
SUR LE PROBLÈME LOGIQUE

DE

L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES,

PAR M. JULES DRACH,
à Toulouse.



INTRODUCTION.

1. Considérons un système différentiel donné, formé d'un nombre limité d'équations S , *rationnelles* par rapport à tous les éléments qu'elles renferment : variables x_1, \dots, x_n , fonctions inconnues z_1, \dots, z_p de ces variables et dérivées des z par rapport aux x jusqu'à un ordre k . On sait *par des procédés réguliers*, sur lesquels il n'y a pas lieu d'insister ici, reconnaître au bout d'un nombre limité d'opérations, *assignable à l'avance*, si le système S admet des solutions z_1, \dots, z_p qui sont des fonctions des variables *indépendantes* x_1, \dots, x_n et quelle est la généralité possible de ces solutions au sens de Cauchy. On peut toujours déduire de S un système Σ composé d'équations rationnelles, d'ordre au plus égal à K par rapport aux dérivées des z , et tel que toutes les équations rationnelles d'ordre $(K + H)$ vérifiées par toutes les solutions de Σ , c'est-à-dire *conséquences nécessaires* des équations Σ , se ramènent à celles obtenues en dérivant simplement H fois les équations d'ordre K du système Σ .

Supposons ce système Σ , dont la solution *générale au sens de Cauchy* a une étendue précisée, formé effectivement.

Le *problème logique de l'intégration* ou encore *l'intégration logique* du système Σ , consiste :

1° A reconnaître quelles sont les diverses *classes* de solutions du système Σ , chaque classe étant caractérisée par les arbitraires qui doivent figurer dans les solutions considérées ;

2° A former pour chacune de ces classes un système *rationnel* Σ' , vérifié par les solutions de cette classe et où les arbitraires de ces solutions sont mises en évidence ;

3° A distinguer autant que possible entre les solutions d'une même classe C , d'après l'ensemble des relations rationnelles qui lient ces solutions aux variables indépendantes et à leurs dérivées relatives à ces variables.

L'étude en bloc des solutions des diverses classes et des liaisons qu'elles ont entre elles donnera une classification naturelle de toutes les transcendants z qui peuvent satisfaire à un système Σ . Des exemples précis en montreront l'importance.

Pour éclairer ces généralités, examinons le cas simple d'une équation

$$(1) \quad y' = f(x, y),$$

où l'on suppose $f(x, y)$ rationnel. Il y a seulement deux classes de solutions y dépendant de x , celles qui sont déterminées et celles qui dépendent d'une constante arbitraire.

Pour une solution déterminée y_1 , toute relation rationnelle entre x, y_1, y_1', \dots se ramène à une relation rationnelle

$$\varphi(x, y_1) = 0;$$

si donc il en existe une, la solution y_1 est algébrique.

Pour un système de deux solutions déterminées y_1, y_2 , toute relation rationnelle en $x, y_1, y_2, y_1', y_2', \dots$ se ramène de même à

$$\varphi(x, y_1, y_2) = 0;$$

on aura donc à étudier ces relations. Des problèmes analogues se présenteront pour trois solutions déterminées ou pour un plus grand nombre; la question dépendra essentiellement du nombre des solutions *explicitées*, c'est à-dire représentées par un signe explicite introduit dans le calcul.

Une solution $y = \varphi(x, C)$ dépendant d'une constante C donne, si on la résout par rapport à la constante, une relation

$$C = z(x, y),$$

où la fonction des deux variables z doit satisfaire *identiquement* à l'équation linéaire aux dérivées partielles

$$(2) \quad \frac{\partial z}{\partial x} + f(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

La connaissance d'une solution particulière z de cette équation donne toute autre solution sous la forme

$$Z = F(z).$$

On a donc simplement à chercher s'il existe des solutions z qui vérifient des

relations rationnelles

$$\Omega\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots\right) = 0$$

non conséquences de l'équation (2), à préciser la nature des fonctions Ω et à indiquer les rapports des diverses solutions z .

Deux notions fondamentales sont à la base de toute recherche d'*intégration logique*, celle d'*irréductibilité* et celle de *primitivité* (1).

Un système rationnel Σ , aux variables x_1, \dots, x_n , où les inconnues z_1, \dots, z_p sont fixées, ainsi que les arbitraires dont elles doivent dépendre, (c'est-à-dire où la classe des solutions est précisée), est dit *irréductible* si toute équation rationnelle entre les z , les x et les dérivées des z d'ordre quelconque, *compatible* avec les équations Σ , c'est-à-dire formant avec Σ un système Σ_1 admettant des solutions de la même classe C, est une *conséquence nécessaire* des équations de Σ . Elle est alors également vérifiée par toutes les solutions de Σ de la même classe : je dis que ces solutions sont, dans le domaine de rationalité formé par $x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_p$ et les dérivées z , des transcendentes de même nature.

Si le système Σ est réductible, on peut ajouter à ses équations des équations nouvelles, c'est-à-dire qui n'en sont pas des conséquences nécessaires, et obtenir des systèmes Σ_1 vérifiés par certaines solutions de Σ , de la classe considérée. On peut donc distinguer entre les diverses solutions de Σ de la classe C suivant la nature des systèmes Σ_1 . L'intégration logique de Σ exige qu'on pousse cette distinction aussi loin que possible, c'est-à-dire qu'on ne s'arrête que quand on aura obtenu des systèmes Σ_1 *irréductibles*.

Un théorème de M. Tresse (2) permet d'affirmer à l'avance que de tels systèmes Σ_1 existent toujours. Leur *formation effective* demeure restreinte à des cas très particuliers. Il y aura lieu évidemment d'étudier les relations qui lient entre elles les solutions des divers systèmes Σ_1 .

Supposons qu'on ait un système Σ irréductible ; nous savons déjà que pour en faire l'*intégration logique* il faut étudier, outre le système Σ où une seule solution (z_1, \dots, z_p) est explicitée, le système (Σ, Σ') vérifié par deux solutions $(z_1, \dots, z_p), (z'_1, \dots, z'_p)$ de la même classe C, le système $(\Sigma, \Sigma', \Sigma'')$ vérifié par trois solutions $(z), (z'), (z'')$ de la classe C et ainsi de suite. Dans quelques cas on saura limiter le nombre des systèmes à considérer : ce sont ceux où il existe des *systèmes fondamentaux* de solutions (3).

(1) J'ai introduit de manière tout à fait générale ces deux notions dans un travail publié aux *Annales de l'École Normale supérieure*, 1898 ; cf. p. 295 et suivantes : *Essai sur une théorie générale de l'intégration et sur la classification des transcendentes*.

(2) *Sur les invariants différentiels des groupes continus de transformations* (*Acta mathematica*, t. XVIII).

(3) Cf. *Essai sur une théorie générale de l'intégration, etc.* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1898, p. 309).

Une autre question fondamentale se pose pour tout système irréductible Σ : soient t_1, \dots, t_q un système de fonctions des arguments $x, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \dots$ qui figurent dans Σ ou de leurs dérivées jusqu'à un ordre déterminé (ces arguments étant regardés comme autant de variables indépendantes), définies par un système différentiel irréductible T de relations rationnelles en $x, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \dots, t, \frac{\partial t}{\partial x}, \dots$

L'ensemble des relations (Σ, T) permet toujours, par des procédés réguliers, d'obtenir un système U ne renfermant plus que les variables x_1, \dots, x_n et les inconnues t_1, \dots, t_q avec leurs dérivées $\frac{\partial t}{\partial x}, \dots$: ce système U est certainement irréductible. En dehors des équations U , on peut déduire des équations (Σ, T) un système différentiel V définissant z_1, \dots, z_p comme fonctions des arguments $x, t, \frac{\partial t}{\partial x}, \dots$, de sorte que le système (U, V) soit entièrement équivalent au système (Σ, T) . Le système V où l'on regarde les arguments $x, t, \frac{\partial t}{\partial x}, \dots$ comme des variables indépendantes est également irréductible pour les solutions z de la classe C considérée.

Passer de (Σ, T) au système (U, V) , c'est résoudre le problème de la transformation T pour le système irréductible Σ .

Dans le cas général, la solution t_1, \dots, t_q de U , dépend au moins des mêmes arbitraires que la solution générale de Σ ; elle peut être plus étendue, c'est-à-dire comporter un plus grand nombre de constantes ou de fonctions arbitraires des mêmes arguments ou même des fonctions arbitraires nouvelles.

Toutes les fois où quel que soit le système irréductible T , qui définit les t au moyen de $x, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \dots$, le système U a au moins des solutions t de même généralité que les solutions z du système Σ , nous dirons que ce dernier est primitif.

Le système Σ n'est donc imprimitif que s'il existe des fonctions t de $x, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \dots$, qui forment la solution générale d'un système irréductible U plus simple que Σ (nous entendons par là que la solution générale de V comporte moins d'arbitraires que celle de Σ ; on préciserait aisément dans chaque cas particulier).

Dans ce cas la transformation (z, t) définie par T décompose le problème de la recherche des z à partir des x en deux autres : recherche des t à partir des x , recherche des z à partir des t , qui seront l'un et l'autre relatifs à des systèmes irréductibles plus simples que Σ .

Ces généralités s'éclaircissent par quelques exemples : Une équation du second ordre

$$(1) \quad y'' = f(x, y, y'),$$

où f est, pour fixer les idées, rationnel en x, y, y' , regardée comme définissant une fonction y de x et de *deux constantes arbitraires*, est toujours irréductible au sens que nous avons adopté. Si l'on pose

$$\varphi(x, y, y', t) = 0,$$

φ étant rationnel en x, y, y', t , on peut déduire, par différentiation,

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0, \quad \frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0$$

et éliminer y, y' entre ces trois relations, c'est-à-dire obtenir pour t une équation

$$F(x, t, t', t'') = 0,$$

dont la solution t dépendra aussi de deux constantes arbitraires. Il peut arriver que l'élimination de y et y' puisse se faire entre les deux premières relations; nous dirons alors que l'équation est *imprimitive* et le système des deux relations

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, y', t) &= 0, \\ \Phi(x, t, t') &= 0 \end{aligned}$$

caractérise cette imprimitivité.

Il est clair qu'une relation entre x, y, y', t, t', \dots , d'ordre supérieur à zéro par rapport aux dérivées de t , ne peut jamais conduire pour t à une équation d'ordre inférieur à 2. Il n'y a donc pas d'autre cas d'imprimitivité.

Des conclusions différentes s'offrent lorsqu'on regarde

$$(1) \quad y'' = f(x, y, y')$$

comme définissant une fonction y de x dépendant seulement d'une *constante arbitraire*. La relation

$$y = \varphi(x, z),$$

où z désigne cette constante, peut toujours être écrite

$$Z = z(x, y),$$

et la fonction z est uniquement assujettie à vérifier les deux relations

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} y' &= 0, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial z}{\partial y} f(x, y, y') &= 0, \end{aligned}$$

où y' est une inconnue auxiliaire.

L'équation du second ordre en z ainsi obtenue, dont nous avons à étudier les

solutions particulières, peut n'être pas *irréductible* à ce point de vue. On dira dans ce cas que l'équation (1) est *réductible* quand on la regarde comme définissant des solutions y dépendant d'une seule constante.

Il existe alors une relation rationnelle entière entre x, y, y'

$$\theta(x, y, y') = 0$$

satisfaisant à une identité

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial y} y' + \frac{\partial \theta}{\partial y'} f(x, y, y') = M \theta,$$

où M est une fonction rationnelle convenable de x, y, y' .

Si l'équation (1) est irréductible pour les solutions y dépendant d'une constante, elle peut cependant être imprimitive dans le cas signalé plus haut.

Enfin, ajoutons que le cas où l'on définit implicitement les solutions dépendant de deux constantes par un système

$$a(x, y, y') = \alpha, \quad b(x, y, y') = \beta,$$

où les constantes α, β sont mises en évidence, conduit à remplacer l'équation (1) par l'équation aux dérivées partielles

$$(2) \quad \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} y' + \frac{\partial z}{\partial y'} f(x, y, y') = 0,$$

dont on explicitera simultanément deux solutions particulières $a(x, y, y')$, $b(x, y, y')$. Dans le domaine des éléments $x, y, y', a, b, \frac{\partial a}{\partial x}, \dots$ le système

$$(3) \quad \frac{\partial(a, b)}{\partial(y, y')} = \frac{\partial(a, b)}{\partial(y', x)} = \frac{\partial(a, b)}{\partial(x, y)} = f$$

n'est pas nécessairement irréductible; l'étude de ce système nous conduira à des conclusions importantes, en particulier à une classification précise des équations du second ordre basée sur la nature du système irréductible, *le plus simple*, qui comprend les équations (3).

Ce système, *le plus simple*, est à la fois *irréductible* et *primitif*.

II. Le travail actuel est consacré essentiellement à l'*intégration logique* des équations linéaires aux dérivées partielles

$$(1) \quad X(z) = \frac{\partial z}{\partial x} + A_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \dots + A_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0,$$

dont les coefficients A_1, \dots, A_n sont *rationnels* en x, x_1, \dots, x_n ou encore *algébriques*, c'est-à-dire rationnels dans un domaine $[\theta_1, \dots, \theta_k]$ défini par un

système irréductible de $(k + 1)$ équations au plus

$$\varphi_j(x, x_1, \dots, x_n, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) = 0.$$

Les résultats obtenus s'étendraient d'ailleurs immédiatement à un *domaine de rationalité* [R] *bien défini*, c'est-à-dire comprenant des fonctions transcendentes définies en x, x_1, \dots, x_n par un ou plusieurs systèmes différentiels *irréductibles*.

Les éléments z_1, z_2, \dots, z_n d'un *système fondamental* de solutions de l'équation (1) satisfont à des relations

$$(2) \quad \frac{D}{1} = \frac{D_1}{A_1} = \dots = \frac{D_n}{A_n},$$

où les D sont des déterminants fonctionnels convenables, qui les définissent à *une transformation ponctuelle près*. En d'autres termes, les quotients $\frac{D_i}{D}$ sont les invariants différentiels du groupe ponctuel général Γ_n

$$Z_i = \varphi_i(z_1, \dots, z_n) \quad (i = 1, \dots, n)$$

étendu en regardant les z comme fonctions de $(n + 1)$ variables x, x_1, \dots, x_n non transformées.

On démontre, sans difficulté, que tout autre invariant différentiel du même groupe, rationnel par rapport aux éléments $z_1, \dots, z_n, \frac{\partial z_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial z_n}{\partial x_n}, \dots$, est une fonction rationnelle des quotients $\frac{D_i}{D}$ et de leurs dérivées.

Si le système (2) est *irréductible*, c'est-à-dire si toute relation rationnelle entre z_1, \dots, z_n , leurs dérivées $\frac{\partial z_1}{\partial x_1}, \dots$, d'ordre quelconque et les variables, *compatible* avec les équations (2) (c'est-à-dire vérifiée par un système fondamental au moins), en est une conséquence nécessaire, je dis que l'équation (1) est *générale*.

Tous les systèmes fondamentaux sont des transcendentes de même nature ; ce sont les fonctions de $(n + 1)$ variables *attachées au groupe ponctuel général* Γ_n .

Si le système (2) est *réductible*, c'est-à-dire s'il existe des relations rationnelles compatibles avec les équations (2) sans en être des conséquences nécessaires, on peut distinguer entre les divers systèmes fondamentaux.

En ajoutant aux relations (2) les relations nouvelles dont nous admettons l'existence, on formera un système (S) qu'on peut tout de suite supposer *irréductible*.

Aux divers systèmes fondamentaux correspondront divers systèmes (S) ; il s'agit de choisir celui qu'on regardera comme *le plus simple*.

Pour cela, s'il existe des systèmes (S) renfermant des équations d'ordre zéro (c'est-à-dire rationnelles en z_1, \dots, z_n), on prendra tous ceux, S_0 , qui en renfer-

ment le plus grand nombre; parmi ceux-là on prendra tous ceux, S_1 , qui renferment le plus grand nombre d'équations du premier ordre; parmi ceux-là on prendra tous ceux qui renferment le plus grand nombre d'équations du second ordre et ainsi de suite ⁽¹⁾.

On obtient aussi des systèmes (S_p) qui déterminent tous un même ensemble de *dérivées principales* (au sens de MM. Méray et Riquier). On peut former, jusqu'à un certain ordre assez grand, une résolvante *algébrique* qui définit une combinaison linéaire et homogène à coefficients rationnels de ces dérivées principales au moyen des éléments paramétriques; si les systèmes (S_p) donnent lieu à des résolvantes de degrés différents, on prendra enfin, parmi eux, ceux, (Σ) , qui donnent des résolvantes de degré minimum.

Ce sont ces systèmes (Σ) que j'appelle *systèmes irréductibles réguliers*; le nombre des équations de chaque ordre et le degré de la résolvante algébrique correspondante sont les mêmes pour tous ces systèmes.

On pourrait encore dire que ces systèmes (Σ) sont à la fois *irréductibles* et *primitifs*; aucune transformation

$$z_i = \varphi_i(Z_1, \dots, Z_n) \quad (i = 1, \dots, n),$$

définie par un système différentiel irréductible et rationnel quelconque, ne peut augmenter le nombre des équations du système (Σ) qui sont d'un ordre donné en conservant les nombres qui correspondent aux ordres inférieurs. Cette impossibilité suffirait à établir que le système irréductible régulier, Σ , qui définit les y en partant des x , est *primitif* au sens plus général adopté plus haut; nous le montrerons dans une autre partie du présent travail.

Les systèmes irréductibles *réguliers* sont susceptibles d'une forme remarquable qui justifie leur choix. Supposons d'abord qu'il existe k équations distinctes d'ordre zéro, dans le système (Σ) ; elles pourront s'écrire simplement

$$z_1 = R_1, \quad z_2 = R_2, \quad \dots, \quad z_k = R_k,$$

où les R_i sont des fonctions rationnelles dans le domaine choisi. On pourra en conclure qu'en adjoignant les relations précédentes, algébriques en $x, x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_k$, les éléments z_{k+1}, \dots, z_n sont des solutions formant un système fondamental d'une équation linéaire à $(n - k + 1)$ variables,

$$x, \quad x_{k+1}, \quad \dots, \quad x_n,$$

par exemple, dont les coefficients sont *algébriques* par rapport à ces variables et *dépendent des k paramètres* z_1, z_2, \dots, z_k .

⁽¹⁾ D'après une remarque de Lie, un système (S) renferme certainement des équations d'ordre au plus égal à *trois*.

On peut donc se borner à considérer *dans un domaine algébrique*, des équations linéaires dont les coefficients peuvent dépendre d'un ou de plusieurs paramètres et *qui ne possèdent aucune solution rationnelle* (1).

Les équations du système irréductible irrégulier peuvent se mettre sous la *forme canonique*

$$\Omega_i\left(z_1, \dots, z_n, \frac{\partial z_1}{\partial x_1}, \dots\right) = \alpha_i(x, x_1, \dots, x_n) \quad (i=1, \dots, k),$$

dans laquelle les Ω_i sont des invariants différentiels, indépendants, d'un groupe Γ , formant pour ce groupe un système complet d'invariants et les α_i des fonctions rationnelles de x, x_1, \dots, x_n dans le domaine de rationalité adopté.

Les transformations (z, Z) du groupe Γ sont entièrement définies par les relations

$$\Omega_i\left(z_1, \dots, z_n, \frac{\partial z_1}{\partial x_1}, \dots\right) = \Omega_i\left(Z_1, \dots, Z_n, \frac{\partial Z_1}{\partial x_1}, \dots\right)$$

qui ne dépendent qu'en apparence des variables x_1, \dots, x_n . Il suffit, par exemple, d'y faire $x_i = z_i$ pour obtenir sous leur forme canonique les *équations de définition* des transformations finies de Γ , au sens de Lie.

J'ai appelé le groupe Γ *groupe de rationalité* de l'équation spéciale (1); il possède les propriétés fondamentales du groupe de rationalité d'une équation algébrique :

1° *Tout invariant rationnel de Γ est égal à une fonction rationnelle des variables x, x_1, \dots, x_n , dans le domaine choisi;*

2° *Toute fonction rationnelle de z_1, \dots, z_n et de leurs dérivées qui est égale à une fonction rationnelle des variables dans le domaine choisi, est un invariant rationnel de Γ .*

Les transcendentes z_1, \dots, z_n sont alors, par définition, *des fonctions de $(n+1)$ variables attachées au groupe Γ .*

On doit observer que le groupe de rationalité n'est déterminé qu'à certaines transformations près; il est clair que toute transformation (z, z') qui change un système irréductible régulier (Σ) en un système de même nature (Σ') , change le groupe Γ en un groupe *homologue* Γ' qui sera le groupe de rationalité pour les solutions z' de (Σ') . Il faut et il suffit pour cela que les équations de (Γ) soient transformées par (z, z') en équations rationnelles de même ordre.

Une méthode nouvelle, exposée longuement au Chapitre II du présent travail, permet de retrouver et de compléter les propositions précédentes.

(1) Cette restriction est commode sans être indispensable.

Soit $P\left(Z, \frac{\partial Z}{\partial x}, x\right)$ un polynome entier par rapport aux variables x, x_1, \dots, x_n , à n lettres Z_1, \dots, Z_n qui seront regardées comme des fonctions de x, x_1, \dots, x_n et à leurs dérivées d'ordre quelconque relatives aux n variables x_1, \dots, x_n . Si l'on regarde les Z comme des fonctions indépendantes de n éléments nouveaux z_1, \dots, z_n (qu'on ne précise pas davantage) et si l'on exécute les transformations

$$\frac{\partial Z}{\partial x_i} = \frac{\partial Z}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial Z}{\partial z_n} \frac{\partial z_n}{\partial x_i},$$

.....

on pourra toujours écrire une *identité*

$$P\left(Z, \frac{\partial Z}{\partial x}, x\right) = \sum_1^h l_i\left(Z, \frac{\partial Z}{\partial z}\right) \xi_i\left(x, \frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

où les $l_i\left(Z, \frac{\partial Z}{\partial z}\right)$ ne dépendent que des Z et de leurs dérivées par rapport aux z et les $\xi_i\left(x, \frac{\partial z}{\partial x}\right)$ que des variables et des dérivées $\frac{\partial z}{\partial x}$; nous supposons que le nombre h est le plus petit possible, ce qui exige que les l_i d'une part, les ξ_i d'autre part ne soient liés par aucune relation linéaire et homogène à coefficients constants. Les ξ_i , qui sont alors définis à une transformation linéaire et homogène à coefficients constants près, seront dits *coordonnées* du polynome P . Leur introduction met en évidence, de façon particulièrement simple, la manière dont se comportent les polynomes en $Z, \frac{\partial Z}{\partial x}, \dots$ quand on exécute sur les Z une transformation ponctuelle quelconque.

Si l'on désigne par $L_i(Z)$ ce que devient $l_i\left(Z, \frac{\partial Z}{\partial z}\right)$ dans l'hypothèse où les z sont égaux aux Z de même indice, on a évidemment aussi

$$P\left(Z, \frac{\partial Z}{\partial x}, x\right) = \sum_1^h L_i(Z) \xi_i\left(x, \frac{\partial Z}{\partial x}\right).$$

D'autre part, si les z' sont des fonctions quelconques des z , on a encore

$$\sum_1^h l_i\left(Z, \frac{\partial Z}{\partial z}\right) \xi_i\left(x, \frac{\partial z}{\partial x}\right) = \sum_1^h l_i\left(Z, \frac{\partial Z}{\partial z'}\right) \xi_i\left(x, \frac{\partial z'}{\partial x}\right),$$

d'où l'on conclut que *la transformation* (z, z') *fait subir aux* ξ_i *et aux* l_i *deux transformations linéaires adjointes.*

Sans insister sur l'étude générale des fonctions rationnelles en $Z, \frac{\partial Z}{\partial x}, x$ dans le groupe ponctuel général Γ_n des transformations (Z, z) , faite en partant de là :

groupe des transformations qu'admet le polynome P, permutations des polynomes P entre eux, formation des équations différentielles vérifiées par P quand on y regarde les z comme donnés et les Z comme arbitraires, etc..., je veux montrer comment on tire parti des *coordonnées* de P pour l'étude des équations linéaires aux dérivées partielles.

Supposons que les éléments Z_1, \dots, Z_n constituent un système fondamental *déterminé*, pour une équation

$$(1) \quad \mathbf{X}(z) = \frac{\partial z}{\partial x} + A_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \dots + A_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0,$$

dont les coefficients appartiennent à un domaine algébrique de rationalité [R], et que, de plus, le polynome P satisfasse à une identité

$$\mathbf{X}(P) = MP,$$

qui est la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation *unique*

$$P\left(Z, \frac{\partial Z}{\partial x}, x\right) = 0$$

forme avec les équations

$$\mathbf{X}(Z_i) = 0$$

un système complètement intégrable.

On en peut conclure que les éléments z_1, \dots, z_n , qui représentent un système fondamental *quelconque*, satisfont aux identités

$$\frac{\mathbf{X}(\xi_i)}{\xi_i} = \dots = \frac{\mathbf{X}(\xi_h)}{\xi_h} = \mathbf{M}(x, x_1, \dots, x_n)$$

ou encore que les équations

$$\frac{\xi_i\left(x, \frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\xi_1\left(x, \frac{\partial z}{\partial x}\right)} = \alpha_i(z_1, \dots, z_n) \quad (i = 1, \dots, h)$$

sont toujours vérifiées, *pour un choix convenable des α_i* , par un système fondamental particulier quelconque.

Si l'on veut que le système précédent admette la solution qui, pour $x = x_0$, satisfait aux conditions

$$z_i(x_0, x_1, \dots, x_n) = \varphi_i(x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, \dots, n),$$

il suffit de poser

$$\alpha_i = \frac{\xi_i\left(x_0, x_1, \dots, x_n, \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}, \dots\right)}{\xi_1\left(x_0, x_1, \dots, x_n, \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}, \dots\right)}$$

et de calculer les seconds nombres au moyen de z_1, \dots, z_n en partant des formules

$$z_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, \dots, n).$$

Pour que le système précédent soit *rationnel*, il suffit de prendre un système fondamental qui pour $x = x_0$ satisfait aux conditions

$$x_i = R_i(z_1, \dots, z_n),$$

où les R_i sont rationnels. C'est ce qui arrive toujours pour la solution *principale* en x_0 , de l'équation (1), qui est définie par

$$x_i = z_i \quad \text{pour} \quad x = x_0.$$

Soit maintenant un système irréductible régulier (Σ) vérifié par Z_1, \dots, Z_n ; supposons que, *jusqu'à un certain ordre* N , tel que les équations distinctes d'ordre $N + N'$ s'obtiennent toutes en dérivant simplement jusqu'à cet ordre $N + N'$ les équations d'ordre N , le système (Σ) renferme k relations entières, rationnellement distinctes (1)

$$f_1 = 0, \quad \dots, \quad f_k = 0,$$

et faisons

$$P = u_1 f_1 + \dots + u_k f_k,$$

les u désignant des polynomes arbitraires en x, x_1, \dots, x_n .

Mettons en évidence les *coordonnées* du polynome P en introduisant les éléments z_1, \dots, z_n d'un système fondamental *quelconque*; on aura

$$P\left(Z, \frac{\partial Z}{\partial x}, x\right) = \sum_1^h l_i \left(Z, \frac{\partial Z}{\partial z}\right) \xi_i\left(x, \frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

et le système (Σ) peut se remplacer par les équations

$$\begin{aligned} P &= \sum_1^h l_i \xi_i &= 0, \\ P_1 = X(P) &= \sum_1^h l_i X(\xi_i) &= 0, \\ &\dots\dots\dots, \\ P_{k-1} = X(P_{k-2}) &= \sum_1^h l_i X_{k-1}(\xi_i) &= 0. \end{aligned}$$

(1) Je veux dire par là qu'aucune d'entre elles n'a pour premier membre un polynome entier formé avec les premiers membres des $(k-1)$ autres et s'annulant avec ceux-ci.

On démontre aisément que *le nombre h des coordonnées du polynome P est nécessairement égal à $(k + 1)$.*

Si l'on avait $h \leq k$ on déduirait de ces relations par l'élimination des l , une ou plusieurs relations rationnelles qui seraient vérifiées par les éléments z_1, \dots, z_n d'un système fondamental *quelconque et ne se réduiraient pas à des identités.*

Si l'on avait $h = k + r$, on pourrait former, en partant du système précédent, un système rationnel comprenant rk relations d'un ordre au plus égal à N . On peut montrer que chaque coordonnée dont l'indice dépasse $(k + 1)$ donne dans ce système *une équation au moins* qui n'est pas une conséquence nécessaire des premières, auxquelles conduisent les coordonnées $\xi_1, \dots, \xi_k, \xi_{k+1}$ quand les ξ sont rangés dans un ordre convenable.

Le système (Σ) pourra donc s'écrire, en désignant par Δ_i certains déterminants formés avec les $\xi_i, X(\xi_i), \dots, X_{k-1}(\xi_i)$ et dont la définition est immédiate

$$(\Omega) \quad \frac{l_i \left(Z, \frac{\partial Z}{\partial z} \right)}{l_{k+1} \left(Z, \frac{\partial Z}{\partial z} \right)} = - \frac{\Delta_i \left(x, \frac{\partial z}{\partial x} \right)}{\Delta \left(x, \frac{\partial z}{\partial x} \right)} \quad (i = 1, \dots, k).$$

C'est la forme nouvelle que je voulais signaler pour les équations de (Σ) ; je l'appelle *forme normale du système* (Σ) .

De l'existence de cette forme normale on conclut que l'on peut trouver un système (Σ') possédant la solution z_1, \dots, z_n qui satisfait, pour $x = x_0$, aux conditions

$$x_i = R_i(z_1, \dots, z_n),$$

où les R_i sont n fonctions rationnelles indépendantes. Il suffit de poser

$$\Delta_i \left(x, \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \alpha_i(z_1, \dots, z_n) \Delta \left(x, \frac{\partial z}{\partial x} \right),$$

en calculant les α_i par les formules

$$\alpha_i = \frac{\Delta_i \left(x_0, x_1, \dots, x_n, \frac{\partial z_1}{\partial x_1}, \dots \right)}{\Delta \left(x_0, x_1, \dots, x_n, \frac{\partial z_1}{\partial x_1}, \dots \right)},$$

où l'on remplace les x_i et les $\frac{\partial z_i}{\partial x_k}$ par leurs expressions en z_1, \dots, z_n .

En particulier, il existe un système irréductible régulier (Σ_0) qui possède la solution *principale* en $x = x_0$, c'est-à-dire qui satisfait en ce point aux conditions

$$x_i = z_i \quad (i = 1, \dots, n).$$

On l'obtient en prenant

$$\alpha_i = \frac{\Delta_i(x_0, z_1, \dots, z_n, 1, \dots)}{\Delta(x_0, z_1, \dots, z_n, 1, \dots)},$$

où le second membre se déduit de $\frac{\Delta_i}{\Delta}$ en faisant

$$x_i = z_i, \quad \frac{\partial z_i}{\partial x_k} = 0, \quad \frac{\partial z_i}{\partial x_i} = 1, \quad \dots$$

Le système initial (Σ) peut s'écrire, en faisant $z_i = Z_i$,

$$\frac{L_i(Z)}{L_{k+1}(Z)} = - \frac{\Delta_i\left(x, \frac{\partial Z}{\partial x}\right)}{\Delta\left(x, \frac{\partial Z}{\partial x}\right)},$$

et l'on passe de l'une quelconque de ses solutions z_1, \dots, z_n à une autre solution Z_1, \dots, Z_n en satisfaisant simplement aux équations

$$(\Omega) \quad \frac{l_i\left(Z, \frac{\partial Z}{\partial z}\right)}{l_{k+1}\left(Z, \frac{\partial Z}{\partial z}\right)} = \frac{L_i(z)}{L_{k+1}(z)},$$

qui sont *les équations de définition du groupe de rationalité Γ correspondant*.

On reconnaît aussi là l'ensemble des transformations (z, Z) qui n'altèrent pas la relation unique $P = 0$.

Enfin, si l'on observe que, dans la forme (Ω), les éléments z_1, \dots, z_n peuvent être regardés comme arbitraires et si l'on pose

$$z_i = x_i, \quad \frac{\partial z_i}{\partial x_k} = 0, \quad \frac{\partial z_i}{\partial x_i} = 1, \quad \dots,$$

on obtient la nouvelle forme

$$(\Omega') \quad \frac{l_i\left(Z, \frac{\partial Z}{\partial x}\right)}{l_{k+1}\left(Z, \frac{\partial Z}{\partial x}\right)} = - \frac{\Delta_i(x, x_1, \dots, x_n, 1, \dots)}{\Delta(x, x_1, \dots, x_n, 1, \dots)}$$

qui prouve que les *invariants différentiels du groupe de rationalité Γ* (qui sont les premiers membres) *sont des fonctions rationnelles des variables x, x_1, \dots, x_n* .

Cette forme Ω' est la *forme canonique* signalée plus haut.

J'ajoute encore qu'il résulte de la définition des $l\left(Z, \frac{\partial Z}{\partial x}\right)$ en partant de P , que

les *invariants relatifs* $l_i\left(\mathbf{Z}, \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x}\right)$ du groupe Γ subissent, quand on exécute sur les variables x (non transformées par Γ) une transformation quelconque du groupe ponctuel général Γ_n , *une simple transformation linéaire et homogène*; les *invariants absolus* $\frac{l_i}{l_{k+1}}$ subissent alors une transformation *projective*.

On peut, d'ailleurs, toujours choisir pour l_{k+1} une puissance du déterminant fonctionnel $\frac{\partial(\mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}$.

Enfin, la considération des coordonnées d'un polynôme permet encore, *par une méthode algébrique régulière*, de déduire de tout système d'équations rationnelles, vérifié par un système fondamental particulier (z_1, \dots, z_n) , un autre système rationnel (peut-être *réductible*) ayant la forme canonique (Ω') et vérifié par une solution (u_1, \dots, u_n) ; les u et les z sont d'ailleurs liés par un système différentiel rationnel, qui peut être arbitraire.

La simplicité de ces résultats me paraît légitimer l'introduction systématique des éléments ξ (*coordonnées de P*) et l (*invariants relatifs normaux de Γ*); c'est de leur étude qu'on déduira la théorie *algébrique* des groupes infinis qui interviennent ici.

A ce propos, il n'est pas inutile d'observer qu'en bonne logique *la théorie de l'intégration logique des équations aux dérivées partielles* (classification des transcendentes qui les vérifient) *doit être faite indépendamment de celle des groupes continus finis ou infinis de Lie*; cette dernière nécessite la considération de transcendentes qu'il faudrait avoir défini antérieurement et de systèmes complets d'équations linéaires dont on doit connaître le groupe de rationalité. Le choix limitatif des groupes à *équations de définition rationnelles*, demeure *arbitraire* si l'on n'adopte pas le point de vue auquel nous nous plaçons (¹).

En résumé *le problème logique de l'intégration* pour une équation

$$(1) \quad \mathbf{X}(z) = \frac{\partial z}{\partial x} + \mathbf{A}_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \dots + \mathbf{A}_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0$$

comporte la résolution des questions suivantes :

1° Détermination de tous les *types* Γ de groupes contenus dans le groupe ponctuel général Γ_n à n variables, dont les équations de définition sont rationnelles;

2° Détermination du groupe Γ de rationalité de l'équation (1).

(¹) Toute cette théorie (problème logique de l'intégration d'un système différentiel, notion et propriétés du *groupe de rationalité* d'une équation linéaire aux dérivées partielles) a été esquissée dans ma Thèse. MM. Painlevé et Vessiot ayant à ce moment appelé amicalement mon attention sur l'ambiguïté de certains énoncés, la définition des *systèmes irréductibles*

Chaque groupe G est caractérisé par un système complet d'invariants différentiels; ces invariants sont liés aux invariants différentiels du groupe Γ_n (qui sont les quotients $\frac{D_i}{D}$) par un *système résolvant* qui admet une solution rationnelle en x, x_1, \dots, x_n quand le groupe G comprend un groupe de rationalité Γ comme sous-groupe. Il faut donc *trouver le plus petit groupe dont les invariants différentiels sont rationnels en x, x_1, \dots, x_n .*

Le groupe de rationalité Γ étant connu, la nature des transcendentes z_1, \dots, z_n attachées à ce groupe est fixée; une décomposition particulière du groupe Γ met en évidence leurs propriétés essentielles. Elle fait l'objet de la seconde partie du présent travail.

Disons, en terminant, que nous avons longuement insisté au début sur l'étude de l'équation du premier ordre

$$X(z) = \frac{\partial z}{\partial x} + A \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

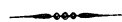
On a en effet, là, un exemple simple des difficultés et des problèmes de la théorie générale. D'autres problèmes qui se présentent à l'occasion de l'équation de premier ordre feront l'objet d'un travail particulier.

réguliers auxquels s'appliquent exclusivement les raisonnements et les conclusions de ma Thèse leur a été communiquée en octobre 1898.

La théorie, développée ici, des *coordonnées* de polynomes, a été exposée, avec l'application à la détermination de la *forme normale d'un système irréductible régulier*, dans un Mémoire étendu présenté à l'Académie des Sciences en septembre 1902, malheureusement inachevé dans d'autres parties, et écarté comme tel par la Commission du Grand Prix des Sciences mathématiques.

Dans le Mémoire couronné, M. Vessiot, en considérant les systèmes irréductibles (S) dont la solution générale a le moins d'étendue possible, a établi également sous certaines restrictions, en utilisant les recherches de Lie et de MM. Engel et Medolaghi sur les groupes infinis, l'existence et les propriétés fondamentales du *groupe de rationalité* d'une équation linéaire aux dérivées partielles.

Des considérations étrangères à la Science ont seules retardé jusqu'à ce jour la publication de ce travail, dont la partie essentielle date par suite de septembre 1902.



PREMIÈRE PARTIE.

EXISTENCE DU GROUPE DE RATIONALITÉ.

CHAPITRE I.

L'ÉQUATION DU PREMIER ORDRE $\frac{dy}{dx} = A(x, y)$.

I. Recherche directe des divers types de relations rationnelles compatibles avec

$$(a) \quad \frac{\partial z}{\partial x} + A(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

— Les types obtenus jusqu'à l'ordre 3 donnent rationnellement en x, y la valeur de l'une des quatre fonctions

$$z, \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^n, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} : \frac{\partial z}{\partial y}; \frac{\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}}{\frac{\partial z}{\partial y}} - \frac{3}{2} \left(\frac{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}{\frac{\partial z}{\partial y}}\right)^2.$$

Il n'y en a pas d'autres.

II. Méthode rapide conduisant aux résultats précédents.

III. Méthode générale donnant la forme des relations rationnelles *types* compatibles avec (a) : *existence et propriétés du groupe de rationalité*.

IV. Comment on tire parti de la connaissance d'une relation rationnelle quelconque vérifiée par une solution de (a).

I. — RECHERCHE DIRECTE DES TYPES DE RELATIONS RATIONNELLES

COMPATIBLES AVEC UNE ÉQUATION $\frac{\partial z}{\partial x} + A(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

§ 1. Soit l'équation

$$(a) \quad X(z) = \frac{\partial z}{\partial x} + A \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

où nous supposons d'abord, *pour fixer les idées*, A rationnel en x et y ; nous nous proposons de *rechercher quels sont tous les types de transcendentes z qui peuvent satisfaire à une équation telle que (a) et de caractériser chacun de ces types*.

L'équation (a) permet de calculer toutes les dérivées de z , prises une fois au

moins par rapport à x , au moyen des dérivées de z prises seulement par rapport à y . S'il existe, par conséquent, une relation

$$(a') \quad F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots\right) = 0,$$

rationnelle par rapport à tous les éléments qu'elle renferme et compatible avec l'équation (a) *sans en être une conséquence nécessaire* [c'est-à-dire sans être une combinaison algébrique de l'équation (a) et de ses dérivées], on pourra supposer qu'il y figure seulement les dérivées $\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \dots$ prises par rapport à la variable y .

Parmi les relations telles que (a'), considérons celles qui sont *d'ordre minimum* par rapport aux dérivées de z et, parmi celles-là, une quelconque de celles où le degré par rapport à la plus haute dérivée de z est le plus petit possible.

Il est clair que si nous écrivons cette équation sous forme entière

$$(a') \quad F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \dots, \frac{\partial^p z}{\partial y^p}\right) = 0,$$

son premier membre sera un polynôme irréductible par rapport aux éléments qui y figurent, en particulier par rapport à $\frac{\partial^p z}{\partial y^p}$. Les équations (a) et (a') donnent l'expression rationnelle de toutes les dérivées de z qui sont d'ordre $(p+1)$ au moyen des dérivées d'ordre inférieur et des variables. Il en résulte qu'il ne peut exister, pour chaque système d'équations compatibles en z , qu'une seule équation telle que (a'). C'est cette équation qui nous permettra de fixer la nature de la transcendante z .

Suivant une dénomination adoptée ailleurs, nous dirons que l'équation (a) est *générale* s'il n'existe, pour aucune solution particulière z , *différente de* $z = \text{const.}$, une équation rationnelle telle que (a') compatible avec (a); nous dirons qu'elle est *spéciale* dans tous les autres cas.

Ajoutons encore, avant de passer à l'examen de ces différents cas, que l'équation (a) différenciée par rapport à y donne immédiatement les relations

$$\begin{aligned} (a_1) \quad & X\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \\ (a_2) \quad & X\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) + 2 \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \\ (a_3) \quad & X\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right) + 3 \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} + 3 \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial^3 A}{\partial y^3} \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \\ (a_4) \quad & X\left(\frac{\partial^4 z}{\partial y^4}\right) + 4 \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} + 6 \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} + 4 \frac{\partial^3 A}{\partial y^3} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial^4 A}{\partial y^4} \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \\ & \dots \end{aligned}$$

dont la loi de formation est manifeste.

α . Plaçons-nous d'abord dans le cas simple où il existe une relation rationnelle en x, y, z

$$(a') \quad \varphi(x, y, z) = 0,$$

compatible avec l'équation (α) . Cette relation peut être supposée de l'ordre le plus petit possible en z .

Parmi les conséquences de la relation (a') , nous considérons l'équation qu'on obtient en appliquant aux deux membres l'opération $X(f)$, c'est-à-dire

$$(1) \quad X(\varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + A \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0;$$

cette équation est entière en z et du même ordre *au plus* que la précédente. On doit donc avoir identiquement

$$(2) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + A \frac{\partial \varphi}{\partial y} = M \varphi,$$

M ne dépendant que des variables x et y . C'est là la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction algébrique z définie par (a') vérifie l'équation (α) .

Si l'on pose, d'une manière générale,

$$z = f(u),$$

en désignant par f une fonction rationnelle quelconque, la fonction algébrique $u(z)$ satisfera comme z à l'équation (α) et aux équations transformées de (a') , (1) et (2) . En particulier, la transformation

$$z = u + a,$$

où a désigne une constante arbitraire, ne change pas le degré du polynôme φ et donne un polynôme *complet* en u

$$\varphi(x, y, u + a) = \varphi(x, y, a) + u \frac{\partial \varphi}{\partial a} + \frac{u^2}{1 \cdot 2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial a^2} + \dots$$

Il suffit alors de considérer l'identité (2) en u pour en conclure, en bornant φ à ses deux premiers termes,

$$X \left[\varphi(x, y, a) + u \frac{\partial \varphi}{\partial a} \right] = M \left[\varphi(x, y, a) + u \frac{\partial \varphi}{\partial a} \right],$$

d'où l'on déduit qu'il existe une fonction rationnelle u définie par l'équation

$$\varphi(x, y, a) + u \frac{\partial \varphi}{\partial a} = 0,$$

qui satisfait à l'équation (α) . Le polynôme φ de degré minimum en z est donc *du*

premier degré; les conditions de son existence sont immédiates. Ce résultat est bien connu.

§ 2. β . Supposons maintenant [l'équation (a) n'admettant aucune solution rationnelle] qu'il existe une relation rationnelle, entière en z et $\frac{\partial z}{\partial y}$

$$(a') \quad \varphi = \sum_{i=0}^h \alpha_i \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^i = 0,$$

compatible avec (a), c'est-à-dire vérifiée par une solution au moins, *différente d'une constante*, de cette dernière équation.

La transformation $z = f(u)$, où f est rationnel, ne change pas le caractère des coefficients α_i ; elle remplace $\left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^i$ par $(f')^i \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^i$, c'est-à-dire conserve le degré de chaque terme par rapport à $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Considérons l'équation $X(\varphi) = 0$, qui s'écrit ici

$$(1) \quad X(\varphi) = \sum_{i=0}^n \left[X(\alpha_i) - i \alpha_i \frac{\partial A}{\partial y} \right] \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^i = 0;$$

comme elle est du même ordre au plus en $\frac{\partial z}{\partial y}$ que l'équation (a') et aussi par rapport à z , on doit avoir, en supposant comme toujours cette dernière d'ordre maximum en $\frac{\partial z}{\partial y}$, une identité

$$(2) \quad X(\varphi) = M\varphi,$$

où M est une fonction rationnelle de x et y .

Le terme α_0 ne peut dépendre de z que par un facteur $P(z)$ qui dépend de z seul, car l'équation

$$(3) \quad X(\alpha_0) = M\alpha_0$$

nous permettrait d'obtenir une solution algébrique de l'équation (a). On a, en outre, en égalant les coefficients de $\left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^n$ dans les deux membres de (2),

$$(4) \quad X(\alpha_n) - n \alpha_n \frac{\partial A}{\partial y} = M\alpha_n,$$

et la même remarque s'applique au terme α_k quel que soit l'indice k .

Le polynôme φ ne pourra renfermer aucune autre puissance de $\left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)$ que $\left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^n$:

l'existence d'un terme en $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^i$ donnerait en effet

$$\mathbf{X}(\alpha_i) - i\alpha_i \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} = \mathbf{M}\alpha_i,$$

et l'on en pourrait conclure que la relation

$$\alpha_0 + \alpha_i \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^i = 0,$$

de degré inférieur à n , est satisfaite par une solution de l'équation (a) .

Ainsi le polynôme φ se réduit à deux termes seulement quand on l'ordonne par rapport aux puissances croissantes de $\frac{\partial z}{\partial y}$; on peut d'ailleurs supposer immédiatement les coefficients α_0, α_n débarrassés des facteurs $P_0(z), P_n(z)$ qui peuvent les multiplier et écrire simplement

$$(5) \quad \varphi = \alpha_0(x, y) + \alpha_n(x, y) \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^n = 0,$$

α_0 et α_n satisfaisant aux relations (3) et (4). La même conclusion peut aussi être obtenue en posant

$$z = u + a$$

(a désignant une constante arbitraire) et formant les équations qui définissent u .

S'il existe une solution de l'équation (a) qui soit liée à ses dérivées premières et aux variables par une relation rationnelle distincte de (a) , cette relation peut s'écrire

$$(a') \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^n = \mathbf{K},$$

\mathbf{K} désignant une fonction rationnelle de x et y qui satisfait à l'équation

$$(a'') \quad \mathbf{X}(\mathbf{K}) + n\mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} = 0.$$

Cette dernière équation ne peut d'ailleurs admettre qu'une seule solution rationnelle.

Si elle admettait en effet la solution \mathbf{K}_1 , en posant

$$\left(\frac{\partial z_1}{\partial y}\right)^n = \mathbf{K}_1,$$

on définirait une solution z_1 de l'équation (a) et l'on aurait

$$\left(\frac{dz_1}{dz}\right)^n = \frac{\mathbf{K}_1}{\mathbf{K}},$$

ce qui exprime que $\frac{\mathbf{K}_1}{\mathbf{K}}$ est une solution rationnelle de l'équation (a) .

Le seul cas d'exception donne $\frac{K_1}{K} = \text{const.}$, les deux solutions z et z_1 sont liées par la relation

$$z_1 = az + b \quad (a, b \text{ constantes});$$

on ne doit pas ici les regarder comme distinctes.

La transcendante z est donc définie aux transformations près du groupe linéaire

$$z = \varepsilon u + \text{const.}$$

où l'on a $\varepsilon^n = 1$; on l'obtient par la quadrature

$$z = \int \sqrt[n]{K(x, y)} (dy - \Lambda dx).$$

On peut encore dire qu'il existe un multiplicateur de l'équation (a), au sens adopté par Euler, dont la puissance n est une fonction rationnelle de x et y .

§ 3. γ . Examinons maintenant le cas où la relation rationnelle (a'), compatible avec l'équation (a) et dont l'ordre par rapport aux dérivées de z est le plus petit possible, est du second ordre

$$(a') \quad \varphi \left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) = 0.$$

Posons

$$\varphi = \sum_{k=0}^n \beta_k \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)^k,$$

les β étant des polynômes entiers en $z, \frac{\partial z}{\partial y}$, pouvant être rationnels en x, y et admettons que le degré n du polynôme φ soit le plus petit possible.

L'équation $X(\varphi) = 0$, conséquence nécessaire de (a'), étant de même degré que cette dernière par rapport à $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, on doit avoir identiquement

$$(1) \quad X(\varphi) = M\varphi,$$

où le polynôme M en $z, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ne peut dépendre de $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Développons le premier membre en tenant compte de la forme de φ , nous aurons

$$\sum_{k=0}^n X(\beta_k) \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)^k - \sum_{k=0}^n k \beta_k \left(2 \frac{\partial \Lambda}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial y^2} \frac{\partial z}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)^{k-1} = M\varphi,$$

d'où l'on conclut, en égalant les coefficients des mêmes puissances de $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$,

$$(2) \quad \begin{cases} X(\beta_n) - 2n\beta_n \frac{\partial A}{\partial y} = M\beta_n, \\ X(\beta_{n-1}) - 2(n-1)\beta_{n-1} \frac{\partial A}{\partial y} - n\beta_n \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = M\beta_{n-1}, \\ X(\beta_{n-2}) - 2(n-2)\beta_{n-2} \frac{\partial A}{\partial y} - (n-1)\beta_{n-1} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = M\beta_{n-2}, \\ \dots \end{cases}$$

La première de ces relations (2) montre que M ne peut renfermer $\frac{\partial z}{\partial y}$.

On voit ensuite que β_n ne peut dépendre de $\frac{\partial z}{\partial y}$ que par un facteur $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^i$, sans quoi la relation

$$\beta_n = 0$$

définirait une solution de l'équation (a) distincte d'une constante.

Les équations (2) ont été écrites en supposant le polynome φ complet par rapport à $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; nous ferons simplement observer que, si l'on écarte le cas où l'on aurait

$$\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = 0,$$

on a bien nécessairement

$$\beta_{n-1} \neq 0,$$

en vertu de la seconde de ces équations.

Considérons alors la combinaison, du premier degré en $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$,

$$\Omega = n\beta_n \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \beta_{n-1};$$

on a manifestement, en vertu des deux premières équations (2),

$$X(\Omega) = \left[M + 2(n-1) \frac{\partial A}{\partial y} \right] \Omega.$$

L'équation $\varphi = 0$ supposée de degré minimum par rapport à $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ est donc du premier degré et nous poserons simplement

$$(3) \quad \varphi = \beta_1 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \beta_0,$$

ce qui donnera pour β_1, β_0 les deux relations

$$(4) \quad \begin{cases} X(\beta_1) - 2\beta_1 \frac{\partial A}{\partial y} = M\beta_1, \\ X(\beta_0) - \beta_1 \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \frac{\partial z}{\partial y} = M\beta_0. \end{cases}$$

La première nous conduit à poser

$$\beta_1 = \gamma_1 \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^i,$$

le facteur γ_1 ne dépendant plus que de x, y, z , ce qui donne le nouveau système

$$(5) \quad \begin{cases} X(\gamma_1) - (i+2)\gamma_1 \frac{\partial A}{\partial y} = M\gamma_1, \\ X(\beta_0) - \gamma_1 \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^{i+1} \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = M\beta_0. \end{cases}$$

Supposons qu'il existe dans le polynome en $\frac{\partial z}{\partial y}$ désigné par β_0 un terme de degré h différent de $(i+1)$; nous aurons, en appelant α le coefficient de ce terme,

$$X(\alpha) - h \frac{\partial A}{\partial y} \alpha = M\alpha,$$

et l'on en conclura, à cause de la première des relations (5),

$$X(\Omega) = 0,$$

en posant cette fois

$$\Omega = \frac{\gamma_1 \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^{i+2}}{\alpha \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^h}.$$

Nous pouvons, par suite, en raison des hypothèses faites au début, écrire

$$h = i + 2, \quad \alpha = \gamma_1 R(z),$$

R désignant une fonction rationnelle; et l'on aura simplement

$$\beta_0 = \gamma_1 R(z) \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^{i+2} + \gamma_0 \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^{i+1}.$$

Il est d'ailleurs manifeste qu'on peut supprimer dans l'expression de φ le facteur $\left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^i$, ou encore faire $i = 0$; nous aurons donc, en résumé,

$$(6) \quad \varphi = \gamma_1 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \gamma_1 R(z) \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + \gamma_0 \frac{\partial z}{\partial y},$$

γ_1 et γ_0 ne dépendant plus de $\frac{\partial z}{\partial y}$. Cette nouvelle expression conduit aux relations

$$(7) \quad \begin{cases} X(\gamma_1) - 2\gamma_1 \frac{\partial A}{\partial y} = M\gamma_1, \\ X(\gamma_0) - \gamma_0 \frac{\partial A}{\partial y} - \gamma_1 \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = M\gamma_0. \end{cases}$$

On remarquera tout de suite que ces équations (7) permettent de supprimer dans φ le terme en $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$ et d'écrire

$$\varphi = \gamma_1 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \gamma_0 \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Nous ajouterons encore qu'en changeant z en $z + a$, a désignant une constante arbitraire, on reconnaît qu'on peut supposer γ_1, γ_0 indépendants de z , les expressions $\gamma_1(x, y, a), \gamma_0(x, y, a)$ satisfaisant aux mêmes relations.

Enfin, si l'on pose

$$-\frac{\gamma_0}{\gamma_1} = J,$$

la fonction J rationnelle en x, y devra vérifier la seule relation

$$(a'') \quad X(J) + J \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = 0,$$

et la solution z sera définie par l'équation

$$(a') \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - J \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

jointe à l'équation (a).

Comme dans le cas déjà examiné, l'équation en J ne peut admettre qu'une seule solution rationnelle.

Si l'on avait, en effet, pour une autre solution z_1 de (a),

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2} - J_1 \frac{\partial z_1}{\partial y} = 0,$$

on en pourrait conclure

$$\frac{\frac{d^2 z_1}{dz^2}}{\frac{dz_1}{dz}} \frac{\partial z}{\partial y} = J_1 - J,$$

c'est-à-dire une relation de la forme

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = J_1 - J$$

compatible avec l'équation (a).

En résumé, la transcendante z est définie par les équations (a) et (a')

$$(a') \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = J \frac{\partial z}{\partial y},$$

aux transformations près du groupe

$$z = au + b,$$

a, b désignant des constantes, on l'obtient par les quadratures superposées suivantes :

$$z = \int e^{\int J(x,y) dy - \left(\Lambda J + \frac{\partial \Lambda}{\partial y} \right) dx} (dy - \Lambda dx),$$

où J désigne une solution rationnelle de l'équation

$$(a'') \quad X(J) + J \frac{\partial \Lambda}{\partial y} + \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial y^2} = 0.$$

Remarques. — 1° L'équation (a') ne garde pas sa forme réduite en $\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ quand on y remplace z par une fonction rationnelle arbitraire d'un nouvel élément u , qui sera naturellement aussi solution de l'équation (a).

L'équation transformée s'écrit en effet, en posant

$$z = R(u),$$

sous la forme

$$R' \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + R'' \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + JR' \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

où l'on constate l'apparition du terme $\frac{R''}{R'} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$ qui est précisément celui que nous avons supprimé plus haut dans l'équation (6).

2° Nous avons, dans la recherche de l'équation (a'), écarté le cas où l'on a

$$\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial y^2} = 0.$$

Il est manifeste qu'on peut alors joindre à l'équation (a) la relation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

en vertu de l'équation (a₂).

Si l'on pose

$$z = \alpha y + \beta, \quad \Lambda = ay + b,$$

les deux fonctions de x seul, α et β sont données par le système linéaire

$$\frac{d\alpha}{dx} + \alpha a = 0, \quad \frac{d\beta}{dx} + \alpha b = 0.$$

La première α est définie à un facteur près et la seconde peut encore renfermer une constante additive.

C'est aussi le résultat qu'on obtiendrait en partant de la solution $J = 0$ de l'équation (a''); on retrouve ainsi la théorie de l'équation différentielle linéaire du premier ordre.

§ 4. δ. Étudions enfin ce qui se passe lorsque l'équation rationnelle (a'), compatible avec l'équation (a) et d'ordre minimum par rapport aux dérivées de z est du troisième ordre.

Nous l'écrivons

$$(a') \quad \varphi = \sum_{k=0}^n \beta_k \left(\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} \right)^k = 0,$$

en supposant, comme toujours, le degré n le plus petit possible. On aura encore manifestement une identité

$$(1) \quad X(\varphi) = M\varphi,$$

où M ne peut renfermer $\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$, et l'examen des coefficients des deux plus hautes puissances de $\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$ dans les deux membres nous donnera

$$(2) \quad \begin{cases} X(\beta_n) - 3n \frac{\partial A}{\partial y} \beta_n = M\beta_n, \\ X(\beta_{n-1}) - 3(n-1) \frac{\partial A}{\partial y} \beta_{n-1} - n\beta_n \left(3 \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial^3 A}{\partial y^3} \frac{\partial z}{\partial y} \right) = M\beta_{n-1}. \end{cases}$$

On voit que si l'on écarte le cas où $\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}$ est nul, le coefficient de β_{n-1} doit être différent de zéro.

Considérons alors la combinaison

$$\Omega = n\beta_n \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} + \beta_{n-1};$$

les deux équations (2) donneront

$$X(\Omega) = \left[M + 3(n-1) \frac{\partial A}{\partial y} \right] \Omega,$$

d'où l'on peut conclure que *le polynôme φ doit être du premier degré en $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.*

Posons donc

$$(3) \quad \varphi = \beta_1 \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} + \beta_0,$$

ce qui entraîne

$$(4) \quad \begin{cases} X(\beta_1) - 3 \frac{\partial A}{\partial y} \beta_1 = M\beta_1, \\ X(\beta_0) - \beta_1 \left(3 \frac{\partial A}{\partial y^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial^3 A}{\partial y^3} \frac{\partial z}{\partial y} \right) = M\beta_0; \end{cases}$$

nous en déduirons d'abord que β_1 ne peut renfermer $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ et ensuite qu'on peut

poser

$$\beta_1 = \gamma_1 \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^i,$$

γ_1 ne dépendant plus de $\frac{\partial z}{\partial y}$, ce qui nous permet d'affirmer que \mathbf{M} dépend de x , y , z seuls et conduit au nouveau système

$$(5) \quad \begin{cases} \mathbf{X}(\gamma_1) - (i+3) \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \gamma_1 = \mathbf{M} \gamma_1, \\ \mathbf{X}(\beta_0) - \gamma_1 \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^i \left(3 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial^3 \mathbf{A}}{\partial y^3} \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \mathbf{M} \beta_0. \end{cases}$$

Le polynome β_0 renfermera nécessairement $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; soit

$$\beta_0 = \alpha_0 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)^h + \alpha_1 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)^{h-1} + \dots,$$

où nous supposons d'abord h supérieur à 2. En égalant les coefficients de $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)^h$ et $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)^{h-1}$ dans les deux membres de la deuxième équation (5), nous obtenons

$$(6) \quad \begin{cases} \mathbf{X}(\alpha_0) - 2h\alpha_0 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} = \mathbf{M} \alpha_0, \\ \mathbf{X}(\alpha_1) - 2(h-1)\alpha_1 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} - h\alpha_0 \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y^2} = \mathbf{M} \alpha_1, \end{cases}$$

et l'on en peut conclure d'abord que α_1 n'est pas nul si h est supérieur à 2. Si nous posons ensuite

$$\begin{aligned} h\alpha_0 \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^{2h-2} &= a_0, \\ \alpha_1 \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^{2h-3} &= a_1, \end{aligned}$$

les équations (6) pourront s'écrire

$$(7) \quad \begin{cases} \mathbf{X}(a_0) - 2a_0 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} = \mathbf{M} a_0, \\ \mathbf{X}(a_1) - a_1 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} - a_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y^2} = \mathbf{M} a_1, \end{cases}$$

forme sous laquelle on reconnaît qu'elles expriment l'identité

$$(8) \quad \mathbf{X}(\Omega) = \mathbf{M} \Omega,$$

avec

$$\Omega = a_0 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + a_1 \frac{\partial z}{\partial y}.$$

On parvient donc à une relation rationnelle du second ordre compatible avec l'équation (α).

Nous devons, par suite, supposer $h \leq 2$. Les équations déduites du système (5) sont alors

$$(9) \quad \begin{cases} X(\alpha_0) - 4\alpha_0 \frac{\partial A}{\partial y} = M\alpha_0, \\ X(\alpha_1) - 2\alpha_1 \frac{\partial A}{\partial y} - 2\alpha_0 \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - 3\gamma_1 \left(\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\right)^i = M\alpha_1, \\ X(\alpha_2) - \alpha_1 \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - \gamma_1 \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{i+1} = M\alpha_2. \end{cases}$$

La comparaison des deux premières équations des groupes (5) et (9) montre immédiatement qu'en posant

$$\Omega = \frac{\gamma_1 \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{i+3}}{\alpha_0 \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^i},$$

on a l'identité

$$X(\Omega) = 0;$$

il en résulte donc

$$\alpha_0 = \gamma_1 \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{i-1} R(z),$$

R désignant une fonction rationnelle.

Supposons $\alpha_1 \neq 0$ et posons

$$\begin{aligned} \alpha_1 \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 &= a_1, \\ \gamma_1 [2R(z) + 3] \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{i+1} &= g_1; \end{aligned}$$

les expressions a_1 et g_1 vérifient les relations

$$\begin{aligned} X(g_1) - 2g_1 \frac{\partial A}{\partial y} &= Mg_1, \\ X(a_1) - g_1 \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} &= Ma_1, \end{aligned}$$

déduites des équations correspondantes de (5) et (9).

Mais ces relations expriment simplement l'identité

$$X(\Omega) = M\Omega,$$

où l'on a

$$\Omega = g_1 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + a_1;$$

elles donnent par conséquent une relation rationnelle du second ordre compatible

avec l'équation (a). Il faudra donc supposer $\alpha_1 = 0$ et, dans cette hypothèse, la seconde des relations (9) donnera

$$2R(z) + 3 = 0,$$

qui détermine $R(z)$.

La dernière relation du groupe (9) se réduit alors à

$$X(\alpha_2) - \gamma_1 \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^{i+1} \frac{\partial^3 A}{\partial y^3} = M\alpha_2.$$

Le polynôme en $\frac{\partial z}{\partial y}$ désigné par α_2 peut-il renfermer des termes d'ordre h , lorsque $h \neq (i+1)$? Si α représente le coefficient d'un tel terme, on a immédiatement

$$X(\alpha) - h\alpha \frac{\partial A}{\partial y} = M\alpha,$$

et l'on conclut de la première équation (5) qu'on a nécessairement

$$(10) \quad h = i + 3, \quad \alpha = \gamma_1 R_1(z),$$

en désignant par R_1 une fonction rationnelle.

Enfin le coefficient de $\left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^{i+1}$ dans α_2 étant désigné par γ_2 , on a pour déterminer ce coefficient l'équation

$$(11) \quad X(\gamma_2) - (i+1)\gamma_2 \frac{\partial A}{\partial y} - \gamma_1 \frac{\partial^3 A}{\partial y^3} = M\gamma_2.$$

En résumé, nous avons donné au polynôme φ la forme suivante :

$$\varphi = \gamma_1 \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^{i-1} \left[\frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} - \frac{3}{2} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)^2 \right] + \gamma_1 R_1(z) \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^{i+3} + \gamma_2 \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^{i+1},$$

et il est clair que, si l'on suppose φ irréductible, il faut poser $i = 1$. On peut encore regarder γ_1 , et par suite γ_2 , comme débarrassé du facteur dépendant de z seul qu'il peut renfermer, et écrire, après avoir posé

$$(12) \quad I = -\frac{\gamma_2}{\gamma_1},$$

le polynôme φ sous la forme

$$(13) \quad \varphi = \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} - \frac{3}{2} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)^2 - I \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + R_1(z) \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^4,$$

en désignant par I une fonction rationnelle de x et y seuls.

L'examen de l'équation

$$X(\varphi) = M\varphi$$

montre d'ailleurs qu'on peut supprimer dans φ le terme $R_1(z) \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^4$; nous écrivons donc la relation nouvelle sous la forme

$$(a') \quad \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} - \frac{3}{2} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)^2 - \mathbf{I} \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 0,$$

la fonction rationnelle \mathbf{I} devant vérifier l'unique équation

$$(a'') \quad \mathbf{X}(\mathbf{I}) + 2\mathbf{I} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} + \frac{\partial^3 \mathbf{A}}{\partial y^3} = 0,$$

§ 5. On voit sans difficulté que cette équation (a'') ne peut posséder qu'une solution rationnelle \mathbf{I} : si l'on avait en effet, pour une autre solution z_1 , de l'équation (a) ,

$$\frac{\partial z_1}{\partial y} \frac{\partial^3 z_1}{\partial y^3} - \frac{3}{2} \left(\frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2}\right)^2 - \mathbf{I}_1 \left(\frac{\partial z_1}{\partial y}\right)^2 = 0,$$

\mathbf{I}_1 étant rationnel en x et y , on pourrait en conclure

$$\left[\frac{dz_1}{dz} \frac{d^3 z_1}{dz^3} - \frac{3}{2} \left(\frac{d^2 z_1}{dz^2}\right)^2 \right] \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{dz}\right)^2 (\mathbf{I} - \mathbf{I}_1) = 0,$$

c'est-à-dire une relation de la forme

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2 + \mathbf{I} - \mathbf{I}_1 = 0,$$

compatible avec l'équation (a) .

Suivant une notation introduite par Cayley, nous poserons

$$\{z, y\} = \frac{\frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} - \frac{3}{2} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)^2}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2},$$

et nous rappellerons que l'égalité

$$\{z, y\} = \{z_1, y\}$$

exprime simplement qu'on a entre z et z_1 , une relation

$$z = \frac{az_1 + b}{cz_1 + d},$$

où a, b, c, d sont des quantités indépendantes de y ; la transcendante z est alors

définie par les équations

$$(a) \quad X(z) = \frac{\partial z}{\partial x} + A \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

$$(a') \quad \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} - \frac{3}{2} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)^2 - I \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 = 0,$$

aux transformations près du groupe projectif général

$$z = \frac{au + b}{cu + d},$$

où a, b, c, d sont des constantes.

Si l'on pose

$$J = \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}{\frac{\partial z}{\partial y}},$$

on pourra regarder z comme déterminé par les opérations *théoriques* suivantes :

Détermination de la fonction J de x et y qui satisfait aux équations (1)

$$X(J) + J \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial^3 A}{\partial y^3} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial y} = I + \frac{1}{2} J^2,$$

où I désigne la solution rationnelle de l'équation

$$(a'') \quad X(I) + 2I \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial^3 A}{\partial y^3} = 0;$$

intégration du système linéaire

$$\frac{\partial z}{\partial x} + A \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - J \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

qui exige, comme on l'a vu plus haut, deux quadratures superposées.

Remarques. — 1° La forme réduite adoptée pour premier membre de l'équation (a') ne se conserve pas lorsqu'on remplace z par une fonction rationnelle d'un nouvel élément u qui sera naturellement aussi une solution de (a). En posant

$$z = R(u),$$

(1) Cf., pour la généralisation de l'équation de Riccati ainsi obtenue, DARBOUX, *Leçons sur la théorie des surfaces*, Livre I, Chap. VI.

on obtient pour équation transformée

$$R'^2 \{ R, u \} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^4 + [\{ u, y \} - 1] \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 R'^2 = 0,$$

où l'on reconnaît un terme nouveau en $\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^4$.

C'est précisément ce terme que nous avons supprimé plus haut pour réduire à sa forme la plus simple le polynôme φ .

2° Dans le cours de cette analyse, nous n'avons écarté que le cas où l'on a

$$\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = 0;$$

il n'y a pas lieu de s'en préoccuper ici puisqu'il existe alors une solution rationnelle pour l'équation en J.

§ 6. Nous signalerons cependant le cas remarquable où l'on a

$$\frac{\partial^3 A}{\partial y^3} = 0;$$

l'équation résolvante en I admet la solution rationnelle évidente $I = 0$.

Lorsque les coefficients des puissances de y dans A sont des fonctions rationnelles arbitraires, elle n'en admet pas d'autres : on l'établirait aisément.

Suivant une remarque faite plus haut, l'équation

$$\{ z, y \} = 0$$

permet de poser

$$z = \frac{a + by}{c + dy},$$

a, b, c, d étant des fonctions de la seule variable x .

La détermination de ces fonctions conduit à la théorie classique de l'équation de Riccati. Voici sous quelle forme elle se présente au point de vue que nous avons adopté :

Portons dans l'équation

$$(1) \quad \frac{\partial z}{\partial x} + A \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

l'expression trouvée pour z ; en remarquant qu'on peut toujours supposer

$$(2) \quad ad - bc = 1,$$

nous trouverons pour déterminer a, b, c, d les relations

$$(3) \quad db' - bd' = \alpha,$$

$$(4) \quad da' - ad' + cb' - bc' = 2\beta,$$

$$(5) \quad ca' - ac' = \gamma,$$

si l'on a posé

$$(6) \quad \Lambda = \alpha y^2 + 2\beta y + \gamma.$$

Il est aisé de voir comment les équations (2), (3), (4), (5) détermineront les inconnues a, b, c, d : les équations qui définissent z admettront évidemment comme solution la plus générale

$$z_1 = \frac{\lambda z + \mu}{\nu z + \rho},$$

λ, μ, ν, ρ désignant des constantes qu'on peut assujettir à vérifier la relation

$$\lambda\rho - \mu\nu = 1;$$

il en résulte que les équations (2), ..., (5) admettront également les solutions

$$\begin{aligned} a_1 &= \lambda a + \mu c, & c_1 &= \nu a + \rho c, \\ b_1 &= \lambda b + \mu d, & d_1 &= \nu b + \rho d. \end{aligned}$$

Les fonctions a et c sont donc définies aux transformations près du groupe linéaire et homogène spécial à deux variables, et il en est de même des fonctions b et d ; les transformations subies par les deux couples sont d'ailleurs les mêmes, ce qui fait prévoir qu'il suffira de déterminer l'un d'eux.

Nous savons aussi qu'on pourra déduire des équations (2), ..., (5) un système *rationnel* qui définira le couple (a, c) par exemple.

En différentiant l'équation (2) nous obtiendrons

$$ad' + da' - bc' - cb' = 0,$$

ce qui permet d'écrire l'équation (4) sous la forme

$$(7) \quad da' - bc' = \beta;$$

les relations (2) et (7) donnent alors, en supposant $\gamma = 0$,

$$(8) \quad d = \frac{c\beta - c'}{\gamma}, \quad b = \frac{a\beta - a'}{\gamma},$$

ce qui montre bien qu'il suffira de déterminer a et c . Portons ces expressions de d

et b dans l'équation (3), nous aurons pour déterminer a et c le système

$$\begin{aligned} (5) \quad & ca' - ac' = \gamma, \\ (9) \quad & c'a'' - a'c'' = \alpha\gamma^2 - \beta^2\gamma + \beta\gamma' - \gamma\beta'; \end{aligned}$$

la première de ces relations donne d'ailleurs

$$(10) \quad ca'' - ac'' = \gamma',$$

et l'on déduit immédiatement des équations (9) et (10)

$$(11) \quad \begin{cases} a''\gamma = a'\gamma' - a\delta, \\ c''\gamma = c'\gamma' - c\delta, \end{cases}$$

en posant

$$(12) \quad \delta = \alpha\gamma^2 - \beta^2\gamma + \beta\gamma' - \gamma\beta'.$$

Les fonctions a et c sont donc deux solutions de l'équation linéaire et homogène du second ordre

$$\frac{d^2\theta}{dx^2}\gamma = \frac{d\theta}{dx}\gamma' - \theta\delta,$$

dont le groupe de rationalité, au sens adopté par M. Picard, est le groupe linéaire spécial.

§ 7. ϵ . On pourrait penser *a priori* que la méthode appliquée à la recherche des types d'équations telles que (a'), compatibles avec l'équation (a), conduira à examiner des types d'ordre de plus en plus grand par rapport aux dérivées de z . Il n'en est rien : nous avons dès maintenant formé tous les types distincts.

En d'autres termes, s'il existe une relation rationnelle (a') entre les éléments $x, y, z, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^p z}{\partial y^p}$, compatible avec l'équation

$$(a) \quad \frac{\partial z}{\partial x} + \Lambda \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

sans en être une conséquence nécessaire, il existera aussi une relation de même nature dont l'ordre est au plus égal à 3.

Pour simplifier l'écriture, nous représenterons par z_1, z_2, \dots , les dérivées successives $\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \dots$; nous rappellerons aussi l'identité

$$X(z_p) + p \frac{\partial \Lambda}{\partial y} z_p + \frac{p(p-1)}{1.2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial y^2} z_{p-1} + \dots + \frac{\partial^p \Lambda}{\partial y^p} z_1 = 0.$$

Supposons qu'il existe une relation rationnelle *d'ordre* p par rapport aux dérivées de z , compatible avec (α) sans en être une conséquence nécessaire, le même fait n'ayant pas lieu pour des valeurs de l'ordre inférieures à p : nous pourrons l'écrire, en supposant le degré n le plus petit possible,

$$\varphi = \sum_{i=0}^n \alpha_i z_p^i = 0,$$

et l'on aura l'identité

$$X(\varphi) = M\varphi,$$

qui s'écrit, lorsqu'on la développe,

$$\sum_{i=0}^n X(\alpha_i) z_p^i - \left(\sum_{i=0}^{i=n} i \alpha_i z_p^{i-1} \right) \left(p \frac{\partial \Lambda}{\partial y} z_p + \frac{p(p-1)}{1.2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial y^2} z_{p-1} + \dots \right) = M \sum_{i=0}^{i=n} \alpha_i z_p^i.$$

Dans l'hypothèse $n \geq 2$, on aura, en observant que M ne peut dépendre de z_p ,

$$X(\alpha_n) - n p \alpha_n \frac{\partial \Lambda}{\partial y} = M \alpha_n,$$

$$X(\alpha_{n-1}) - (n-1) p \alpha_{n-1} \frac{\partial \Lambda}{\partial y} - n \alpha_n \left(\frac{p(p-1)}{1.2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial y^2} z_{p-1} + \dots \right) = M \alpha_{n-1},$$

d'où l'on conclut d'abord, si $\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial y^2} \neq 0$, que α_{n-1} ne peut s'annuler.

Il suffit de poser

$$\Omega = n \alpha_n z_p + \alpha_{n-1},$$

pour reconnaître qu'on a identiquement

$$X(\Omega) = \left[M + (n-1)p \frac{\partial \Lambda}{\partial y} \right] \Omega.$$

Le polynôme φ , de degré minimum en z_p , est donc du premier degré.

Soit alors

$$(1) \quad \varphi = \alpha_1 z_p + \alpha_0;$$

nous devons avoir

$$(2) \quad \begin{cases} X(\alpha_1) - p \alpha_1 \frac{\partial \Lambda}{\partial y} = M \alpha_1, \\ X(\alpha_0) - \alpha_1 \left[\frac{p(p-1)}{1.2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial y^2} z_{p-1} + \dots \right] = M \alpha_0. \end{cases}$$

La première de ces relations exige qu'on ait

$$\alpha_1 = \gamma_1(x, y) R(z) z_p^i,$$

en désignant par γ_1 et R des fonctions rationnelles de leurs arguments. Nous supposons tout de suite qu'on a divisé le polynôme φ par le coefficient α_1 de z_p et multiplié le quotient par z_1^{-p} , de façon à pouvoir écrire

$$\varphi = z_1^{-p} z_p + \psi(x, y, z, z_1, \dots, z_{p-1}),$$

où ψ est un polynôme *entier* en z_2, \dots, z_{p-1} , *rationnel* en x, y, z, z_1 .

On a, dans cette hypothèse,

$$\mathbf{X}(\varphi) = p z_1^{-p} z_p \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} - z_1^{-p} \left(p \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} z_p + \frac{p(p-1)}{1.2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y^2} z_{p-1} + \dots \right) + \mathbf{X}(\psi),$$

et comme le second membre, qui doit être divisible par φ , ne renferme plus z_p , il est identiquement nul.

Le polynôme φ en z_2, \dots, z_p , qui a la forme

$$(3) \quad \varphi = z_1^{-p} z_p + \psi(x, y, z, z_1, \dots, z_{p-1}),$$

satisfait à l'identité

$$(4) \quad \mathbf{X}(\varphi) = 0.$$

Le polynôme ψ doit donc vérifier la relation

$$\mathbf{X}(\psi) = z_1^{-p} \left(\frac{p(p-1)}{1.2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y^2} z_{p-1} + \dots \right);$$

proposons-nous de le déterminer.

Posons, en mettant z_{p-1} en évidence,

$$\psi = a_0 z_{p-1}^n + a_1 z_{p-1}^{n-1} + \dots + a_n;$$

nous devons avoir l'identité

$$\begin{aligned} & \mathbf{X}(a_0) z_{p-1}^n + \mathbf{X}(a_1) z_{p-1}^{n-1} + \dots + \mathbf{X}(a_n) \\ & - [n a_0 z_{p-1}^{n-1} + (n-1) a_1 z_{p-1}^{n-2} + \dots] \\ & \times \left[\frac{(p-1)}{1} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} z_{p-1} + \dots \right] = z_1^{-p} \left[\frac{p(p-1)}{1.2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y^2} z_{p-1} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Dans l'hypothèse $n > 2$, elle donne d'abord, en égalant les coefficients des plus hautes puissances de z_{p-1} dans les deux membres,

$$\mathbf{X}(a_0) - n a_0 \frac{(p-1)}{1} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} = 0,$$

$$\mathbf{X}(a_1) - n a_0 \left[\frac{(p-1)(p-2)}{1.2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y^2} z_{p-2} + \dots \right] - (n-1)(p-1) \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} a_1 = 0.$$

On conclut de la dernière de ces relations, lorsque $\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y^2} \neq 0$, que a_1 ne peut être nul.

La première donne immédiatement

$$a_0 z_1^{n(p-1)} = c_0(z),$$

c_0 étant rationnel.

Si l'on pose ensuite

$$\mathbf{A}_0 = \frac{nc_0(z)}{z_1^{p-1}} = na_0 z_1^{(n-1)(p-1)},$$

$$\mathbf{A}_1 = a_1 z_1^{(n-1)(p-1)},$$

elles s'écriront toutes deux sous la nouvelle forme

$$\mathbf{X}(\mathbf{A}_0) - \frac{p-1}{1} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \mathbf{A}_0 = 0,$$

$$\mathbf{X}(\mathbf{A}_1) - \mathbf{A}_0 \left[\frac{(p-1)(p-2)}{1.2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y^2} z_{p-2} + \dots \right] = 0,$$

qui exprime manifestement qu'on a

$$\mathbf{X}(\mathbf{A}_0 z_{p-1} + \mathbf{A}_1) = 0.$$

La relation, non identique, d'ordre $(p-1)$

$$\mathbf{A}_0 z_{p-1} + \mathbf{A}_1 = \mathbf{R}(z)$$

serait donc compatible avec l'équation (a).

Nous devons par conséquent supposer $n \leq 2$.

Supposons $n = 2$, et soit

$$\psi = a_0 z_{p-1}^2 + a_1 z_{p-1} + a_2;$$

on aura

$$\mathbf{X}(a_0) - 2(p-1)a_0 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} = 0,$$

$$\mathbf{X}(a_1) - (p-1)a_1 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} - 2a_0 \left[\frac{(p-1)(p-2)}{1.2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y^2} z_{p-2} + \dots \right] = z_1^{-p} \frac{p(p-1)}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y^2},$$

$$\mathbf{X}(a_2) - a_1 \left[\frac{(p-1)(p-2)}{1.2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y^2} z_{p-2} + \dots \right] = z_1^{-p} \left[\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} \frac{\partial^3 \mathbf{A}}{\partial y^3} z_{p-2} + \dots \right].$$

La première de ces relations donne

$$\mathbf{X}(a_0 z_1^{2(p-1)}) = 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad a_0 z_1^{2(p-1)} = c_0(z).$$

Si l'on suppose $a_1 \neq 0$, on aura, en multipliant les deux membres de la deuxième

par z_1^{-p} ,

$$X(a_1 z_1^{p-1}) - 2 a_0 z_1^{p-1} \left[\frac{(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2} \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} z_{p-2} + \dots \right] = \frac{p(p-1)}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} z_1^{-1}.$$

Comme on a, d'autre part,

$$X\left(\frac{z_2}{z_1^2}\right) = - \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} z_1^{-1},$$

il en résulte qu'en posant

$$A_0 = \frac{2c_0(z)}{z_1^{p-1}} = 2 a_0 z_1^{(p-1)},$$

$$A_1 = a_1 z_1^{(p-1)} + \frac{p(p-1)}{2} \frac{z_2}{z_1^2},$$

on a l'identité

$$X(A_0 z_{p-1} + A_1) = 0,$$

d'où l'on pourrait conclure une relation rationnelle non identique et d'ordre $(p-1)$, compatible avec l'équation (a) :

$$A_0 z_{p-1} + A_1 = R(z).$$

Nous devons donc supposer $a_1 = 0$. Dans ce cas, a_0 et a_2 devront vérifier les relations

$$X(a_0) - 2(p-1)a_0 \frac{\partial A}{\partial y} = 0,$$

$$- 2a_0 \left[\frac{(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2} \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} z_{p-2} + \dots \right] = z_1^{-p} \frac{p(p-1)}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial y^2},$$

$$X(a_2) = z_1^{-p} \left[\frac{p(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{\partial^3 A}{\partial y^3} z_{p-2} + \dots \right].$$

La première donne, comme plus haut,

$$a_0 z_1^{2(p-1)} = c_0(z).$$

Pour que cette valeur de a_0 puisse vérifier la seconde, il faut alors manifestement, si $\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \neq 0$, qu'on ait $p-2=1$, c'est-à-dire $p=3$ (puisque le premier membre contient z_{p-2} qui ne figure pas dans le second, si $p > 3$) (1).

Ainsi le cas $n=2$ conduit aussi à une impossibilité.

Envisageons maintenant l'hypothèse $n=1$ et soit

$$\psi = a_0 z_{p-1} + a_1,$$

) L'hypothèse $p=3$ redonnerait immédiatement les résultats obtenus dans ce cas :
 $c_0(z) = -\frac{3}{2}, \dots$

on aura immédiatement pour a_0 l'équation

$$\mathbf{X}(a_0) - (p-1) \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} a_0 = z_1^{-p} \frac{p(p-1)}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y^2},$$

d'où l'on conclut

$$\mathbf{X}(a_0 z_1^{p-1}) = \frac{1}{z_1} \frac{p(p-1)}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y^2},$$

et ensuite

$$a_0 z_1^{p-1} + \frac{p(p-1)}{2} \frac{z_2}{z_1^2} = c_0(z).$$

Ainsi, le polynome φ , d'ordre différentiel p , qui vérifie la relation

$$\mathbf{X}(\varphi) = 0,$$

est de la forme

$$z_1^{-p} \left\{ z_p + \left[c_0(z) z_1 - \frac{p(p-1)}{2} \frac{z_2}{z_1} \right] z_{p-1} \right\} + a_1,$$

où a_1 est un polynome en z_{p-2}, \dots, z_2 rationnel en x, y, z, z_1 .

Le dénominateur ne dépend de z_1 que par un facteur z_1^p .

§ 8. Il est clair que si nous faisons, dans l'expression de φ ,

$$z = \omega(u),$$

en désignant par ω le signe d'une fonction rationnelle *arbitraire*, le nouveau polynome en u_2, \dots, u_p à coefficients rationnels en x, y, ω, ω' , entiers en $\omega'', \omega''', \dots, \omega^{(p)}$ ainsi obtenu vérifiera encore l'identité

$$\mathbf{X}(\varphi) = 0.$$

Effectuons la transformation dans les termes déjà connus de φ

$$\begin{aligned} z_1 &= \omega' u_1, \\ z_2 &= \omega' u_2 + \omega'' u_1^2, \\ &\dots\dots\dots, \\ z_{p-1} &= \omega' u_{p-1} + \omega'' \theta + \dots, \\ z_p &= \omega' u_p + \omega'' \left(\frac{d\theta}{dy} + u_1 u_{p-1} \right) + \dots; \end{aligned}$$

nous aurons

$$\begin{aligned} \varphi(u, x, y) &= \omega'^{-p} u_1^{-p} \left\{ \omega' u_p + \omega'' \left(\frac{d\theta}{dy} + u_1 u_{p-1} \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. + (\omega' u_{p-1} + \omega'' + \dots) \left[c_0(\omega) \omega' u_1 - \frac{p(p-1)}{2} \left(\frac{u_2}{u_1} + \frac{\omega''}{\omega'} u_0 \right) \right] \right\} \\ &\quad + a_1(u, x, y), \end{aligned}$$

ou encore, en mettant les coefficients de ω'^{-p+1} et de $\omega'^{-p}\omega''$ en évidence,

$$\varphi(u, x, y) = \omega'^{-p+1} \left\{ u_1^p \left[u_p - \frac{p(p-1)}{2} \frac{u_2}{u_1} u_{p-1} \right] + \dots \right\} \\ + \omega'^{-p} \omega'' \left\{ u_1^{-p} \left[\frac{d\theta}{dy} + u_1 u_{p-1} - \frac{p(p-1)}{2} \left(\frac{u_2}{u_1} \theta + u_1 u_{p-1} \right) \right] + \dots \right\} + \dots$$

Les termes non écrits dans ces coefficients sont au plus d'ordre $(p-2)$ par rapport aux dérivées de u .

D'autre part, θ , coefficient de ω'' dans z_{p-1}

$$z_{p-1} = \omega' u_{p-1} + \omega'' \theta,$$

ne dépend de u_{p-2} , à partir de $p=3$, que par le seul terme $(p-1)u_1 u_{p-2}$. On en conclut que dans le coefficient de $\omega'^{-p}\omega''$ le terme en u_{p-1} a pour coefficient

$$1 + p - 1 - \frac{p(p-1)}{2} = -\frac{p(p-3)}{2};$$

il ne s'annule donc pas pour $p > 3$.

Ainsi les coefficients de ω'^{p+1} et de $\omega'^{-p}\omega''$ sont des polynômes en u_2, u_3, \dots qui renferment effectivement le premier u_p , le second u_{p-1} comme dérivée d'ordre le plus élevé; désignons-les respectivement par Φ_p et Φ_{p-1} , il est clair que l'identité

$$X(\varphi) = 0,$$

qui a lieu quelle que soit la fonction rationnelle arbitraire ω , entraînera

$$X(\Phi_p) = 0 \quad \text{et} \quad X(\Phi_{p-1}) = 0.$$

Cette dernière exprime qu'il existe une relation, non identique, d'ordre $(p-1)$:

$$\Phi_{p-1} = R(u),$$

compatible, quelle que soit la fonction rationnelle $R(u)$, avec la relation

$$(a) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \Lambda \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

ce qui est contradictoire avec l'hypothèse.

Il n'y a pas lieu d'examiner le cas où le polynôme ψ , défini par

$$\varphi = z_1^{-p} z_p + \psi,$$

ne dépendrait pas de z_{p-1} , puisque $X(\psi)$ doit en dépendre.

En résumé nous avons donc établi, par une *analyse directe*, un peu longue mais

très simple au fond, que les seuls cas de réduction d'une équation

$$(a) \quad \frac{\partial z}{\partial x} + A(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

où A est rationnel, sont ceux où il existe une équation rationnelle compatible avec (a) appartenant à l'un des types suivants :

$$\begin{aligned} (\alpha) \quad & z = R(x, y), \\ (\beta) \quad & \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^n = K(x, y) \quad (n \text{ entier}), \\ (\gamma) \quad & \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}{\frac{\partial z}{\partial y}} = J(x, y), \\ (\delta) \quad & \frac{\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}}{\frac{\partial z}{\partial y}} - \frac{3}{2} \left(\frac{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}{\frac{\partial z}{\partial y}}\right)^2 = I(x, y), \end{aligned}$$

et précisé dans chacun de ces cas la nature de la transcendante z .

Il est clair que toutes ces conclusions s'étendent, *mutatis mutandis*, au cas où $A(x, y)$ au lieu d'être rationnel en x, y appartient à un domaine de rationalité $[\mathfrak{R}]$ bien défini, qui peut comprendre des fonctions algébriques ou des fonctions transcendentes u de x et y définies par des relations algébriques irréductibles entre $x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots$

Nous reviendrons d'ailleurs sur ce point pour préciser ce qu'on doit entendre par *adjonction* de transcendentes au domaine de rationalité.

II. — MÉTHODE RAPIDE CONDUISANT AUX RÉSULTATS PRÉCÉDENTS.

§ 9. Nous indiquerons maintenant une seconde méthode qui permet aussi de parvenir directement aux résultats qui viennent d'être obtenus.

Soit

$$(a') \quad \varphi(x, y, z, z_1, \dots, z_p) = 0$$

l'équation rationnelle d'ordre minimum par rapport aux dérivées de z et de degré minimum en z_p , compatible avec l'équation

$$(a) \quad \frac{\partial z}{\partial x} + A \frac{\partial z}{\partial y} = 0;$$

on a nécessairement l'identité en x, y

$$X(\varphi) = M\varphi.$$

En égalant dans les deux membres les coefficients de la plus haute puissance de z_p , on trouve une relation de la forme

$$X(\alpha_p) - kp \frac{\partial A}{\partial y} \alpha_p = M\alpha_p,$$

d'où l'on peut conclure que α_p a la forme

$$\Phi(x, y) R(z) z_1',$$

et ensuite que M ne dépend que des variables x, y .

Enfin, on établirait immédiatement, comme tout à l'heure, que pour $p > 1$, le polynôme φ est du premier degré en z_p .

Ces résultats acquis, on pourra supposer dans φ la fonction z remplacée par une constante arbitraire, sans cesser d'avoir une identité en $x, y, z, z_1, z_2, \dots, z_p$,

$$(1) \quad X(\varphi) = M\varphi.$$

Imaginons maintenant qu'on remplace, dans la fonction $\varphi(x, y, z_1, z_2, \dots, z_p)$, z par une expression de la forme $z + \varepsilon \zeta$ où ζ est une fonction rationnelle arbitraire de z ; cette opération remplace respectivement z_1, z_2, \dots par

$$z_1 + \varepsilon \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \quad z_2 + \varepsilon \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}, \quad \dots,$$

et il est clair qu'on a encore l'identité

$$(2) \quad X \left[\varphi \left(x, y, z_1 + \varepsilon \frac{\partial \zeta}{\partial y}, z_2 + \varepsilon \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}, \dots \right) \right] = M \varphi \left(x, y, z_1 + \varepsilon \frac{\partial \zeta}{\partial y}, z_2 + \varepsilon \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}, \dots \right).$$

On aura donc, en égalant les coefficients de ε dans les deux membres,

$$X \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z_1} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z_2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \dots \right) = M \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z_1} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z_2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \dots \right).$$

Nous remplacerons dans cette dernière identité les expressions $\frac{\partial \zeta}{\partial y}, \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}, \dots$ par leur valeur en fonction de z_1, z_2, \dots et des dérivées ζ', ζ'', \dots de ζ par rapport

à z , telle que la donnent les formules

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial y} &= \zeta' z_1, \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} &= \zeta' z_2 + \zeta'' z_1^2, \\ \frac{\partial^3 \zeta}{\partial y^3} &= \zeta' z_3 + 2\zeta'' z_1 z_2 + \zeta''' z_1^3, \\ \frac{\partial^4 \zeta}{\partial y^4} &= \zeta' z_4 + \zeta'' (4z_1 z_3 + 3z_2^2) + 6\zeta''' z_1^2 z_2 + \zeta^{IV} z_1^4, \\ \frac{\partial^5 \zeta}{\partial y^5} &= \zeta' z_5 + \zeta'' (5z_1 z_4 + 10z_2 z_3) + \zeta''' (10z_1^2 z_3 + 15z_1 z_2^2) + 10\zeta^{IV} z_1^3 z_2 + \zeta^V z_1^5, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

et nous aurons, en égalant dans les deux membres les coefficients des quantités $\zeta', \zeta'', \zeta''', \dots$ qui ne sont liées par aucune relation, les identités suivantes :

$$\begin{aligned} X[A_1(\varphi)] &= MA_1(\varphi), \\ X[A_2(\varphi)] &= MA_2(\varphi), \\ X[A_3(\varphi)] &= MA_3(\varphi), \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} A_1(\varphi) &= z_1 \frac{\partial \varphi}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial \varphi}{\partial z_2} + z_3 \frac{\partial \varphi}{\partial z_3} + \dots, \\ A_2(\varphi) &= z_1^2 \frac{\partial \varphi}{\partial z_2} + 3z_1 z_2 \frac{\partial \varphi}{\partial z_3} + (4z_1 z_3 + 3z_2^2) \frac{\partial \varphi}{\partial z_4} + (5z_1 z_4 + 10z_2 z_3) \frac{\partial \varphi}{\partial z_5} + \dots, \\ A_3(\varphi) &= z_1^3 \frac{\partial \varphi}{\partial z_3} + 6z_1^2 z_2 \frac{\partial \varphi}{\partial z_4} + (10z_1^2 z_3 + 15z_1 z_2^2) \frac{\partial \varphi}{\partial z_5} + \dots, \\ A_4(\varphi) &= z_1^4 \frac{\partial \varphi}{\partial z_4} + 10z_1^3 z_2 \frac{\partial \varphi}{\partial z_5} + \dots, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Avant de développer les conséquences de ces identités, signalons quelques relations importantes entre les expressions $A_i(\varphi)$.

En posant, suivant l'usage,

$$(A, B) = A(B) - B(A),$$

on a les identités

$$\begin{aligned} (A_1, A_2) &= A_2(\varphi), \\ (A_1, A_3) &= 2A_3(\varphi), \\ (A_1, A_4) &= 2A_4(\varphi), \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

dont la loi de formation est immédiate.

On trouve aisément de même

$$\begin{aligned} (A_2, A_3) &= 2A_4(\varphi), \\ (A_2, A_4) &= (2 + 3)A_5(\varphi) = 5A_5(\varphi), \\ (A_2, A_5) &= (2 + 3 + 4)A_6(\varphi) = 9A_6(\varphi), \\ (A_2, A_6) &= (2 + 3 + 4 + 5)A_7(\varphi) = 14A_7(\varphi), \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned} (A_3, A_4) &= 5A_6(\varphi), \\ (A_3, A_5) &= (5 + 9)A_7(\varphi) = 14A_7(\varphi), \\ (A_3, A_6) &= (5 + 9 + 14)A_8(\varphi) = 28A_8(\varphi), \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Nous remarquons maintenant que les équations

$$X[A_i(\varphi)] = MA_i(\varphi)$$

expriment que la relation

$$A_i(\varphi) = 0,$$

qui est d'ordre p par rapport aux dérivées de z , est compatible avec l'équation (a). Elle définit donc une solution z de cette dernière équation *qui peut être celle définie par l'équation*

$$\varphi = 0,$$

auquel cas on a identiquement $A_i(\varphi) = \lambda_i \varphi$, λ_i désignant une constante convenable, ou bien *qui peut être une simple constante* auquel cas on a, en divisant φ par un coefficient convenable dépendant de x et y seuls,

$$A_i(\varphi) = \lambda_i z_1^{k_i},$$

λ_i désignant encore une constante.

Or, si l'on examine les $A_i(\varphi)$, on reconnaît que *lorsque φ est du premier degré en z_p* , tous les $A_i(\varphi)$ pour lesquels $i \geq 2$ ne renferment plus z_p ; on aura donc toujours

$$A_i(\varphi) = \lambda_i z_1^{k_i} \quad (i \geq 2).$$

Proposons-nous de déterminer les constantes λ_i et les exposants k_i . Nous remarquerons d'abord que les identités

$$\begin{aligned} (A_2, A_3) &= 2A_4(\varphi), \\ (A_2, A_4) &= 5A_5(\varphi), \\ (A_2, A_5) &= 9A_6(\varphi), \\ (A_2, A_6) &= 14A_7(\varphi), \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

donnent immédiatement

$$A_4(\varphi) = A_5(\varphi) = A_6(\varphi) = \dots = 0.$$

On conclut sans difficulté de là que *le polynome φ ne peut renfermer de dérivées d'ordre supérieur à 3*. En effet, si le polynome φ est d'ordre p supérieur à 3, l'équation $A_p(\varphi) = 0$ donne simplement

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z_p} = 0,$$

ce qui est contradictoire avec l'hypothèse.

Il suffira donc d'examiner successivement les cas où φ est du premier, du deuxième ou du troisième ordre.

1° Supposons φ du premier ordre.

On aura l'identité

$$A_1(\varphi) = z_1 \frac{\partial \varphi}{\partial z_1} = \lambda_1 \varphi$$

ou l'identité

$$A_1(\varphi) = \lambda_1 z_1^{k_1}.$$

La première exprime que φ est homogène en z_1 ; la relation $\varphi = 0$ donnerait donc seulement $z = \text{const.}$; on doit, par suite, rejeter cette hypothèse.

L'hypothèse

$$A_1(\varphi) = \lambda_1 z_1^{k_1},$$

où λ_1 est nécessairement différent de zéro, peut s'écrire plus simplement

$$A_1(\varphi) = \lambda z_1^n,$$

en divisant φ par une constante. On aura donc

$$\varphi = z_1^n - K(x, y),$$

en désignant par $K(x, y)$ une fonction rationnelle des variables; la condition d'existence de cette fonction K est que l'équation *résolvante*

$$X(K) + n \frac{\partial A}{\partial y} K = 0$$

possède une solution rationnelle.

2° Examinons le cas où φ est du second ordre. Nous savons que φ est du premier degré en z_2 , nous pourrions tout de suite écrire le terme en z_2 sous la forme $z_1 z_2$ en multipliant φ s'il y a lieu par une puissance convenable de z_1 . En posant, par conséquent,

$$\varphi = z_1 z_2 + \psi(x, y, z_1),$$

on trouve

$$A_1(\varphi) = 2z_1 z_2 + z_1 \frac{\partial \psi}{\partial z_1},$$

ce qui entraîne

$$A_1(\varphi) = 2\varphi$$

et

$$\psi = -J(x, y) z_1^2,$$

J désignant une fonction rationnelle des variables. [On remarque en passant qu'on a $A_2(\varphi) = z_1^3$.]

L'équation du second ordre compatible avec (a) s'écrit donc

$$\varphi = z_2 - J z_1 = 0,$$

et la condition d'existence de cette équation est que l'équation *résolvante*

$$X(J) + J \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = 0$$

possède une solution rationnelle J.

3° Supposons enfin que le polynôme φ soit du troisième ordre.

On peut écrire son premier terme sous la forme $z_1 z_3$ en multipliant, s'il y a lieu, φ par une puissance convenable de z_1 ; on aura dès lors, avec

$$\varphi = z_1 z_3 + \psi(x, y, z_1, z_2),$$

l'identité

$$A_1(\varphi) = 2z_1 z_3 + z_1 \frac{\partial \psi}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial \psi}{\partial z_2},$$

d'où l'on conclut

$$A_1(\varphi) = 2\varphi,$$

et par suite

$$z_1 \frac{\partial \psi}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial \psi}{\partial z_2} = 2\psi.$$

On a, d'autre part, en vertu des remarques faites plus haut,

$$A_2(\varphi) = \lambda_2 z_1^{k_2},$$

ce qui donnera

$$z_1^2 \frac{\partial \psi}{\partial z_2} + 3z_1^2 z_2 = \lambda_2 z_1^{k_2}.$$

On voit d'abord que ψ est homogène et de degré 2 en z_1 et z_2 et la dernière condition donne ensuite

$$\psi = -\frac{3}{2} z_2^2 + \lambda_2 z_1^{k_2-2} z_2 - I(x, y) z_1^2,$$

où l'on a nécessairement $k_2 = 3$. En portant cette expression de φ dans l'équa-

tion

$$A_1(\varphi) = 2\varphi,$$

on trouve que la constante λ_2 est nulle.

L'équation du troisième ordre compatible avec (a) est donc

$$\varphi = z_1 z_3 - \frac{3}{2} z_2^2 - I z_1^2 = 0,$$

et la fonction rationnelle $I(x, y)$ doit satisfaire à l'équation *résolvante*

$$X(I) + 2I \frac{\partial \Lambda}{\partial y} + \frac{\partial^3 \Lambda}{\partial y^3} = 0.$$

Nous avons donc retrouvé, sauf l'examen immédiat du cas où il existe pour l'équation (a) une solution rationnelle, tous les résultats essentiels obtenus précédemment par une analyse beaucoup plus longue, mais dépourvue de toute *habileté*.

§ 10. Avant de quitter ce sujet, il convient d'insister sur la véritable signification des identités établies entre les expressions $A_i(\varphi)$, ce qui nous donnera aussi le moyen de les obtenir dans toute leur généralité.

Imaginons qu'on donne à z un accroissement très petit $\varepsilon \zeta(z)$ où ε est une constante; posons, en désignant par δz cet accroissement,

$$\delta z = \zeta(z) \delta u,$$

δu représentant la constante ε ; il est facile de trouver l'accroissement que subit une fonction φ de z seul ou de z et des dérivées z_1, z_2, \dots prises par rapport à une variable y qui demeure inaltérée. On a d'abord, si φ dépend de z seul,

$$\delta \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \zeta(z) \delta u,$$

et pour calculer $\delta \varphi$ dans le cas général, il suffit, en vertu de l'identité

$$\delta \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \delta z + \frac{\partial \varphi}{\partial z_1} \delta z_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial z_2} \delta z_2 + \dots,$$

de connaître les expressions de $\delta z_1, \delta z_2, \dots$: on a immédiatement ces expressions en exprimant que les relations

$$\delta(dz - z_1 dy) = 0,$$

$$\delta(dz_1 - z_2 dy) = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

sont des conséquences des équations

$$\begin{aligned} dz - z_1 dy &= 0, \\ dz_1 - z_2 dy &= 0, \\ \dots\dots\dots \end{aligned}$$

qui définissent z_1, z_2, \dots

On trouve ainsi, sans difficulté,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = A(\varphi) = \zeta \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \zeta' A_1(\varphi) + \zeta'' A_2(\varphi) + \dots$$

Considérons, d'autre part, un second accroissement que nous écrivons

$$\delta z = \theta(z) \delta v;$$

on aura, de la même manière,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} = B(\varphi) = \theta \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \theta' A_1(\varphi) + \theta'' A_2(\varphi) + \dots$$

Enfin, si nous considérons *a priori* un troisième accroissement

$$\delta z = (\zeta \theta' - \theta \zeta') \delta w,$$

on aura pour une fonction quelconque φ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial w} = C(\varphi) = (\zeta \theta' - \theta \zeta') \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{d}{dz} (\zeta \theta' - \theta \zeta') A_1(\varphi) + \frac{d^2}{dz^2} (\zeta \theta' - \theta \zeta') A_2(\varphi) + \dots$$

Formons maintenant la combinaison

$$(A, B) = A[B(\varphi)] - B[A(\varphi)];$$

elle est identique à C(φ). En effet (A, B) est une combinaison linéaire et homogène des dérivées $\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \frac{\partial \varphi}{\partial z_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial z_2}, \dots$ dont le premier terme est

$$(\zeta \theta' - \theta \zeta') \frac{\partial \varphi}{\partial z};$$

de plus, l'opération (A, B) n'altère pas le système des relations différentielles

$$\begin{aligned} dz - z_1 dy &= 0, \\ dz_1 - z_2 dy &= 0, \\ \dots\dots\dots \end{aligned}$$

puisque en désignant par ω l'un quelconque des premiers membres de ces relations

on a à la fois

$$A(\omega) = 0 \quad \text{et} \quad B(\omega) = 0.$$

Mais ces conditions définissent précisément $C(\varphi)$ d'après ce qu'on a vu plus haut : on a donc identiquement

$$(A, B) = C(\varphi).$$

Si l'on calcule alors directement l'expression de (A, B) , on trouve sans difficulté

$$\begin{aligned} (A, B) = & (\zeta\theta' - \theta\zeta') \frac{\partial\varphi}{\partial z} + (\zeta\theta'' - \theta\zeta'') A_1 + (\zeta\theta''' - \theta\zeta''') A_2 + \dots \\ & + (\zeta'\theta'' - \theta'\zeta'') (A_1, A_2) + (\zeta'\theta''' - \theta'\zeta''') (A_1, A_3) + \dots \\ & + (\zeta''\theta''' - \theta''\zeta''') (A_2, A_3) + (\zeta''\theta^{iv} - \theta''\zeta^{iv}) (A_2, A_4) + \dots \\ & + (\zeta'''\theta^{iv} - \theta'''\zeta^{iv}) (A_3, A_4) + (\zeta'''\theta^v - \theta'''\zeta^v) (A_3, A_5) + \dots \\ & + \dots \end{aligned}$$

D'autre part, en posant

$$\zeta\theta' - \theta\zeta' = \alpha,$$

on a

$$C(\varphi) = \alpha \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \alpha' A_1 + \alpha'' A_2 + \alpha''' A_3 + \dots$$

et aussi

$$\begin{aligned} \alpha' &= \zeta\theta'' - \dots, \\ \alpha'' &= \zeta\theta''' + \zeta'\theta'' - \dots, \\ \alpha''' &= \zeta\theta^{iv} + 2\zeta'\theta''' - \dots, \\ \alpha^{iv} &= \zeta\theta^v + 3\zeta'\theta^{iv} + 2\zeta''\theta''' - \dots, \\ \alpha^v &= \zeta\theta^{vi} + 4\zeta'\theta^v + 5\zeta''\theta^{iv} - \dots, \\ &\dots \end{aligned}$$

Si l'on égale les coefficients des quantités

$$\zeta'\theta'' - \zeta''\theta', \quad \zeta'\theta''' - \theta'\zeta''', \quad \dots, \quad \zeta''\theta^{iv} - \zeta''' \theta''', \quad \dots$$

dans les deux membres de l'identité

$$(A, B) = C(\varphi),$$

on trouve précisément les relations qu'il s'agit d'obtenir.

Les coefficients des termes où figure ζ' donnent

$$(A_1, A_2) = A_2, \quad (A_1, A_3) = 2A_3, \quad (A_1, A_4) = 3A_4, \quad \dots;$$

ceux des termes où figure ζ'' donnent de même

$$(A_2, A_3) = 2A_4, \quad (A_2, A_4) = 5A_5, \quad (A_2, A_5) = 9A_6, \quad \dots,$$

dont la loi de formation est manifeste, et ainsi de suite.

III. — MÉTHODE GÉNÉRALE DONNANT LA FORME DES RELATIONS RATIONNELLES « TYPES » COMPATIBLES AVEC L'ÉQUATION (a). EXISTENCE ET PROPRIÉTÉS DU GROUPE DE RATIONALITÉ.

§ 11. Dans les deux paragraphes qui précèdent, j'ai cherché *directement* les types de relations rationnelles compatibles avec une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre; je me propose ici de trouver *la forme générale commune à tous ces types* et de mettre ainsi en évidence l'existence et les propriétés du *groupe*, attaché à toute équation *spéciale*, que j'ai appelé *groupe de rationalité* de l'équation.

Soit donc

$$(a) \quad X(z) = \frac{\partial z}{\partial x} + A \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

l'équation linéaire à étudier où l'on regarde toujours A comme rationnel en x et y.

Nous admettons qu'il n'existe pas d'équation rationnelle en x, y, z, $\frac{\partial z}{\partial y}$, ..., $\frac{\partial^{p-1} z}{\partial y^{p-1}}$ compatible avec l'équation (a) sans en être une conséquence nécessaire, mais qu'il existe une équation de cette nature comprenant $\frac{\partial^p z}{\partial y^p}$: on la supposera tout de suite de degré le plus petit possible par rapport à la dérivée d'ordre p et on l'écrira

$$(a') \quad P\left(\frac{\partial^p z}{\partial y^p}, \dots, \frac{\partial z}{\partial y}, z, x, y\right) = 0,$$

le premier membre étant un polynôme par rapport à tous les éléments dont il dépend.

La condition de compatibilité de (a) et (a') s'obtient en appliquant au premier membre de (a') l'opération X(f), définie par la suite d'égalités

$$\begin{aligned} X(f) &= \frac{\partial f}{\partial x} + A \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)} X\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \dots + \frac{\partial f}{\partial\left(\frac{\partial^p z}{\partial y^p}\right)} X\left(\frac{\partial^p z}{\partial y^p}\right), \\ &X\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \\ &X\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) + 2 \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \\ &X\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right) + 3 \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} + 3 \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial^3 A}{\partial y^3} \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

dont la loi de formation est évidente et en égalant à zéro le résultat.

L'expression $X(P)$ est un polynome entier de même degré au plus que P par rapport à l'ensemble des dérivées de z ; il ne peut exister qu'une seule relation telle que (a'), on aura donc nécessairement l'identité

$$(1) \quad X(P) = MP,$$

M étant un multiplicateur dont il est aisé de préciser la nature.

Considérons pour cela dans P le terme qui comprend $\frac{\partial^p z}{\partial y^p}$ à la plus haute puissance; s'il y en a plusieurs, nous prendrons parmi eux celui qui comprendra $\frac{\partial^{p-1} z}{\partial y^{p-1}}$ à la plus haute puissance; s'il y en a encore plusieurs, on prendra parmi ceux-là celui qui comprend $\frac{\partial^{p-2} z}{\partial y^{p-2}}$ à la plus haute puissance, *et ainsi de suite* : on obtient ainsi un terme unique que nous écrivons

$$\psi(x, y) z^{\alpha_0} \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)^{\alpha_2} \dots \left(\frac{\partial^p z}{\partial y^p}\right)^{\alpha_p},$$

ψ désignant un polynome en x, y qui pourrait se réduire à une constante. Un certain nombre des exposants $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ peuvent être nuls, α_p est certainement différent de zéro.

L'application de l'opération $X(f)$ à ce terme unique de P donne dans $X(P)$ un groupe de termes parmi lesquels figure manifestement le précédent et les formules qui définissent les $X\left(\frac{\partial^i z}{\partial y^i}\right)$ donnent immédiatement son coefficient en x, y :

$$X(\psi) - \frac{\partial A}{\partial y} (\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + p\alpha_p) \psi(x, y).$$

La façon même dont nous l'avons obtenu prouve que ce terme est encore seul de son espèce dans $X(P)$. *Le multiplicateur M est donc défini par l'identité*

$$X(\psi) - \frac{\partial A}{\partial y} (\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + p\alpha_p) \psi = M\psi,$$

qui nous permet de reconnaître qu'il ne dépend que des variables x et y .

Si l'on avait divisé P par ψ , de façon à avoir une relation *entière* en $z, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots$ mais *rationnelle* en x, y , on voit que le multiplicateur M se réduirait à

$$-(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + p\alpha_p) \frac{\partial A}{\partial y}.$$

§ 12. Revenons à l'étude de l'identité

$$(1) \quad X(P) = MP,$$

dans laquelle nous savons maintenant que M est rationnel en x, y .

Imaginons que, dans le polynôme P , on regarde z comme une fonction arbitraire d'un argument u et qu'on remplace les dérivées successives de z par les dérivées correspondantes de u données par les formules

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2, \\ \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + 3 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^3 z}{\partial u^3} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^3, \\ &\dots\dots\dots; \end{aligned}$$

on obtiendra un nouveau polynôme en $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \dots$ que nous représentons par la notation

$$P_u = P\left(z, \frac{\partial z}{\partial u}, \dots, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^p u}{\partial y^p}, x, y\right).$$

Ce polynôme peut évidemment se mettre sous la forme d'une somme de termes (1)

$$\alpha_i\left(z, \frac{\partial z}{\partial u}, \dots, \frac{\partial^p z}{\partial u^p}\right) \alpha_i\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^p u}{\partial y^p}\right),$$

en mettant en évidence les éléments $z, \frac{\partial z}{\partial u}, \dots, \frac{\partial^p z}{\partial u^p}$.

Nous l'écrivons

$$(2) \quad P_u = \sum_1^h l_i\left(z, \frac{\partial z}{\partial u}, \dots\right) \xi_i\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots\right),$$

et nous remarquons tout de suite qu'on peut supposer les l_i et les ξ_i réduits au nombre le plus petit possible. Il n'existera alors entre les l_i aucune relation linéaire et homogène à coefficients constants. Le même fait a lieu pour les ξ_i , que nous appelons *coordonnées* du polynôme P .

La relation

$$P_u = 0$$

est évidemment une relation compatible avec (a) et définissant la solution particulière $u(x, y)$ qui est liée à la solution z par la relation $z = z(u)$. Bien entendu elle n'est pas rationnelle en u , en général; elle est cependant *entière* en $\frac{\partial u}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^p u}{\partial y^p}$.

L'identité

$$X(P) = MP$$

(1) Cette théorie est l'application particulière d'une théorie générale dont on trouvera plus loin (Chap. II) le développement.

donne manifestement par la transformation précédente

$$\mathbf{X}(\mathbf{P}_u) = \mathbf{M}\mathbf{P}_u,$$

\mathbf{M} n'ayant pas changé, et par suite

$$\sum_1^h l_i \left(z, \frac{\partial z}{\partial u}, \dots \right) \mathbf{X}(\xi_i) = \mathbf{M} \sum_1^h l_i \left(z, \frac{\partial z}{\partial u}, \dots \right) \xi_i \left(x, y, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots \right).$$

Comme les $l_i \left(z, \frac{\partial z}{\partial u}, \dots \right)$ sont linéairement indépendants, on en conclut que tous leurs coefficients sont nuls, c'est-à-dire qu'on a *identiquement*

$$(3) \quad \mathbf{X} \left[\xi_i \left(x, y, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots \right) \right] = \mathbf{M} \xi_i \left(x, y, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots \right) \quad (i=1, \dots, h).$$

Supposons d'abord le nombre h des *coordonnées* supérieur à 2. Nous savons que parmi les ξ_i il en existe un seul, ξ_1 par exemple, qui renferme le terme exceptionnel

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^{\alpha_2} \dots \left(\frac{\partial^p u}{\partial y^p} \right)^{\alpha_p}$$

considéré plus haut [terme renfermant d'abord la dérivée d'ordre p au degré le plus grand, puis la dérivée d'ordre $(p-1)$ au degré le plus grand, et ainsi de suite].

On conclut d'ailleurs des identités précédentes les nouvelles identités

$$\mathbf{X} \begin{pmatrix} \xi_i \\ \xi_j \end{pmatrix} = 0 \quad (i \neq j = 1, \dots, h),$$

qui montrent que toutes les relations

$$(4) \quad \frac{\xi_i \left(x, y, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots \right)}{\xi_j \left(x, y, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots \right)} = \alpha_{ij}(u)$$

sont séparément compatibles avec l'équation (a), α_{ij} désignant une fonction *quelconque* de u .

Si l'on veut que la relation précédente soit vérifiée par la solution de (a) qui prend pour $x = x_0$ la valeur u définie par

$$y = \varphi(u),$$

il suffit de poser

$$\alpha_{ij}(u) = \frac{\xi_i \left(x_0, \varphi(u), \frac{\partial u}{\partial y}, \dots \right)}{\xi_j \left(x_0, \varphi(u), \frac{\partial u}{\partial y}, \dots \right)},$$

en mettant dans le second membre, au lieu des dérivées $\frac{\partial u}{\partial y}, \dots$, leurs expressions déduites des relations

$$\begin{aligned} 1 &= \varphi'(u) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ 0 &= \varphi''(u) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \varphi'(u) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

On voit que si $\varphi(u)$ est rationnel, α_{ij} sera certainement rationnel en u .

La relation

$$\xi_i \left(x, y, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots \right) - \alpha_{ij}(u) \xi_j \left(x, y, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots \right) = 0$$

donnera donc, si i et j sont différents de 1, une équation compatible avec (a) d'ordre inférieur à p ou qui, si elle est d'ordre p , sera de degré inférieur à celui de P par rapport à la dérivée $\frac{\partial^p u}{\partial y^p}$, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse faite sur P.

On conclut donc de là que *le nombre h ne peut dépasser 2 et par suite que la relation*

$$P_u = 0$$

peut s'écrire

$$(A) \quad \frac{\xi_1 \left(x, y, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots \right)}{\xi_2 \left(x, y, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots \right)} = - \frac{l_2 \left(z, \frac{\partial z}{\partial u}, \dots \right)}{l_1 \left(z, \frac{\partial z}{\partial u}, \dots \right)},$$

puisque l_1 est certainement différent de zéro.

La relation initiale

$$P_z = 0$$

a donc également la forme

$$(A') \quad \frac{\xi_1 \left(x, y, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots \right)}{\xi_2 \left(x, y, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots \right)} = - \frac{L_2(z)}{L_1(z)},$$

où l'on a désigné par L_2 et L_1 ce que deviennent l_2 et l_1 quand on y fait $u = z$.

Remarque. — Les identités (3)

$$X(\xi_i) = M \xi_i$$

auraient pu permettre de conclure immédiatement que toutes les relations

$$\xi_i = 0$$

sont séparément compatibles avec l'équation (a). Il en résulte que ces relations ne peuvent définir, si $i \neq 1$, de solution *dépendant effectivement de y*, c'est-à-dire que toute solution du système

$$\mathbf{X}(z) = \frac{\partial z}{\partial x} + \Lambda \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad \xi_i \left(x, y, \frac{\partial z}{\partial y} \right) = 0$$

est *une constante*.

On pourrait donc déduire de là que les ξ_i ($i \neq 1$) sont tous de la forme

$$\psi(x, y) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^m;$$

nous aurons l'occasion de le vérifier plus loin.

Enfin il est clair que l'équation

$$\xi_1 \left(x, y, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots \right) = 0$$

pourrait remplacer l'équation

$$P_u = 0,$$

c'est-à-dire que ξ_1 satisfait aux conditions imposées au polynome

$$P \left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots \right)$$

d'où nous sommes parti.

On voit qu'il est en effet possible de déterminer z de façon que la relation (A) donne pour déterminer u

$$\xi_1 \left(x, y, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots \right) = 0;$$

il suffit d'écrire

$$l_2 \left(z, \frac{\partial z}{\partial u}, \dots \right) = 0.$$

§ 13. La forme remarquable (A) donnée à l'équation (a') compatible avec

$$(a) \quad \mathbf{X}(z) = \frac{\partial z}{\partial x} + \Lambda(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

conduit de la manière la plus simple à la notion et aux propriétés du *groupe de rationalité* de l'équation (a).

Désignons par z une solution quelconque du système (A')

$$(A') \quad \frac{\xi_1 \left(x, y, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots \right)}{\xi_2 \left(x, y, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots \right)} = - \frac{\mathbf{L}_2(z)}{\mathbf{L}_1(z)};$$

si l'on regarde z comme fonction d'un nouvel argument u , la condition nécessaire et suffisante pour que u représente encore une solution du système (A') sera donnée par l'équation

$$(B) \quad \frac{l_1\left(z, \frac{\partial z}{\partial u}, \dots\right)}{l_2\left(z, \frac{\partial z}{\partial u}, \dots\right)} = \frac{L_1(u)}{L_2(u)}.$$

Cette équation s'obtient d'ailleurs directement en éliminant $\frac{\partial^p u}{\partial y^p}$ entre les deux relations

$$P(u) = L_1(u) \xi_1\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots\right) + L_2(u) \xi_2\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots\right) = 0$$

et

$$P(z) = l_1\left(z, \frac{\partial z}{\partial u}, \dots\right) \xi_1\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots\right) + l_2\left(z, \frac{\partial z}{\partial u}, \dots\right) \xi_2\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots\right)$$

qui expriment que u et $z(u)$ sont deux solutions particulières quelconques de l'équation (A').

On peut conclure de là, en particulier, que l'équation (B) qui définit z en partant de u peut s'écrire également, en permutant u et z ,

$$(B') \quad \frac{l_1\left(u, \frac{\partial u}{\partial z}, \dots\right)}{l_2\left(u, \frac{\partial u}{\partial z}, \dots\right)} = \frac{L_1(z)}{L_2(z)}.$$

Il en résulte encore que, si l'on a simultanément,

$$\frac{l_1\left(u, \frac{\partial u}{\partial z}, \dots\right)}{l_2\left(u, \frac{\partial u}{\partial z}, \dots\right)} = \frac{L_1(z)}{L_2(z)},$$

$$\frac{l_1\left(v, \frac{\partial v}{\partial z}, \dots\right)}{l_2\left(v, \frac{\partial v}{\partial z}, \dots\right)} = \frac{L_1(z)}{L_2(z)},$$

c'est-à-dire si $u(z)$ et $v(z)$ sont deux solutions du système (B), on aura aussi

$$\frac{l_1\left(v, \frac{\partial v}{\partial u}, \dots\right)}{l_2\left(v, \frac{\partial v}{\partial u}, \dots\right)} = \frac{L_1(u)}{L_2(u)};$$

c'est-à-dire que $v(u)$ sera encore une solution du même système.

Le système (B) définit donc un *groupe de transformations* (u, z) . On observe d'ailleurs que la relation

$$\frac{l_1\left(u, \frac{\partial u}{\partial z}, \dots\right)}{l_2\left(u, \frac{\partial u}{\partial z}, \dots\right)} = \frac{l_1\left(v, \frac{\partial v}{\partial z}, \dots\right)}{l_2\left(v, \frac{\partial v}{\partial z}, \dots\right)}$$

entraîne, entre u et v , la relation *indépendante* de z

$$\frac{l_1\left(v, \frac{\partial v}{\partial u}, \dots\right)}{l_2\left(v, \frac{\partial v}{\partial u}, \dots\right)} = \frac{\mathbf{L}_1(u)}{\mathbf{L}_2(u)}.$$

Ainsi, on y peut regarder z comme une variable auxiliaire et dire que la fonction

$$\frac{l_1\left(u, \frac{\partial u}{\partial z}, \dots\right)}{l_2\left(u, \frac{\partial u}{\partial z}, \dots\right)}$$

demeure la même quand on remplace u par une solution quelconque v du système (B).

Cette expression

$$\frac{l_1\left(u, \frac{\partial u}{\partial z}, \dots\right)}{l_2\left(u, \frac{\partial u}{\partial z}, \dots\right)}$$

est dite *invariant différentiel du groupe dont l'équation de définition est (B)*, quand la variable z n'est pas transformée.

Les diverses solutions du système

$$(A) \quad \frac{\xi_1\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots\right)}{\xi_2\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots\right)} = -\frac{\mathbf{L}_2(u)}{\mathbf{L}_1(u)}$$

se déduisent donc de l'une d'elles par toutes les transformations d'un groupe (G) dont l'équation de définition est

$$(B) \quad \frac{l_1\left(v, \frac{\partial v}{\partial u}, \dots\right)}{l_2\left(v, \frac{\partial v}{\partial u}, \dots\right)} = \frac{\mathbf{L}_1(u)}{\mathbf{L}_2(u)}.$$

Lorsqu'on regarde u et v comme des fonctions d'un argument z non transformé

ce groupe possède l'invariant différentiel

$$\frac{l_1\left(u, \frac{\partial u}{\partial z}, \dots\right)}{l_2\left(u, \frac{\partial u}{\partial z}, \dots\right)} = \frac{l_1\left(v, \frac{\partial v}{\partial z}, \dots\right)}{l_2\left(v, \frac{\partial v}{\partial z}, \dots\right)}.$$

Si l'on a égard à la forme générale donnée à l'équation (A) :

$$\frac{\xi_1\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots\right)}{\xi_2\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots\right)} = -\frac{l_2\left(z, \frac{\partial z}{\partial u}, \dots\right)}{l_1\left(z, \frac{\partial z}{\partial u}, \dots\right)},$$

où l'on regarde z comme une solution de (A) et u comme une variable auxiliaire quelconque, on voit qu'en posant $u = y$ on aura

$$\frac{l_2\left(z, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots\right)}{l_1\left(z, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots\right)} = -\frac{\xi_1(x, y, 1, \dots)}{\xi_2(x, y, 1, \dots)},$$

le second membre se déduisant de

$$\frac{\xi_1\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots\right)}{\xi_2\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots\right)},$$

en y faisant

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \dots$$

Ainsi l'équation (A) peut encore s'écrire

$$(A'') \quad \frac{l_2\left(u, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots\right)}{l_1\left(u, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots\right)} = -\frac{\xi_1(x, y, 1, \dots)}{\xi_2(x, y, 1, \dots)};$$

sous cette forme elle donne pour l'invariant différentiel de (G) une expression rationnelle en x, y .

Le groupe (G) dont nous venons d'établir l'existence sera dit *groupe de rationalité* de l'équation (a). Il possède vis-à-vis de l'équation (a) des propriétés analogues à celles du *groupe* de Galois relatif à une équation algébrique.

On peut en effet résumer ces dernières en disant que *lorsque le système des*

Il est clair que, si l'on désigne par z une solution de l'équation

$$\frac{\xi_1\left(x, y, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots\right)}{\xi_2\left(x, y, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots\right)} = -\frac{L_2(z)}{L_1(z)},$$

toute fonction u de z définie par la relation implicite

$$z = z(u)$$

vérifie la relation *de même forme*

$$\frac{\xi_1\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots\right)}{\xi_2\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots\right)} = -\frac{l_2\left(z, \frac{\partial z}{\partial u}, \dots\right)}{l_1\left(z, \frac{\partial z}{\partial u}, \dots\right)},$$

qui n'est, en général, pas rationnelle en u , puisque le second membre ne l'est pas. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il le soit est que la fonction z satisfasse à une relation

$$(C) \quad \frac{l_2\left(z, \frac{\partial z}{\partial u}, \dots\right)}{l_1\left(z, \frac{\partial z}{\partial u}, \dots\right)} = -R(u),$$

où R est une fonction rationnelle quelconque.

Soit $z = \varphi(u)$ une solution particulière de cette équation (C), il est clair que si Z désigne une solution quelconque de l'équation (A), la fonction U , définie par

$$Z = \varphi(U),$$

vérifiera encore la même équation (C), et par suite U sera une solution de

$$\frac{\xi_1\left(x, y, \frac{\partial U}{\partial y}, \dots\right)}{\xi_2\left(x, y, \frac{\partial U}{\partial y}, \dots\right)} = R(U).$$

En observant qu'on a

$$Z = \theta(z),$$

désignant une transformation du groupe de rationalité G , on en déduira

$$\varphi(U) = \theta[\varphi(u)].$$

Ainsi, le nouveau système irréductible

$$(a) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + A \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

$$(A_1) \quad \frac{\xi_1 \left(x, y, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots \right)}{\xi_2 \left(x, y, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots \right)} = R(u)$$

définit la solution u aux transformations près d'un groupe G_1 , qui est le TRANSFORMÉ du groupe G par l'une des transformations (z, u) satisfaisant à la relation

$$(C) \quad \frac{l_2 \left(z, \frac{\partial z}{\partial u}, \dots \right)}{l_1 \left(z, \frac{\partial z}{\partial u}, \dots \right)} = -R(u).$$

Cette relation (C) est donc telle qu'en y regardant z comme la variable et u comme la fonction, sa solution générale U dérive d'une solution particulière quelconque u par les transformations de G_1 .

On a vu plus haut qu'en regardant au contraire u comme une variable non transformée, la solution générale Z dérive d'une solution particulière z par une transformation de G .

On a donc, en passant de (A) à (A₁), remplacé le groupe de rationalité G par l'un de ses transformés G_1 .

La transformation (z, u) qui fait passer de l'un à l'autre est assujettie à la seule condition de donner, pour l'invariant différentiel du groupe G

$$\frac{l_2 \left(z, \frac{\partial z}{\partial u}, \dots \right)}{l_1 \left(z, \frac{\partial z}{\partial u}, \dots \right)},$$

une expression rationnelle en u .

Nous pouvons conclure des résultats précédents que la solution de l'équation

$$(a) \quad X(z) = \frac{\partial z}{\partial x} + A(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

qui prend pour $x = x_0$ la valeur y , solution que nous appelons, suivant l'usage, principale au point x_0 , satisfait toujours à un système irréductible RÉGULIER, c'est-à-dire comprenant, en dehors de l'équation (a), une équation entière en z , $\frac{\partial z}{\partial y}$, ... à coefficients rationnels en x, y d'ordre minimum par rapport aux déri-

vées de z et de *degré le plus petit possible* par rapport à la dérivée $\frac{\partial^p z}{\partial y^p}$ d'ordre le plus élevé.

Il suffit, pour le voir, de déterminer $R(z)$ par l'équation identique

$$R(z) = \frac{\xi_1(x_0, z, 1, \dots)}{\xi_2(x_0, z, 1, \dots)}$$

obtenue en faisant, dans le quotient

$$\frac{\xi_1\left(x, y, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots\right)}{\xi_2\left(x, y, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots\right)},$$

$$x = x_0, \quad y = z, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \quad \dots$$

Désignons, pour fixer les idées, par u cette solution *principale* en x_0 , qui vérifie le système

$$X(u) = 0, \quad \frac{\xi_1\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots\right)}{\xi_2\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots\right)} = \frac{\xi_1(x_0, u, 1, \dots)}{\xi_2(x_0, u, 1, \dots)},$$

la transformation (z, u) qui conduit d'une solution z de

$$X(z) = 0, \quad \frac{\xi_1\left(x, y, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots\right)}{\xi_2\left(x, y, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots\right)} = -\frac{L_2(z)}{L_1(z)}$$

à la solution u est déterminée par l'équation

$$\frac{l_2\left(z, \frac{\partial z}{\partial u}\right)}{l_1\left(z, \frac{\partial z}{\partial u}\right)} = -\frac{\xi_1(x_0, u, 1, \dots)}{\xi_2(x_0, u, 1, \dots)}.$$

Soit U une solution *homologue* de la solution u *principale* en x_0 , c'est-à-dire une solution quelconque du système

$$X(U) = 0, \quad \frac{\xi_1\left(x, y, \frac{\partial U}{\partial y}, \dots\right)}{\xi_2\left(x, y, \frac{\partial U}{\partial y}, \dots\right)} = \frac{\xi_1(x_0, U, 1, \dots)}{\xi_2(x_0, U, 1, \dots)},$$

nous savons qu'en faisant dans la dernière équation $x = x_0$ on obtiendra la condi-

tion que doit remplir au point $x = x_0$ la fonction $U(y, x_0)$. Il en résulte qu'en faisant dans l'équation précédente

$$x = x_0 \quad \text{et} \quad y = u,$$

on aura l'équation de définition du groupe Γ *relatif à la solution principale*

$$\frac{\xi_1\left(x_0, u, \frac{\partial U}{\partial u}, \dots\right)}{\xi_2\left(x_0, u, \frac{\partial U}{\partial u}, \dots\right)} = \frac{\xi_1(x_0, U, I, \dots)}{\xi_2(x_0, U, I, \dots)}.$$

§ 15. La théorie que nous venons de présenter ramène la détermination des types de transcendentes $z(x, y)$ qui vérifient une équation

$$\frac{\partial z}{\partial x} + A \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

à coefficient A rationnel, à celle des divers *types* de groupes contenus dans le groupe ponctuel des transformations

$$Z = F(z),$$

où F est arbitraire, *dont les équations de définition sont rationnelles.*

Ces types ont été trouvés par S. Lie en partant de leurs *transformations infinitésimales*; nous en avons donné au début de ce Chapitre *une détermination directe.*

Deux groupes doivent être regardés comme appartenant ou non au même type suivant qu'il existe ou non une transformation ponctuelle (transformation qui n'est assujettie à d'autre restriction que d'être réversible) qui change les équations de définition de l'un des groupes en celle de l'autre.

Il est inutile de répéter ici ce qui a été dit à ce sujet : nous avons vu qu'il y avait seulement à considérer les groupes dont les transformations sont :

$$z' = z;$$

$$z' = \varepsilon z + a, \quad \varepsilon^n = 1,$$

a arbitraire;

$$z' = az + b,$$

a, b arbitraires;

$$z' = \frac{az + b}{cz + d},$$

a, b, c, d arbitraires;

$$z' = F(z),$$

F arbitraire;

c'est-à-dire que *les transcendentes qui vérifient une équation du premier*

ordre

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \Lambda(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

sont des fonctions des deux variables x, y ATTACHÉES à l'un de ces groupes.
(La transformation identique seule donne des fonctions rationnelles.)

Si l'on s'astreint à ne considérer que la solution *principale* de l'équation

$$(a) \quad \frac{\partial z}{\partial x} + \Lambda \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

au point $x = x_0$, les groupes de rationalité ne sont plus aussi simples. Leurs transformations dépendent de la nature des fonctions rationnelles en x, y représentées plus haut par K, J, I (invariants rationnels du groupe).

On sait que si l'on désigne par $u(x_0, x, y)$ la solution qui se réduit à y pour $x = x_0$, l'équation

$$y_0 = u(x_0, x, y)$$

définit la solution de l'équation différentielle

$$y' = \Lambda(x, y)$$

qui prend, au point arbitraire $x = x_0$, la valeur y_0 . Cette relation entre y et y_0 peut d'ailleurs s'écrire aussi, d'après Jacobi,

$$y = u(x, x_0, y_0),$$

c'est-à-dire que la fonction de trois arguments $u(\alpha, \beta, \gamma)$ définit *explicitement* y comme fonction de x et de la constante d'intégration.

α . Si le groupe de rationalité est réduit à la transformation identique, la solution principale est algébrique et donnée par

$$R(x, y) = R(x_0, u),$$

en désignant par R la solution rationnelle de (a).

β . Si le groupe de rationalité est

$$z' = \varepsilon z + \alpha, \quad \varepsilon' = 1,$$

on a, pour définir u , les relations

$$X(u) = 0, \quad K(x_0, u) \left(\frac{du}{dy} \right)^n = K(x, y);$$

u est défini aux transformations (u, v) près qui satisfont à

$$\mathbf{K}(x_0, u) \left(\frac{du}{dv} \right)^n = \mathbf{K}(x_0, v).$$

Ces transformations ne sont pas, en général, *algébriques*.

Cependant, on peut signaler le cas où $n = 2$ et où \mathbf{K} se réduit à un polynôme du quatrième degré en y ; la transformation (u, v) est définie par l'équation d'Euler.

γ . Si le groupe de rationalité est

$$z' = az + b,$$

a, b arbitraires, la solution principale u est définie par

$$\mathbf{X}(u) = 0, \quad \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}{\frac{\partial u}{\partial y}} - \mathbf{J}(x, y) = -\mathbf{J}(x_0, u) \frac{\partial u}{\partial y},$$

aux transformations (u, v) près qui satisfont à

$$\frac{\frac{d^2 u}{dv^2}}{\frac{du}{dv}} - \mathbf{J}(x_0, v) = -\mathbf{J}(x_0, u) \frac{du}{dv}.$$

δ . Enfin, si le groupe de rationalité est le groupe projectif général, la solution principale est définie par

$$\mathbf{X}(u) = 0, \quad \frac{\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}}{\frac{\partial u}{\partial y}} - \frac{3}{2} \left(\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}{\frac{\partial u}{\partial y}} \right)^2 - \mathbf{I}(x, y) = -\mathbf{I}(x_0, u) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2,$$

aux transformations près (u, v) du groupe déterminé par

$$\frac{\frac{d^3 u}{dv^3}}{\frac{du}{dv}} - \frac{3}{2} \left(\frac{\frac{d^2 u}{dv^2}}{\frac{du}{dv}} \right)^2 - \mathbf{I}(x_0, v) = -\mathbf{I}(x_0, u) \left(\frac{du}{dv} \right)^2.$$

On observe dans tous ces cas que l'équation de définition du groupe *relatif* à la solution principale s'obtient en faisant dans l'équation auxiliaire $x = x_0$, $y = v$; la raison en est immédiate.

IV. — COMMENT ON TIRE PARTI DE LA CONNAISSANCE D'UNE RELATION RATIONNELLE QUELCONQUE COMPATIBLE AVEC L'ÉQUATION

$$(a) \quad X(z) = \frac{\partial z}{\partial y} + A(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

16. La théorie que nous venons de développer montre aisément *comment on tire parti de la connaissance d'une relation rationnelle quelconque entre les éléments $x, y, z, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots$ compatible avec l'équation (a).*

Soit

$$(1) \quad P\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots\right) = 0$$

cette relation, supposée d'ordre p , mise sous forme entière ; la relation

$$X(P) = P_1 = 0$$

est également une relation entière *du même ordre* vérifiée par la solution z . Si donc cette relation n'est pas identique à la première, on en peut conclure, par élimination de la dérivée d'ordre le plus élevé, une relation entière d'*ordre inférieur*

$$Q\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots\right) = 0$$

compatible avec l'équation (a). En appliquant encore l'opération $X(f)$ on obtient de même

$$X(Q) = Q_1 = 0,$$

relation du même ordre que Q par rapport aux dérivées de z et satisfaite par la même fonction z ; on pourra reprendre sur Q_1 le raisonnement fait sur P_1 .

La compatibilité des équations (a) et (1) exige qu'après avoir répété ce raisonnement un certain nombre de fois, au plus égal à $(p - 1)$ si l'on écarte le cas où z est défini algébriquement, on tombe sur une relation entière

$$S\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots\right) = 0$$

satisfaisant à l'identité

$$X(S) = MS$$

où l'on verrait, comme plus haut, que M ne dépend que de x, y .

Toutes les relations $P = 0, P_1 = 0, Q = 0, \dots$ sont alors des conséquences de

la relation unique

$$S = 0$$

sans quoi, on en pourrait encore conclure une relation d'ordre inférieur compatible avec (a).

Partons maintenant de cette équation, que, pour simplifier les notations, nous continuerons à représenter par

$$P\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots\right) = 0$$

et qui satisfait à l'identité

$$X(P) = MP.$$

Si nous y regardons z comme une fonction d'un argument inconnu u , nous savons qu'on peut mettre le polynôme P sous la forme

$$P = \sum_1^h l_i\left(z, \frac{\partial z}{\partial u}, \dots\right) \xi_i\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots\right),$$

où le nombre h est le plus petit possible, ce qui exige que les l_i soient linéairement indépendants ainsi que les ξ_i . On a vu également que l'identité $X(P) = MP$ permet d'écrire

$$X(\xi_i) = M\xi_i \quad (i = 1, \dots, h).$$

Nous en concluons que, *quelle que soit la solution u , les équations*

$$\frac{\xi_i}{\xi_1} = \alpha_i(u) \quad (i = 1, \dots, h-1)$$

sont compatibles avec (a) pour une détermination convenable des fonctions, en général transcendantes, $\alpha_i(u)$, si ces équations sont compatibles lorsqu'on y regarde x comme un paramètre et y comme la seule variable.

Cela résulte, en effet, des identités

$$X\left(\frac{\xi_i}{\xi_1}\right) = 0.$$

Or si l'on détermine les $\alpha_i(u)$ de façon que le système précédent possède une solution u se réduisant pour $x = x_0$ à la fonction de y définie par

$$y = \varphi(u),$$

c'est-à-dire si l'on pose

$$\alpha_i(u) = \frac{\xi_i\left[x_0, \varphi(u), \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right), \dots\right]}{\xi_1\left[x_0, \varphi(u), \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right), \dots\right]}$$

en remplaçant $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$, ... par les expressions déduites de

$$1 = \varphi'(u) \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad 0 = \varphi''(u) \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \varphi'(u) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \dots,$$

on a toujours des équations compatibles entre elles pour y seul variable. *Il suffit de prendre $\varphi(u)$ rationnel pour que les $\alpha_i(u)$ soient également rationnels.*

En particulier, en faisant

$$x = x_0, \quad y = u, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \dots,$$

on obtient le système rationnel,

$$\frac{\xi_1\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots\right)}{\xi_1(x_0, u, 1, \dots)} = \dots = \frac{\xi_h\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots\right)}{\xi_h(x_0, u, 1, \dots)}$$

vérifié par la solution principale au point $x = x_0$.

Nous allons montrer que les équations

$$\frac{\xi_1\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots\right)}{\alpha_1(u)} = \dots = \frac{\xi_h\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots\right)}{\alpha_h(u)},$$

du moment où elles sont compatibles, c'est-à-dire admettent une autre solution que $u = \text{const.}$, sont telles que *toutes leurs solutions se déduisent de l'une d'entre elles par les transformations d'un groupe.*

17. Il est nécessaire d'établir d'abord quelques propriétés des coordonnées ξ_i du polynôme P.

La relation identique

$$P\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots\right) = \sum_1^h l_i\left(z, \frac{\partial z}{\partial u}, \dots\right) \xi_i\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots\right)$$

donne également, quelle que soit la variable v ,

$$P\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots\right) = \sum_1^h l_i\left(z, \frac{\partial z}{\partial v}, \dots\right) \xi_i\left(x, y, \frac{\partial v}{\partial y}, \dots\right).$$

Si l'on regarde, dans $\xi_i\left(y, x, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots\right)$, u comme une fonction de v , on aura évi-

demment, en faisant la transformation

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial u}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2, \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}$$

des identités

$$\xi_i \left(x, y, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots \right) = \sum \omega_{ik} \left(\frac{\partial u}{\partial v}, \dots \right) \eta_{ik} \left(x, y, \frac{\partial v}{\partial y}, \dots \right) \quad (i = 1, \dots, h)$$

dans lesquelles nous pouvons supposer qu'on a fait figurer parmi les η_{ik} les éléments $\xi_i \left(x, y, \frac{\partial v}{\partial y}, \dots \right)$ ($i = 1, \dots, h$), qui sont linéairement indépendants, et un nombre minimum d'éléments nouveaux η_1, \dots, η_k .

Les éléments $\xi_1, \dots, \xi_h, \eta_1, \dots, \eta_k$ ne sont donc liés par aucune équation linéaire et homogène à coefficients constants.

Avec ces hypothèses, les formules précédentes s'écrivent

$$\begin{aligned}\xi_i \left(x, y, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots \right) &= \sum_1^h \lambda_{i,j} \left(\frac{\partial u}{\partial v}, \dots \right) \xi_j \left(x, y, \frac{\partial v}{\partial y}, \dots \right) \\ &\quad + \sum_1^k \mu_{i,j} \left(\frac{\partial u}{\partial v}, \dots \right) \eta_j \left(x, y, \frac{\partial v}{\partial y}, \dots \right) \quad (i = 1, \dots, h),\end{aligned}$$

et il est bien clair que pour chacune d'elles on ne peut pas affirmer que les coefficients λ_{ij} ($j = 1, \dots, h$) et μ_{ij} ($j = 1, \dots, k$) sont linéairement indépendants.

Tout ce qu'on sait, c'est que tout système de polynomes en $x, y, \frac{\partial v}{\partial y}, \dots$ linéairement indépendants, qui comprend ξ_1, \dots, ξ_h et permet d'exprimer l'ensemble des $\xi_i \left(x, y, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots \right)$ sous la forme précédente, comprend au moins k éléments nouveaux.

Portons ces expressions des $\xi_i \left(x, y, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots \right)$ dans l'identité

$$\sum_1^h l_i \left(z, \frac{\partial z}{\partial u}, \dots \right) \xi_i \left(x, y, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots \right) = \sum_1^h l_i \left(z, \frac{\partial z}{\partial v}, \dots \right) \xi_i \left(x, y, \frac{\partial v}{\partial y}, \dots \right),$$

nous obtiendrons une relation linéaire et homogène entre les éléments

$$\xi_i \left(x, y, \frac{\partial v}{\partial y}, \dots \right) \quad (i = 1, \dots, h)$$

et

$$\eta_j \left(x, y, \frac{\partial v}{\partial y}, \dots \right) \quad (j = 1, \dots, k)$$

qui doit être *une identité* puisque aucune relation analogue n'est possible, v désignant un argument arbitraire.

En égalant à zéro les coefficients de ξ_i et η_j on obtient les identités

$$\sum_1^h l_i \left(z, \frac{\partial z}{\partial u}, \dots \right) \lambda_{i,j} \left(\frac{\partial u}{\partial v}, \dots \right) = l_j \left(z, \frac{\partial z}{\partial v}, \dots \right) \quad (j = 1, \dots, h)$$

$$\sum_1^h l_i \left(z, \frac{\partial z}{\partial u}, \dots \right) \mu_{i,j} \left(\frac{\partial u}{\partial v}, \dots \right) = 0 \quad (j = 1, \dots, k).$$

Considérons les dernières : nous savons que les expressions $l_i \left(z, \frac{\partial z}{\partial u}, \dots \right)$ ne sont liées par aucune relation linéaire et homogène à coefficients constants; en observant que $\mu_{i,j} \left(\frac{\partial u}{\partial v}, \dots \right)$ ne dépend que d'éléments qui ne figurent pas dans les $l_i \left(z, \frac{\partial z}{\partial u}, \dots \right)$, on voit que *tous les coefficients $\mu_{i,j}$ doivent être nuls*.

Un changement de fonction $u = \varphi(v)$ donne donc lieu aux identités

$$\xi_i \left(x, y, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots \right) = \sum_1^h \lambda_{i,j} \left(\frac{\partial u}{\partial v}, \dots \right) \xi_j \left(x, y, \frac{\partial v}{\partial y}, \dots \right) \quad (i = 1, \dots, h),$$

ou, en d'autres termes, *les ξ_i sont transformés par un groupe linéaire et homogène quand on exécute sur u une transformation ponctuelle*

$$u = \varphi(v)$$

quelconque.

Remarquons en passant que les $l_i \left(z, \frac{\partial z}{\partial u}, \dots \right)$ subissent alors les transformations du groupe linéaire et homogène *adjoint* du précédent

$$l_j \left(z, \frac{\partial z}{\partial v}, \dots \right) = \sum_1^h l_i \left(z, \frac{\partial z}{\partial u}, \dots \right) \lambda_{i,j} \left(\frac{\partial u}{\partial v}, \dots \right) \quad (j = 1, \dots, h)$$

et signalons les identités évidentes, relatives aux transformations

$$u = \varphi(v), \quad v = \psi(w),$$

$$\sum_j \lambda_{i,j} \left(\frac{\partial u}{\partial v}, \dots \right) \lambda_{j,k} \left(\frac{\partial v}{\partial w}, \dots \right) = \lambda_{i,k} \left(\frac{\partial u}{\partial w}, \dots \right) \quad (i, k = 1, \dots, h).$$

On en conclurait sans difficulté que le déterminant $|\lambda_{ij}|$ est une puissance de $\frac{\partial u}{\partial v}$.

18. Supposons maintenant qu'on désigne par u une solution du système

$$\frac{\xi_1\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots\right)}{\alpha_1(u)} = \dots = \frac{\xi_h\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots\right)}{\alpha_h(u)}.$$

Il est clair qu'en vertu des identités

$$\xi_i\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots\right) = \sum_1^h \lambda_{i,j} \left(\frac{\partial u}{\partial v}, \dots\right) \xi_j\left(x, y, \frac{\partial v}{\partial y}, \dots\right) \quad (i = 1, \dots, h)$$

la condition nécessaire et suffisante pour que v désigne une seconde solution du même système, c'est qu'on ait

$$\frac{\alpha_i(u)}{\alpha_1(u)} = \frac{\sum_1^h \lambda_{i,j} \left(\frac{\partial u}{\partial v}, \dots\right) \alpha_j(v)}{\sum_1^h \lambda_{1,j} \left(\frac{\partial u}{\partial v}, \dots\right) \alpha_j(v)} \quad (i = 2, \dots, h).$$

On a donc, pour une seconde solution quelconque w ,

$$\frac{\sum_1^h \lambda_{i,j} \left(\frac{\partial u}{\partial w}, \dots\right) \alpha_j(w)}{\sum_1^h \lambda_{1,j} \left(\frac{\partial u}{\partial w}, \dots\right) \alpha_j(w)} = \frac{\sum_1^h \lambda_{i,j} \left(\frac{\partial u}{\partial v}, \dots\right) \alpha_j(v)}{\sum_1^h \lambda_{1,j} \left(\frac{\partial u}{\partial v}, \dots\right) \alpha_j(v)} \quad (i = 2, \dots, h)$$

et l'on peut déduire de là, en observant que u n'y figure qu'en apparence et remplaçant cette lettre par v ,

$$\frac{\alpha_i(v)}{\alpha_1(v)} = \frac{\sum_1^h \lambda_{i,j} \left(\frac{\partial v}{\partial w}, \dots\right) \alpha_j(w)}{\sum_1^h \lambda_{1,j} \left(\frac{\partial v}{\partial w}, \dots\right) \alpha_j(w)} \quad (i = 2, \dots, h),$$

c'est-à-dire que la fonction $v(w)$ satisfait aux mêmes équations que la fonction $u(v)$.

C'est là une des façons d'exprimer que les transformations

$$u = \varphi(v), \quad u = \psi(w)$$

forment un *groupe*.

On peut aussi établir algébriquement ce point, en faisant usage des identités

$$\lambda_{i,j} \left(\frac{\partial u}{\partial w}, \dots \right) = \sum_1^h \lambda_{i,k} \left(\frac{\partial u}{\partial v}, \dots \right) \lambda_{k,j} \left(\frac{\partial v}{\partial w}, \dots \right)$$

qui permettent d'écrire les relations précédentes

$$\frac{\sum_{k,j} \lambda_{i,k} \left(\frac{\partial u}{\partial v}, \dots \right) \lambda_{k,j} \left(\frac{\partial v}{\partial w}, \dots \right) \alpha_j(w)}{\sum \lambda_{i,j} \left(\frac{\partial u}{\partial v}, \dots \right) \alpha_j(v)} = \frac{\sum_{k,j} \lambda_{i,k} \left(\frac{\partial u}{\partial v}, \dots \right) \lambda_{k,j} \left(\frac{\partial v}{\partial w}, \dots \right) \alpha_j(w)}{\sum \lambda_{i,j} \left(\frac{\partial u}{\partial v}, \dots \right) \alpha_j(v)}$$

($i = 2, \dots, h$).

En désignant par M la valeur commune de ces rapports on a les h relations linéaires et homogènes

$$\sum_k \lambda_{i,k} \left(\frac{\partial u}{\partial v}, \dots \right) \left[\sum_j \lambda_{k,j} \left(\frac{\partial v}{\partial w}, \dots \right) \alpha_j(w) - M \alpha_k(v) \right] = 0 \quad (i = 1, \dots, h),$$

d'où l'on conclut que les coefficients des $\lambda_{i,k} \left(\frac{\partial u}{\partial v}, \dots \right)$ sont tous nuls, c'est-à-dire précisément les équations entre v et w obtenues plus haut.

En résumé, nous avons déduit de la relation rationnelle donnée, compatible avec (a), un système rationnel (S)

$$(S) \quad \frac{\xi_1 \left(x, y, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots \right)}{\xi_1 \left(x_0, \varphi(u), \frac{1}{\varphi'}, \dots \right)} = \dots = \frac{\xi_h \left(x, y, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots \right)}{\xi_h \left(x_0, \varphi(u), \frac{1}{\varphi'}, \dots \right)}$$

d'équations compatibles avec (a), admettant la solution u , qui, pour $x = x_0$, vérifie la relation

$$y = \varphi(u),$$

où φ désigne une fonction rationnelle quelconque.

Les $(h - 1)$ équations du système (S), qui sont d'ordre au plus égal à p , ne sont pas nécessairement algébriquement distinctes : mais, comme elles équivalent à l'équation de définition d'un groupe, elles laissent arbitraire au plus une ou deux des dérivées $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

Le système précédent comprend donc au plus $p, (p - 1)$ ou $(p - 2)$ relations algébriquement distinctes. Elles sont toutes des conséquences nécessaires de l'équation du premier, deuxième ou troisième ordre qui définit le groupe, équation qu'on obtiendra par de simples éliminations.

19. L'examen de la transformation que subissent les ξ_i quand on pose $u = \varphi(v)$, φ demeurant arbitraire, conduit à préciser ces conclusions.

Considérons un terme $\psi(x, y) \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^{\alpha_2} \dots \left(\frac{\partial^p u}{\partial y^p}\right)^{\alpha_p}$ de l'un des polynomes $\xi_i \left(x, y, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots\right)$ et remplaçons-y $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \dots$ par leurs expressions

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= \varphi' \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \varphi'' \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \varphi' \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

déduites de $u = \varphi(v)$, où φ est arbitraire.

Nous obtenons d'abord le terme

$$\psi(x, y) \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)^{\alpha_2} \dots \left(\frac{\partial^p v}{\partial y^p}\right)^{\alpha_p}$$

analogue au terme initial, avec le coefficient

$$\varphi'^n \quad (n = \alpha_1 + \dots + \alpha_p).$$

Les autres termes se déduiront de celui-là en remplaçant une ou plusieurs fois $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ par $\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2$, $\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}$ par $\frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ ou $\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^3$, etc., c'est-à-dire en remplaçant *une dérivée au moins par une combinaison de dérivées d'ordre inférieur et conservant le poids* si l'on regarde $\frac{\partial^p v}{\partial y^p}$ comme de même *poids* p que $\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^p$.

Il résulte de là un moyen de ranger les éléments $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ dans un ordre déterminé : l'ordre normal. Dans tout élément $\xi_i \left(x, y, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots\right)$ nous choisirons un terme unique, dit *caractéristique*, d'après la règle suivante :

Dans l'ensemble des termes $\psi(x, y) \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial^p u}{\partial y^p}\right)^{\alpha_p}$, qui renferment la dérivée d'ordre le plus élevé p , on prendra ceux qui renferment cette dérivée au degré le plus grand; parmi ceux-là on prendra les termes qui renferment $\frac{\partial^{p-1} u}{\partial y^{p-1}}$ au degré le plus élevé (ce degré pouvant être nul) et *ainsi de suite*.

On rangera les ξ_i comme leurs termes caractéristiques quand on range ces derniers dans l'ordre décroissant des nombres entiers

$$\alpha_1 + \alpha_2 g + \dots + \alpha_p g^{p-1}$$

où g désigne un entier très grand, c'est-à-dire que le terme correspondant à

$$\beta_1 + \beta_2 g + \dots + \beta_p g^{p-1}$$

précède celui qui correspond à

$$\gamma_1 + \gamma_2 g + \dots + \gamma_p g^{p-1}$$

si la première des différences $\beta_p - \gamma_p, \beta_{p-1} - \gamma_{p-1}, \dots, \beta_1 - \gamma_1$ qui ne s'annule pas est positive, et seulement dans ce cas.

On remarquera en passant que *cette définition suppose que les termes caractéristiques de ξ_1, \dots, ξ_h sont différents. On peut toujours s'arranger pour qu'il en soit ainsi.*

La formule de transformation

$$\xi_j \left(x, y, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots \right) = \sum_{i=1}^h \lambda_{ji} \left(\frac{\partial u}{\partial v}, \dots \right) \xi_i \left(x, y, \frac{\partial v}{\partial y}, \dots \right)$$

nous montre que le terme caractéristique de $\xi_j \left(x, y, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots \right)$

$$\psi \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^{\alpha_2} \dots \left(\frac{\partial^p u}{\partial y^p} \right)^{\alpha_p},$$

qui donne, par la transformation $u = \varphi(v)$,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)^n \psi \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)^{\alpha_2} \dots \left(\frac{\partial^p v}{\partial y^p} \right)^{\alpha_p},$$

figure au second membre avec le coefficient $\lambda_{jj} \left(\frac{\partial u}{\partial v}, \dots \right)$ dans le produit $\lambda_{ij} \left(\frac{\partial u}{\partial v}, \dots \right) \xi_j \left(x, y, \frac{\partial v}{\partial y}, \dots \right)$.

Si l'on n'a pas

$$\lambda_{jj} \left(\frac{\partial u}{\partial v}, \dots \right) = \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)^n \quad (n = \alpha_1 + \dots + \alpha_n),$$

ce terme doit figurer dans les autres groupements $\lambda_{ji} \left(\frac{\partial u}{\partial v}, \dots \right) \xi_i \left(x, y, \frac{\partial v}{\partial y}, \dots \right)$. On aura donc, en désignant par σ_i son coefficient, *nécessairement constant*, dans $\xi_i \left(x, y, \frac{\partial v}{\partial y}, \dots \right)$ et remarquant qu'on a $\sigma_j = 1$,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)^n = \lambda_{j1} \sigma_1 + \lambda_{j2} \sigma_2 + \dots + \lambda_{jh} \sigma_h.$$

Il est clair qu'il suffit de remplacer simplement $\xi_i \left(x, y, \frac{\partial v}{\partial y}, \dots \right)$ par

$$\xi_i \left(x, y, \frac{\partial v}{\partial y}, \dots \right) - \sigma_i \xi_j \left(x, y, \frac{\partial v}{\partial y}, \dots \right) \quad [i=1, \dots, (j-1), (j+1), \dots, h]$$

et aussi $l_j \left(z, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots \right)$ par

$$l'_j = l_j + \sigma_1 l_1 + \dots + \sigma_{j-1} l_{j-1} + \sigma_{j+1} l_{j+1} + \dots + \sigma_h l_h$$

pour obtenir une identité

$$P = \sum l_i \xi_i = l_1 \xi'_1 + \dots + l_{j-1} \xi'_{j-1} + l_j \xi_j + l_{j+1} \xi'_{j+1} + \dots + l_h \xi'_h$$

qui permet de regarder les ξ' comme les coordonnées de P : *aucun de ces ξ' ne renferme plus le terme caractéristique de ξ_j .*

Si l'on range les coordonnées ξ_i du polynome P dans l'ordre normal de leurs coefficients caractéristiques supposés différents, la transformation

$$u = \varphi(v)$$

ne peut remplacer un $\xi_j(x, y, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots)$ que par des $\xi_i(x, y, \frac{\partial v}{\partial y}, \dots)$ dont l'indice i est égal ou supérieur à j , puisque leurs termes caractéristiques suivent nécessairement celui de ξ_j .

Les formules qui définissent la transformation linéaire des ξ_i s'écriront donc

$$\xi_i\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots\right) = \sum_{j=i}^h \lambda_{i,j} \left(\frac{\partial u}{\partial v}, \dots\right) \xi_j\left(x, y, \frac{\partial v}{\partial y}, \dots\right) \quad (i = 1, \dots, h).$$

En d'autres termes

$$\lambda_{i,j} = 0 \quad \text{pour} \quad i > j.$$

Si l'on se reporte alors aux identités

$$P\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots\right) = \sum_1^h l_i \left(z, \frac{\partial z}{\partial u}, \dots\right) \xi_i\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots\right)$$

et

$$X(\xi_i) = M \xi_i$$

d'où nous avons conclu le système

$$\frac{\xi_1\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots\right)}{\xi_1\left(x_0, \theta(u), \frac{1}{\theta'}, \dots\right)} = \dots = \frac{\xi_h\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots\right)}{\xi_h\left(x_0, \theta(u), \frac{1}{\theta'}, \dots\right)}$$

rationnel si $\theta(u)$ est rationnel, la dernière équation de ce système

$$\frac{\xi_{h-1}\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots\right)}{\xi_{h-1}\left(x_0, \theta, \frac{1}{\theta'}, \dots\right)} = \frac{\xi_h\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots\right)}{\xi_h\left(x_0, \theta, \frac{1}{\theta'}, \dots\right)}$$

donnera, par une transformation $u = \varphi(v)$, où φ est arbitraire, une équation de

même forme

$$\frac{\xi_h \left(x, y, \frac{\partial v}{\partial y}, \dots \right)}{\xi_h \left(x, y, \frac{\partial v}{\partial y}, \dots \right)} = \mathbf{B}(v);$$

son premier membre se présente donc comme un polynôme à deux coordonnées et l'équation définit par suite la solution u aux transformations près d'un groupe Γ .

Si l'on considère de façon générale l'équation

$$\xi_{h-1} \left(x, y, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots \right) = \mathbf{A}(u) \xi_h \left(x, y, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots \right),$$

toute transformation $u = \varphi(v)$ la change en une équation

$$\xi_{h-1} \left(x, y, \frac{\partial v}{\partial y}, \dots \right) = \mathbf{B}(v) \xi_h \left(x, y, \frac{\partial v}{\partial y}, \dots \right)$$

et l'on a

$$\mathbf{A}(u) = \frac{\lambda_{h-1, h-1} \left(\frac{\partial u}{\partial v}, \dots \right)}{\lambda_{h, h} \left(\frac{\partial u}{\partial v}, \dots \right)} \mathbf{B}(v) + \frac{\lambda_{h-1, h} \left(\frac{\partial u}{\partial v}, \dots \right)}{\lambda_{h, h} \left(\frac{\partial u}{\partial v}, \dots \right)}.$$

On a par suite, pour $\mathbf{B}(v) \equiv \mathbf{A}(v)$, l'équation de définition du groupe correspondant. La propriété fondamentale du groupe se vérifie aisément, en tenant compte des formules de transformation des $\lambda_{i,j}$ et du fait qu'on a (puisque $\lambda_{j,j}$ est toujours une puissance de $\frac{\partial u}{\partial v}$)

$$\lambda_{h-1, h-1} \left(\frac{\partial u}{\partial w}, \dots \right) = \lambda_{h-1, h-1} \left(\frac{\partial u}{\partial v}, \dots \right) \lambda_{h-1, h-1} \left(\frac{\partial v}{\partial w}, \dots \right).$$

L'équation d'ordre minimum ainsi obtenue entraîne en général toutes les autres équations du système (S). Il peut y avoir une exception lorsque les coordonnées $\xi_h, \xi_{h-1}, \xi_{h-2}$ sont des puissances de $\left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)$, le groupe étant de la forme $u' = \epsilon u + b$ avec $\epsilon^n = 1$. Nous remettons à un autre travail l'établissement de ce point particulier.

Exemple. — Nous choisirons l'exemple invoqué par M. Vessiot (1).

L'équation

$$(a) \quad \mathbf{X}(z) = \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} + y \mathbf{M}(x) \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

(1) *Annales de l'École Normale*, 1904, p. 56.

où M est rationnel, est compatible avec

$$(1) \quad P(z) = y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + y^2 \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^3 + \frac{\partial z}{\partial y} f(z) = 0$$

et l'on a, en vertu des équations

$$\begin{aligned} X \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) + M(x) \frac{\partial z}{\partial y} &= 0, \\ X \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) + 2M(x) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= 0, \end{aligned}$$

l'identité

$$X(P) = -MP.$$

Faisons maintenant dans le polynôme $P(z)$ la transformation

$$z = \varphi(u)$$

où φ demeure arbitraire ; on en déduira

$$P(z) = \varphi' y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \varphi'^3 y^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^3 + \varphi'' y \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \varphi' f(\varphi) \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Les quatre expressions φ' , φ'^3 , φ'' , $\varphi' f(\varphi)$ sont linéairement indépendantes si φ est arbitraire lorsque $f(\varphi)$ n'est pas une constante ; il en est de même des expressions

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad y^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^3, \quad y \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y}.$$

On peut donc choisir ces dernières pour *coordonnées* du polynôme P et l'on vérifie immédiatement les identités

$$\begin{aligned} X \left(y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) &= -M y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ X \left[y^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^3 \right] &= -M y^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^3, \\ X \left[y \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] &= -M y \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2, \\ X \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -M \frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned}$$

Les quatre coordonnées sont d'ailleurs classées dans l'*ordre normal* défini plus haut.

Les équations qui définissent, par exemple, la solution *principale au point*

$x = x_0$ s'écriront donc

$$\frac{y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}{0} = \frac{y^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^3}{u^2} = \frac{y \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}{u} = \frac{\partial u}{\partial y};$$

la dernière d'entre elles donne pour *équation réduite*

$$y \frac{\partial u}{\partial y} = u;$$

elle définit bien u aux transformations près du groupe $u_1 = cu$ et l'on reconnaît immédiatement que *toutes les autres sont vérifiées en même temps*.

Nous pouvons donc conclure de l'existence de la relation (1), compatible avec (a) et vérifiant l'identité

$$X(P) = -MP,$$

celle d'une solution u de la même équation *associée* au groupe

$$u_1 = cu$$

et définie par

$$y \frac{\partial u}{\partial y} = u.$$

Cette solution est donnée par

$$u = y e^{-\int_{x_0}^x M(x) dx}.$$

On a vu en outre que la solution z de l'équation initiale

$$P(z) = y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + y^2 \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^3 + \frac{\partial z}{\partial y} f(z) = 0$$

[qui n'est d'ailleurs pas précisée davantage : elle est commune à (1) et à (a)] est liée à u par l'équation différentielle du second ordre

$$\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) 0 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^3 u^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right) u + \frac{\partial z}{\partial u} f(z) = 0.$$

Remarquons enfin en terminant que *le groupe de rationalité de l'équation*

$$\frac{\partial z}{\partial x} + yM(x) \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

n'est pas nécessairement le groupe

$$z_1 = cz;$$

nous voyons en effet que si l'on prend, par exemple,

$$\mathbf{M}(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x - \alpha},$$

l'équation (a) admet la solution *rationnelle*

$$z = \frac{y}{x(x - \alpha)^2};$$

mais il convient d'observer que *la solution u est alors aussi une fonction rationnelle.*

Dans tous les cas on sait qu'en définissant une solution *principale en un point* on a, à des *transformations connues près*, la transcendante *la plus simple* qui satisfait à l'équation donnée.

On est donc toujours, par la méthode précédente, en possession de la solution la plus simple, mais son groupe de rationalité n'est pas toujours celui qui est intervenu dans sa formation.

(A suivre.)

