dx_r \times \int_a^b \dots \int_a^b \mathbf{H}' \begin{pmatrix} x_{r+1}, \dots, x_p \\ x_{r+1}, \dots, x_p \end{pmatrix} dx_{r+1} \dots dx_p.$$

Il y a en tout  $C_p^r$  déterminants analogues à  $\delta$ , mais tous ces déterminants donnent dans l'intégration le même résultat. En effet, on peut amener les  $r$  colonnes qui renferment la fonction  $\mathbf{H}$  à être les premières, à condition de ramener à la même place les lignes correspondantes. Cela fait, le nouveau déterminant ne diffère de  $\delta$  que par une permutation dans les indices, et il est clair que l'intégrale multiple aura la même valeur.

Désignons, comme plus haut, par  $\mathfrak{A}_p$ ,  $\mathfrak{A}'_p$ ,  $\mathfrak{A}''_p$  les coefficients de  $\lambda^p$  dans  $\mathbf{D}(-\lambda)$ ,  $\mathbf{D}'(-\lambda)$ ,  $\mathbf{D}''(-\lambda)$  respectivement. On a, par exemple,

$$\mathfrak{A}_p = \frac{1}{p!} \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b \mathbf{H} \begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_p \\ x_1, x_2, \dots, x_p \end{pmatrix} dx_1 dx_2 \dots dx_p,$$

et de même pour les autres, de sorte que l'égalité (37) peut s'écrire, d'une façon plus abrégée,

$$(37)' \quad \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b \delta dx_1 dx_2 \dots dx_p = r!(p-r)! \mathfrak{A}_r \mathfrak{A}'_{p-r}.$$

Nous avons donc, d'après cela, la relation générale,

$$p! \mathfrak{A}''_p = p! \mathfrak{A}_p + \dots + C_p^r r!(p-r)! \mathfrak{A}_r \mathfrak{A}'_{p-r} + \dots + p! \mathfrak{A}'_p,$$

ou, en divisant par  $p!$ ,

$$\mathfrak{A}''_p = \mathfrak{A}_p + \dots + \mathfrak{A}_r \mathfrak{A}'_{p-r} + \dots + \mathfrak{A}'_p,$$

ce qui montre bien que le coefficient de  $\lambda^p$  dans  $\mathbf{D}''(-\lambda)$  est égal au coefficient de  $\lambda^p$  dans  $\mathbf{D}(-\lambda) \mathbf{D}'(-\lambda)$ . La proposition énoncée est donc établie.

Si la relation (34) était vérifiée identiquement, et non la relation (35), il n'y aurait qu'à répéter les mêmes raisonnements en remplaçant les lignes par les co-

lonnes dans le déterminant  $\mathbf{H}'' \begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_p \\ x_1, x_2, \dots, x_p \end{pmatrix}$ .

11. THÉORÈME II. — Si les deux noyaux  $\mathbf{H}(x, y)$ ,  $\mathbf{H}'(x, y)$  sont orthogonaux

on a la relation

$$(38) \quad \frac{\mathcal{H}''(x, y; \lambda)}{\mathbf{D}''(\lambda)} = \frac{\mathcal{H}(x, y; \lambda)}{\mathbf{D}(\lambda)} + \frac{\mathcal{H}'(x, y; \lambda)}{\mathbf{D}'(\lambda)}.$$

Nous allons encore calculer l'intégrale multiple

$$\int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b \mathbf{H}'' \left( \begin{matrix} x, x_1, \dots, x_p \\ y, x_1, \dots, x_p \end{matrix} \right) dx_1 dx_2 \dots dx_p.$$

Le déterminant  $\mathbf{H}'' \left( \begin{matrix} x, x_1, \dots, x_p \\ y, x_1, \dots, x_p \end{matrix} \right)$  est la somme de deux déterminants  $\Delta, \Delta'$ , le premier  $\Delta$  ayant pour expression

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathbf{H}(x, y) & \mathbf{H}(x, x_1) + \mathbf{H}'(x, x_1) & \dots & \mathbf{H}(x, x_p) + \mathbf{H}'(x, x_p) \\ \mathbf{H}(x_1, y) & \mathbf{H}(x_1, x_1) + \mathbf{H}'(x_1, x_1) & \dots & \mathbf{H}(x_1, x_p) + \mathbf{H}'(x_1, x_p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{H}(x_p, y) & \mathbf{H}(x_p, x_1) + \mathbf{H}'(x_p, x_1) & \dots & \mathbf{H}(x_p, x_p) + \mathbf{H}'(x_p, x_p) \end{vmatrix},$$

et le second  $\Delta'$  se déduisant de  $\Delta$  en remplaçant  $\mathbf{H}$  par  $\mathbf{H}'$  dans la première colonne.

Le déterminant  $\Delta$  est, comme tout à l'heure, la somme de  $2^p$  déterminants partiels, et le calcul de l'intégrale multiple

$$\int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b \Delta dx_1 \dots dx_p$$

se ramène encore au calcul de l'intégrale multiple

$$\int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b \delta dx_1 dx_2 \dots dx_p,$$

$\delta$  étant un déterminant de la forme

$$\delta = \begin{vmatrix} \mathbf{H}(x, y) & \mathbf{H}(x, x_1) & \dots & \mathbf{H}(x, x_r) & \mathbf{H}'(x, x_{r+1}) & \dots & \mathbf{H}'(x, x_p) \\ \mathbf{H}(x_1, y) & \mathbf{H}(x_1, x_1) & \dots & \mathbf{H}(x_1, x_r) & \mathbf{H}'(x_1, x_{r+1}) & \dots & \mathbf{H}'(x_1, x_p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{H}(x_r, y) & \mathbf{H}(x_r, x_1) & \dots & \mathbf{H}(x_r, x_r) & \mathbf{H}'(x_r, x_{r+1}) & \dots & \mathbf{H}'(x_r, x_p) \\ \mathbf{H}(x_{r+1}, y) & \mathbf{H}(x_{r+1}, x_1) & \dots & \mathbf{H}(x_{r+1}, x_r) & \mathbf{H}'(x_{r+1}, x_{r+1}) & \dots & \mathbf{H}'(x_{r+1}, x_p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{H}(x_p, y) & \mathbf{H}(x_p, x_1) & \dots & \mathbf{H}(x_p, x_r) & \mathbf{H}'(x_p, x_{r+1}) & \dots & \mathbf{H}'(x_p, x_p) \end{vmatrix}.$$

En reprenant les raisonnements du numéro précédent, on voit que, si la relation (35) est vérifiée identiquement, l'intégrale multiple

$$\int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b \delta dx_1 dx_2 \dots dx_p$$

se réduit au produit

$$\begin{aligned} & \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b \mathbf{H} \left( \begin{matrix} x, x_1, \dots, x_r \\ y, x_1, \dots, x_r \end{matrix} \right) dx_1 \dots dx_r \\ & \times \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b \mathbf{H}' \left( \begin{matrix} x_{r+1}, \dots, x_p \\ x_{r+1}, \dots, x_p \end{matrix} \right) dx_{r+1} \dots dx_p. \end{aligned}$$

En désignant par  $\mathfrak{v}_p$ ,  $\mathfrak{v}'_p$ ,  $\mathfrak{v}''_p$  les coefficients de  $\lambda^p$  dans  $\mathfrak{H}(x, y; -\lambda)$ ,  $\mathfrak{H}'(x, y; -\lambda)$ ,  $\mathfrak{H}''(x, y; -\lambda)$  respectivement, on a donc, en définitive,

$$\begin{aligned} & \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b \Delta dx_1 \dots dx_p \\ & = p! \mathfrak{a}'_p \mathfrak{v}_0 + \dots + C_p^r r!(p-r)! \mathfrak{a}'_{p-r} \mathfrak{v}_r + \dots + p! \mathfrak{v}_p. \end{aligned}$$

Tout pareillement, si la relation (34) est vérifiée identiquement, on a

$$\begin{aligned} & \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b \Delta' dx_1 \dots dx_p \\ & = p! \mathfrak{a}_p \mathfrak{v}'_0 + \dots + C_p^r r!(p-r)! \mathfrak{a}_{p-r} \mathfrak{v}'_r + \dots + p! \mathfrak{v}'_p. \end{aligned}$$

Ajoutons ces deux relations membre à membre et divisons par  $p!$ , il vient

$$\begin{aligned} \mathfrak{v}''_p &= \mathfrak{a}'_p \mathfrak{v}_0 + \dots + \mathfrak{a}'_{p-r} \mathfrak{v}_r + \dots + \mathfrak{v}_p \\ &+ \mathfrak{a}_p \mathfrak{v}'_0 + \dots + \mathfrak{a}_{p-r} \mathfrak{v}'_r + \dots + \mathfrak{v}'_p. \end{aligned}$$

La première et la deuxième ligne du second membre représentent respectivement les coefficients de  $\lambda^p$  dans les deux produits

$$\mathbf{D}'(-\lambda) \mathfrak{H}(x, y; -\lambda), \quad \mathbf{D}(-\lambda) \mathfrak{H}'(x, y; -\lambda).$$

On a donc, en changeant  $\lambda$  en  $-\lambda$ ,

$$\mathfrak{H}''(x, y; \lambda) = \mathfrak{H}(x, y; \lambda) \mathbf{D}'(\lambda) + \mathfrak{H}'(x, y; \lambda) \mathbf{D}(\lambda);$$

il suffit de diviser les deux membres de cette égalité par le produit  $\mathbf{D}(\lambda) \mathbf{D}'(\lambda)$ , en tenant compte de la relation (36), pour obtenir le résultat énoncé.

12. La relation (38) s'écrit encore

$$(38)' \quad \Gamma''(x, y; \lambda) = \Gamma(x, y; \lambda) + \Gamma'(x, y; \lambda),$$

$\Gamma$ ,  $\Gamma'$ ,  $\Gamma''$  étant les noyaux résolvants relatifs aux trois noyaux  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{H}'$ ,  $\mathbf{H}''$  respectivement.

Cette relation est applicable à deux noyaux orthogonaux quelconques  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{H}'$ , bornés ou non bornés, et se démontre très facilement en partant des développements en séries entières des trois fonctions  $\Gamma(x, y; \lambda)$ ,  $\Gamma'(x, y; \lambda)$ ,  $\Gamma''(x, y; \lambda)$ . Étant donnés, en effet, deux noyaux orthogonaux quelconques  $\mathbf{H}(x, y)$  et  $\mathbf{H}'(x, y)$ , considérons les deux suites de noyaux déduits de  $\mathbf{H}(x, y)$  et de  $\mathbf{H}'(x, y)$  par des itérations successives. *Deux noyaux quelconques, pris respectivement dans chacune de ces suites, sont toujours orthogonaux.*

Des deux équations

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^{(p)}(x, y) &= \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b \mathbf{H}(x, t_1) \mathbf{H}(t_1, t_2) \dots \mathbf{H}(t_{p-1}, y) dt_1 \dots dt_{p-1}, \\ \mathbf{H}'^{(q)}(x, y) &= \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b \mathbf{H}'(x, u_1) \mathbf{H}'(u_1, u_2) \dots \mathbf{H}'(u_{q-1}, y) du_1 \dots du_{q-1} \end{aligned}$$

on tire, en effet,

$$\begin{aligned} &\int_a^b \mathbf{H}^{(p)}(x, s) \mathbf{H}'^{(q)}(s, y) ds \\ &= \int_a^b \dots \int_a^b \mathbf{H}(x, t_1) \dots \mathbf{H}(t_{p-1}, s) \mathbf{H}'(s, u_1) \dots \mathbf{H}'(u_{q-1}, y) ds dt_1 \dots du_{q-1}, \end{aligned}$$

et, en commençant l'intégration par rapport à la variable  $s$ , il vient aussitôt

$$(39) \quad \int_a^b \mathbf{H}^{(p)}(x, s) \mathbf{H}'^{(q)}(s, y) ds = 0.$$

On démontrerait de même qu'on a identiquement

$$(40) \quad \int_a^b \mathbf{H}^{(p)}(s, y) \mathbf{H}'^{(q)}(x, s) ds = 0.$$

On conclut de là que les deux noyaux  $\Gamma(x, y; \lambda)$  et  $\Gamma'(x, y; \lambda)$  sont eux-mêmes orthogonaux, quel que soit  $\lambda$ ,

$$(39)' \quad \int_a^b \Gamma(x, s; \lambda) \Gamma'(s, y; \lambda) ds = 0,$$

$$(40)' \quad \int_a^b \Gamma'(x, s; \lambda) \Gamma(s, y; \lambda) ds = 0.$$

Soit  $\mathbf{H}^{(r)}(x, y)$  le  $r^{\text{ième}}$  noyau déduit par itération de

$$\mathbf{H}''(x, y) = \mathbf{H}(x, y) + \mathbf{H}'(x, y).$$

Au moyen des relations (39) et (40), on démontre sans peine qu'on a, quel que soit  $r$ ,

$$\mathbf{H}^{(r)}(x, y) = \mathbf{H}^{(r)}(x, y) + \mathbf{H}'^{(r)}(x, y),$$

d'où résulte la relation annoncée (38)'.

13. Les deux théorèmes précédents donnent lieu à un certain nombre de corollaires.

*Corollaire I.* — Soient  $\mathbf{H}_1(x, y), \dots, \mathbf{H}_p(x, y)$  un certain nombre de noyaux orthogonaux deux à deux, et  $\mathbf{H}_{p+1}(x, y)$  le noyau égal à leur somme

$$\mathbf{H}_{p+1} = \mathbf{H}_1 + \dots + \mathbf{H}_p.$$

Entre les noyaux résolvants correspondants on a la relation

$$(41) \quad \Gamma_{p+1} = \Gamma_1 + \dots + \Gamma_p.$$

Si les noyaux  $\mathbf{H}_i$  sont bornés, on a de plus, entre les fonctions déterminantes de Fredholm, la relation

$$(42) \quad \mathbf{D}_{p+1}(\lambda) = \mathbf{D}_1(\lambda) \dots \mathbf{D}_p(\lambda).$$

*Corollaire II.* — Si, par un moyen quelconque, on a décomposé un noyau  $\mathbf{H}(x, y)$  en un certain nombre de noyaux  $h_1(x, y), h_2(x, y), \dots, h_p(x, y)$  orthogonaux deux à deux, la formule (41) montre qu'on saura résoudre l'équation de Fredholm pour le noyau  $\mathbf{H}(x, y)$ , si l'on sait la résoudre pour chacun des noyaux  $h_i(x, y)$ .

*Corollaire III.* — Si les noyaux  $h_1, h_2, \dots, h_p$  sont bornés, la relation (42) montre de même que tout nombre fondamental relatif au noyau  $\mathbf{H}(x, y)$  est un nombre fondamental pour l'un au moins des noyaux  $h_1, h_2, \dots, h_p$ , et inversement.

On peut obtenir une proposition à la fois plus précise et plus générale au moyen du lemme suivant :

LEMME. — Si  $\mathbf{H}_1(x, y)$  et  $\mathbf{H}_2(x, y)$  sont orthogonaux, toute fonction fondamentale  $\varphi(x)$  relative au noyau  $\mathbf{H}_1(x, y)$  satisfait à la relation

$$\int_a^b \mathbf{H}_2(x, s) \varphi(s) ds = 0.$$

Soit  $\varphi(x)$  une fonction fondamentale pour le noyau  $\mathbf{H}_1(x, y)$ . De la relation

$$\varphi(s) = c \int_a^b \mathbf{H}_1(s, t) \varphi(t) dt$$

on tire, en effet,

$$\begin{aligned} \int_a^b \mathbf{H}_2(x, s) \varphi(s) ds &= c \int_a^b \int_a^b \mathbf{H}_1(x, s) \mathbf{H}_2(s, t) \varphi(t) dt ds \\ &= c \int_a^b \varphi(t) dt \int_a^b \mathbf{H}_1(x, s) \mathbf{H}_2(s, t) ds = 0. \end{aligned}$$

Cela étant, soient  $\gamma_i(x, y; \lambda)$  et  $\Gamma(x, y; \lambda)$  les noyaux résolvants relatifs aux noyaux  $h_i(x, y)$  et  $\mathbf{H}(x, y)$ ,

$$\mathbf{H}(x, y) = h_1(x, y) + \dots + h_p(x, y).$$

Les noyaux  $h_i(x, y)$  étant orthogonaux deux à deux, on a

$$\Gamma(x, y; \lambda) = \gamma_1(x, y; \lambda) + \dots + \gamma_p(x, y; \lambda),$$

ce qui prouve que tout pôle de  $\Gamma$  est un pôle pour l'une au moins des fonctions  $\gamma_i$ .

Inversement, soient  $c$  un pôle de  $\gamma_i(x, y; \lambda)$  par exemple, et  $\varphi(x)$  une solution de l'équation

$$\varphi(x) = c \int_a^b h_1(x, s) \varphi(s) ds.$$

D'après le lemme précédent, cette fonction  $\varphi(x)$  satisfait aux  $p - 1$  relations

$$0 = c \int_a^b h_i(x, s) \varphi(s) ds \quad (i = 2, \dots, p)$$

et, par suite, à la relation obtenue en les ajoutant à la première

$$\varphi(x) = c \int_a^b \mathbf{H}(x, s) \varphi(s) ds.$$

*Donc tout nombre fondamental relatif à l'un des noyaux  $h_i(x, y)$  est aussi un nombre fondamental pour  $\mathbf{H}(x, y)$ , et toute fonction fondamentale pour le noyau  $h_i(x, y)$  est aussi une fonction fondamentale pour le noyau  $\mathbf{H}(x, y)$ .*

Il peut, d'ailleurs, arriver qu'un même nombre fondamental appartienne à plusieurs noyaux différents  $h_i(x, y)$ .

Remarquons aussi que les nombres fondamentaux sont les mêmes pour les

deux équations homogènes associées

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= c \int_a^b \mathbf{H}(x, s) \varphi(s) ds, \\ \psi(x) &= c \int_a^b \mathbf{H}(s, x) \psi(s) ds.\end{aligned}$$

### III.

14. Nous allons appliquer le théorème I à l'étude des fonctions fondamentales dans le cas d'un noyau borné.

Soit  $c$  une racine d'ordre  $n$  de l'équation déterminante  $D(\lambda) = 0$ , provenant d'un noyau borné  $\mathbf{H}(x, y)$ . A cette racine  $c$  correspond toujours une fonction  $\varphi_1(x)$  différente de zéro (n° 8), satisfaisant à la condition

$$(43) \quad \varphi_1(x) = c \int_a^b \mathbf{H}(x, s) \varphi_1(s) ds.$$

A cette fonction  $\varphi_1(x)$  associons une autre fonction  $\pi_1(x)$  telle qu'on ait

$$(44) \quad 1 = c \int_a^b \varphi_1(s) \pi_1(s) ds,$$

ce qui peut, évidemment, se faire d'une infinité de manières. Si  $c$  est une racine réelle, la fonction  $\varphi_1(x)$  peut aussi être supposée réelle, et l'on pourra prendre

$$\pi_1(x) = C \varphi_1(x)$$

en déterminant la constante  $C$  par la condition

$$1 = Cc \int_a^b [\varphi_1(s)]^2 ds.$$

Si  $c$  est imaginaire et de la forme  $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ , soit  $\varphi_1(x) = u(x) + v(x)\sqrt{-1}$  la fonction fondamentale correspondante,  $u(x)$  et  $v(x)$  étant réels; on posera par exemple  $\pi_1(x) = C[u(x) - v(x)\sqrt{-1}]$ , et l'on déterminera la constante  $C$  par la relation

$$1 = Cc \int_a^b \{ [u(s)]^2 + [v(s)]^2 \} ds.$$

La fonction  $\pi_1(x)$  ayant été choisie de façon que la condition (44) soit véri-

fiée, posons

$$(45) \quad \mathbf{H}(x, y) = \varphi_1(x) \pi_1(y) + \mathbf{H}_1(x, y);$$

d'après la façon dont on a choisi  $\pi_1(x)$ , les deux noyaux  $h(x, y) = \varphi_1(x) \pi_1(y)$  et  $\mathbf{H}_1(x, y)$  sont semi-orthogonaux.

Nous avons, en effet,

$$\begin{aligned} \int_a^b \mathbf{H}_1(x, s) \varphi_1(s) \pi_1(y) ds &= \int_a^b [\mathbf{H}(x, s) - \varphi_1(x) \pi_1(s)] \varphi_1(s) \pi_1(y) ds \\ &= \int_a^b \mathbf{H}(x, s) \varphi_1(s) \pi_1(y) ds - \varphi_1(x) \pi_1(y) \int_a^b \pi_1(s) \varphi_1(s) ds \\ &= \frac{\varphi_1(x) \pi_1(y)}{c} - \frac{\varphi_1(x) \pi_1(y)}{c} = 0. \end{aligned}$$

La fonction déterminante  $d(\lambda)$  pour le noyau  $h(x, y)$  se réduit (n° 6) à un binôme du premier degré

$$1 - \lambda \int_a^b \varphi_1(s) \pi_1(s) ds = 1 - \frac{\lambda}{c}.$$

Par suite, si  $\mathbf{D}_1(\lambda)$  est la fonction déterminante relative au noyau  $\mathbf{H}_1(x, y)$ , on a  $\mathbf{D}(\lambda) = \mathbf{D}_1(\lambda) \left(1 - \frac{\lambda}{c}\right)$ , d'après le théorème I.

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

**THÉORÈME III.** — Soient  $c$  une racine de l'équation déterminante  $\mathbf{D}(\lambda) = 0$ ,  $\varphi_1(x)$  une fonction fondamentale correspondante,  $\pi_1(x)$  une autre fonction telle qu'on ait

$$1 = c \int_a^b \varphi_1(s) \pi_1(s) ds;$$

si l'on pose  $\mathbf{H}_1(x, y) = \mathbf{H}(x, y) - \varphi_1(x) \pi_1(y)$ , la fonction déterminante  $\mathbf{D}_1(\lambda)$ , relative au noyau  $\mathbf{H}_1(x, y)$ , a pour expression

$$(46) \quad \mathbf{D}_1(\lambda) = \frac{\mathbf{D}(\lambda)}{1 - \frac{\lambda}{c}}.$$

*Remarque.* — Pour que les deux noyaux  $\varphi_1(x) \pi_1(y)$  et  $\mathbf{H}_1(x, y)$  fussent complètement orthogonaux, il faudrait qu'on eût aussi

$$\int_a^b \mathbf{H}_1(s, y) \pi_1(s) ds = 0,$$

c'est-à-dire

$$\int_a^b \mathbf{H}(s, y) \pi_1(s) ds = \int_a^b \varphi_1(s) \pi_1(y) \pi_1(s) ds,$$

ou encore, d'après la condition (44),

$$c \int_a^b \mathbf{H}(s, y) \pi_1(s) ds = \pi_1(y).$$

On voit que  $\pi_1(x)$  devrait être une solution de l'équation homogène associée

$$\pi_1(x) = c \int_a^b \mathbf{H}(s, x) \pi_1(s) ds$$

mais rien ne prouve, *a priori*, qu'on puisse trouver une solution de cette équation telle que l'intégrale  $\int_a^b \varphi_1(x) \pi_1(x) dx$  ne soit pas nulle. Nous verrons même plus loin que cela n'est pas toujours possible.

15. Si  $c$  est racine simple de l'équation  $D(\lambda) = 0$ ,  $c$  est un pôle simple de  $\Gamma(x, y; \lambda)$  et nous avons vu plus haut (n° 8) que si l'on remplace  $y$  par une constante numérique  $y_1$  dans le résidu  $B(x, y)$  relatif à ce pôle, cette constante étant telle que  $B(x, y_1)$  ne soit pas identiquement nulle,  $\varphi_1(x) = B(x, y_1)$  est solution de l'équation (43).

Toute autre solution de l'équation (43) est de la forme  $C\varphi_1(x)$ ,  $C$  étant constant. Soit, en effet,  $\varphi(x)$  une solution quelconque de l'équation (43);  $\pi_1(x)$  ayant la même signification que tout à l'heure, choisissons la constante  $C$  de façon qu'on ait

$$\int_a^b [\varphi(s) - C\varphi_1(s)] \pi_1(s) ds = 0.$$

La différence  $\delta(x) = \varphi(x) - C\varphi_1(x)$  satisfait alors aux deux conditions

$$\delta(x) = c \int_a^b \mathbf{H}(x, s) \delta(s) ds,$$

$$\int_a^b \pi_1(s) \delta(s) ds = 0.$$

On a, par suite,

$$\delta(x) = c \int_a^b [\mathbf{H}(x, s) - \varphi_1(x) \pi_1(s)] \delta(s) ds,$$

et, par conséquent,  $\delta(x) = 0$ , puisque la fonction déterminante  $D_1(\lambda)$ , correspondant au noyau  $H_1(x, y)$ , ne s'annule plus pour  $\lambda = c$ . En résumé, à une racine simple  $\lambda = c$  de  $D(\lambda) = 0$  correspond une seule fonction fondamentale.

Ceci prouve que, quand on fait varier  $y$  dans la fonction  $B(x, y)$ , cette fonction est simplement multipliée par un facteur indépendant de  $x$ . Nous verrons, en effet, un peu plus loin que  $B(x, y)$  est le produit d'une fonction de  $x$  par une fonction de  $y$ .

16. Prenons maintenant le cas général où  $c$  est une racine multiple d'ordre  $n$  de  $D(\lambda)$  ( $n > 1$ ). Après la première transformation

$$H(x, y) = \varphi_1(x) \pi_1(y) + H_1(x, y),$$

$c$  est racine d'ordre  $n - 1$  de la nouvelle équation déterminante. Par conséquent, il existe encore une fonction  $\varphi_2(x)$ , différente de zéro, satisfaisant à l'équation homogène

$$\varphi_2(x) = c \int_a^b H_1(x, s) \varphi_2(s) ds;$$

à cette fonction  $\varphi_2(x)$  associons de même une autre fonction  $\pi_2(y)$  telle qu'on ait

$$1 = c \int_a^b \varphi_2(s) \pi_2(s) ds$$

et posons

$$H_1(x, y) = \varphi_2(x) \pi_2(y) + H_2(x, y).$$

La fonction déterminante  $D_2(\lambda)$ , correspondant au noyau  $H_2(x, y)$ , est égale à

$$\frac{D_1(\lambda)}{1 - \frac{\lambda}{c}} = \frac{D(\lambda)}{\left(1 - \frac{\lambda}{c}\right)^2};$$

si  $n > 2$ , l'équation  $D_2(\lambda) = 0$  admet encore la racine  $c$ , et à cette racine correspond une fonction  $\varphi_3(x)$ , différente de zéro, satisfaisant à la relation

$$\varphi_3(x) = c \int_a^b H_2(x, s) \varphi_3(s) ds.$$

Au moyen de  $\varphi_3(x)$ , on peut procéder à une nouvelle transformation, et ainsi de suite. Il est clair qu'après  $n$  opérations de ce genre on arrivera à un noyau  $H_n(x, y)$ , pour lequel la fonction déterminante correspondante  $D_n(\lambda)$  est égale à

$$\frac{D(\lambda)}{\left(1 - \frac{\lambda}{c}\right)^n}.$$

On aura employé dans cette suite d'opérations les noyaux successifs

$$\mathbf{H}_0(x, y) = \mathbf{H}(x, y), \quad \mathbf{H}_1(x, y), \quad \dots, \quad \mathbf{H}_{n-1}(x, y), \quad \mathbf{H}_n(x, y)$$

et les  $2n$  fonctions  $\varphi_i(x)$ ,  $\pi_i(x)$ , liées par les relations

$$\left. \begin{aligned} \varphi_i(x) &= c \int_a^b \mathbf{H}_{i-1}(x, s) \varphi_i(s) ds \\ \pi_i &= c \int_a^b \varphi_i(s) \pi_i(s) ds \\ \mathbf{H}_{i-1}(x, y) &= \varphi_i(x) \pi_i(y) + \mathbf{H}_i(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

La fonction  $\varphi_i(x)$  est une fonction fondamentale pour le noyau  $\mathbf{H}_{i-1}(x, y)$ , mais elle n'est pas, en général, une fonction fondamentale pour le noyau primitif  $\mathbf{H}(x, y)$ . Pour voir le rôle de ces fonctions, examinons le cas où  $n = 2$ . Nous avons alors deux fonctions  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(x)$ , vérifiant respectivement les deux relations

$$\varphi_1(x) = c \int_a^b \mathbf{H}(x, s) \varphi_1(s) ds,$$

$$\varphi_2(x) = c \int_a^b \mathbf{H}_1(x, s) \varphi_2(s) ds,$$

où

$$\mathbf{H}(x, y) = \varphi_1(x) \pi_1(y) + \mathbf{H}_1(x, y).$$

Les deux noyaux  $\varphi_1(x) \pi_1(y)$  et  $\mathbf{H}_1(x, y)$  étant semi-orthogonaux, on a (n° 14)

$$\int_a^b \mathbf{H}_1(x, s) \varphi_1(s) ds = 0,$$

ce qui montre que les fonctions  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont linéairement distinctes. Calculons

$\int_a^b \mathbf{H}(x, s) \varphi_2(s) ds$ ; on a

$$\begin{aligned} \int_a^b \mathbf{H}(x, s) \varphi_2(s) ds &= \int_a^b \mathbf{H}_1(x, s) \varphi_2(s) ds + \int_a^b \varphi_1(x) \pi_1(s) \varphi_2(s) ds \\ &= \frac{\varphi_2(x)}{c} + \varphi_1(x) \int_a^b \pi_1(s) \varphi_2(s) ds, \end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire

$$\varphi_2(x) + C \varphi_1(x) = c \int_a^b \mathbf{H}(x, s) \varphi_2(s) ds,$$



tions

$$(49) \quad \left\{ \begin{array}{l} c \mathbf{S}_1 \varphi_2 = \varphi_2, \\ c \mathbf{S}_1 \varphi_3 = \alpha_{32} \varphi_2 + \varphi_3, \\ \dots\dots\dots, \\ c \mathbf{S}_1 \varphi_n = \alpha_{n2} \varphi_2 + \dots + \varphi_n \end{array} \right\} \quad \mathbf{S}_1 \varphi = \int_a^b \mathbf{H}_1(x, s) \varphi(s) ds.$$

Or, on a, d'une façon générale,

$$\mathbf{S}f(x) = \mathbf{S}_1 f(x) + \varphi_1(x) \int_a^b \pi_1(s) f(s) ds;$$

remplaçons successivement  $f(x)$  par  $\varphi_2(x)$ ,  $\varphi_3(x)$ , ...,  $\varphi_n(x)$ ; nous trouvons, en multipliant par  $c$ ,

$$(50) \quad \left\{ \begin{array}{l} c \mathbf{S} \varphi_2 = c \mathbf{S}_1 \varphi_2 + c \varphi_1 \int_a^b \pi_1(s) \varphi_2(s) ds = \alpha_{21} \varphi_1 + \varphi_2, \\ c \mathbf{S} \varphi_3 = c \mathbf{S}_1 \varphi_3 + c \varphi_1 \int_a^b \pi_1(s) \varphi_3(s) ds = \alpha_{31} \varphi_1 + \alpha_{32} \varphi_2 + \varphi_3, \\ \dots\dots\dots, \\ c \mathbf{S} \varphi_n = c \mathbf{S}_1 \varphi_n + c \varphi_1 \int_a^b \pi_1(s) \varphi_n(s) ds = \alpha_{n1} \varphi_1 + \alpha_{n2} \varphi_2 + \dots + \varphi_n, \end{array} \right.$$

où

$$\alpha_{i1} = c \int_a^b \pi_1(s) \varphi_i(s) ds \quad (i = 2, 3, \dots, n).$$

Si l'on ajoute aux relations (50) la relation

$$c \mathbf{S} \varphi_1 = \varphi_1,$$

on obtient bien un système d'équations de la forme (48).

D'ailleurs, les  $n$  fonctions  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  sont linéairement distinctes. En effet, s'il n'en était pas ainsi, on aurait une égalité de la forme

$$\varphi_1 = \mathbf{A}_2 \varphi_2 + \dots + \mathbf{A}_i \varphi_i \quad (\mathbf{A}_i \neq 0, i \leq n),$$

les coefficients étant constants, puisque par hypothèse les fonctions  $\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n$  sont linéairement distinctes.

De cette relation on déduit

$$\mathbf{S}_1 \varphi_1 = \mathbf{A}_2 \mathbf{S}_1 \varphi_2 + \dots + \mathbf{A}_i \mathbf{S}_1 \varphi_i = 0,$$

et les formules (49) montrent que  $\varphi_i$  serait une combinaison linéaire des fonctions  $\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_{i-1}$ . Le théorème énoncé est donc établi.

17. Lorsque le noyau  $H(x, y)$  est réel, ainsi que la racine  $c$ , il est clair qu'on peut supposer réelles toutes les fonctions  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ , car on peut effectuer toutes les transformations indiquées sans introduire d'imaginaires. Lorsque  $c$  est imaginaire, le noyau étant réel, les fonctions  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  contiennent nécessairement le symbole  $\sqrt{-1}$ .

En réunissant les fonctions provenant des racines conjuguées de  $D(\lambda)$ , on obtient des fonctions réelles satisfaisant à des relations un peu différentes des relations (48), où ne figure aucun coefficient imaginaire. On peut aussi obtenir ces formules directement en procédant comme il suit.

Soient  $c = \alpha + \beta\sqrt{-1}$  une racine imaginaire de  $D(\lambda) = 0$ ,  $u(x) + v(x)\sqrt{-1}$  une fonction fondamentale correspondante,  $u(x)$  et  $v(x)$  étant des fonctions réelles et distinctes. La relation

$$u(x) + v(x)\sqrt{-1} = (\alpha + \beta\sqrt{-1}) \int_a^b \mathbf{H}(x, s) [u(s) + v(s)\sqrt{-1}] ds$$

est équivalente aux deux suivantes

$$(51) \quad \begin{cases} \alpha u(x) + \beta v(x) = (\alpha^2 + \beta^2) \int_a^b \mathbf{H}(x, s) u(s) ds, \\ -\beta u(x) + \alpha v(x) = (\alpha^2 + \beta^2) \int_a^b \mathbf{H}(x, s) v(s) ds. \end{cases}$$

Cela posé, cherchons à déterminer quatre constantes A, B, C, D, de telle façon qu'en posant

$$h(x, y) = \mathbf{A} u(x) u(y) + \mathbf{B} u(x) v(y) + \mathbf{C} v(x) u(y) + \mathbf{D} v(x) v(y),$$

on ait les égalités

$$(52) \quad \begin{cases} \alpha u(x) + \beta v(x) = (\alpha^2 + \beta^2) \int_a^b h(x, s) u(s) ds, \\ -\beta u(x) + \alpha v(x) = (\alpha^2 + \beta^2) \int_a^b h(x, s) v(s) ds, \end{cases}$$

c'est-à-dire, sous forme abrégée,

$$(52') \quad \begin{cases} \int_a^b h(x, s) u(s) ds = \int_a^b \mathbf{H}(x, s) u(s) ds, \\ \int_a^b h(x, s) v(s) ds = \int_a^b \mathbf{H}(x, s) v(s) ds. \end{cases}$$

Les constantes A et B, par exemple, doivent satisfaire aux deux équations linéaires

$$\begin{aligned} (\alpha^2 + \beta^2) \left[ A \int_a^b u^2(s) ds + B \int_a^b u(s)v(s) ds \right] &= \alpha, \\ (\alpha^2 + \beta^2) \left[ A \int_a^b u(s)v(s) ds + B \int_a^b v^2(s) ds \right] &= -\beta, \end{aligned}$$

dont le déterminant n'est pas nul, d'après l'inégalité de Schwarz; C et D s'obtiennent d'une façon analogue.

Ayant ainsi formé  $h(x, y)$ , posons

$$\mathbf{H}(x, y) = h(x, y) + \mathbf{H}_1(x, y);$$

les deux noyaux  $h(x, y)$  et  $\mathbf{H}_1(x, y)$  sont semi-orthogonaux. Nous avons, en effet,

$$\int_a^b \mathbf{H}_1(x, s) h(s, y) ds = \int_a^b \mathbf{H}(x, s) h(s, y) ds - \int_a^b h(x, s) h(s, y) ds,$$

et, comme  $h(s, y)$  est linéaire en  $u(s)$  et  $v(s)$ , on a, d'après les relations (52'),

$$\int_a^b \mathbf{H}(x, s) h(s, y) ds = \int_a^b h(x, s) h(s, y) ds.$$

Soient  $d(\lambda)$ ,  $\mathbf{D}_1(\lambda)$  les fonctions déterminantes relatives aux noyaux  $h(x, y)$ ,  $\mathbf{H}_1(x, y)$ . On voit immédiatement, d'après les relations (52), que les racines de  $d(\lambda)$  sont  $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ ,  $\alpha - \beta\sqrt{-1}$ ; on a donc (n° 6)

$$d(\lambda) = 1 - \frac{2\alpha\lambda}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{\lambda^2}{\alpha^2 + \beta^2}$$

et, par conséquent,

$$\mathbf{D}(\lambda) = \mathbf{D}_1(\lambda) \left[ 1 - \frac{2\alpha\lambda}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{\lambda^2}{\alpha^2 + \beta^2} \right].$$

Si  $\alpha + \beta\sqrt{-1}$  et  $\alpha - \beta\sqrt{-1}$  sont deux racines conjuguées, d'ordre  $n$  de multiplicité, de  $\mathbf{D}(\lambda) = 0$  ( $n > 1$ ), elles sont encore racines d'ordre  $n - 1$  de  $\mathbf{D}_1(\lambda) = 0$ . En reprenant les raisonnements du précédent paragraphe, on arrive à la conclusion suivante :

A deux racines imaginaires conjuguées,  $\alpha + \beta\sqrt{-1}$  et  $\alpha - \beta\sqrt{-1}$ , d'ordre  $n$  de multiplicité, de l'équation déterminante, correspondent  $2n$  fonctions réelles  $u_i(x)$ ,  $v_i(x)$ , linéairement distinctes, satisfaisant à des relations de la forme

$$(53) \quad \begin{cases} (\alpha^2 + \beta^2) \mathbf{S} u_i(x) = \alpha u_i(x) + \beta v_i(x) + \dots \\ (\alpha^2 + \beta^2) \mathbf{S} v_i(x) = -\beta u_i(x) + \alpha v_i(x) + \dots \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n),$$

les termes non écrits dans les seconds membres étant des combinaisons linéaires, à coefficients constants et réels, des fonctions  $u_j(x)$  et  $v_j(x)$ , d'indice inférieur à  $i$ .

18. Revenons au théorème général du n° 16, pour démontrer la réciproque.

**THÉORÈME V.** — *S'il existe  $n$  fonctions linéairement distinctes  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(x)$ , ...,  $\varphi_n(x)$ , satisfaisant à des relations de la forme (48),  $c$  est racine de l'équation déterminante d'un ordre de multiplicité au moins égal à  $n$ .*

Le théorème étant exact pour  $n = 1$  (n° 8), il nous suffira encore de montrer que, s'il est vrai pour un système de  $(n - 1)$  fonctions, il est encore vrai dans le cas de  $n$  fonctions.

Supposons donc qu'il existe un système de fonctions  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ , linéairement distinctes, vérifiant les relations (48). La première de ces relations prouve que  $c$  est racine de  $D(\lambda)$ , et que  $\varphi_1(x)$  est une fonction fondamentale correspondant à cette racine. Associons-lui, comme plus haut, une fonction  $\pi_1(x)$  telle qu'on ait

$$c \int_a^b \varphi_1(x) \pi_1(x) dx = 1,$$

et posons

$$H(x, y) = \varphi_1(x) \pi_1(y) + H_1(x, y);$$

nous avons vu qu'on a

$$D(\lambda) = \left(1 - \frac{\lambda}{c}\right) D_1(\lambda),$$

$D_1(\lambda)$  étant la fonction déterminante relative au noyau  $H_1(x, y)$ . Il nous suffira donc de prouver que  $D_1(\lambda)$  est divisible par  $(\lambda - c)^{n-1}$ . Posons pour cela

$$\Phi_2(x) = \varphi_2(x) + C_2 \varphi_1(x), \quad \dots, \quad \Phi_n(x) = \varphi_n(x) + C_n \varphi_1(x),$$

$C_2, C_3, \dots, C_n$  étant des constantes, et calculons  $S_1 \Phi_2, \dots, S_1 \Phi_n$ . On a

$$S_1 \Phi_2 = S_1 \varphi_2 + C_2 S_1 \varphi_1 = S \varphi_2 - \int_a^b \varphi_1(x) \pi_1(s) \varphi_2(s) ds,$$

puisque (n° 14)

$$S_1 \varphi_1 = 0,$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned} c S_1 \Phi_2 &= c S \varphi_2 - c \varphi_1(x) \int_a^b \pi_1(s) \varphi_2(s) ds \\ &= \varphi_2(x) + \varphi_1(x) \left[ \alpha_{21} - c \int_a^b \pi_1(s) \varphi_2(s) ds \right] \\ &= \Phi_2(x) + \varphi_1(x) \left[ \alpha_{21} - c \int_a^b \pi_1(s) \varphi_2(s) ds - C_2 \right]. \end{aligned}$$

La constante  $C_2$  étant choisie de façon à annuler le coefficient de  $\varphi_1(x)$ , il reste la relation

$$cS_1\Phi_2 = \Phi_2.$$

On a de même

$$S_1\Phi_3 = S_1\varphi_3 - C_3S_1\varphi_1 = S\varphi_3 - \varphi_1(x) \int_a^b \pi_1(s) \varphi_3(s) ds,$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} cS_1\Phi_3 &= cS\varphi_3 - c\varphi_1(x) \int_a^b \pi_1(s) \varphi_3(s) ds \\ &= \varphi_3(x) + \alpha_{31}\varphi_1(x) + \alpha_{32}\varphi_2(x) - c\varphi_1(x) \int_a^b \pi_1(s) \varphi_3(s) ds \\ &= \Phi_3 - C_3\varphi_1 + \alpha_{31}\varphi_1 + \alpha_{32}(\Phi_2 - C_2\varphi_1) - c\varphi_1(x) \int_a^b \pi_1(s) \varphi_3(s) ds \\ &= \Phi_3 + \alpha_{32}\Phi_2 + \varphi_1 \left[ \alpha_{31} - \alpha_{32}C_2 - C_3 - c \int_a^b \pi_1(s) \varphi_3(s) ds \right]. \end{aligned}$$

Choisissons  $C_3$  de façon à annuler le coefficient de  $\varphi_1(x)$ ; il restera

$$cS_1\Phi_3 = \Phi_3(x) + \alpha_{32}\Phi_2(x).$$

En continuant ainsi, on déterminera de proche en proche les coefficients  $C_4, \dots, C_n$ , de façon que les  $(n-1)$  fonctions  $\Phi_2, \Phi_3, \dots, \Phi_n$  vérifient  $(n-1)$  relations de la forme

$$cS_1\Phi_i = \Phi_i + \beta_{i2}\Phi_2 + \dots + \beta_{i,i-1}\Phi_{i-1}.$$

D'ailleurs ces  $(n-1)$  fonctions sont linéairement distinctes, comme  $\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n$ . La proposition étant admise pour  $(n-1)$  fonctions,  $D_1(\lambda)$  est divisible par  $(\lambda - c)^{n-1}$ , et, par conséquent,  $D(\lambda)$  est divisible par  $(\lambda - c)^n$ .

Il est clair, d'autre part, que  $D(\lambda)$  peut être divisible par  $(\lambda - c)^{n+m}$ ,  $m$  étant un nombre entier positif.

19. Toute combinaison linéaire à coefficients constants des  $n$  fonctions  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ , définies au n° 16, sera appelée une *fonction principale*, correspondant au nombre fondamental  $c$ . Tout groupe de  $n$  fonctions principales linéairement distinctes est un *groupe principale*.

Soient  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$  les  $n$  fonctions d'un groupe principal

$$\Phi = A_{i1}\varphi_1 + A_{i2}\varphi_2 + \dots + A_{in}\varphi_n \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

les  $A_{ik}$  étant des coefficients constants dont le déterminant est différent de zéro.



remplacées par les suivantes :

$$(55)' \quad \left\{ \begin{array}{l} cS U_1 = U_1, \\ cS U_2 = \gamma_{21} U_1 + U_2, \\ \dots\dots\dots, \\ cS U_p = \gamma_{p1} U_1 + \gamma_{p2} U_2 + \dots + U_p, \end{array} \right.$$

les coefficients  $\gamma_{ik}$  étant constants.

Si  $U_i(x)$  n'était pas une combinaison linéaire de  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ , en ajoutant la première des relations (55)' aux formules (48), on aurait un système de  $(n + 1)$  relations de même forme, avec  $(n + 1)$  fonctions distinctes  $\varphi_1, \dots, \varphi_n, U_1$ , et l'on en déduirait, d'après le théorème V, que  $D(\lambda)$  est divisible par  $(\lambda - c)^{n+1}$ , contrairement à l'hypothèse. Donc  $U_i(x)$  ne peut être distinct des fonctions  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ . En prenant ensuite la seconde des relations (55)', et ainsi de suite, on démontre de proche en proche que toutes les fonctions  $U_i(x)$ , et, par conséquent, toutes les fonctions  $u_i(x)$ , sont des combinaisons linéaires à coefficients constants de  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ .

Il résulte de là que  $p$  ne peut être supérieur à  $n$ . Si  $p = n$ , les fonctions  $u_1, u_2, \dots, u_n$  forment un groupe principal. Si  $p$  est plus petit que  $n$ , nous dirons que  $u_1, u_2, \dots, u_p$  forment un *sous-groupe principal*.

20. En définitive, les formules (48) peuvent être considérées comme définissant une substitution linéaire dont le déterminant caractéristique est  $(1 - r)^n$ . Tous les résultats de cette théorie classique peuvent donc être appliqués à la question dont il s'agit. En particulier, on voit qu'en choisissant convenablement les fonctions principales, on pourra ramener les formules (48) à une forme canonique simple. On choisira pour cela  $r$  groupes de fonctions principales ( $1 \leq r \leq n$ ), les  $\mu$  fonctions d'un même groupe vérifiant des relations de la forme

$$(56) \quad \left\{ \begin{array}{l} cS \varphi_1 = \varphi_1, \\ cS \varphi_2 = \varphi_1 + \varphi_2, \\ cS \varphi_3 = \varphi_2 + \varphi_3, \\ \dots\dots\dots, \\ cS \varphi_\mu = \varphi_{\mu-1} + \varphi_\mu. \end{array} \right.$$

Cette réduction peut être, en général, effectuée d'une infinité de manières, mais le nombre des groupes est un *invariant* de la substitution linéaire.

La réduction étant supposée effectuée, le groupe principal ainsi obtenu sera dit un *groupe canonique*. Un groupe canonique se partage d'après cela en un certain nombre de sous-groupes, n'ayant aucune fonction commune, vérifiant des rela-

tions de la forme (56). Chacun de ces sous-groupes est un *sous-groupe canonique*.

Toute fonction fondamentale  $\Phi(x)$ , correspondant au nombre fondamental  $c$ , satisfaisant à la relation

$$cS\Phi(x) = \Phi(x),$$

est une combinaison linéaire à coefficients constants arbitraires des premières fonctions de chaque sous-groupe canonique. Par conséquent, *le nombre des fonctions fondamentales distinctes, correspondant à une racine  $c$  de l'équation  $D(\lambda) = 0$ , est égal au nombre des sous-groupes canoniques*.

Ce nombre peut varier de 1 à  $n$ , comme l'a démontré M. Fredholm d'une autre façon,  $n$  étant le degré de multiplicité de la racine  $c$  de l'équation déterminante  $D(\lambda) = 0$ .

21. Les résultats se simplifient beaucoup dans le cas déjà étudié par M. Hilbert et M. Schmidt, où le noyau  $H(x, y)$  est symétrique en  $x$  et  $y$ .

Soient  $\varphi(x)$  et  $\psi(x)$  deux fonctions quelconques intégrables dans l'intervalle  $(a, b)$ . L'intégrale

$$I = \int_a^b [\varphi(x)S\psi(x) - \psi(x)S\varphi(x)] dx,$$

peut se mettre sous forme d'intégrale double

$$I = \int_a^b \int_a^b H(x, s) [\varphi(x)\psi(s) - \psi(x)\varphi(s)] ds dx.$$

Si l'on associe deux à deux les éléments de cette intégrale double qui correspondent aux deux systèmes de valeurs  $(x = x', s = s')$  et  $(x = s', s = x')$ , on voit immédiatement que la somme de ces deux éléments est nulle, puisque  $H(x', s') = H(s', x')$ . On a donc la relation générale, quelles que soient les fonctions intégrables  $\varphi(x)$  et  $\psi(x)$ ,

$$(57) \quad \int_a^b [\varphi(x)S\psi(x) - \psi(x)S\varphi(x)] dx = 0.$$

Cela étant, supposons que  $\varphi(x)$  et  $\psi(x)$  soient deux fonctions fondamentales correspondant à des nombres fondamentaux différents  $c, c'$ , de sorte qu'on ait

$$cS\varphi(x) = \varphi(x), \quad c'S\psi(x) = \psi(x);$$

la relation (57) devient dans ce cas, en multipliant par  $cc'$ ,

$$(c - c') \int_a^b \varphi(x) \psi(x) dx,$$

et comme  $c$  est supposé différent de  $c'$ , on a donc

$$(58) \quad \int_a^b \varphi(x) \psi(x) dx = 0.$$

Nous dirons pour abrégé que deux fonctions  $\varphi(x)$  et  $\psi(x)$ , satisfaisant à la relation (58), sont *orthogonales*; nous voyons, par conséquent, que si  $H(x, y)$  est un noyau symétrique, deux fonctions fondamentales, correspondant à des nombres fondamentaux différents, sont orthogonales.

De cette proposition il résulte aussi que les nombres fondamentaux, pour un noyau symétrique réel, sont tous réels <sup>(1)</sup>. Supposons, en effet, que  $\alpha + \beta\sqrt{-1}$  ( $\beta \neq 0$ ) soit un nombre fondamental, et soit  $u(x) + v(x)\sqrt{-1}$  la fonction fondamentale correspondante. Le noyau  $H(x, y)$  étant réel,  $\alpha - \beta\sqrt{-1}$  serait aussi un nombre fondamental, et la fonction fondamentale correspondante serait  $u(x) - v(x)\sqrt{-1}$ . Ces deux fonctions fondamentales devraient être orthogonales et l'on aurait, par conséquent,

$$\int_a^b [u^2(x) + v^2(x)] dx = 0.$$

Tous les coefficients  $a_{ik}$  des formules (48) sont nuls dans le cas d'un noyau symétrique. En d'autres termes, à une racine  $c$  d'ordre  $n$  de multiplicité de l'équation déterminante  $D(\lambda) = 0$  correspondent  $n$  fonctions fondamentales linéairement distinctes <sup>(2)</sup>.

<sup>(1)</sup> Le théorème a été énoncé d'abord par M. Hilbert. La démonstration donnée ici est due à M. Schmidt.

<sup>(2)</sup> Le théorème suppose le noyau  $H(x, y)$  réel. Prenons, par exemple,

$$H(x, y) = x + y + 2i\sqrt{3}xy = x(1 + i\sqrt{3}y) + (1 + i\sqrt{3}x)y.$$

On a

$$\int_{-1}^{+1} (1 + i\sqrt{3}s)^2 ds = 0, \quad \int_{-1}^{+1} s(1 + i\sqrt{3}s) ds = \frac{2i}{\sqrt{3}}$$

et, par suite,

$$\int_{-1}^{+1} H(x, s)(1 + i\sqrt{3}s) ds = (1 + ix\sqrt{3})\frac{2i}{\sqrt{3}},$$

$$\int_{-1}^{+1} H(x, s)s ds = \frac{2ix}{\sqrt{3}} + \frac{2}{3}(1 + ix\sqrt{3});$$

La proposition étant admise pour une racine multiple d'ordre  $(n - 1)$ , il est facile de montrer qu'elle sera vraie pour une racine multiple d'ordre  $n$ . Soient  $c$  une racine d'ordre  $n$ ,  $\varphi_1(x)$  une fonction fondamentale correspondante. Après une transformation

$$\mathbf{H}(x, y) = C \varphi_1(x) \varphi_1(y) + \mathbf{H}_1(x, y),$$

la constante  $C$  étant choisie convenablement, le noyau  $\mathbf{H}_1(x, y)$  est encore symétrique et les deux noyaux  $\mathbf{H}_1(x, y)$  et  $C \varphi_1(x) \varphi_1(y)$  sont évidemment *orthogonaux* et non pas seulement semi-orthogonaux. Si le théorème est vrai pour une racine d'ordre  $(n - 1)$ , l'équation homogène

$$\varphi(x) = c \int_a^b \mathbf{H}_1(x, s) \varphi(s) ds$$

admet  $(n - 1)$  solutions linéairement distinctes  $\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n$ . D'après une remarque antérieure (n° 13), ces fonctions sont aussi solutions de l'équation homogène

$$\varphi(x) = c \int_a^b \mathbf{H}(x, s) \varphi(s) ds.$$

En leur ajoutant  $\varphi_1(x)$ , on a bien  $n$  solutions distinctes pour cette dernière équation.

*Remarque.* — On peut toujours trouver  $n$  fonctions fondamentales correspondant à la racine  $c$ , qui soient orthogonales deux à deux. Soit, en effet,  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  un système quelconque de  $n$  solutions distinctes de l'équation précédente. Prenons  $\Phi_1(x) = \varphi_1(x)$  et déterminons les coefficients  $c_2, c_3, \dots, c_n$ , de façon que  $\Phi_1(x)$  soit orthogonale à chacune des fonctions

$$\varphi_2(x) - c_2 \varphi_1(x), \quad \varphi_3(x) - c_3 \varphi_1(x), \quad \dots, \quad \varphi_n(x) - c_n \varphi_1(x),$$

ce qui est évidemment possible. On posera ensuite  $\Phi_2(x) = \varphi_2(x) - c_2 \Phi_1(x)$ , et il est clair qu'en continuant ainsi on finira par obtenir un système de  $n$  fonctions fondamentales orthogonales deux à deux.

En rapprochant cette remarque de la propriété d'orthogonalité de deux fonctions fondamentales, correspondant à des nombres fondamentaux différents, on en conclut que *tout noyau symétrique  $\mathbf{H}(x, y)$  fournit un système orthogonal de*

on voit que  $1 + ix\sqrt{3}$  et  $x$  forment un système de fonctions principales correspondant au nombre fondamental  $\frac{\sqrt{3}}{2i}$ .

fonctions, c'est-à-dire un système de fonctions

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_i(x), \dots,$$

en nombre limité ou illimité, tel qu'on ait

$$\int_a^b \varphi_i(x) \varphi_k(x) dx = 0 \quad (i \neq k).$$

22. Il n'existe pas de simplification analogue dans le cas d'un noyau non symétrique. Il est facile de vérifier sur un exemple que les coefficients  $\alpha_{ik}$  des formules (48) peuvent avoir des valeurs quelconques.

Prenons, en effet, le noyau suivant

$$H(x, y) = X_1 P_1(y) + X_2 P_2(y) + \dots + X_n P_n(y),$$

$X_p$  étant le  $p^{\text{ième}}$  polynome de Legendre,  $P_1(y), \dots, P_n(y)$  des polynomes en  $y$  d'un degré marqué par leur indice, et supposons  $a = -1, b = 1$ . La fonction  $D(\lambda)$  se réduit ici au déterminant (n° 6)

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 + \lambda A_{11} & \lambda A_{21} & \dots & \lambda A_{n1} \\ \lambda A_{12} & 1 + \lambda A_{22} & \dots & \lambda A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda A_{1n} & \lambda A_{2n} & \dots & 1 + \lambda A_{nn} \end{vmatrix}, \quad A_{ih} = - \int_{-1}^{+1} X_i(x) P_h(x) dx;$$

On a donc  $A_{ih} = 0$ , si  $i > h$ , de sorte que tous les éléments au-dessus de la diagonale principale sont nuls, et il reste

$$D(\lambda) = (1 + \lambda A_{11})(1 + \lambda A_{22}) \dots (1 + \lambda A_{nn}).$$

D'autre part, on peut choisir les coefficients des polynomes  $P_1, \dots, P_n$ , de façon que les autres intégrales  $A_{ih} (i \leq h)$  aient des valeurs arbitraires données à l'avance. En effet, les intégrales  $A_{11}, \dots, A_{nn}$  ne dépendent respectivement que des coefficients du terme de degré le plus élevé dans  $P_1, P_2, \dots, P_n$ ; les valeurs des intégrales  $A_{12}, A_{23}, \dots, A_{n-1,n}$  ne dépendent ensuite que des deux premiers coefficients de  $P_1, P_2, \dots, P_n$  respectivement, et ainsi de suite. On pourra donc déterminer de proche en proche les coefficients de ces polynomes, sauf les termes constants qui restent arbitraires.

Supposons qu'on ait

$$A_{11} = A_{22} = \dots = A_{nn} = -\frac{1}{c},$$

de façon que  $D(\lambda) = \left(1 - \frac{\lambda}{c}\right)^n$ . Les  $n$  fonctions  $X_1, X_2, \dots, X_n$  forment un sys-

tème de fonctions principales correspondant à la racine  $c$ . Nous avons, en effet, d'après l'expression du noyau  $\mathbf{H}(x, y)$ ,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \mathbf{H}(x, s) \mathbf{X}_i(s) ds &= \int_{-1}^{+1} [\mathbf{X}_1 \mathbf{P}_1(s) + \mathbf{X}_2 \mathbf{P}_2(s) + \dots + \mathbf{X}_n \mathbf{P}_n(s)] \mathbf{X}_i(s) ds \\ &= - [\mathbf{A}_{ii} \mathbf{X}_i + \mathbf{A}_{i,i+1} \mathbf{X}_{i+1} + \dots + \mathbf{A}_{in} \mathbf{X}_n] \\ &\quad (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Ces relations sont bien de la forme (48) et, d'après ce qu'on vient de faire remarquer, les coefficients qui jouent le rôle des  $\alpha_{ih}$  peuvent avoir des valeurs quelconques.

#### IV.

23. Tout ce qui a été démontré jusqu'ici pour l'équation homogène

$$\varphi(x) = c \int_a^b \mathbf{H}(x, s) \varphi(s) ds$$

s'applique évidemment à l'équation homogène associée

$$(59) \quad \psi(x) = c \int_a^b \mathbf{H}(s, x) \psi(s) ds.$$

La fonction déterminante  $\mathbf{D}(\lambda)$  étant la même pour les deux noyaux  $\mathbf{H}(x, y)$  et  $\mathbf{H}(y, x)$ , si  $c$  est une racine multiple d'ordre  $n$  de  $\mathbf{D}(\lambda)$ , il existe  $n$  fonctions linéairement distinctes  $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x)$  telles qu'en posant

$$\mathbf{S}' \psi(x) = \int_a^b \mathbf{H}(s, x) \psi(s) ds,$$

les  $n$  expressions

$$c \mathbf{S}' \psi_1(x), \quad c \mathbf{S}' \psi_2(x), \quad \dots, \quad c \mathbf{S}' \psi_n(x)$$

soient des fonctions entières, linéaires et homogènes, à coefficients constants, de  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ , le déterminant caractéristique de la substitution étant égal à  $(1-r)^n$ . Ces  $n$  fonctions  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$  seront appelées les *fonctions principales associées*, correspondant à la racine  $c$ , et nous appellerons de même *groupes principaux associés* les deux groupes de  $n$  fonctions  $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$  et  $(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$ . Il peut d'ailleurs arriver qu'un certain nombre de fonctions appartiennent à la fois aux deux groupes.

Pour étudier de plus près les relations entre ces deux groupes de fonctions, nous établirons d'abord quelques lemmes préliminaires.

LEMME I. — Une fonction fondamentale associée  $\psi(x)$ , solution de l'équation (59), ne peut être orthogonale à toutes les fonctions principales  $\varphi_1(x)$ , ...,  $\varphi_n(x)$ .

Conservons les notations du n° 16; nous avons vu qu'en posant

$$\mathbf{H}(x, y) = \varphi_1(x) \pi_1(y) + \dots + \varphi_n(x) \pi_n(y) + \mathbf{H}_n(x, y),$$

$\pi_1(y)$ , ...,  $\pi_n(y)$  étant des fonctions convenablement choisies de  $y$ , l'équation déterminante  $\mathbf{D}_n(\lambda) = 0$ , relative au noyau  $\mathbf{H}_n(x, y)$ , n'admet plus la racine  $c$ . Or nous pouvons écrire l'équation (59)

$$\psi(x) = c \int_a^b [\varphi_1(s) \pi_1(x) + \dots + \varphi_n(s) \pi_n(x) + \mathbf{H}_n(s, x)] \psi(s) ds;$$

si la fonction  $\psi(x)$  était orthogonale aux  $n$  fonctions  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ , il resterait

$$\psi(x) = c \int_a^b \mathbf{H}_n(s, x) \psi(s) ds,$$

ce qui est impossible, puisque  $c$  n'est pas un zéro de  $\mathbf{D}_n(\lambda)$ .

Pour la même raison, une fonction fondamentale  $\varphi(x)$ , solution de l'équation

$$(60) \quad \varphi(x) = c \int_a^b \mathbf{H}(x, s) \varphi(s) ds,$$

ne peut pas être orthogonale à la fois aux  $n$  fonctions  $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x)$ .

LEMME II. — Il n'existe aucune fonction principale  $\psi_i(x)$  qui soit orthogonale à la fois aux  $n$  fonctions  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ .

La proposition est démontrée pour  $n = 1$ , puisque dans ce cas une fonction principale est aussi fondamentale. Employant toujours le même procédé, il suffit donc de prouver que, si elle est vraie pour une racine d'ordre  $n - 1$ , elle est vraie aussi pour une racine d'ordre  $n$ .

Soit  $\varphi_1(x)$  une fonction fondamentale, solution de l'équation (60). D'après le lemme précédent, il existe une fonction principale  $\psi_1(x)$  qui ne lui est pas orthogonale, et l'on peut évidemment supposer que l'on a

$$(61) \quad 1 = c \int_a^b \varphi_1(x) \psi_1(x) dx.$$

Nous pouvons alors compléter le groupe principal associé  $(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$  avec  $(n - 1)$  fonctions linéairement distinctes  $\psi_2, \psi_3, \dots, \psi_n$ , orthogonales à  $\varphi_1$ , de

façon que l'on ait

$$(62) \quad \int_a^b \varphi_1(x) \psi_i(x) dx = 0 \quad (i = 2, 3, \dots, n).$$

Cela étant fait, employons la transformation du n° 16

$$\mathbf{H}(x, y) = \varphi_1(x) \psi_1(y) + \mathbf{H}_1(x, y),$$

et soient  $\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n$  les  $(n - 1)$  fonctions du groupe principal correspondant au nombre fondamental  $c$  pour la nouvelle équation homogène

$$(63) \quad \varphi(x) = c \int_a^b \mathbf{H}_1(x, s) \varphi(s) ds.$$

Les  $n$  fonctions  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  forment, on l'a vu (n° 16), un groupe principal pour l'équation (60).

Nous allons montrer que les  $(n - 1)$  fonctions  $\psi_2, \psi_3, \dots, \psi_n$  forment aussi un groupe principal pour l'équation associée

$$(64) \quad \psi(x) = c \int_a^b \mathbf{H}_1(s, x) \psi(s) ds.$$

Nous avons en effet

$$c \int_a^b \mathbf{H}_1(s, x) \psi_i(s) ds = c \int_a^b \mathbf{H}(s, x) \psi_i(s) ds - c \int_a^b \varphi_1(s) \psi_1(x) \psi_i(s) ds,$$

c'est-à-dire, d'après la condition (62),

$$c \int_a^b \mathbf{H}_1(s, x) \psi_i(s) ds = c \int_a^b \mathbf{H}(x, s) \psi_i(s) ds \quad (i = 2, 3, \dots, n).$$

Nous avons donc un système de relations de la forme

$$c \int_a^b \mathbf{H}_1(s, x) \psi_i(s) ds = \mathbf{A}_{1i} \psi_1(x) + \mathbf{A}_{2i} \psi_2(x) + \dots + \mathbf{A}_{ni} \psi_n(x);$$

multiplions par  $\varphi_1(x)$  et intégrons de  $a$  à  $b$ . En tenant compte des conditions (62), il reste

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{1i} \int_a^b \psi_1(x) \varphi_1(x) dx &= c \int_a^b \int_a^b \mathbf{H}_1(s, x) \varphi_1(x) \psi_i(s) dx ds \\ &= c \int_a^b \psi_i(s) ds \int_a^b \mathbf{H}_1(s, x) \varphi_1(x) dx. \end{aligned}$$

Mais on a (n° 16)

$$\int_a^b \mathbf{H}_1(s, x) \varphi_1(x) dx = 0,$$

et par conséquent  $\mathbf{A}_{1i} = 0$ . Les  $n - 1$  fonctions  $\psi_2, \dots, \psi_n$  satisfont donc à  $(n - 1)$  relations telles que

$$(65) \quad c \int_a^b \mathbf{H}_1(s, x) \psi_i(s) ds = \mathbf{A}_{2i} \psi_2(x) + \dots + \mathbf{A}_{ni} \psi_n(x) \quad (i = 2, 3, \dots, n).$$

Pour prouver que  $\psi_2, \psi_3, \dots, \psi_n$  forment un groupe principal pour l'équation (64), il suffit de montrer (n° 19) que le déterminant caractéristique  $\Delta(r)$  de la substitution linéaire (65) est égal à  $(1 - r)^{n-1}$ . Mais on a aussi

$$(66) \quad c \int_a^b \mathbf{H}(s, x) \psi_i(s) ds = \mathbf{A}_{2i} \psi_2(x) + \dots + \mathbf{A}_{ni} \psi_n(x) \quad (i = 2, 3, \dots, n),$$

avec une autre relation

$$(67) \quad c \int_a^b \mathbf{H}(s, x) \psi_1(x) dx = \mathbf{B}_1 \psi_1(x) + \dots + \mathbf{B}_n \psi_n(x),$$

et le déterminant caractéristique de la substitution linéaire définie par les formules (66) et (67) est égal à  $(1 - r)^n$ . Or ce déterminant est évidemment égal à  $\Delta(r)(\mathbf{B}_1 - r)$ . Il faut donc que l'on ait  $\mathbf{B}_1 = 1$ ,  $\Delta(r) = (1 - r)^{n-1}$ .

En résumé, les deux groupes  $(\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n)$  et  $(\psi_2, \psi_3, \dots, \psi_n)$  sont deux groupes principaux associés pour l'équation (64). Cela étant, admettons qu'il existe une combinaison linéaire

$$\mathbf{C}_1 \psi_1 + \mathbf{C}_2 \psi_2 + \dots + \mathbf{C}_n \psi_n,$$

qui soit orthogonale à la fois aux  $n$  fonctions  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ . En vertu des relations (61) et (62),  $\mathbf{C}_1$  doit être nul, et il existerait une combinaison linéaire de  $\psi_2, \psi_3, \dots, \psi_n$  qui serait orthogonale à la fois aux  $(n - 1)$  fonctions  $\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n$ . Cela est impossible puisque la proposition énoncée est supposée exacte dans le cas d'une racine d'ordre  $(n - 1)$  de l'équation déterminante.

*Corollaire.* — Posons pour abrégier

$$(\varphi\psi) = \int_a^b \varphi(x) \psi(x) dx$$

et soit  $\Delta$  le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} (\varphi_1 \psi_1) & (\varphi_1 \psi_2) & \dots & (\varphi_1 \psi_n) \\ (\varphi_2 \psi_1) & (\varphi_2 \psi_2) & \dots & (\varphi_2 \psi_n) \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ (\varphi_n \psi_1) & (\varphi_n \psi_2) & \dots & (\varphi_n \psi_n) \end{vmatrix},$$

où  $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$  et  $(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$  sont deux groupes principaux associés, correspondant à une racine d'ordre  $n$  de l'équation  $D(\lambda) = 0$ . *Le déterminant  $\Delta$  est différent de zéro.*

En effet, s'il était nul, il serait possible de trouver une fonction principale, non identiquement nulle,

$$\Psi = C_1 \psi_1 + C_2 \psi_2 + \dots + C_n \psi_n,$$

vérifiant les  $n$  relations

$$(\varphi_1 \Psi) = 0, \quad (\varphi_2 \Psi) = 0, \quad \dots, \quad (\varphi_n \Psi) = 0.$$

Tout pareillement, il n'existe aucune combinaison linéaire de  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ , qui soit orthogonale à la fois aux  $n$  fonctions  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ .

24. Désignons toujours par  $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$  et  $(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$  deux groupes principaux associés, d'ailleurs quelconques, correspondant à une racine  $c$  d'ordre  $n$  de l'équation  $D(\lambda) = 0$ , et posons

$$\begin{aligned} h(x, y) = & \varphi_1(x) [c_{11} \psi_1(y) + c_{12} \psi_2(y) + \dots + c_{1n} \psi_n(y)] \\ & + \varphi_2(x) [c_{21} \psi_1(y) + \dots + c_{2n} \psi_n(y)] \\ & + \dots\dots\dots \\ & + \varphi_n(x) [c_{n1} \psi_1(y) + \dots + c_{nn} \psi_n(y)], \end{aligned}$$

les coefficients  $c_{ih}$  étant des constantes. On peut choisir ces  $n^2$  coefficients, et cela d'une seule façon, de telle sorte que l'on ait

$$(68) \quad \int_0^1 h(x, s) \varphi_i(s) ds = \int_0^1 \mathbf{H}(x, s) \varphi_i(s) ds \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

En effet, les deux membres de ces  $n$  égalités sont des combinaisons linéaires de  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ . En égalant les coefficients de  $\varphi_1(x)$  par exemple, on a un système de  $n$  équations linéaires pour déterminer les coefficients  $c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1n}$ , et le déterminant correspondant est précisément  $\Delta$ . Les autres coefficients se déterminent de la même façon.

Ces coefficients  $c_{ih}$  étant choisis ainsi, posons

$$\Psi_i(y) = c_{i1} \psi_1(y) + \dots + c_{in} \psi_n(y) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

les  $n$  fonctions  $\Psi_i(y)$  sont linéairement indépendantes. Supposons en effet qu'elles ne le soient pas; la fonction  $h(x, y)$  pourrait se mettre sous la forme

$$h(x, y) = X_1 Y_1 + \dots + X_p Y_p \quad (p < n),$$

$X_1, X_2, \dots, X_p$  étant des fonctions de  $x$ , et  $Y_1, Y_2, \dots, Y_p$  des fonctions de  $y$ . L'équation déterminante correspondant à ce noyau  $h(x, y)$  serait au plus de degré  $p(n^0 6)$ , et par conséquent ne pourrait admettre la racine  $c$  au degré  $n$  de multiplicité. Il ne pourrait donc y avoir  $n$  fonctions principales pour l'équation

$$\varphi(x) = c \int_a^b h(x, s) \varphi(s) ds;$$

or, d'après les conditions (68), les  $n$  fonctions principales  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  pour l'équation

$$\varphi(x) = c \int_a^b H(x, s) \varphi(s) ds$$

sont aussi principales pour la première équation.

En définitive, il existe toujours une fonction  $h(x, y)$ , *et une seule*, qui est à la fois linéaire par rapport aux fonctions principales des deux groupes associés et qui satisfait aux relations (68). Nous appellerons cette fonction le *noyau principal* correspondant à la racine  $c$ .

Si deux groupes principaux associés  $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$  et  $(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$  sont tels que le noyau principal ait pour expression

$$h(x, y) = \varphi_1(x) \psi_1(y) + \varphi_2(x) \psi_2(y) + \dots + \varphi_n(x) \psi_n(y),$$

nous dirons que ces deux groupes associés sont *conjugués*. Il y a une infinité de groupes conjugués, car on peut choisir pour  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  des fonctions principales quelconques, pourvu qu'elles soient distinctes, et l'on vient de voir comment on doit déterminer les fonctions  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$  qu'il faut leur adjoindre pour avoir deux groupes conjugués.

Dans le cas d'un noyau symétrique  $H(x, y)$ , le noyau principal correspondant à une racine  $c$  de  $D(\lambda) = 0$ , d'ordre  $n$  de multiplicité, a pour expression

$$(69) \quad h(x, y) = \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(x) \varphi_i(y),$$

$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$  étant  $n$  fonctions fondamentales distinctes orthogonales deux à deux, et les coefficients  $C_i$  étant choisis de façon que l'on ait

$$1 = C_i c \int_a^b \varphi_i^2(s) ds.$$

Si l'on pose  $\mathbf{H}(x, y) = h(x, y) + \mathbf{H}_n(x, y)$ , les deux noyaux  $h(x, y)$  et  $\mathbf{H}_n(x, y)$  sont symétriques et orthogonaux.

Nous allons étendre cette dernière propriété au cas général.

25. Nous commencerons par généraliser la formule (57) du n° 21;  $\mathbf{H}(x, y)$  étant un noyau quelconque, posons

$$\mathbf{S} \varphi(x) = \int_a^b \mathbf{H}(x, s) \varphi(s) ds, \quad \mathbf{S}' \varphi(x) = \int_a^b \mathbf{H}(s, x) \varphi(s) ds,$$

et soient  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  deux fonctions quelconques intégrables dans l'intervalle  $(a, b)$ . L'intégrale simple

$$\int_a^b [\varphi(x) \mathbf{S}' \psi(x) - \psi(x) \mathbf{S} \varphi(x)] dx$$

peut encore se mettre sous forme d'intégrale double

$$\int_a^b \int_a^b [\mathbf{H}(s, x) \varphi(x) \psi(s) - \mathbf{H}(x, s) \varphi(s) \psi(x)] dx ds;$$

et la somme des deux éléments provenant des deux systèmes de valeurs

$$(x = x', s = s'), \quad (x = s', s = x')$$

est encore nulle. On a donc, quelles que soient les fonctions  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$ ,

$$(70) \quad \int_a^b \varphi(x) \mathbf{S}' \psi(x) dx = \int_a^b \psi(x) \mathbf{S} \varphi(x) dx.$$

Des deux relations

$$c \mathbf{S} \varphi(x) = \Phi(x), \quad c \mathbf{S}' \psi(x) = \Psi(x),$$

on déduit donc l'égalité des deux intégrales

$$(71) \quad \int_a^b \varphi(x) \Psi(x) dx = \int_a^b \psi(x) \Phi(x) dx.$$

Cela posé, soient  $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ ,  $(\psi_1, \dots, \psi_n)$  deux groupes principaux conjugués quelconques. On a pour les fonctions de ces deux groupes les deux systèmes



ce qui peut encore s'écrire

$$(75) \quad \alpha_{i1}(\varphi_1\psi_h) + \dots + \alpha_{in}(\varphi_n\psi_h) = \beta_{h1}(\varphi_i\psi_1) + \dots + \beta_{hn}(\varphi_i\psi_n).$$

Prenons pour  $h$  une valeur fixe, et donnons successivement à l'indice  $i$  les valeurs 1, 2, ...,  $n$ ; nous obtenons  $n$  équations linéaires permettant de calculer  $\beta_{h1}$ ,  $\beta_{h2}$ , ...,  $\beta_{hn}$ , car le déterminant correspondant est précisément  $\Delta$ . D'ailleurs, si l'on remplace  $(\varphi_i\psi_h)$  par sa valeur  $\frac{\alpha_{ih}}{c}$ , les équations (75) deviennent, en multipliant par  $c$ ,

$$\alpha_{i1}\alpha_{1h} + \alpha_{i2}\alpha_{2h} + \dots + \alpha_{in}\alpha_{nh} = \alpha_{i1}\beta_{h1} + \dots + \alpha_{in}\beta_{hn},$$

et l'on y satisfait évidemment en posant

$$\beta_{h1} = \alpha_{1h}, \quad \beta_{h2} = \alpha_{2h}, \quad \dots, \quad \beta_{hn} = \alpha_{nh}.$$

On a donc la relation générale

$$(76) \quad \beta_{hi} = \alpha_{ih},$$

et l'on voit que le *déterminant de la substitution linéaire (73) se déduit du déterminant de la substitution linéaire (72) par un renversement autour de la diagonale principale.*

On en déduit que la fonction  $h(x, y)$  joue le même rôle par rapport aux fonctions  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$  que par rapport aux fonctions  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ , c'est-à-dire qu'on a

$$(77) \quad \int_a^b \mathbf{H}(s, x) \psi_i(s) ds = \int_a^b h(s, x) \psi_i(s) ds \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Des formules (73) et (76) on tire, en effet,

$$c \int_a^b \mathbf{H}(s, x) \psi_i(s) ds = \alpha_{1i}\psi_1 + \dots + \alpha_{ni}\psi_n.$$

D'autre part, on a

$$c \int_a^b h(s, x) \psi_i(s) ds = c \psi_1(x) \int_a^b \varphi_1(s) \psi_i(s) ds + \dots + c \psi_n(x) \int_a^b \varphi_n(s) \psi_i(s) ds,$$

c'est-à-dire, d'après les relations (74),

$$c \int_a^b h(s, x) \psi_i(s) ds = \alpha_{1i}\psi_1 + \alpha_{2i}\psi_2 + \dots + \alpha_{ni}\psi_n,$$

ce qui démontre bien la relation (77).

Les formules (68) et (77) peuvent encore s'écrire

$$\int_a^b [\mathbf{H}(x, s) - h(x, s)] \varphi_i(s) ds = 0, \quad \int_a^b [\mathbf{H}(s, y) - h(s, y)] \psi_i(s) ds = 0$$

$$(i = 1, 2, \dots, n),$$

et comme  $h(x, y)$  est linéaire par rapport aux fonctions  $\varphi_i(x)$  et par rapport aux fonctions  $\psi_i(y)$ , on a aussi

$$(78) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_a^b [\mathbf{H}(x, s) - h(x, s)] h(s, y) ds = 0, \\ \int_a^b [\mathbf{H}(s, y) - h(s, y)] h(x, s) ds = 0. \end{array} \right.$$

Les deux noyaux  $h(x, y)$  et  $\mathbf{H}_n(x, y) = \mathbf{H}(x, y) - h(x, y)$  sont donc orthogonaux, ce qui conduit au théorème suivant :

**THÉORÈME VI.** — Soit  $h(x, y)$  le noyau principal correspondant à une racine  $c$  de l'équation  $D(\lambda) = 0$ ; si l'on pose

$$(79) \quad \mathbf{H}(x, y) = h(x, y) + \mathbf{H}_n(x, y),$$

les deux noyaux  $h(x, y)$  et  $\mathbf{H}_n(x, y)$  sont orthogonaux.

*Corollaire.* — Soit  $D_n(\lambda)$  la fonction déterminante correspondant au noyau  $\mathbf{H}_n(x, y)$ . On a déjà observé (n° 24) que la fonction déterminante  $d(\lambda)$ , relative à  $h(x, y)$ , est égale à  $\left(1 - \frac{\lambda}{c}\right)^n$ . On a donc, d'après le théorème I,

$$(80) \quad D_n(\lambda) = \frac{D(\lambda)}{\left(1 - \frac{\lambda}{c}\right)^n},$$

et l'équation  $D(\lambda) = 0$  n'admet pas la racine  $c$ .

26. Lorsque le groupe principal  $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$  est un groupe normal, tous les éléments situés au-dessus de la diagonale principale dans le déterminant de la substitution linéaire (72) sont nuls. Il en résulte que tous les éléments du déterminant de la substitution linéaire (73), situés au-dessous de la diagonale principale, sont nuls, et le *groupe conjugué est aussi un groupe normal*.

Faisons une hypothèse encore plus particulière, et supposons que le groupe

$$(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$$

soit un groupe canonique, se décomposant par exemple en deux sous-groupes canoniques, comprenant respectivement  $p$  et  $q$  fonctions principales

$$(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p) \text{ et } (\varphi'_1, \varphi'_2, \dots, \varphi'_q).$$

Les formules (72) deviennent ici

$$(81) \quad \begin{cases} cS \varphi_1(x) = \varphi_1, & cS \varphi_2(x) = \varphi_1 + \varphi_2, & \dots, & cS \varphi_p(x) = \varphi_{p-1} + \varphi_p, \\ cS \varphi'_1(x) = \varphi'_1, & cS \varphi'_2(x) = \varphi'_1 + \varphi'_2, & \dots, & cS \varphi'_q(x) = \varphi'_{q-1} + \varphi'_q. \end{cases}$$

Soit  $(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_p; \psi'_1, \dots, \psi'_q)$  le groupe conjugué; d'après la propriété générale qui vient d'être démontrée, les formules (73) sont les suivantes :

$$(82) \quad \begin{cases} cS' \psi_1 = \psi_1 + \psi_2, & cS' \psi_2 = \psi_2 + \psi_3, & \dots, & cS' \psi_p = \psi_p, \\ cS' \psi'_1 = \psi'_1 + \psi'_2, & cS' \psi'_2 = \psi'_2 + \psi'_3, & \dots, & cS' \psi'_q = \psi'_q. \end{cases}$$

On voit que le groupe conjugué est aussi un groupe canonique se décomposant en deux sous-groupes canoniques. Nous dirons encore que les deux sous-groupes  $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$  et  $(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_p)$  sont conjugués, ainsi que les deux sous-groupes  $(\varphi'_1, \dots, \varphi'_q)$  et  $(\psi'_1, \psi'_2, \dots, \psi'_q)$ . Il est clair que le raisonnement est général, et nous pouvons énoncer le théorème suivant :

**THÉORÈME VII.** — *Le groupe conjugué d'un groupe canonique est un groupe canonique, et le nombre des sous-groupes canoniques est le même pour les deux groupes.*

Il en résulte (n° 20) que le nombre des fonctions fondamentales distinctes, correspondant à un nombre fondamental  $c$ , est le même pour les deux équations associées

$$\varphi(x) = c \int_a^b \mathbf{H}(x, s) \varphi(s) ds, \quad \psi(x) = c \int_a^b \mathbf{H}(s, x) \psi(s) ds.$$

27. Reprenons nos deux groupes canoniques conjugués, qui se décomposent en deux sous-groupes canoniques. La comparaison des formules (61) avec la relation générale (74), qui donne la valeur du coefficient  $\alpha_{ih}$ , montre d'abord que les intégrales  $(\varphi_i \psi'_h)$  et  $(\varphi'_i \psi_h)$  sont nulles, ce qui prouve que deux fonctions  $\varphi$  et  $\psi'$ , appartenant à deux sous-groupes canoniques non conjugués, sont orthogonales.

Quant aux fonctions de deux sous-groupes conjugués, on voit de la même façon que  $\varphi_1$  est orthogonal à  $\psi_2, \psi_3, \dots, \psi_p$ ;  $\varphi_2$  est orthogonal à tous les  $\psi_i$ , sauf  $\psi_1$  et  $\psi_2$ ;  $\varphi_3$  est orthogonal à tous les  $\psi_i$ , sauf  $\psi_2$  et  $\psi_3$ , et ainsi de suite.

Posons

$$\begin{aligned} h_1(x, y) &= \varphi_1(x) \psi_1(y) + \dots + \varphi_p(x) \psi_p(y), \\ h_2(x, y) &= \varphi'_1(x) \psi'_1(y) + \dots + \varphi'_q(x) \psi'_q(y); \end{aligned}$$

d'après ce qu'on vient de démontrer, on a évidemment

$$\left. \begin{aligned} \int_a^b h_1(x, s) \varphi'_i(s) ds &= 0 \\ \int_a^b h_1(s, x) \psi'_i(s) ds &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, q),$$

et de même

$$\left. \begin{aligned} \int_a^b h_2(x, s) \varphi_j(s) ds &= 0 \\ \int_a^b h_2(s, x) \psi_j(s) ds &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (j = 1, 2, \dots, p)$$

et, par conséquent,

$$\int_a^b h_1(x, s) h_2(s, y) ds = 0, \quad \int_a^b h_1(s, y) h_2(x, s) ds = 0.$$

Les deux noyaux  $h_1(x, y)$  et  $h_2(x, y)$  sont donc orthogonaux. Le raisonnement est évidemment général et l'on a le théorème suivant :

**THÉORÈME VIII.** — *Si les fonctions principales qui correspondent à un nombre fondamental  $c$  peuvent se répartir en  $r$  sous-groupes canoniques, le noyau principal correspondant  $h(x, y)$  peut se décomposer en  $r$  noyaux secondaires*

$$h_1(x, y), \quad h_2(x, y), \quad \dots, \quad h_r(x, y),$$

*orthogonaux deux à deux, dont chacun est formé avec les fonctions de deux sous-groupes canoniques conjugués.*

D'après la façon même dont ces noyaux secondaires ont été formés, il résulte que la fonction déterminante  $d_i(\lambda)$  relative au noyau  $h_i(x, y)$  est égale à  $\left(1 - \frac{\lambda}{c}\right)^{n_i}$ , si les sous-groupes canoniques correspondants contiennent  $n_i$  fonctions.

28. A chaque nombre fondamental correspondent ainsi deux groupes associés de fonctions principales, ainsi qu'un noyau principal, pouvant se décomposer en plusieurs noyaux secondaires. La comparaison des fonctions principales, provenant de deux nombres fondamentaux différents, conduit au théorème suivant :

THÉORÈME IX. — Deux fonctions principales  $\varphi_i^{c_1}(x)$  et  $\psi_h^{c_2}(x)$ , correspondant à deux nombres fondamentaux différents, sont orthogonales.

Pour simplifier les notations, supposons que  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  soient  $n$  fonctions principales distinctes correspondant à un nombre fondamental  $c_1$  et que  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m$  soient  $m$  fonctions principales associées correspondant à un autre nombre fondamental  $c_2$ . Si ces deux groupes de fonctions sont normaux, comme on peut toujours le supposer, on a les deux systèmes de relations

$$(83) \quad \begin{cases} c_1 \mathbf{S} \varphi_1(x) = \varphi_1, \\ c_1 \mathbf{S} \varphi_2(x) = \alpha_{21} \varphi_1 + \varphi_2, \\ \dots\dots\dots, \\ c_1 \mathbf{S} \varphi_n(x) = \alpha_{n1} \varphi_1 + \alpha_{n2} \varphi_2 + \dots + \varphi_n; \end{cases}$$

$$(84) \quad \begin{cases} c_2 \mathbf{S}' \psi_1(x) = \psi_1, \\ c_2 \mathbf{S}' \psi_2(x) = \beta_{21} \psi_1 + \psi_2, \\ \dots\dots\dots, \\ c_2 \mathbf{S}' \psi_m(x) = \beta_{m1} \psi_1 + \beta_{m2} \psi_2 + \dots + \psi_m. \end{cases}$$

D'après la relation générale (70), nous avons

$$(85) \quad c_1 \int_a^b \varphi(x) \cdot c_2 \mathbf{S}' \psi(x) dx = c_2 \int_a^b \psi(x) \cdot c_1 \mathbf{S} \varphi(x) dx,$$

quelles que soient les fonctions  $\varphi(x)$  et  $\psi(x)$ .

Prenons d'abord  $\varphi(x) = \varphi_1(x)$ , et faisons successivement  $\psi(x) = \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m$ . Il vient, de proche en proche,

$$\begin{aligned} (c_1 - c_2) \int_a^b \varphi_1(x) \psi_1(x) dx &= 0, \\ (c_1 - c_2) \int_a^b \varphi_1(x) \psi_2(x) dx &= 0, \\ \dots\dots\dots, \\ (c_1 - c_2) \int_a^b \varphi_1(x) \psi_m(x) dx &= 0, \end{aligned}$$

et l'on voit que  $\varphi_1(x)$  est orthogonale à toutes les fonctions  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m$ . Ceci étant établi, prenons ensuite  $\varphi = \varphi_2(x)$  et faisons successivement  $\psi = \psi_1, \dots, \psi_m$ , on voit que  $\varphi_2$  est aussi orthogonale à toutes les fonctions  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m$ , et ainsi de suite.

Il s'ensuit, comme conséquence, que les *noyaux principaux*, aussi bien que les *noyaux secondaires*, correspondant à deux nombres fondamentaux différents, sont orthogonaux.

On peut résumer ces résultats comme il suit.

Soit  $c$  une racine de l'équation  $D(\lambda) = 0$ ; outre son ordre de multiplicité  $n$ , il y a lieu de considérer un autre nombre entier positif, le *rang*  $r$  de cette racine, c'est-à-dire le nombre des sous-groupes canoniques entre lesquels on peut répartir les  $n$  fonctions principales correspondantes. Cela posé, imaginons qu'on range en une série toutes les racines de  $D(\lambda) = 0$

$$(86) \quad c_1, \quad c_2, \quad \dots, \quad c_i, \quad \dots,$$

chaque racine figurant dans cette série un nombre de fois marqué par son rang; on peut, par exemple, les ranger par ordre de modules croissants. A chaque nombre  $c_i$  de cette suite, on peut alors faire correspondre un noyau  $h_i(x, y)$ , de façon à obtenir une suite de fonction

$$(87) \quad h_1(x, y), \quad h_2(x, y), \quad \dots, \quad h_i(x, y), \quad \dots,$$

deux noyaux différents quelconques pris dans cette suite étant toujours orthogonaux.

29. On a vu plus haut (n° 21) que tout noyau  $H(x, y)$ , symétrique en  $x$  et  $y$ , donne naissance à un système orthogonal de fonctions. Un noyau non symétrique fournit de même un système *biorthogonal*; nous appelons ainsi l'ensemble de deux systèmes de fonctions, se correspondant une à une,

$$\begin{aligned} \varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \dots, \quad \varphi_i, \quad \dots, \\ \psi_1, \quad \psi_2, \quad \dots, \quad \psi_i, \quad \dots, \end{aligned}$$

telles que l'on ait

$$\int_a^b \varphi_i(x) \psi_k(x) dx = 0,$$

lorsque les indices  $i$  et  $k$  sont différents, les intégrales

$$\int_a^b \varphi_i(x) \psi_i(x) dx$$

n'étant pas nulles. Il suffit évidemment de prouver que, au moyen des fonctions  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$  d'un sous-groupe canonique et des  $p$  fonctions  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_p$  du sous-groupe conjugué, on peut former deux groupes de  $p$  fonctions

$$(\Phi_1, \dots, \Phi_p), \quad (\Psi_1, \dots, \Psi_p),$$

les  $\Phi_i$  étant des combinaisons linéairement indépendantes des  $\varphi_i$ , et les  $\Psi_i$  des

combinaisons linéairement indépendantes des  $\psi_i$ , de façon qu'on ait

$$\int_a^b \Phi_i(x) \Psi_k(x) dx = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq k.$$

D'une façon plus générale, soient  $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$  et  $(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_p)$  deux groupes de  $p$  fonctions linéairement distinctes, telles qu'il n'existe aucune combinaison linéaire des fonctions  $\varphi_i$  qui soit orthogonale à tous les  $\psi_i$ , et inversement.

Prenons  $\Phi_1(x) = \varphi_1(x)$ , et soit  $\Psi_1(x)$  une combinaison linéaire des fonctions  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_p$ , telle que l'intégrale définie

$$\int_a^b \Phi_1(x) \Psi_1(x) dx$$

soit différente de zéro. Choisissons ensuite les coefficients  $c_2, c_3, \dots, c_p, c'_2, c'_3, \dots, c'_p$  de façon qu'on ait

$$\left. \begin{aligned} \int_a^b [\varphi_i(x) - c_i \Phi_1(x)] \Psi_1(x) dx &= 0 \\ \int_a^b [\psi_i(x) - c'_i \Psi_1(x)] \Phi_1(x) dx &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (i = 2, 3, \dots, n);$$

nous obtenons ainsi deux groupes de  $p$  fonctions linéairement distinctes

$$\begin{aligned} \Phi_1, \quad \varphi'_2, \quad \dots, \quad \varphi'_p, \\ \Psi_1, \quad \psi'_2, \quad \dots, \quad \psi'_p, \end{aligned}$$

où  $\varphi'_i = \varphi_i - c_i \Phi_1(x)$ ,  $\psi'_i = \psi_i - c'_i \Psi_1(x)$ , et telles qu'on ait

$$\int_a^b \Phi_1(x) \psi'_i(x) dx = 0, \quad \int_a^b \Psi_1(x) \varphi'_i(x) dx = 0.$$

Les deux groupes de  $(p - 1)$  fonctions  $(\varphi'_2, \varphi'_3, \dots, \varphi'_p)$  et  $(\psi'_2, \psi'_3, \dots, \psi'_p)$  jouissant de la même propriété que les deux groupes primitifs, on peut répéter la même opération, et il est clair qu'en continuant ainsi on arrivera à deux groupes de  $p$  fonctions jouissant de la propriété voulue.

Dans le cas particulier considéré ici, où  $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$  et  $(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_p)$  forment deux sous-groupes canoniques associés, les fonctions  $\varphi_i$  et  $\psi_k$  satisfont aux relations établies plus haut (n° 27), et l'on a un système biorthogonal en



dans le domaine d'un pôle  $\lambda = c$  est égale au noyau résolvant

$$\gamma(x, y; \lambda)$$

relatif au noyau principal  $h(x, y)$  qui correspond à ce pôle.

Cet énoncé s'applique aussi, comme nous allons le montrer, au cas d'un noyau  $\mathbf{H}(x, y)$  non borné, pourvu que dans la suite des noyaux déduits de  $\mathbf{H}(x, y)$  par itération, on obtienne un noyau borné ou, plus généralement, un noyau auquel s'applique la solution de Fredholm.

Il nous faut d'abord, pour cela, étendre la définition des fonctions principales et du noyau principal au cas d'un noyau non borné.

31. Soient  $\mathbf{H}(x, y)$  un noyau quelconque, borné ou non, et  $\mathbf{H}^{(p)}(x, y)$  le noyau qu'on en déduit par  $(p - 1)$  itérations successives. On a vu plus haut (n° 7) que tout pôle  $c$  du noyau résolvant  $\Gamma(x, y; \lambda)$  donne un pôle  $c^p$  pour le noyau résolvant  $\Gamma_p(x, y; \lambda)$  déduit de  $\mathbf{H}^{(p)}(x, y)$ .

Toute solution de l'équation

$$(89) \quad \varphi(x) = c \int_a^b \mathbf{H}(x, s) \varphi(s) ds = c \mathbf{S} \varphi(x)$$

est aussi une solution de l'équation

$$(90) \quad \varphi(x) = c^p \int_a^b \mathbf{H}^{(p)}(x, s) \varphi(s) ds = c^p \mathbf{S}^{(p)} \varphi(x).$$

En effet, d'après la définition des noyaux itérés, la relation

$$\psi(x) = \int_a^b \mathbf{H}^{(i)}(x, s) \varphi(s) ds$$

entraîne la relation

$$\int_a^b \mathbf{H}(x, s) \psi(s) ds = \int_a^b \mathbf{H}^{(i+1)}(x, s) \varphi(s) ds;$$

de l'équation (89) on déduira donc successivement

$$\varphi(x) = c^2 \int_a^b \mathbf{H}^{(2)}(x, s) \varphi(s) ds = c^3 \int_a^b \mathbf{H}^{(3)}(x, s) \varphi(s) ds = \dots,$$

et, enfin, la relation (90).

*Toute fonction fondamentale pour le noyau  $\mathbf{H}(x, y)$ , correspondant au*

nombre fondamental  $c$ , est aussi une fonction fondamentale pour le noyau  $\mathbf{H}^{(p)}(x, y)$ , et le nombre fondamental correspondant est  $c^p$ .

Inversement, soit  $\psi(x)$  une solution de l'équation

$$(90') \quad \psi(x) = c^p \int_a^b \mathbf{H}^{(p)}(x, s) \psi(s) ds.$$

Posons

$$(91) \quad \begin{aligned} \pi(x) = & \psi(x) + c \int_a^b \mathbf{H}(x, s) \psi(s) ds \\ & + c^2 \int_a^b \mathbf{H}^{(2)}(x, s) \psi(s) ds + \dots + c^{p-1} \int_a^b \mathbf{H}^{(p-1)}(x, s) \psi(s) ds; \end{aligned}$$

on en déduit

$$\begin{aligned} \int_a^b \mathbf{H}(x, s) \pi(s) ds &= \int_a^b \mathbf{H}(x, s) \psi(s) ds + c \int_a^b \mathbf{H}^{(2)}(x, s) \psi(s) ds + \dots + c^{p-1} \psi(x) \\ &= \frac{\pi(x)}{c}, \end{aligned}$$

et la fonction  $\pi(x)$ , définie par l'égalité (91), est bien une solution de l'équation (89). Mais il peut se faire que cette fonction  $\pi(x)$  soit identiquement nulle.

Pour voir dans quels cas il peut en être ainsi, posons plus généralement

$$(92) \quad \begin{aligned} \pi_\nu(x) = & \psi(x) + c \omega^\nu \int_a^b \mathbf{H}(x, s) \psi(s) ds + c^2 \omega^{2\nu} \int_a^b \mathbf{H}^{(2)}(x, s) \psi(s) ds + \dots \\ & + c^{p-1} \omega^{\nu(p-1)} \int_a^b \mathbf{H}^{(p-1)}(x, s) \psi(s) ds \\ & (\nu = 1, 2, \dots, p), \end{aligned}$$

$\omega$  étant une racine primitive de l'équation  $\omega^p = 1$ . On voit encore que  $\pi_\nu(x)$  est une solution de l'équation homogène

$$(89') \quad \pi_\nu(x) = c \omega^\nu \int_a^b \mathbf{H}(x, s) \pi_\nu(s) ds.$$

D'ailleurs les  $p$  fonctions  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_\nu$  ne peuvent être nulles à la fois, d'après la relation

$$(93) \quad p \psi(x) = \sum_{\nu=1}^p \pi_\nu(x),$$

qui s'obtient en ajoutant les  $p$  relations (92). A une solution de l'équation (90) correspond donc une solution de l'une au moins des équations (89'). Lorsque le noyau  $\Gamma(x, y; \lambda)$  admet deux pôles,  $c, c'$  par exemple, et deux seulement, dont

le rapport est une racine  $p^{\text{ième}}$  de l'unité, les solutions des deux équations

$$\varphi(x) = c \int_a^b \mathbf{H}(x, s) \varphi(s) ds, \quad \varphi(x) = c' \int_a^b \mathbf{H}(x, s) \varphi(s) ds$$

sont bien solutions de l'équation (90). Inversement, toute solution de l'équation (90) fournit une solution, différente de zéro, de l'une au moins des équations précédentes.

Pour éviter toute difficulté de cette nature, le noyau  $\mathbf{H}(x, y)$  étant donné, ainsi que le pôle  $c$  de  $\Gamma(x, y; \lambda)$ , nous supposons qu'on a choisi le nombre  $p$  de façon que le noyau  $\mathbf{H}^{(p)}(x, y)$  reste fini et, en outre, de façon que le noyau résolvant  $\Gamma(x, y; \lambda)$  n'admette pas d'autre pôle  $c'$ , tel que  $\frac{c'}{c}$  soit une racine  $p^{\text{ième}}$  de l'unité. Il est clair qu'on peut choisir le nombre  $p$ , de manière à satisfaire à ces deux conditions. Ce nombre  $p$  étant ainsi choisi, *les deux équations (89) et (90) admettent les mêmes solutions.*

En effet,  $c\omega, c\omega^2, \dots, c\omega^{p-1}$  n'étant pas des pôles de  $\Gamma(x, y; \lambda)$  les  $(p-1)$  équations (89'), où  $\nu$  est différent de  $p$ , n'admettent pas d'autre solution que

$$\pi_\nu(x) = 0,$$

et là relation (93) donne

$$p\psi(x) = \pi(x),$$

$\pi(x)$  étant défini par la formule (91).

32. Supposons maintenant que l'équation (89) admette  $n$  fonctions principales [ce qui aura lieu en particulier si le noyau  $\mathbf{H}(x, y)$  reste fini]; nous allons montrer que ces  $n$  fonctions sont aussi des fonctions principales pour l'équation (90). D'une façon plus précise, soit  $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\mu)$  un sous-groupe canonique de  $\mu$  fonctions principales, satisfaisant aux relations

$$c\mathbf{S}\varphi_1 = \varphi_1, \quad c\mathbf{S}\varphi_2 = \varphi_2 + \varphi_1, \quad c\mathbf{S}\varphi_3 = \varphi_3 + \varphi_2, \quad \dots, \quad c\mathbf{S}\varphi_\mu = \varphi_\mu + \varphi_{\mu-1},$$

on en déduit, de proche en proche,

$$\begin{aligned} c^p \mathbf{S}^{(p)} \varphi_1 &= \varphi_1, \\ c^p \mathbf{S}^{(p)} \varphi_2 &= \varphi_2 + p \varphi_1, \\ c^p \mathbf{S}^{(p)} \varphi_3 &= \varphi_3 + p \varphi_2 + \frac{p(p-1)}{2} \varphi_1, \\ &\dots \end{aligned}$$

et, d'une façon générale,

$$c^p \mathbf{S}^{(p)} \varphi_i = \varphi_i + C_1^p \varphi_{i-1} + C_2^p \varphi_{i-2} + \dots + C_{i-1}^p \varphi_1 \quad (i = 1, 2, \dots, \mu).$$



Si  $\Phi$  était nul, il en serait de même de  $\Psi$  et, par conséquent, les fonctions  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$  ne seraient pas linéairement indépendantes.

Nous savons déjà que  $\varphi_1 = \frac{\psi_1}{\rho}$ ; *les autres fonctions  $\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n$  sont aussi des combinaisons linéaires de  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ .*

Pour le démontrer, partageons les fonctions  $\psi_i$  en un certain nombre de groupes de la manière suivante. Dans le premier groupe, mettons les  $\mu$  fonctions fondamentales que nous désignerons par  $\psi_1^{(1)}, \psi_2^{(1)}, \dots, \psi_\mu^{(1)}$ ; dans le second groupe mettons les fonctions  $\psi_i$  telles que  $c^p S^{(p)} \psi_i - \psi_i$  soit une fonction linéaire des fonctions du premier groupe. D'une façon générale, le  $r^{\text{ième}}$  groupe comprendra les fonctions  $\psi_i$  telles que la différence  $c^p S^{(p)} \psi_i - \psi_i$  soit une fonction linéaire des fonctions des groupes précédents; nous désignerons par  $\psi_i^{(r)}$  une quelconque des fonctions du  $r^{\text{ième}}$  groupe.

Toute fonction  $\Psi$  telle que la différence

$$c^p S^{(p)} \Psi - \Psi$$

soit une combinaison linéaire et homogène des fonctions  $\psi_i$  des  $(r-1)$  premiers groupes, contenant au moins une fonction du  $(r-1)^{\text{ième}}$  groupe, est elle-même une combinaison linéaire des fonctions  $\psi_i$  des  $r$  premiers groupes (n° 26). Pour effectuer cette décomposition, on peut imaginer d'abord que les  $n$  fonctions  $\psi_i$  soient des fonctions principales réparties en un certain nombre de sous-groupes canoniques. Dans le second des nouveaux groupes, on mettra les secondes fonctions de chaque sous-groupe canonique, dans le troisième groupe les troisièmes fonctions de chaque sous-groupe canonique, et ainsi de suite.

A cette division des fonctions  $\psi_i$  en groupes correspond une division analogue des fonctions  $\varphi_i$ . Soit  $\varphi_i^{(r)}$  une fonction du  $r^{\text{ième}}$  groupe, correspondant à la fonction  $\psi_i^{(r)}$ ; *les fonctions  $\varphi_i^{(r)}$  du  $r^{\text{ième}}$  groupe sont des combinaisons linéaires des fonctions  $\psi_i$  des  $r$  premiers groupes.*

Nous avons, par exemple, pour  $r = 2$ ,

$$c S \varphi_i^{(2)}(x) - \varphi_i^{(2)} = c^p S^{(p)} \psi_i^{(2)}(x) - \psi_i^{(2)}(x);$$

le second membre est une combinaison linéaire des fonctions fondamentales  $\psi_1^{(1)}, \psi_2^{(1)}, \dots, \psi_\mu^{(1)}$  et, par suite, des fonctions  $\varphi_1^{(1)}, \varphi_2^{(1)}, \dots, \varphi_\mu^{(1)}$ . On a donc

$$c S \varphi_i^{(2)}(x) = \varphi_i^{(2)}(x) + A_1 \varphi_1^{(1)} + \dots + A_\mu \varphi_\mu^{(1)};$$

par des itérations répétées, on en conclut que la différence

$$c^p S^{(p)} \varphi_i^{(r)}(x) - \varphi_i^{(r)}(x)$$

est aussi une combinaison linéaire de  $\varphi_1^{(1)}, \dots, \varphi_\mu^{(1)}$ , ou de  $\psi_1^{(1)}, \dots, \psi_\mu^{(1)}$ . Par suite,

$\varphi_i^{(r)}$  est une combinaison linéaire des fonctions  $\psi_i$  des deux premiers groupes ; inversement les fonctions  $\psi_i^{(r)}$  du second groupe sont des combinaisons linéaires des fonctions  $\varphi_i$  des deux premiers groupes. Supposons la loi vraie jusqu'au groupe d'ordre  $(r - 1)$ , de façon que toutes les différences

$$c \mathbf{S} \varphi_i^{(l)}(x) - \varphi_i^{(l)}(x)$$

soient des combinaisons linéaires des fonctions  $\varphi_i$  appartenant aux  $(l - 1)$  premiers groupes, si  $l < r$ . On a,  $\varphi_i^{(r)}(x)$  étant une fonction quelconque du  $r^{\text{ième}}$  groupe,

$$c \mathbf{S} \varphi_i^{(r)}(x) = \varphi_i^{(r)}(x) + \mathbf{P},$$

$\mathbf{P}$  étant une combinaison linéaire des fonctions  $\varphi$  des  $(r - 1)$  premiers groupes. Par des itérations répétées, on en déduit que la différence

$$c^p \mathbf{S}^{(p)} \varphi_i^{(r)}(x) - \varphi_i^{(r)}(x)$$

est aussi une combinaison linéaire des fonctions  $\varphi_i$ , ou des fonctions  $\psi_i$ , des  $(r - 1)$  premiers groupes. La fonction  $\varphi_i^{(r)}(x)$  est donc elle-même une combinaison linéaire des fonctions  $\psi_i$  des  $r$  premiers groupes. La loi est donc générale.

La formule (96) nous montre alors que les  $n$  fonctions  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  forment un système normal de fonctions principales pour l'équation (89). Comme les  $n$  fonctions  $\varphi_i$  sont des combinaisons linéaires distinctes des fonctions  $\psi_i$ , on voit que les  $n$  fonctions  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$  sont aussi des fonctions principales pour l'équation (89).

En résumé, *tout groupe principal de l'équation (90) est aussi un groupe principal pour l'équation (89).*

Comme les fonctions fondamentales sont les mêmes pour les deux équations, il s'ensuit que *ces fonctions principales se répartissent pour les deux équations en un même nombre de sous-groupes canoniques.*

D'après la remarque faite au début de ce paragraphe, on peut faire correspondre ces sous-groupes un à un, *les fonctions d'un de ces sous-groupes étant des combinaisons linéaires distinctes des fonctions du sous-groupe canonique correspondant.*

33. On voit de la même façon que les fonctions principales pour l'équation

$$(97) \quad \psi(x) = c^p \int_a^b \mathbf{H}^{(p)}(s, x) \psi(s) ds$$

associée à l'équation (90) forment aussi un groupe de fonctions principales pour

l'équation

$$(98) \quad \psi(x) = c \int_a^b \mathbf{H}(s, x) \psi(s) ds$$

associée à l'équation (89).

On peut alors reprendre, sans modification, les raisonnements des nos 24-25.

Reprenant les notations de ces paragraphes, désignons par  $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$  et  $(\psi_1, \dots, \psi_n)$  les deux groupes de fonctions principales associées, qui viennent d'être définies, pour les équations (89) et (98). Le déterminant  $\Delta$  défini plus haut (n° 23) est différent de zéro, puisque ces deux groupes de fonctions sont aussi des groupes principaux associés pour les équations (90) et (97). On peut donc encore former un noyau  $h(x, y)$ , à la fois linéaire par rapport aux fonctions  $\varphi_i$  et aux fonctions  $\psi_i$  et satisfaisant aux conditions

$$\left. \begin{aligned} \int_a^b h(x, s) \varphi_i(s) ds &= \int_a^b \mathbf{H}(x, s) \varphi_i(s) ds \\ \int_a^b h(s, x) \psi_i(s) ds &= \int_a^b \mathbf{H}(s, x) \psi_i(s) ds \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

c'est le noyau principal correspondant au pôle  $c$  de  $\Gamma(x, y; \lambda)$ . Si l'on pose

$$\mathbf{H}(x, y) = h(x, y) + \mathbf{H}_n(x, y),$$

les deux noyaux  $h(x, y)$  et  $\mathbf{H}_n(x, y)$  sont orthogonaux et l'on a, par conséquent,

$$\Gamma(x, y; \lambda) = \gamma(x, y; \lambda) + \Gamma_n(x, y; \lambda),$$

$\gamma$  et  $\Gamma_n$  étant les noyaux résolvants qui correspondent à  $h(x, y)$  et à  $\mathbf{H}_n(x, y)$ . La fonction  $\Gamma_n(x, y; \lambda)$  n'admet pas le pôle  $\lambda = c$ . En effet, si  $c$  était un pôle de  $\Gamma_n(x, y; \lambda)$ , l'équation homogène

$$\pi(x) = c \int_a^b \mathbf{H}_n(x, s) \pi(s) ds$$

admettrait une solution différente de zéro (n° 80). Les noyaux  $h(x, y)$  et  $\mathbf{H}_n(x, y)$  étant orthogonaux, cette fonction  $\pi(x)$  vérifierait la condition

$$\int_a^b h(x, s) \pi(s) ds = 0,$$

et, par conséquent, elle ne serait pas une combinaison linéaire des  $\mu$  fonctions fondamentales  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\mu$  de l'équation (90). D'ailleurs, cette fonction  $\pi(x)$

satisferait aussi à l'équation

$$\pi(x) = c \int_a^b [\mathbf{H}_n(x, s) + h(x, s)] \pi(s) ds = c \int_a^b \mathbf{H}(x, s) \pi(s) ds;$$

l'équation (89) aurait donc une solution  $\pi(x)$  n'appartenant pas à l'équation (90), ce qui, nous l'avons vu, est impossible.

Quant au noyau  $\gamma(x, y; \lambda)$ , d'après la façon même dont on a défini  $h(x, y)$ , il est de la forme

$$\gamma(x, y; \lambda) = \frac{\mathfrak{h}(x, y; \lambda)}{\left(1 - \frac{\lambda}{c}\right)^n},$$

$\mathfrak{h}(x, y; \lambda)$  étant la fonction résolvante de Fredholm pour  $h(x, y)$ , c'est-à-dire un polynôme en  $\lambda$  de degré  $n - 1$  au plus;  $\gamma(x, y; \lambda)$  représente donc bien la partie principale de  $\Gamma(x, y; \lambda)$  dans le domaine du pôle  $\lambda = c$ .

34. En définitive, nous sommes ramenés au calcul du noyau résolvant qui correspond à un noyau  $h(x, y)$  de la forme particulière considérée au n° 6,

$$h(x, y) = X_1 Y_1 + \dots + X_n Y_n,$$

$X_1, \dots, X_n$  étant  $n$  fonctions linéairement distinctes de  $x$ , et  $Y_1, \dots, Y_n$   $n$  fonctions linéairement distinctes de  $y$ . De plus, ces fonctions  $X_i, Y_k$  sont telles que le déterminant  $d(\lambda)$  soit égal à  $\left(1 - \frac{\lambda}{c}\right)^n$ .

Ce noyau  $h(x, y)$  peut, en général, se décomposer en  $r$  noyaux secondaires,  $h_1(x, y), \dots, h_r(x, y)$ , orthogonaux deux à deux, chacun d'eux correspondant à un sous-groupe canonique de fonctions principales. Soit  $\gamma_i(x, y; \lambda)$  le noyau résolvant déduit de  $h_i(x, y)$ ; nous avons

$$(99) \quad \gamma(x, y; \lambda) = \sum_{i=1}^r \gamma_i(x, y; \lambda),$$

et il suffira de calculer chacun des noyaux résolvants secondaires  $\gamma_i(x, y, \lambda)$ .

Soit, d'une façon générale,

$$\mathbf{H}(x, y) = \sum_{i=1}^{\mu} X_i(x) Y_i(y)$$

un noyau canonique, ne se décomposant pas en plusieurs noyaux secondaires. En posant, d'une façon générale,

$$A_{ik} = - \int_a^b X_i(s) Y_k(s) ds,$$

nous devons avoir les relations (n<sup>os</sup> 26-27)

$$A_{11} = A_{12} = \dots = A_{\mu\mu} = -\frac{1}{c},$$

$$A_{21} = A_{32} = \dots = A_{\mu, \mu-1} = -\frac{1}{c},$$

tous les autres  $A_{ik}$  étant nuls. On a

$$D(\lambda) = \left(1 - \frac{\lambda}{c}\right)^\mu,$$

tandis que la fonction résolvante a pour expression (n<sup>o</sup> 6)

$$\mathfrak{H}(x, y; \lambda) = \begin{vmatrix} 0 & -X_1 & -X_2 & \dots & \dots & -X_\mu \\ Y_1 & 1 - \frac{\lambda}{c} & -\frac{\lambda}{c} & 0 & \dots & 0 \\ Y_2 & 0 & 1 - \frac{\lambda}{c} & -\frac{\lambda}{c} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_\mu & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 - \frac{\lambda}{c} \end{vmatrix}.$$

Nous avons donc à calculer le développement d'un déterminant de la forme

$$\mathfrak{D} = \begin{vmatrix} 0 & -X_1 & -X_2 & \dots & \dots & -X_\mu \\ Y_1 & a & b & 0 & \dots & 0 \\ Y_2 & 0 & a & b & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_\mu & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix}.$$

Un terme quelconque de ce déterminant développé contient en facteur un produit  $X_i Y_k$ , et le coefficient de  $X_i Y_k$  est égal à  $(-1)^{i+k}$  multiplié par le mineur que l'on déduit du déterminant auxiliaire

$$\delta = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a & b & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a & b & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a & b \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a \end{vmatrix},$$

en supprimant la  $i^{\text{ième}}$  colonne et la  $k^{\text{ième}}$  ligne, c'est-à-dire par le mineur correspondant à l'élément qui est à l'intersection de la  $i^{\text{ième}}$  colonne et de la  $k^{\text{ième}}$  ligne.





étant une fonction symétrique de  $x$  et de  $y$ , et le produit  $p(x)q(x)$  conservant un signe constant dans l'intervalle  $(a, b)$ . Soit en effet  $\Gamma(x, y; \lambda)$  le noyau résolvant qui correspond au noyau symétrique

$$H(x, y) = S(x, y) \sqrt{p(x)q(x)p(y)q(y)};$$

appliquons à ce noyau la remarque générale du n° 4, en prenant  $r(x) = \sqrt{\frac{p(x)}{q(x)}}$ . Le nouveau noyau sera

$$H_1(x, y) = \sqrt{\frac{p(x)q(y)}{p(y)q(x)}} H(x, y) = S(x, y) p(x)q(y),$$

et le noyau résolvant correspondant  $\Gamma_1(x, y; \lambda)$  est égal à

$$\sqrt{\frac{p(x)q(y)}{p(y)q(x)}} \Gamma(x, y; \lambda);$$

il n'a donc que des pôles du premier ordre (1).

D'une façon générale, soient  $n$  le nombre des fonctions principales,  $r$  le nombre des fonctions fondamentales distinctes,  $p$  l'ordre du pôle  $\lambda = c$  de  $\Gamma(x, y; \lambda)$ . Entre ces trois nombres  $n, p, r$ , on a les inégalités

$$p + r \leq n + 1, \quad pr \geq n,$$

qui permettent de trouver deux limites pour un de ces nombres, connaissant les deux autres. Par exemple, connaissant  $n$  et  $p$ , on a

$$\frac{n}{p} \leq r \leq n + 1 - p.$$

36. On peut se proposer la question inverse de la précédente : Connaissant un pôle  $c$  de  $\Gamma(x, y; \lambda)$  et la partie principale correspondante, déterminer les fonctions fondamentales et, plus généralement, les fonctions principales ainsi que les coefficients  $\alpha_{ik}$  des formules (48). Nous avons déjà observé que le coefficient du terme de degré le plus élevé en  $\frac{1}{\lambda - c}$  donne une fonction fondamentale quand on y remplace  $y$  par une constante numérique (n° 8). Mais les résultats du paragraphe précédent prouvent que l'on n'obtient pas toujours de cette façon toutes les fonctions fondamentales.

La solution générale repose sur quelques lemmes faciles à démontrer.

---

(1) *Comptes rendus*, 17 février 1908.

LEMME I. — *Étant données  $n$  fonctions  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$  d'une seule variable  $x$ , pour que ces  $n$  fonctions ne soient pas linéairement distinctes, il faut et il suffit que le déterminant*

$$\mathbf{J} \begin{pmatrix} \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \\ x_1, x_2, \dots, x_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \dots & \varphi_n(x_1) \\ \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & \dots & \varphi_n(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(x_n) & \varphi_2(x_n) & \dots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix}$$

*soit identiquement nul, quels que soient  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .*

Si l'un au moins des mineurs du premier ordre de ce déterminant n'est pas identiquement nul, il y a une seule relation linéaire et homogène à coefficients constants entre les  $n$  fonctions  $\varphi_i$ , et l'une de ces fonctions est une combinaison linéaire des  $(n-1)$  autres qui sont distinctes.

Il suit de là que, si l'on a  $n$  fonctions linéairement distinctes  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ , et si une autre fonction  $f(x)$  est une combinaison linéaire de ces fonctions  $\varphi_i$ , pour exprimer  $f$  sous la forme

$$f = C_1 \varphi_1 + \dots + C_n \varphi_n,$$

il suffira de choisir  $n$  nombres  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , tels que  $\mathbf{J}$  ne soit pas identiquement nul, et de développer suivant les éléments de la première ligne le déterminant

$$\mathbf{J} \begin{pmatrix} f, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \\ x, x_1, x_2, \dots, x_n \end{pmatrix}$$

qui, par hypothèse, est identiquement nul.

LEMME II. — *Pour qu'une fonction  $F(x, y)$  des deux variables  $x$  et  $y$  soit de la forme*

$$(102) \quad F(x, y) = \varphi_1(x) \psi_1(y) + \varphi_2(x) \psi_2(y) + \dots + \varphi_n(x) \psi_n(y),$$

*il faut et il suffit que le déterminant de Fredholm (n° 5)*

$$(103) \quad F \begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \\ y_1, y_2, \dots, y_{n+1} \end{pmatrix}$$

*soit identiquement nul.*

Cela posé, supposons qu'on sache *a priori* qu'une fonction donnée  $F(x, y)$  est de la forme (102), mais qu'on ne connaisse pas le nombre  $n$ , ni les fonctions  $\varphi_i, \psi_i$ . Pour trouver le nombre  $n$ , il suffira de former successivement les détermi-

nants

$$\mathbf{F}\begin{pmatrix} x_1, x_2 \\ x_1, x_2 \end{pmatrix}, \mathbf{F}\begin{pmatrix} x_1, x_2, x_3 \\ x_1, x_2, x_3 \end{pmatrix}, \dots,$$

jusqu'à ce qu'on en trouve un qui soit identiquement nul. Le nombre  $n$  cherché est égal au nombre des lignes du premier déterminant qui satisfait à cette condition diminué d'une unité. Une fois ce nombre  $n$  déterminé, pour mettre la fonction  $\mathbf{F}(x, y)$  sous la forme (102), il suffira de choisir  $n$  couples de valeurs numériques  $(x_i, y_i)$  tels que le déterminant

$$\mathbf{F}\begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_n \\ y_1, y_2, \dots, y_n \end{pmatrix}$$

ne soit pas nul et de développer la relation

$$\mathbf{F}\begin{pmatrix} x, x_1, x_2, \dots, x_n \\ y, y_1, y_2, \dots, y_n \end{pmatrix} = 0.$$

Ces points étant établis, supposons que  $\lambda = c$  soit un pôle d'ordre  $\mu$  de  $\Gamma(x, y; \lambda)$ , et soit

$$\frac{\mathbf{B}_\mu(x, y)}{h^\mu} + \frac{\mathbf{B}_{\mu-1}(x, y)}{h^{\mu-1}} + \dots + \frac{\mathbf{B}_1(x, y)}{h} + \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 h + \dots$$

(où  $\lambda = c + h$ ), le développement de  $\Gamma(x, y; \lambda)$  dans le domaine de ce pôle. Nous savons (n° 35) que le résidu  $\mathbf{B}_1(x, y)$  est une fonction bilinéaire des  $n$  fonctions principales  $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$  et des  $n$  fonctions principales associées  $(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$ ; si ce coefficient  $\mathbf{B}_1(x, y)$  est mis sous la forme (102), nous connaissons donc immédiatement les deux groupes de fonctions principales associées  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  et  $(\psi_1, \dots, \psi_n)$ . Pour en déduire les fonctions fondamentales, il faut encore connaître les coefficients  $\alpha_{ik}$  des formules générales (48).

Or, nous savons déjà que  $\mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \dots, \mathbf{B}_\mu$  sont aussi des fonctions bilinéaires des fonctions  $\varphi_i$  et  $\psi_k$ , et nous venons de voir comment on peut calculer les coefficients de ces formes bilinéaires. Ces coefficients étant calculés, si nous remplaçons  $\Gamma(x, y; \lambda)$  par le développement précédent dans la relation fonctionnelle (13), elle devient

$$\begin{aligned} & \frac{\mathbf{B}_\mu(x, y)}{h^\mu} + \frac{\mathbf{B}_{\mu-1}(x, y)}{h^{\mu-1}} + \dots + \frac{\mathbf{B}_1(x, y)}{h} + \mathbf{A}_0(x, y) + \dots \\ & = \mathbf{H}(x, y) + (c + h) \int_a^b \mathbf{H}(x, s) \left[ \frac{\mathbf{B}_\mu(s, y)}{h^\mu} + \dots + \frac{\mathbf{B}_1(s, y)}{h} + \dots \right]. \end{aligned}$$

En égalant les coefficients des puissances négatives de  $h$ , on trouve les éga-



à certaines conditions obtenues par M. Fredholm. Ces conditions se déduisent très simplement de la théorie générale qui précède.

Soit  $\psi(x)$  une fonction fondamentale associée, c'est-à-dire une solution de l'équation

$$(106) \quad \psi(x) = c \int_a^b \mathbf{H}(s, x) \psi(s) ds;$$

multiplions les deux membres de l'équation (105) par  $\psi(x)$  et intégrons de  $a$  à  $b$ ; il vient

$$\int_a^b \varphi(x) \psi(x) dx = \int_a^b f(x) \psi(x) dx + c \int_a^b \int_a^b \mathbf{H}(x, s) \varphi(s) \psi(x) ds dx.$$

On peut écrire l'intégrale double

$$c \int_a^b \varphi(s) ds \int_a^b \mathbf{H}(x, s) \psi(x) dx = \int_a^b \varphi(s) \psi(s) ds,$$

et il reste la condition

$$\int_a^b f(x) \psi(x) dx = 0.$$

Par conséquent, si l'équation homogène (106) admet  $r$  solutions distinctes  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_r$ , la fonction  $f(x)$  doit satisfaire aux  $r$  relations

$$(107) \quad \int_a^b f(x) \psi_i(x) dx = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r),$$

pour que l'équation (105) admette une solution.

Ces conditions sont *suffisantes*. En effet, supposons d'abord que le noyau  $h(x, y)$ , mis sous forme canonique, ne se décompose pas en sous-groupes canoniques, de façon qu'il n'y ait pour ce noyau qu'une fonction fondamentale  $\varphi_1$  et une fonction fondamentale associée  $\psi_n$ . On a (voir n° 27)

$$h(x, y) = \varphi_1(x) \psi_1(y) + \dots + \varphi_n(x) \psi_n(y),$$

avec les relations

$$(108) \quad c\mathbf{S}\varphi_1 = \varphi_1, \quad c\mathbf{S}\varphi_2 = \varphi_1 + \varphi_2, \quad \dots, \quad c\mathbf{S}\varphi_n = \varphi_{n-1} + \varphi_n.$$

Soit  $\pi(x)$  la solution de l'équation de Fredholm

$$(109) \quad \pi(x) = f(x) + c \int_a^b \mathbf{H}_n(x, s) \pi(s) ds,$$

où

$$\mathbf{H}(x, y) = h(x, y) + \mathbf{H}_n(x, y).$$

Nous chercherons une solution de l'équation (105) de la forme

$$\varphi(x) = \pi(x) + \mathbf{C}_1 \varphi_1(x) + \mathbf{C}_2 \varphi_2(x) + \dots + \mathbf{C}_n \varphi_n(x),$$

$\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \dots, \mathbf{C}_n$  étant des constantes. Cette équation devient

$$\begin{aligned} & \pi(x) + \mathbf{C}_1 \varphi_1(x) + \mathbf{C}_2 \varphi_2(x) + \dots + \mathbf{C}_n \varphi_n(x) \\ &= f(x) + c \int_a^b \mathbf{H}_n(x, s) \pi(s) ds \\ &+ c \int_a^b \mathbf{H}(x, s) [\mathbf{C}_1 \varphi_1(s) + \dots + \mathbf{C}_n \varphi_n(s)] ds + c \int_a^b h(x, s) \pi(s) ds. \end{aligned}$$

En tenant compte des conditions (108), (109), il reste l'équation

$$\begin{aligned} & \mathbf{C}_1 \varphi_1(x) + \dots + \mathbf{C}_n \varphi_n(x) \\ &= \mathbf{C}_1 \varphi_1 + \mathbf{C}_2 (\varphi_2 + \varphi_1) + \dots + \mathbf{C}_n (\varphi_n + \varphi_{n-1}) + c \int_a^b [\varphi_1(x) \psi_1(s) + \dots + \varphi_n(x) \psi_n(s)] \pi(s) ds \end{aligned}$$

ou

$$\mathbf{C}_2 \varphi_1 + \mathbf{C}_3 \varphi_2 + \dots + \mathbf{C}_n \varphi_{n-1} = -c \int_a^b [\varphi_1(x) \psi_1(s) + \dots + \varphi_n(x) \psi_n(s)] \pi(s) ds.$$

Cette condition détermine les coefficients  $\mathbf{C}_2, \dots, \mathbf{C}_n$ , le coefficient  $\mathbf{C}_1$  restant arbitraire, pourvu que nous vérifions qu'on a

$$\int_a^b \psi_n(s) \pi(s) ds = 0.$$

Or cette relation résulte de la condition

$$\int_a^b \psi_n(s) f(s) ds = 0,$$

qui est supposée satisfaite. De la relation (109) on déduit, en effet, en procédant comme tout à l'heure,

$$\begin{aligned} & \int_a^b \psi_n(x) \pi(x) dx \\ &= \int_a^b \psi_n(x) f(x) dx + c \int_a^b \int_a^b \mathbf{H}_n(x, s) \pi(s) \psi_n(x) ds dx = c \int_a^b \pi(s) ds \int_a^b \mathbf{H}_n(x, s) \psi_n(x) dx, \end{aligned}$$

et l'on a, puisque les noyaux  $h(x, y)$  et  $\mathbf{H}_n(x, y)$  sont orthogonaux,

$$\int_a^b \mathbf{H}_n(x, s) \psi_n(x) dx = 0.$$

Prenons maintenant le cas général où le noyau principal  $h(x, y)$  se décompose en  $r$  noyaux secondaires

$$h(x, y) = h_1(x, y) + \dots + h_r(x, y),$$

chacun d'eux correspondant à un sous-groupe canonique de fonctions principales.

Posons encore

$$\mathbf{H}(x, y) = h_1 + h_2 + \dots + h_r + \mathbf{H}_n(x, y);$$

les  $(r + 1)$  noyaux  $h_1, h_2, \dots, h_r, \mathbf{H}_n$  sont orthogonaux deux à deux. Soit  $\pi(x)$  une solution de l'équation

$$\pi(x) = f(x) + c \int_a^b \mathbf{H}_n(x, s) \pi(s) ds;$$

en opérant comme nous venons de le faire, nous en déduisons une solution de l'équation

$$\pi_1(x) = f(x) + c \int_a^b [\mathbf{H}_n(x, s) + h_1(x, s)] \pi_1(s) ds.$$

De celle-là nous déduisons ensuite, toujours au moyen du même procédé, une solution de l'équation

$$\pi_2(x) = f(x) + c \int_a^b [\mathbf{H}_n(x, s) + h_1(x, s) + h_2(x, s)] \pi_2(s) ds,$$

et ainsi de suite. Après  $r$  opérations de ce genre, on obtiendra bien une solution de l'équation (105), d'où la solution générale se déduit immédiatement.

## VI.

38. La connaissance des pôles de la fonction méromorphe  $\Gamma(x, y; \lambda)$  et de la partie principale relative à chacun d'eux ne suffit pas, comme on sait, pour déterminer cette fonction. Supposons ces pôles rangés par ordre de modules croissants

$$(110) \quad c_1, c_2, \dots, c_i, \dots$$

et désignons par  $P^{(i)}(\Gamma)$  ou  $\gamma_i(x, y; \lambda)$  la partie principale de  $\Gamma(x, y; \lambda)$  dans le

domaine du pôle  $\lambda = c_i$ . Le cas le plus simple qui puisse se présenter est évidemment celui où la série

$$(111) \quad \sum_{i=1}^{+\infty} P^{(i)}(\Gamma) = \sum_{i=1}^{+\infty} \gamma_i(x, y; \lambda)$$

est uniformément convergente pour toute valeur de  $\lambda$ , lorsque le point  $(x, y)$  reste dans le domaine R. On a dans ce cas

$$(112) \quad \Gamma(x, y; \lambda) = \sum_{i=1}^{+\infty} \gamma_i(x, y; \lambda) + \mathbf{E}(x, y; \lambda),$$

$\mathbf{E}(x, y; \lambda)$  étant une fonction entière de  $\lambda$  :

$$(113) \quad \mathbf{E}(x, y; \lambda) = \mathbf{E}^{(1)}(x, y) + \lambda \mathbf{E}^{(2)}(x, y) + \dots + \lambda^{(n-1)} \mathbf{E}^{(n)}(x, y) + \dots$$

Faisons, dans cette formule (112),  $\lambda = 0$ ; il vient

$$(114) \quad \mathbf{H}(x, y) = \sum_{i=1}^{+\infty} h_i(x, y) + \mathbf{E}^{(1)}(x, y),$$

$h_i(x, y)$  étant le noyau principal relatif au pôle  $c_i$ . On sait que les noyaux  $h_i(x, y)$ ,  $h_j(x, y)$  sont orthogonaux deux à deux (n° 28). Les deux noyaux  $h_i(x, y)$  et  $\mathbf{E}^{(1)}(x, y)$  sont aussi orthogonaux, car si l'on pose

$$\mathbf{H}(x, y) = h_i(x, y) + \mathbf{H}_i(x, y),$$

on a vu que  $h_i$  et  $\mathbf{H}_i$  étaient orthogonaux.

Il s'ensuit que  $\mathbf{E}(x, y; \lambda)$  n'est autre que le noyau résolvant qui correspond au noyau  $\mathbf{E}^{(1)}(x, y)$ , et les coefficients de la série (113) se déduisent de  $\mathbf{E}^{(1)}(x, y)$  par des itérations répétées

$$\mathbf{E}^{(n)}(x, y) = \int_a^b \mathbf{E}^{(1)}(x, s) \mathbf{E}^{(n-1)}(s, y) ds \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Dans le cas qui nous occupe la série des noyaux principaux

$$\sum_{i=1}^{+\infty} h_i(x, y)$$

est uniformément convergente dans le domaine R. Inversement, on démontre (1)

(1) C'est une conséquence du théorème général suivant, bien facile à établir, et sur lequel

que, si la série précédente est uniformément convergente dans le domaine  $R$ , il en est de même de la série (111), pour toute valeur de  $\lambda$  ne faisant pas partie de la suite (110), et le noyau résolvant  $\Gamma(x, y; \lambda)$  est de la forme considérée ici.

On voit que cette fonction  $\Gamma(x, y; \lambda)$  se compose de deux parties distinctes, une partie méromorphe  $\sum_i \gamma_i(x, y; \lambda)$  et une partie entière  $E(x, y; \lambda)$ , qui sont

orthogonales. Lorsque le noyau  $H(x, y)$  est symétrique en  $x$  et  $y$ , la partie entière  $E(x, y; \lambda)$  est toujours nulle d'après une propriété générale des noyaux symétriques (Hilbert et Schmidt), sur laquelle on reviendra un peu plus loin. Mais il n'en est plus de même pour un noyau non symétrique. Prenons, par exemple, le noyau

$$(115) \quad H(x, y) = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i \sin(ix) \sin(iy) + \sum_{j=1}^{+\infty} b_j \cos(jx) \cos[(j+1)y],$$

qui se trouve décomposé en deux noyaux orthogonaux

$$H'(x, y) = \sum_i a_i \sin(ix) \sin(iy),$$

$$E(x, y) = \sum_j b_j \cos(jx) \cos[(j+1)y],$$

les deux séries  $\sum |a_i|$  et  $\sum |b_j|$  étant convergentes, et les limites de l'intégration étant 0 et  $2\pi$ .

Le noyau résolvant relatif à  $H'(x, y)$  est égal à

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{a_i \sin(ix) \sin(iy)}{1 - \pi a_i \lambda}.$$

Quant au noyau  $E(x, y)$  il donne naissance à un noyau résolvant qui est une fonction entière de  $\lambda$ . En effet, si l'on prend d'abord un nombre fini  $n$  de termes dans la série  $E(x, y)$ , on vérifie immédiatement (voir n° 6) que la fonction déterminante correspondante  $D_n(\lambda)$  se réduit à l'unité, car tous les termes situés

je me suis appuyé dans l'article déjà cité (*Bull. Soc. math.*, t. XXXV, 1907) :

*Si une fonction  $S_n(x, y)$  bornée tend uniformément vers une limite  $S(x, y)$ , la fonction de Fredholm  $\mathcal{K}_n(x, y; \lambda)$  formée avec  $S_n(x, y)$  tend uniformément vers la fonction  $\mathcal{K}(x, y; \lambda)$  formée avec  $S(x, y)$ , et  $D_n(\lambda)$  tend vers  $D(\lambda)$ .*

Voir aussi le Mémoire cité plus haut de M. Lebesgue (*Ibid.*, t. XXXVI, 1908).

au-dessous de la diagonale principale dans le déterminant (28) sont nuls, et tous les termes de la diagonale principale se réduisent à l'unité. On a donc aussi  $D(\lambda) = 1$ .

Les noyaux  $E^{(2)}(x, y)$ ,  $E^{(3)}(x, y)$ , ... ont pour expressions

$$E^{(2)}(x, y) = \pi \sum_{j=1}^{+\infty} b_j b_{j+1} \cos(jx) \cos(j+2)y,$$

$$E^{(3)}(x, y) = \pi^2 \sum_{j=1}^{+\infty} b_j b_{j+1} b_{j+2} \cos(jx) \cos(j+3)y,$$

.....

La fonction  $E(x, y; \lambda)$  qui est, en général, une série entière, se réduira donc à un polynôme si  $E(x, y)$  ne contient qu'un nombre fini de termes. De même la partie méromorphe se réduit à une fonction rationnelle de  $\lambda$  si  $H'(x, y)$  ne contient qu'un nombre fini de termes.

Considérons encore le noyau

$$(116) \quad H(x, y) = \sum_{i=1}^p a_i \sin(ix) \sin(iy) + \sum_{i=p+1}^{+\infty} a_i \sin(ix) \cos(iy),$$

la série  $\sum |a_i|$  étant convergente. Le noyau

$$E^{(1)}(x, y) = \sum_{i=p+1}^{+\infty} a_i \sin(ix) \cos(iy)$$

est orthogonal à lui-même, et le noyau résolvant  $\Gamma(x, y; \lambda)$  se réduit à une fonction rationnelle de  $\lambda$

$$\Gamma(x, y; \lambda) = \sum_{i=1}^p \frac{a_i \sin(ix) \sin(iy)}{1 - \pi a_i \lambda} + E^{(1)}(x, y).$$

Il est facile de former une infinité d'exemples de ce genre en partant d'un système biorthogonal quelconque

$$\begin{array}{cccc} \varphi_1, & \varphi_2, & \dots, & \varphi_i, & \dots, \\ \psi_1, & \psi_2, & \dots, & \psi_i, & \dots, \end{array}$$

les fonctions  $\varphi_i$  et  $\psi_k$  étant telles qu'on ait

$$\int_a^b \varphi_i(s) \psi_k(s) ds = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq k.$$

Au moyen de ces deux suites de fonctions formons une série uniformément convergente

$$\mathbf{H}(x, y) = \sum \mathbf{A}_i \varphi_i(x) \psi_i(y).$$

Les termes de cette série peuvent se partager en deux catégories suivant que l'intégrale définie

$$\int_a^b \varphi_i(s) \psi_i(s) ds$$

est différente de zéro ou égale à zéro. En distinguant ces deux sortes de termes par une notation différente, nous écrivons le noyau précédent

$$\mathbf{H}(x, y) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbf{B}_i \varphi_i(x) \psi_i(y) + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{C}_k \varphi'_k(x) \psi'_k(y)$$

avec les conditions

$$\int_a^b \varphi_i(s) \psi_i(s) ds = \frac{1}{c_i}, \quad \int_a^b \varphi'_k(s) \psi'_k(s) ds = 0.$$

Le noyau résolvant correspondant a pour expression

$$\Gamma(x, y; \lambda) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\mathbf{B}_i \varphi_i(x) \psi_i(y)}{1 - \frac{\lambda}{c_i}} + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{C}_k \varphi'_k(x) \psi'_k(y),$$

et la partie entière  $\mathbf{E}(x, y; \lambda)$  se réduit à son premier terme <sup>(1)</sup>.

*Remarque.* — Lorsque le noyau  $\mathbf{H}(x, y)$  est orthogonal à lui-même ou donne naissance à un noyau résolvant  $\Gamma(x, y; \lambda)$  égal à un polynôme en  $\lambda$

$$\Gamma(x, y; \lambda) = \mathbf{H}(x, y) + \lambda \mathbf{H}^{(2)}(x, y) + \dots + \lambda^{n-1} \mathbf{H}^{(n)}(x, y),$$

le point à l'infini est un point ordinaire ou un pôle pour  $\Gamma$ , et la relation fondamentale (13) devient ici

$$\lambda \mathbf{H}^{(2)}(x, y) + \dots + \lambda^{n-1} \mathbf{H}^{(n)}(x, y) = \lambda \int_a^b \mathbf{H}(x, s) [\lambda^{n-1} \mathbf{H}^{(n)}(s, y) + \dots + \mathbf{H}^{(1)}] ds;$$

on en tire d'abord

$$\int_a^b \mathbf{H}(x, s) \mathbf{H}^{(n)}(s, y) ds = 0.$$

Si nous donnons à  $y$  une valeur constante  $y_1$ , on voit que la fonction

$$\varphi(x) = \mathbf{H}^{(n)}(x, y_1)$$

<sup>(1)</sup> La fonction de Fredholm  $\mathbf{D}(\lambda)$  est alors de genre zéro.

est une solution de l'équation

$$(117) \quad \int_a^b \mathbf{H}(x, s) \varphi(s) ds = 0$$

qui peut être considérée comme un cas limite de l'équation homogène

$$\varphi(x) = c \int_a^b \mathbf{H}(x, s) \varphi(s) ds,$$

en supposant que le pôle  $c$  soit rejeté à l'infini. Les fonctions  $\mathbf{H}^{(n-1)}(x, y_1)$ ,  $\mathbf{H}^{(n-2)}(x, y_1)$ , ... obtenues en donnant à  $y_1$  une valeur numérique sont de même analogues aux fonctions principales.

Mais, tandis qu'à un pôle à distance finie de  $\Gamma$  ne correspond jamais qu'un nombre fini de fonctions fondamentales et de fonctions principales, l'exemple (116) montre que l'équation (117) peut avoir une infinité de solutions distinctes.

39. On peut encore appliquer le théorème de M. Mittag-Leffler à la fonction  $\Gamma(x, y; \lambda)$  lorsqu'en partant du noyau  $\mathbf{H}(x, y)$  on arrive par une ou plusieurs itérations à un noyau  $\mathbf{H}^{(p)}(x, y)$ , développable par la formule (114). Le noyau résolvant correspondant  $\Gamma_p(x, y; \lambda)$  est alors développable en série par la formule

$$(118) \quad \Gamma_p(x, y; \lambda) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbf{P}^{(i)}(\Gamma_p) + \mathbf{E}_p(x, y; \lambda);$$

nous représentons par  $c_i$  un pôle quelconque de  $\Gamma(x, y; \lambda)$ , par  $c_i^p$  le pôle correspondant de  $\Gamma_p(x, y; \lambda)$  et par  $\mathbf{P}^{(i)}(\Gamma_p)$  la partie principale de  $\Gamma_p$  dans le domaine de ce pôle.

D'après la formule générale (18), nous avons

$$\Gamma(x, y; \lambda) = \mathbf{K}(x, y; \lambda) + \lambda^{p-1} \Gamma_p(x, y; \lambda^p) + \lambda^p \int_a^b \mathbf{K}(x, s; \lambda) \Gamma_p(s, y; \lambda^p) ds,$$

où l'on a posé

$$\mathbf{K}(x, y; \lambda) = \mathbf{H}(x, y) + \lambda \mathbf{H}^{(2)}(x, y) + \dots + \lambda^{p-2} \mathbf{H}^{(p-1)}(x, y).$$

On en tire, en divisant les deux membres par  $\lambda^{p-1}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(x, y; \lambda)}{\lambda^{p-1}} &= \frac{\mathbf{H}(x, y)}{\lambda^{p-1}} + \frac{\mathbf{H}^{(1)}(x, y)}{\lambda^{p-2}} + \dots + \frac{\mathbf{H}^{(p-1)}(x, y)}{\lambda} \\ &+ \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbf{P}^{(i)}[\Gamma_p(x, y; \lambda^p)] + \mathbf{E}_p(x, y; \lambda^p) \\ &+ \lambda \int_a^b \mathbf{K}(x, s; \lambda) \left\{ \sum_i \mathbf{P}^{(i)}[\Gamma_p(s, y; \lambda^p)] + \mathbf{E}_p(s, y; \lambda^p) \right\} ds. \end{aligned}$$

Supposons, pour fixer les idées, qu'à un pôle  $c_i^p$  de  $\Gamma_p(x, y; \lambda)$  corresponde un seul <sup>(1)</sup> pôle  $c_i$  de  $\Gamma(x, y; \lambda)$ . La partie infinie de  $\frac{\Gamma}{\lambda^{p-1}}$  dans le domaine du point  $\lambda = c_i$  ne peut provenir que de

$$P^{(i)}(\Gamma_p) + \lambda \int_a^b K(x, s; \lambda) P^{(i)}[\Gamma_p(s, y; \lambda^p)] ds,$$

et, par hypothèse, cette fonction de  $\lambda$  ne devient infinie que pour  $\lambda = c_i$ . D'autre part,  $P^{(i)}[\Gamma_p(x, y; \lambda^p)]$  est une fonction rationnelle de  $\lambda$  dans laquelle le degré du dénominateur surpasse de  $p$  unités le degré du numérateur. Comme  $\lambda K(x, s; \lambda)$  est du degré  $(p-1)$  en  $\lambda$ , on voit que l'expression considérée est nulle pour  $\lambda$  infini. Elle représente donc la partie principale de  $\frac{\Gamma}{\lambda^{p-1}}$  dans le domaine du pôle  $c_i$ , et nous avons la formule

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(x, y; \lambda)}{\lambda^{p-1}} = & \frac{H(x, y)}{\lambda^{p-1}} + \dots + \frac{H^{(p-1)}(x, y)}{\lambda} + \sum_{i=1}^{+\infty} P^{(i)} \left[ \frac{\Gamma(x, y; \lambda)}{\lambda^{p-1}} \right] \\ & + E_p(x, y; \lambda^p) + \lambda \int_a^b K(x, s; \lambda) E_p(s, y; \lambda^p) ds \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} (119) \quad \Gamma(x, y; \lambda) = & H(x, y) + \lambda H^{(2)}(x, y) + \dots + \lambda^{p-2} H^{(p-1)}(x, y) \\ & + \lambda^{p-1} \sum_i P^{(i)} \left[ \frac{\Gamma(x, y; \lambda)}{\lambda^{p-1}} \right] + \lambda^{p-1} E_p(x, y; \lambda^p) \\ & + \lambda^p \int_a^b K(x, s; \lambda) E_p(s, y; \lambda^p) ds. \end{aligned}$$

La partie méromorphe du second membre

$$\lambda^{p-1} \sum_i P^{(i)} \left( \frac{\Gamma(x, y; \lambda)}{\lambda^{p-1}} \right)$$

peut toujours être calculée, si l'on connaît les pôles de  $\Gamma$  et les fonctions principales correspondantes; il est clair en effet que la partie principale de

$$\frac{\Gamma(x, y; \lambda)}{\lambda^{p-1}},$$

---

<sup>(1)</sup> La conclusion serait la même si le pôle  $c_i^p$  de  $\Gamma_p$  correspondait à plusieurs pôles distincts de  $\Gamma$ .

dans le domaine d'un pôle  $c$ , peut être calculée dès qu'on connaît la partie principale de  $\Gamma(x, y; \lambda)$  dans le domaine de ce pôle.

Quant à la partie entière, elle dépend à la fois de  $\mathbf{H}(x, y)$ ,  $\mathbf{H}^{(2)}(x, y)$ , ...,  $\mathbf{H}^{(p-1)}(x, y)$  et de la partie entière  $\mathbf{E}_p(x, y; \lambda)$  de  $\Gamma_p$ . Si cette partie entière  $\mathbf{E}_p$  est nulle, la formule (119) se simplifie et il reste

$$(120) \quad \Gamma(x, y; \lambda) = \mathbf{H}(x, y) + \dots + \lambda^{p-2} \mathbf{H}^{(p-1)}(x, y) + \lambda^{p-1} \sum_i \mathbf{P}^{(i)} \left( \frac{\Gamma(x, y; \lambda)}{\lambda^{p-1}} \right).$$

Cette formule est applicable en particulier à un noyau symétrique  $\mathbf{H}(x, y)$ , pourvu que l'itération conduise à un noyau borné  $\mathbf{H}^{(p)}(x, y)$  <sup>(1)</sup>.

*Remarque.* — Si le noyau résolvant  $\Gamma(x, y; \lambda)$  peut se mettre sous la forme (120), il peut être mis sous cette forme d'une infinité de manières. Supposons par exemple qu'on ait

$$\Gamma(x, y; \lambda) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\varphi_i(x) \psi_i(y)}{1 - \frac{\lambda}{c_i}},$$

les fonctions  $\varphi_i, \psi_i$  formant un système biorthogonal, et la série du second membre étant uniformément convergente. On a dans ce cas

$$\mathbf{H}(x, y) = \sum_{i=1}^{+\infty} \varphi_i(x) \psi_i(y)$$

et, en général,

$$\mathbf{H}^{(p)}(x, y) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\varphi_i(x) \psi_i(y)}{c_i^{p-1}}.$$

Quel que soit le nombre positif  $p$ , le noyau  $\Gamma(x, y; \lambda)$  peut être représenté par la formule (120).

40. Pour pousser plus loin l'étude de la fonction méromorphe  $\Gamma(x, y; \lambda)$ , il semble nécessaire d'étudier la distribution des pôles, c'est-à-dire des zéros de la fonction déterminante  $\mathbf{D}(\lambda)$ , lorsque le noyau  $\mathbf{H}(x, y)$  reste fini. Des deux expressions de  $\mathbf{D}(\lambda)$ , données par M. Fredholm, on peut déduire aisément quelques résultats généraux.

Si le module de  $\mathbf{H}(x, y)$  reste inférieur à  $\mathbf{M}$  dans le champ d'intégration, le module du coefficient de  $\lambda^n$  dans  $\mathbf{D}(\lambda)$  est, d'après le théorème de M. Hadamard,

(1) E. SCHMIDT, *Mathematische Annalen*, Bd. LXIII, p. 450.

inférieur à

$$\frac{M^n n^{\frac{n}{2}}}{n!},$$

d'où l'on conclut que le genre de  $D(\lambda)$  est au plus égal à 2. Il serait intéressant d'examiner si le genre peut effectivement être égal à 2, mais il est facile de former des exemples où il est égal à 1.

Soient  $a = 0$ ,  $b = 1$ ; considérons le noyau  $H(x, y)$  défini par les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} H(x, y) &= 1 & \text{pour} & \quad y \leq x, \\ H(x, y) &= 0 & \text{pour} & \quad y > x, \end{aligned}$$

qui correspond à l'équation de Volterra

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x \varphi(s) ds.$$

On voit sans peine que  $D(\lambda)$  se réduit dans ce cas à  $e^{-\lambda}$ .

Lorsqu'il existe deux nombres positifs  $A$  et  $\alpha$  tels qu'on ait

$$\left| \frac{H(x, y) - H(x, z)}{(x - z)^\alpha} \right| < A,$$

M. Fredholm a fait observer que le coefficient de  $\lambda^n$  dans  $D(\lambda)$  est plus petit que

$$\frac{(n^n)^{\frac{1}{2} - \alpha}}{n!} A^n;$$

si la fonction  $H(x, y)$  admet une dérivée bornée, on a  $\alpha = 1$ , et la fonction  $D(\lambda)$  est de l'ordre un <sup>(1)</sup>.

41. M. Fredholm a donné aussi le développement en série entière de  $\log[D(\lambda)]$ . On retrouve ce développement d'une façon très simple par un procédé analogue à celui qui a été employé au n° 5 pour vérifier la relation (26).

Posons, pour abrégier,

$$\begin{aligned} U_n &= \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b H \begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_n \\ x_1, x_2, \dots, x_n \end{pmatrix} dx_1 \dots dx_n, & U_0 &= 1, \\ A_1 &= \int_a^b H(x_1, x_1) dx_1, & A_2 &= \int_a^b \int_a^b H(x_1, x_2) H(x_2, x_1) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

---

(1) LALESCO, *Comptes rendus*, 25 novembre 1907.

et, en général,

$$A_p = \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b \mathbf{H}(x_1, x_2) \mathbf{H}(x_2, x_3) \dots \mathbf{H}(x_{p-1}, x_p) \mathbf{H}(x_p, x_1) dx_1 \dots dx_p.$$

Nous allons établir une relation de récurrence entre les nombres  $U_i$  et  $A_i$ . Imaginons pour cela qu'on développe le déterminant

$$\mathbf{H} \begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_n \\ x_1, x_2, \dots, x_n \end{pmatrix};$$

ce développement contient le produit

$$\mathbf{H}(x_1, x_1) \mathbf{H} \begin{pmatrix} x_2, x_3, \dots, x_n \\ x_2, x_3, \dots, x_n \end{pmatrix},$$

qui donne dans  $U_n$  le produit  $A_1 U_{n-1}$ . Un autre terme quelconque du déterminant contient un élément de la première ligne, soit  $\mathbf{H}(x_1, x_i)$ , où  $i > 1$ . La lettre  $x_i$  figurant dans la  $i^{\text{ème}}$  ligne et la  $i^{\text{ème}}$  colonne, ce terme contiendra un autre élément  $\mathbf{H}(x_i, x_k)$ , où  $i$  est différent de  $k$ ; supposons  $k > 1$ . Pour la même raison ce terme contiendra un autre élément  $\mathbf{H}(x_k, x_j)$  où  $j$  est différent de  $i$  et de  $k$ . Comme les variables  $x_i, x_k, x_j, \dots$  ne peuvent figurer que deux fois dans un terme, on finira par arriver à un élément tel que  $\mathbf{H}(x_l, x_1)$ . Le terme en question contient donc un produit de  $p$  éléments tel que

$$\mathbf{H}(x_1, x_i) \mathbf{H}(x_i, x_k) \dots \mathbf{H}(x_l, x_1),$$

et, si l'on supprime les lignes et les colonnes qui contiennent ces  $p$  éléments, il reste le déterminant à  $(n - p)$  lignes

$$\mathbf{H} \begin{pmatrix} x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-p} \\ x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-p} \end{pmatrix},$$

$x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-p}$  étant les  $(n - p)$  variables restantes après la suppression de  $x_1, x_i, x_k, \dots, x_l$ . Le développement du déterminant proposé contient donc le produit

$$\pm \mathbf{H}(x_1, x_i) \mathbf{H}(x_i, x_k) \dots \mathbf{H}(x_l, x_1) \mathbf{H} \begin{pmatrix} x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-p} \\ x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-p} \end{pmatrix},$$

et, par suite,  $U_n$  contient le produit

$$(-1)^{p+1} A_p U_{n-p},$$

car on doit prendre le signe  $-$  si  $p$  est pair, et le signe  $+$  si  $p$  est impair.

Ce produit figure dans  $U_n$  un nombre de fois égal au nombre des arrangements

$(p - 1)$  à  $(p - 1)$  des  $(n - 1)$  variables  $x_2, x_3, \dots, x_n$ ,  $p$  étant au moins égal à 2, c'est-à-dire

$$(n - 1)(n - 2) \dots (n - p + 1).$$

On a donc la relation

$$(121) \quad \begin{aligned} U_n = & A_1 U_{n-1} - (n - 1) A_2 U_{n-2} + (n - 1)(n - 2) A_3 U_{n-3} + \dots \\ & + (-1)^{p+1} (n - 1)(n - 2) \dots (n - p + 1) A_p U_{n-p} + \dots \\ & + (-1)^{n+1} (n - 1)(n - 2) \dots A_n U_0. \end{aligned}$$

Écrivons le développement de  $D(\lambda)$

$$D(\lambda) = 1 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 \lambda^2 + \dots + \alpha_n \lambda^n + \dots,$$

ce qui revient à poser

$$U_n = (-1)^n n! \alpha_n;$$

la relation (121) devient

$$(122) \quad n \alpha_n + A_1 \alpha_{n-1} + A_2 \alpha_{n-2} + \dots + A_n = 0.$$

Si nous posons

$$G(\lambda) = A_1 + A_2 \lambda + \dots + A_n \lambda^{n-1} + \dots,$$

la relation (122) exprime précisément qu'on a

$$(123) \quad D'(\lambda) = -D(\lambda) G(\lambda)$$

et, par suite,

$$(124) \quad D(\lambda) = e^{-\int_0^\lambda G(\lambda) d\lambda} = e^{-(A_1 \lambda + A_2 \frac{\lambda^2}{2} + \dots + A_n \frac{\lambda^n}{n} + \dots)}.$$

Cette expression ne diffère que par un changement de notation de la formule de M. Fredholm.

42. Soit  $D_p(\lambda)$  la fonction déterminante correspondant au noyau  $H^{(p)}(x, y)$ , déduit de  $H(x, y)$  par  $(p - 1)$  itérations. Si nous posons de même

$$A_n^{(p)} = \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b H^{(p)}(x_1, x_2) H^{(p)}(x_2, x_3) \dots H^{(p)}(x_n, x_1) dx_1 \dots dx_n,$$

il résulte immédiatement de l'expression (10) du noyau  $H^{(p)}(x, y)$  qu'on a

$$A_n^{(p)} = A_{pn}.$$

On a donc aussi, d'après la relation (124),

$$(125) \quad D_p(\lambda) = e^{-\left(A_p \lambda + \frac{A_{2p}}{2} \lambda^2 + \dots + \frac{A_{np}}{n} \lambda^n + \dots\right)}.$$

Il est facile, d'après cela, d'avoir l'expression de  $D_p(\lambda)$  au moyen de  $D(\lambda)$ . En effet, remplaçons dans la formule (124)  $\lambda$  par  $\omega \lambda^{\frac{1}{p}}$ ,  $\omega^2 \lambda^{\frac{1}{p}}$ , ...,  $\omega^{p-1} \lambda^{\frac{1}{p}}$ , successivement,  $\omega$  étant une racine primitive de l'équation  $\omega^p = 1$ . En multipliant membre à membre les égalités obtenues, il reste

$$D\left(\lambda^{\frac{1}{p}}\right) D\left(\omega \lambda^{\frac{1}{p}}\right) \dots D\left(\omega^{p-1} \lambda^{\frac{1}{p}}\right) = e^{-\left(A_p \lambda + A_{2p} \frac{\lambda^2}{2} + \dots + A_{np} \frac{\lambda^n}{n} + \dots\right)},$$

c'est-à-dire

$$(126) \quad D_p(\lambda) = D\left(\lambda^{\frac{1}{p}}\right) D\left(\omega \lambda^{\frac{1}{p}}\right) \dots D\left(\omega^{p-1} \lambda^{\frac{1}{p}}\right),$$

formule tout à fait analogue à la formule (17), qui exprime  $\Gamma_p(x, y; \lambda)$  au moyen de  $\Gamma(x, y; \lambda)$ .

Supposons  $D(\lambda)$  du genre deux

$$D(\lambda) = e^{a\lambda + b\lambda^2} \prod_{i=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{c_i}\right) e^{\frac{\lambda}{c_i} + \frac{\lambda^2}{2c_i^2}};$$

la formule (126) nous donne

$$D_2(\lambda) = e^{2b\lambda} \prod_{i=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{c_i^2}\right) e^{\frac{\lambda}{c_i^2}}$$

et

$$D_p(\lambda) = \prod_{i=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{c_i^p}\right) \quad \text{si} \quad p > 2.$$

On voit donc qu'en partant d'un noyau borné  $H(x, y)$ , après deux itérations au plus, on arrive à un noyau pour lequel la fonction déterminante est du genre zéro.

On en déduit bien aisément la propriété rappelée plus haut (n° 38) des noyaux symétriques. Si  $H(x, y)$  est un noyau symétrique, la suite des noyaux qu'on en déduit par itération

$$H^{(2)}(x, y), \quad H^{(3)}(x, y), \quad \dots, \quad H^{(p)}(x, y), \quad \dots,$$

est illimitée; on a en effet, d'après la propriété caractéristique de ce noyau,

$$H^{(2)}(x, x) = \int_a^b [H(x, s)]^2 ds,$$

$$H^{(4)}(x, x) = \int_a^b [H^{(2)}(x, s)]^2 ds,$$

.....

et, en général,

$$\mathbf{H}^{(2^n)}(x, x) = \int_a^b [\mathbf{H}^{(2^{n-1})}(x, s)]^2 ds.$$

On voit donc que les noyaux  $\mathbf{H}^{(2)}(x, y)$ ,  $\mathbf{H}^{(4)}(x, y)$ , ...,  $\mathbf{H}^{(2^n)}(x, y)$ , ... sont tous différents de zéro. D'ailleurs, il est évident que tous les noyaux sont eux-mêmes symétriques.

Cela étant, soit  $\mathbf{H}(x, y)$  un noyau symétrique, borné ou non, tel qu'après un nombre fini d'itérations on arrive à un noyau symétrique borné. Après de nouvelles itérations on arrivera à un noyau symétrique  $\mathbf{H}^{(q)}$  pour lequel la fonction déterminante  $\mathbf{D}_q(\lambda)$  sera du genre zéro. Cela étant, si la fonction résolvante  $\Gamma(x, y; \lambda)$  relative au noyau symétrique  $\mathbf{H}(x, y)$  n'avait pas de pôles, la fonction entière de genre zéro  $\mathbf{D}_q(\lambda)$  n'ayant pas de racines, se réduirait à l'unité. Or, cela est impossible, car on devrait avoir

$$\int_a^b \mathbf{H}^{(q)}(x_1, x_1) dx_1 = 0, \quad \int_a^b \int_a^b \begin{vmatrix} \mathbf{H}^{(q)}(x_1, x_1) & \mathbf{H}^{(q)}(x_1, x_2) \\ \mathbf{H}^{(q)}(x_2, x_1) & \mathbf{H}^{(q)}(x_2, x_2) \end{vmatrix} dx_1 dx_2 = 0,$$

et, par suite,

$$\int_a^b \int_a^b \mathbf{H}^{(q)}(x_1, x_2) \mathbf{H}^{(q)}(x_2, x_1) dx_1 dx_2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$\int_a^b \int_a^b [\mathbf{H}^{(q)}(x_1, x_2)]^2 dx_1 dx_2 = 0.$$

43. On peut déduire de la formule (123) une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation  $\mathbf{D}(\lambda) = 0$  n'ait qu'un nombre fini de racines. S'il en est ainsi, on a

$$\mathbf{D}(\lambda) = e^{a\lambda + b\lambda^2} \mathbf{P}(\lambda),$$

$\mathbf{P}(\lambda)$  étant un polynôme,  $a$  et  $b$  des constantes qui peuvent être nulles; par suite, la dérivée logarithmique  $\frac{\mathbf{D}'(\lambda)}{\mathbf{D}(\lambda)}$  est une fonction rationnelle de  $\lambda$ .

Inversement, si  $\frac{\mathbf{D}'(\lambda)}{\mathbf{D}(\lambda)}$  est une fonction rationnelle de  $\lambda$ , l'équation  $\mathbf{D}(\lambda) = 0$  n'admet qu'un nombre fini de racines. En effet, soient  $c$  un pôle de cette fonction rationnelle et

$$\frac{\mathbf{C}_\mu}{(\lambda - c)^\mu} + \frac{\mathbf{C}_{\mu-1}}{(\lambda - c)^{\mu-1}} + \dots + \frac{\mathbf{C}_1}{\lambda - c},$$

la partie principale correspondante. Dans le domaine du point  $\lambda = c$ , on aura

$$\mathbf{D}(\lambda) = \mathbf{F}(\lambda - c) e^{-\frac{\mathbf{C}_\mu}{(\mu-1)(\lambda-c)^{\mu-1}} + \dots + \mathbf{C}_1 \text{Log}(\lambda - c)};$$

$F(\lambda - c)$  étant une fonction régulière dans le domaine du point  $\lambda = c$ , et différente de zéro pour  $\lambda = c$ ; il faut donc qu'on ait  $C_\mu = \dots = C_2 = 0$ , et de plus que  $C_i$  soit un nombre entier positif, puisque la fonction  $D(\lambda)$  est régulière pour  $\lambda = c$ . La fonction rationnelle  $\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)}$  est donc nécessairement de la forme

$$\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = a + b\lambda + \sum_{i=1}^p \frac{m_i}{\lambda - c_i},$$

$m_i$  étant un nombre entier positif, et l'on a

$$D(\lambda) = C e^{a\lambda + \frac{b\lambda^2}{2}} \prod_{i=1}^{+\infty} (\lambda - c_i)^{m_i}.$$

En définitive, pour que l'équation  $D(\lambda) = 0$  n'admette qu'un nombre fini de racines, il faut et il suffit qu'à partir de  $A_3$ ,  $p$  coefficients consécutifs quelconques de la suite

$$A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots,$$

vérifient une relation de récurrence à coefficients constants <sup>(1)</sup>.

<sup>(1)</sup> Cette condition a été énoncée par M. Lalesco sous une forme équivalente (*Comptes rendus*, décembre 1907).

