SUR

# LA THÉORIE DES TOURBILLONS,

PAR M. W. STEKLOFF.

1. Supposons qu'un liquide incompressible parfait soit contenu dans un vase fermé solide qu'il remplit entièrement.

Désignons par $\xi$, $\eta$, $\zeta$ les axes des coordonnées rectangulaires fixes.

On peut imaginer que le vase solide fait partie d'un système invariable que nous désignerons par (A).

Envisageons trois axes rectangulaires $x$, $y$, $z$, ayant un point O pour origine, invariablement liés au corps (A).

Le mouvement du vase ou, ce qui revient au même, du corps solide (A) se compose d'un mouvement de translation, défini par le mouvement du point O du corps (A), et d'un mouvement de rotation du corps (A) autour du point O.

Désignons par $u_0$, $v_0$, $w_0$ les composantes suivant les axes $x$, $y$, $z$ de la vitesse du point O; par $p$, $q$ et $r$ les composantes suivant les mêmes axes de la vitesse angulaire $\Omega$ de rotation du corps (A) autour du point O.

Les quantités $u_0$, $v_0$, $w_0$, $p$, $q$, $r$, données en fonction du temps $t$, déterminent complètement le mouvement du vase.

Désignons maintenant par $u$, $v$, $w$ les composantes suivant les axes mobiles $x, y, z$ de la vitesse absolue V du point $(x, y, z)$ du liquide remplissant le vase; par $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ les composantes suivant les mêmes axes du tourbillon $\Omega$.

On a

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = \omega_1, \\ &\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = \omega_2, \\ &\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \omega_3 \end{aligned}\right.$$

et

$$(2)\qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

car, d'après l'hypothèse, le liquide est incompressible.

Désignons par (S) la surface du vase; par $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les cosinus directeurs de la normale extérieure à (S) avec les axes des $x, y, z$.

Les vitesses $u$, $v$, $w$ du liquide doivent satisfaire à une condition à la paroi du vase [sur (S)] qu'on obtient en exprimant que les composantes suivant la normale $n$ de la vitesse de chaque point de la paroi et celles du point correspondant du liquide doivent être égales les unes aux autres en tous les points de la surface (S).

On obtient ainsi l'équation suivante :

$$u\alpha + v\beta + w\gamma = \varphi(x, y, z, t) \quad \text{sur (S)}, \tag{3}$$

où l'on a posé

$$\varphi(x, y, z, t) = (u_0 + qz - ry)\alpha + (v_0 + rx - pz)\beta + (w_0 + py - qx)\gamma. \tag{4}$$

Dans le cas particulier d'un vase fixe, on aura

$$u_0 = v_0 = w_0 = p = q = r = 0,$$
$$\varphi(x, y, z, t) = 0,$$

et l'équation (3) devient

$$u\alpha + v\beta + w\gamma = 0 \quad \text{sur (S)}. \tag{5}$$

2. Nous pouvons maintenant énoncer le problème général de la théorie des tourbillons comme il suit :

*Les tourbillons* $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ *du liquide remplissant le vase, animé d'un mouvement donné, étant donnés à un instant en fonction de* $x$, $y$, $z$, *il faut en déduire les vitesses* $u$, $v$, $w$.

On ne considère ordinairement que deux cas particuliers de ce problème général :

1° Le cas d'un liquide indéfini;
2° Le cas d'un vase fermé fixe.

Le problème n'est résolu que dans le premier cas (liquide indéfini). Quant au second cas, on le ramène au premier par un artifice bien connu (*voir*, par exemple, H. Poincaré, *Théorie des Tourbillons*, p. 113; P. Appell, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. III, p. 442).

Or, les expressions des vitesses ainsi obtenues ne représentent pas, à proprement parler, la solution du problème; il suffit de rappeler qu'elles exigent la connaissance de vitesses $u$, $v$, $w$ à la paroi du vase, tandis que ces vitesses ne font pas partie des données qui sont seulement les tourbillons (*voir* P. Appell, *loc. cit.*, p. 445).

Je vais compléter, dans ce qui va suivre, ce défaut et indiquer tout d'abord une méthode simple pour résoudre le problème général énoncé au début de ce numéro; j'indiquerai ensuite certains cas, où le problème se résout d'une manière plus simple à l'aide de considérations particulières, et, enfin, quelques applications de ce problème fondamental de la théorie des tourbillons à la solution de certaines questions d'Hydrodynamique.

3. La détermination des vitesses $u$, $v$, $w$ se ramène à l'intégration des équations aux dérivées partielles (1) et (2), jointes à la condition aux limites (3), où $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ sont les fonctions connues de $x$, $y$, $z$ vérifiant identiquement la relation suivante :

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial x}+\frac{\partial\omega_2}{\partial y}+\frac{\partial\omega_3}{\partial z}=0. \tag{6}$$

Rappelons tout d'abord un cas particulier, où le problème se résout sans difficulté.

Supposons que les fonctions $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ satisfassent à la condition

$$\omega_1\alpha+\omega_2\beta+\omega_3\gamma=0 \qquad \text{sur (S)}. \tag{7}$$

Posons

$$\left\{\begin{aligned} S_1&=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\frac{\omega'_3}{r}d\tau'-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int\frac{\omega'_2}{r}d\tau',\\ S_2&=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int\frac{\omega'_1}{r}d\tau'-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{\omega'_3}{r}d\tau',\\ S_3&=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{\omega'_2}{r}d\tau'-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\frac{\omega'_1}{r}d\tau'\end{aligned}\right. \tag{8}$$

et

$$\left\{\begin{aligned} u&=S_1+\frac{\partial P}{\partial x},\\ v&=S_2+\frac{\partial P}{\partial y},\\ w&=S_3+\frac{\partial P}{\partial z}.\end{aligned}\right. \tag{9}$$

Nous désignons par $r$ la distance de deux points $(x, y, z)$ et $(x'\,y'\,z')$ du domaine (D), limité par la surface fermée (S); par $\omega'_1$, $\omega'_2$, $\omega'_3$ ce que deviennent $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$, lorsqu'on y remplace $x$, $y$, $z$ respectivement par $x'$, $y'$, $z'$; par $d\tau'$ l'élément de volume du domaine (D), auquel s'étendent les intégrales de seconds membres des équations (8), prises par rapport aux variables $x'$, $y'$, $z'$.

Les expressions (9) de $u$, $v$ et $w$ vérifient les équations (3), quelle que soit la fonction P, pourvu que $\omega_1$, $\omega_2$ et $\omega_3$ satisfassent aux conditions (6) et (7).

Substituant (9) dans (4), on obtient cette équation en P :

$$\Delta P=\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}=0 \qquad \text{à l'intérieur de (S)}. \tag{10}$$

Quant à la condition (5), elle devient

$$\frac{\partial P}{\partial x}\alpha + \frac{\partial P}{\partial y}\beta + \frac{\partial P}{\partial z}\gamma + S_1\alpha + S_2\beta + S_3\gamma - \varphi = 0 \qquad \text{sur (S)}.$$

En désignant par

$$\frac{\partial P_i}{\partial n}$$

la dérivée normale intérieure de la fonction P sur (S), par $f$ la fonction connue

$$f = \varphi - S_1\alpha - S_2\beta - S_3\gamma,$$

l'équation précédente devient

$$\frac{\partial P_i}{\partial n} = f \qquad \text{sur (S)}. \tag{11}$$

Il est évident que $f$ satisfait à la condition

$$\int f\,ds = 0,$$

l'intégrale étant étendue à la surface (S) tout entière.

La détermination d'une seule fonction inconnue P se ramène à l'intégration de l'équation (10) de Laplace jointe à la condition aux limites (11), c'est-à-dire à la solution du problème fondamental d'Hydrodynamique (problème de C. Neumann).

Ce problème est résolu maintenant pour toutes les surfaces fermées jouissant de certaines propriétés très générales [*voir*, par exemple, mon Mémoire : *Sur les problèmes fondamentaux de la Physique mathématique* (*Annales de l'École Normale,* 3e série, t. XIX, mai 1902, p. 191)]. La fonction P étant ainsi trouvée, on obtient les expressions cherchées des vitesses $u$, $v$, $w$ à l'aide des équations (9).

4. Montrons maintenant que *le cas général du problème en question, où* $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ *ne satisfont pas à la condition* (7), *se ramène à celui du numéro précédent.*

Désignons par $u_1$, $v_1$, $w_1$ trois fonctions quelconques des variables $x$, $y$, $z$, continues avec leurs dérivées partielles du premier ordre en tous les points du domaine (D), limité par (S) [même aux points de la surface (S)], et posons

$$\left\{\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{\partial w_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial z},\\ \rho_2 &= \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial w_1}{\partial x},\\ \rho_3 &= \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y},\end{aligned}\right. \tag{12}$$

$$\sigma_1 = \omega_1 - \rho_1, \qquad \sigma_2 = \omega_2 - \rho_2, \qquad \sigma_3 = \omega_3 - \rho_3. \tag{13}$$

Choisissons les fonctions $u_1$, $v_1$, $w_1$, arbitraires jusqu'à présent, de façon qu'on ait

(14) $$\sigma_1\alpha + \sigma_2\beta + \sigma_3\gamma = 0 \qquad \text{sur (S)}.$$

Soit

$$f(x, y, z) = 0$$

l'équation de la surface (S).

Supposons que la fonction $f(x, y, z)$ admette les dérivées

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z},$$

bien déterminées et continues en tous les points de (S).

On a

$$\alpha = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\Delta}, \qquad \beta = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\Delta}, \qquad \gamma = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\Delta},$$

où

$$\Delta = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}.$$

Cela posé, l'équation (14) s'écrira

(15) $$\frac{\partial f}{\partial x}\sigma_1 + \frac{\partial f}{\partial y}\sigma_2 + \frac{\partial f}{\partial z}\sigma_3 = 0 \qquad \text{sur (S)}.$$

5. Il existe une infinité de fonctions $u_1$ $v_1$ $w_1$ satisfaisant à cette seule condition. On pourra les choisir, en particulier, de la manière suivante.

Prenons arbitrairement deux fonctions déterminées

$$\psi(x, y, z) \quad \text{et} \quad \theta(x, y, z),$$

et posons

($a$) $$u_1 = \psi(x, y, z) \qquad v_1 = \theta(x, y, z),$$

$$F(x, y, z) = \omega_1\frac{\partial f}{\partial x} + \omega_2\frac{\partial f}{\partial y} + \omega_3\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \theta}{\partial x}\right).$$

Les fonctions $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$, $f$, $\psi$, $\theta$ étant connues, il en est de même de la fonction $F(x, y, z)$.

L'équation (15) devient

(16) $$\frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial w_1}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} + F(x, y, z) = 0 \qquad \text{sur (S)}$$

et ne contient qu'une seule fonction inconnue $w_1$.

Considérons cette équation comme une équation différentielle linéaire aux dérivées partielles du premier ordre et cherchons une fonction V telle que $w_1$ définie par l'équation

$$V(w_1, x, y, z) = 0$$

soit une intégrale de l'équation (16).

On obtient cette équation en V, considérée comme une fonction inconnue de quatre variables $w_1$, $x, y, z$ :

$$\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial w_1}F(x, y, z) = 0. \tag{17}$$

Le problème se ramène à l'intégration des équations différentielles ordinaires de la forme

$$\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{dy}{-\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{dz}{0} = \frac{dw_1}{-F(x, y, z)},$$

qui admettent deux intégrales évidentes :

$$z = c_1, \qquad f(x, y, z) = c_2,$$

$c_1$ et $c_2$ désignant des constantes arbitraires.

De ces équations on tire

$$y = \varphi(x, c_1, c_2).$$

Substituant cette expression de $y$, ainsi que $z = c_1$, dans l'équation

$$dw_1 = -\frac{F(x, y, z)}{\frac{\partial f}{\partial y}}dx,$$

on trouve

$$dw_1 = \Phi(x, c_1, c_2)\,dx,$$

d'où, en intégrant,

$$w_1 = \int \Phi(x, c_1, c_2)\,dx + c_3 = \Pi(x, c_1, c_2) + c_3$$

et enfin

$$w_1 - \Pi[x, z, f(x, y, z)] = c_3,$$

$c_3$ désignant une nouvelle constante arbitraire.

On obtient une solution de l'équation (17) en posant

$$V = w_1 - \Pi[x, y, f(x, y, z)].$$

Donc

$$w_1 = \mathrm{H}[x, y, f(x, y, z)] \tag{b}$$

représente une solution de l'équation (16).

En entendant, dans (12) et (13), par $u_1$, $v_1$, $w_1$ les fonctions, définies de la manière tout à l'heure indiquée, on trouve les expressions de $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$ qui vérifient identiquement la relation (14) [ou (15)].

**6.** Posons maintenant

$$u = \mathrm{U} + u_1, \qquad v = \mathrm{V} + v_1, \qquad w = \mathrm{W} + w_1. \tag{18}$$

Le problème se ramène à la détermination de trois fonctions inconnues U, V et W.

Substituant (18) dans (1) et (2), on trouve

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z} &= \sigma_1, \\ \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial x} &= \sigma_2, \\ \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z} &= \sigma_3, \end{aligned}\right. \tag{19}$$

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial z} + \mathrm{H} = 0, \tag{20}$$

où l'on a posé

$$\mathrm{H} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z}. \tag{21}$$

Quant à la condition aux limites (3), elle devient

$$\mathrm{U}\alpha + \mathrm{V}\beta + \mathrm{W}\gamma + \mu = 0 \qquad \text{sur (S)}, \tag{22}$$

où

$$\mu = u_1\alpha + v_1\beta + w_1\gamma - \varphi(x, y, z). \tag{23}$$

**7.** Les équations (19) sont de la même forme que celles de (1), mais les fonctions $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$, qui vérifient évidemment la relation

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_3}{\partial z} = 0,$$

satisfont ici à la condition

$$\sigma_1\alpha + \sigma_2\beta + \sigma_3\gamma = 0 \qquad \text{sur (S)}.$$

On peut donc poser, en suivant une voie indiquée au n° 3,

$$(24)\qquad \begin{cases} U = S_1 + \dfrac{\partial P}{\partial x}, \\ V = S_2 + \dfrac{\partial P}{\partial y}, \\ W = S_3 + \dfrac{\partial P}{\partial z}, \end{cases}$$

où

$$(25)\qquad \begin{cases} S_1 = \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\partial}{\partial y}\displaystyle\int \dfrac{\sigma'_3}{r}\,d\tau' - \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\partial}{\partial z}\displaystyle\int \dfrac{\sigma'_2}{r}\,d\tau', \\ S_2 = \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\partial}{\partial z}\displaystyle\int \dfrac{\sigma'_1}{r}\,d\tau' - \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int \dfrac{\sigma'_3}{r}\,d\tau', \\ S_3 = \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int \dfrac{\sigma'_2}{r}\,d\tau' - \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\partial}{\partial y}\displaystyle\int \dfrac{\sigma'_1}{r}\,d\tau'. \end{cases}$$

Substituant (24) dans (20), on obtient cette équation pour la fonction inconnue P :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + H = \Delta P + H = 0.$$

En posant enfin

$$(26)\qquad P = Q + \frac{1}{4\pi}\int \frac{H'}{r}\,d\tau' = Q + R,$$

on trouve

$$(27)\qquad \Delta Q = 0 \qquad \text{à l'intérieur de (S).}$$

La condition (22) devient alors

$$\frac{\partial Q_i}{\partial n} + \frac{\partial R_i}{\partial n} + S_1\alpha + S_3\beta + S_3\gamma + \mu = 0 \qquad \text{sur (S),}$$

ou

$$(28)\qquad \frac{\partial Q_i}{\partial n} = f \qquad \text{sur (S),}$$

si l'on pose, pour plus de simplicité,

$$-f = \frac{\partial R_i}{\partial n} + S_1\alpha + S_2\beta + S_3\gamma + \mu.$$

On a

$$\int \frac{\partial R_i}{\partial n}\,ds = \int \Delta R\,d\tau = -\int H\,d\tau,$$

$$\int (S_1\alpha + S_2\beta + S_3\gamma)\,ds = 0$$

et

$$\int \mu \, ds = \int (u_1 \alpha + v_1 \beta + w_1 \gamma) \, ds = \int \mathbf{H} \, d\tau,$$

car

$$\int \varphi \, ds = 0.$$

Il s'ensuit que

$$\int f \, ds = 0. \tag{29}$$

Le problème est donc ramené à la détermination d'une seule fonction inconnue Q à l'aide des équations (27) et (28), où $f$ est une fonction connue de $x$, $y$, $z$ satisfaisant à la condition (29). C'est le problème de C. Neumann.

La fonction Q étant déterminée par l'une des méthodes connues, on aura, eu égard à (18), (24), (25) et (26),

$$\left\{\begin{aligned} u &= \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int \frac{\sigma_3'}{r} d\tau' - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int \frac{\sigma_2'}{r} d\tau' + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int \frac{\mathrm{H}'}{r} d\tau' + \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x} + u_1, \\ v &= \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int \frac{\sigma_1'}{r} d\tau' - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int \frac{\sigma_3'}{r} d\tau' + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int \frac{\mathrm{H}'}{r} d\tau' + \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y} + v_1, \\ w &= \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int \frac{\sigma_2'}{r} d\tau' - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int \frac{\sigma_1'}{r} d\tau' + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int \frac{\mathrm{H}'}{r} d\tau' + \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial z} + w_1, \end{aligned}\right. \tag{30}$$

où $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$, $u_1$, $v_1$, $w_1$, H sont les fonctions connues de $x$, $y$, $z$, définies par les formules ($a$), ($b$), (12), (13) et (21).

8. *Les expressions de vitesses $u$, $v$, $w$, déduites de la manière indiquée, ne dépendent que de valeurs données de $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$* [ainsi que de la surface (S) du vase] *et satisfont à toutes les conditions requises du problème,* c'est-à-dire aux équations (1) et (2), ainsi qu'à la condition aux limites (3) du n° 2.

Remarquons que les fonctions $u$, $v$, $w$, définies par les équations (30), dépendent formellement de deux fonctions arbitraires $\psi$ et $\theta$ [1], mais en réalité *elles ont toujours les expressions tout à fait déterminées ne contenant rien d'arbitraire, car, comme on sait, les équations* (1) *et* (2), *jointes à la condition* (3), *n'admettent qu'une seule solution et rien qu'une.*

---

[1] On pourrait introduire une troisième fonction arbitraire, en prenant pour la solution de l'équation (17), au lieu de

$$\mathrm{V} = w_1 - \mathrm{H}[x, y, f(x, y, z)],$$

la fonction suivante,

$$\mathrm{V} = \Phi\{z, f(x, y, z), w_1 - \mathrm{H}[x, y, f(x, y, z)]\},$$

où $\Phi$ est une fonction arbitraire.

On pourra profiter avec avantage de la présence de fonctions arbitraires $\psi$, $\theta$ dans les expressions (30) pour rendre le calcul le plus simple possible, en les choisissant convenablement dans chaque cas particulier.

On peut poser, par exemple,

$$u_1 = \psi(x, y, z) = 0, \qquad v_1 = \theta(x, y, z) = 0.$$

L'équation (16) devient alors

$$\frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial w_1}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} + \omega_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \omega_2 \frac{\partial f}{\partial y} + \omega_3 \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Si $\omega_3 = 0$, on a

$$\left(\frac{\partial w_1}{\partial x} + \omega_2\right)\frac{\partial f}{\partial y} - \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} - \omega_1\right)\frac{\partial f}{\partial x} = 0,$$

l'équation qu'on peut vérifier en posant

$$(31) \qquad \frac{\partial w_1}{\partial x} = -\omega_2, \qquad \frac{\partial w_1}{\partial y} = \omega_1.$$

Ce cas mérite une attention particulière.

On obtient, en vertu de (31), (12) et (13),

$$\rho_1 = \frac{\partial w_1}{\partial y} = \omega_1, \qquad \rho_2 = -\frac{\partial w_1}{\partial x} = \omega_2, \qquad \rho_3 = 0,$$
$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0.$$

Les équations (19) montrent que, dans le cas considéré, $u$, $v$ et $w$ sont les dérivées par rapport à $x, y, z$ d'une seule fonction P, vérifiant l'équation

$$(32) \qquad \Delta P + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0 \quad \text{à l'intérieur de (S)}$$

jointe à la condition

$$(33) \qquad \frac{\partial P_i}{\partial n} + w_1\gamma - \varphi(x, y, z) = 0 \quad \text{sur (S)}.$$

Le problème se ramène à la détermination d'une seule fonction P satisfaisant aux conditions (32) et (33), c'est-à-dire à la solution du problème de C. Neumann.

La fonction P étant déterminée, on trouve

$$u = \frac{\partial P}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial P}{\partial y}, \qquad w = \frac{\partial P}{\partial z} + w_1,$$

où $w_1$ est une fonction, définie par les équations

$$\frac{\partial w_1}{\partial x} = -\omega_2, \qquad \frac{\partial w_1}{\partial y} = \omega_1, \tag{34}$$

qui sont toujours compatibles, car $\omega_1$ et $\omega_2$ satisfont à la relation

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \omega_2}{\partial y} = 0.$$

On peut prendre pour $w_1$ l'expression définie par la quadrature suivante :

$$w_1 = \int (\omega_1\, dy - \omega_2\, dx). \tag{35}$$

9. Les recherches précédentes montrent que la connaissance de la distribution des tourbillons, c'est-à-dire la connaissance des expressions des tourbillons $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ en fonction de $x$, $y$, $z$ et $t$, suffit pour déterminer complètement le mouvement d'un liquide incompressible contenu dans un vase solide fermé, animé d'un mouvement arbitrairement donné.

Pour que les expressions $u$, $v$, $w$, déterminées de la manière indiquée plus haut, représentent en effet les vitesses du liquide, il faut choisir convenablement les fonctions $\omega_1$, $\omega_2$ et $\omega_3$, à savoir de telle façon que les équations fondamentales d'Hydrodynamique soient satisfaites.

Il est aisé de s'assurer que ces équations, sous les notations adoptées dans ce travail, s'écriront comme il suit :

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial t} + \omega_2(w - py + qx) - \omega_3(v - rx + pz),\\
\frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial t} + \omega_3(u - qz + ry) - \omega_1(w - py + qx),\\
\frac{\partial T}{\partial z} &= \frac{\partial w}{\partial t} + \omega_1(v - rx + pz) - \omega_2(u - qz + ry),
\end{aligned}\right. \tag{36}$$

où l'on a posé

$$\left\{\begin{aligned}
T &= U - P - \frac{V^2}{2} + u(u_0 + qz - ry) + v(v_0 + rx - pz) + w(w_0 + py - qx),\\
V^2 &= u^2 + v^2 + w^2,
\end{aligned}\right. \tag{37}$$

P désignant la pression hydrodynamique au point $x, y, z$ du liquide (à densité *un*), U le potentiel des forces agissant sur les points du liquide.

En entendant, dans les équations (36), par $u$, $v$ et $w$ les fonctions définies à l'aide de fonctions $\omega_1$, $\omega_2$ et $\omega_3$ par les formules (30), on peut dire que ces formules représentent une solution des équations d'Hydrodynamique toutes les fois que les fonctions $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ satisfont aux conditions

$$(38)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial\omega_1}{\partial t}+\frac{\partial\omega_1}{\partial x}(u-qz+ry)+\frac{\partial\omega_1}{\partial y}(v-rx+pz)+\frac{\partial\omega_1}{\partial z}(w-py+qx)\\
&\quad=\omega_1\frac{\partial u}{\partial x}+\omega_2\frac{\partial u}{\partial y}+\omega_3\frac{\partial u}{\partial z}+\omega_2 r-\omega_3 q,\\
&\frac{\partial\omega_2}{\partial t}+\frac{\partial\omega_2}{\partial x}(u-qz+ry)+\frac{\partial\omega_2}{\partial y}(v-rx+pz)+\frac{\partial\omega_2}{\partial z}(w-py+qx)\\
&\quad=\omega_1\frac{\partial v}{\partial x}+\omega_2\frac{\partial v}{\partial y}+\omega_3\frac{\partial v}{\partial z}+\omega_3 p-\omega_1 r,\\
&\frac{\partial\omega_3}{\partial t}+\frac{\partial\omega_3}{\partial x}(u-qz+ry)+\frac{\partial\omega_3}{\partial y}(v-rx+pz)+\frac{\partial\omega_3}{\partial z}(w-py-qx)\\
&\quad=\omega_1\frac{\partial w}{\partial x}+\omega_2\frac{\partial w}{\partial y}+\omega_3\frac{\partial w}{\partial z}+\omega_1 q-\omega_2 p,
\end{aligned}\right.$$

$u$, $v$, $w$ étant des fonctions définies par les équations (30).

La solution du problème du mouvement d'un liquide incompressible, remplissant entièrement un vase solide, se ramène à la détermination de quatre fonction

$$\omega_1,\quad \omega_2,\quad \omega_3,\quad Q$$

satisfaisant aux équations (38), (6), (27) et (28).

Ces fonctions étant déterminées d'une manière quelconque, nous trouverons l'expression de T (37), ou, ce qui revient au même, la pression hydrodynamique à l'aide d'une quadrature, et les vitesses $u$, $v$, $w$ du liquide à l'aide des équations (30).

Les équations (38) peuvent être considérées comme une certaine transformation des équations fondamentales d'Hydrodynamique, qu'on obtient en introduisant au lieu des inconnues

$$u,\quad v,\quad w\quad \text{(les vitesses du liquide)}\quad \text{et}\quad P\quad \text{(la pression)}$$

les nouvelles inconnues

$$\omega_1,\quad \omega_2,\quad \omega_3\quad \text{(les tourbillons)}\quad \text{et}\quad Q,$$

liées les unes aux autres par les relations (30) et (36).

On voit, de ce qui précède, que *la connaissance de la distribution des tourbillons détermine complètement le mouvement du liquide.*

On peut donc prendre la théorie des tourbillons pour le point de départ des recherches sur divers cas possibles du mouvement d'un liquide incompressible, remplissant un vase quelconque fermé, animé d'un mouvement quelconque, en faisant des hypothèses convenables sur la distribution des tourbillons dans le liquide.

La méthode que nous venons d'indiquer conduit souvent à la solution fort simple de certains problèmes de l'espèce tout à l'heure mentionnée, ce que je vais montrer à certains exemples.

10. Supposons, par exemple, que le vase solide soit un cylindre $(\sigma)$, de révolution autour de l'axe des $z$; soient R le rayon, $2l$ la hauteur de ce cylindre. Imaginons un liquide remplissant entièrement le cylindre $(\sigma)$, dans lequel *toutes les lignes de tourbillons sont des cercles situés dans des plans perpendiculaires à l'axe des $z$.*

Introduisons, au lieu de coordonnées rectangulaires $x$, $y$, $z$, les coordonnées semi-polaires $\rho$, $\theta$ et $z$, en posant

$$x = \rho\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\theta. \tag{39}$$

Considérons un cas du mouvement du liquide, où les tourbillons $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ s'expriment comme il suit :

$$\omega_1 = -\Omega\sin\theta, \qquad \omega_2 = \Omega\cos\theta, \qquad \omega_3 = 0, \tag{40}$$

$\Omega$ désignant une fonction ne dépendant que de variables $\rho$, $z$ et $t$ (c'est-à-dire ne dépendant pas de $\theta$).

En remarquant que, dans le cas considéré,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\omega_1}{\partial x} &= -\frac{\partial\Omega}{\partial\rho}\sin\theta\cos\theta + \Omega\frac{\sin\theta\cos\theta}{\rho},\\
\frac{\partial\omega_2}{\partial y} &= \phantom{-}\frac{\partial\Omega}{\partial\rho}\sin\theta\cos\theta - \Omega\frac{\sin\theta\cos\theta}{\rho},
\end{aligned}$$

on en conclut que

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial x} + \frac{\partial\omega_2}{\partial y} = 0,$$

c'est-à-dire que $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ satisfont à la condition (6).

Formons maintenant les équations (34) qui déterminent la fonction $w_1$, en supposant que $w_1$ ne dépend pas de $\theta$.

On trouve, en vertu de (40),

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial w_1}{\partial x} &= \frac{\partial w_1}{\partial\rho}\cos\theta = -\Omega\cos\theta,\\
\frac{\partial w_1}{\partial y} &= \frac{\partial w_1}{\partial\rho}\sin\theta = -\Omega\sin\theta.
\end{aligned}\right. \tag{41}$$

On peut donc poser

$$w_1 = -\int\Omega\,d\rho. \tag{42}$$

Les équations (41), (12) et (13) donnent

$$p_1 = -\Omega \sin\theta, \qquad p_2 = -\cos\theta, \qquad p_3 = 0,$$
$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0.$$

Les équations (24) deviennent alors

$$U = \frac{\partial P}{\partial x}, \qquad V = \frac{\partial P}{\partial y}, \qquad W = \frac{\partial P}{\partial z},$$

car, dans le cas considéré,

$$S_1 = S_2 = S_3 = 0.$$

On trouve donc, eu égard à (18),

$$(43) \qquad u = \frac{\partial P}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial P}{\partial y}, \qquad w = \frac{\partial P}{\partial z} - \int \Omega\, d\rho.$$

Quant à la fonction P, elle satisfait à l'équation

$$(44) \qquad \Delta P - \int \frac{\partial \Omega}{\partial z} d\rho = 0 \qquad \text{à l'intérieur de } (\sigma)$$

et aux conditions suivantes :

$$(45) \qquad \frac{\partial P}{\partial \rho} = (u_0 + zq)\cos\theta + (v_0 - zp)\sin\theta$$

en tous les points de la surface latérale du cylindre (pour $\rho = R$),

$$(46) \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = w_0 + \int \Omega\, d\rho - \rho(q\cos\theta - p\sin\theta)$$

en tous les points de deux bases du cylindre $(\sigma)$ (pour $z = +l$ et pour $z = -l$).

Les équations (45) et (46) résultent immédiatement de l'équation (22) du n° 6.

Quant à l'équation (44), elle s'exprime en coordonnées semi-polaires comme il suit :

$$(47) \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2}\frac{1}{\rho^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \frac{\partial P}{\partial \rho}\frac{1}{\rho} - \int \frac{\partial \Omega}{\partial z} d\rho = 0.$$

Toutes les fois que la fonction $\Omega$ de variables $\rho$, $z$ et $t$ sera connue, le problème

---

(1) Nous supposons que l'origine des coordonnées mobiles $x, y, z$ soit située au milieu de l'axe de révolution du cylindre $(\sigma)$.

se ramène à la solution du problème de C. Neumann pour un cylindre de révolution.

**11.** Or, la fonction $\Omega$ ne peut être donnée arbitrairement. Elle doit être choisie de telle façon que les équations (38) soient satisfaites.

Transformons ces équations aux variables $\rho$, $\theta$, $z$ en tenant compte des expressions (40) et (43) de $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ et $u$, $v$ et $w$.

On trouve, en tenant compte des deux premières des équations (38),

$$\left\{\begin{array}{l} S\sin\theta + T\cos\theta = 0, \\ S\cos\theta - T\sin\theta = 0, \end{array}\right. \tag{48}$$

où l'on a posé, pour simplifier l'écriture,

$$\begin{aligned} S = {} & \frac{\partial\Omega}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial\rho}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\rho} - \frac{\Omega}{\rho}\right) \\ & + \frac{\partial\Omega}{\partial z}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \int\Omega\,d\rho\right) - \frac{\partial^2 P}{\partial\theta^2}\frac{\Omega}{\rho^2} + \left(\rho\frac{\partial\Omega}{\partial z} - z\frac{\partial\Omega}{\partial\rho}\right)(q\cos\theta - p\sin\theta), \\ T = {} & \frac{\Omega}{\rho}\left[z(p\cos\theta + q\sin\theta) + \frac{\partial^2 P}{\partial\rho\,\partial\theta}\right]. \end{aligned}$$

Les équations (48) donnent

$$\begin{aligned} & \frac{\partial\Omega}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial\rho}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\rho} - \frac{\Omega}{\rho}\right) + \frac{\partial\Omega}{\partial z}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \int\Omega\,d\rho\right) \\ & \qquad - \frac{\partial^2 P}{\partial\theta^2}\frac{\Omega}{\rho^2} + \left(\rho\frac{\partial\Omega}{\partial z} - z\frac{\partial\Omega}{\partial\rho}\right)(q\cos\theta - p\sin\theta) = 0, \end{aligned} \tag{49}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial\rho\,\partial\theta} = -z(p\cos\theta + q\sin\theta). \tag{50}$$

Il ne nous reste qu'à vérifier la dernière des équations (38).

On obtient, en effectuant le calcul,

$$\frac{\partial^2 P}{\partial\theta\,\partial z} = \rho(p\cos\theta + q\sin\theta). \tag{51}$$

Les équations (50) et (51) exigent qu'on ait

$$p\cos\theta + q\sin\theta = 0,$$

c'est-à-dire

$$p = q = 0. \tag{52}$$

Donc, *le mouvement considéré du liquide n'est possible que sous la supposition que le cylindre* ($\sigma$) *se tourne autour de l'axe de révolution.*

Les équations (50) et (51) montrent alors que $\frac{dP}{d\theta}$ ne dépend ni de $\rho$ ni de $z$, ou, en d'autres termes, la fonction P doit avoir la forme

$$P = f(\theta, t) + \varphi(\rho, z, t).$$

Or, il est aisé de s'assurer que la fonction $f(\theta, t)$ ne doit dépendre de la variable $\theta$.

On a, en effet, eu égard à (43),

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\cos\theta - \frac{\partial f(\theta, t)}{\partial\theta}\frac{\sin\theta}{\rho},$$

l'expression pour $u$ qui devient infinie pour $\rho = 0$, si $\frac{df(\theta, t)}{d\theta}$ n'est pas égale à zéro.

Comme $u$ doit rester toujours fini en tous les points intérieurs à $(\sigma)$, on en conclut que $f(\theta, t) = \psi(t)$, c'est-à-dire

$$P = \varphi(\rho, z, t) + \psi(t). \tag{53}$$

**12.** Considérons maintenant les équations (45), (46) et (47).

La dernière de ces équations prend la forme

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} - \int\frac{\partial\Omega}{\partial z}d\rho = 0. \tag{54}$$

La condition (45) se réduit à la suivante :

$$\frac{\partial\varphi(\rho, z, t)}{\partial\rho} = u_0\cos\theta + v_0\sin\theta, \tag{55}$$

qui doit être satisfaite pour $\rho = R$ et pour toutes les valeurs de variables $z$ et $\theta$.

Cela exige qu'on ait

$$u_0 = v_0 = 0.$$

Donc, *le mouvement considéré n'est possible que dans le cas, où le cylindre* $(\sigma)$ (*le vase solide contenant le liquide*) *est animé d'un mouvement hélicoïdal se composant d'un mouvement de translation le long de l'axe de révolution du cylindre* $(\sigma)$ *et d'un mouvement de rotation autour de cet axe* (*voir* numéro précédent).

La condition (55) devient alors

$$\frac{\partial\varphi(\rho, z, t)}{\partial\rho} = 0 \qquad \text{pour} \qquad \rho = R. \tag{56}$$

Quant à l'équation (46), elle prend la forme

$$(57)\qquad \frac{\partial\varphi(\rho, z, t)}{\partial z} = w_0 + \int \Omega\, d\rho \qquad \text{pour} \qquad z = +l \qquad \text{et} \qquad z = -l.$$

Enfin, l'équation (49) s'écrira

$$(58)\qquad \frac{\partial\Omega}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\rho} - \frac{\Omega}{\rho}\right) + \frac{\partial\Omega}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \int \Omega\, d\rho\right) = 0.$$

Le problème se ramène à la détermination de deux fonctions $\varphi$ et $\Omega$ ne dépendant que de trois variables $\rho$, $z$, $t$ et satisfaisant, pour toutes les valeurs de $t$, aux équations (54) et (58), jointes aux conditions aux limites (56) et (57).

Les fonctions $\varphi$ et $\Omega$ étant déterminées à l'aide de conditions tout à l'heure indiquées, on trouve, eu égard à (43), les expressions suivantes de vitesses $u$, $v$, $w$ du liquide

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\cos\theta, \qquad v = \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\sin\theta, \qquad w = \frac{\partial\varphi}{\partial z} - \int \Omega\, d\rho.$$

**13.** Sans étudier le cas général, qui est d'ailleurs très compliqué, indiquons un cas particulier, fort simple, où l'on peut résoudre complètement le problème.

On peut vérifier l'équation (58) si l'on pose

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial\Omega}{\partial\rho} - \frac{\Omega}{\rho} = 0, \qquad \frac{\partial\Omega}{\partial z} = 0,$$

ce qui donne

$$\Omega = \alpha\rho,$$

$\alpha$ désignant une constante.

Dans ce cas le problème se ramène à la détermination d'une seule fonction $\varphi(\rho, z, t)$ satisfaisant à l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} = 0,$$

à l'intérieur d'un contour rectangulaire dont les côtés sont égaux à $2R$ et $2l$, et aux conditions suivantes :

$$\frac{\partial\varphi(\rho, z, t)}{\partial\rho} = 0 \qquad \text{pour} \qquad \rho = R,$$

$$\frac{\partial\varphi(\rho, z, t)}{\partial z} = w_0 + \frac{\alpha}{2}\rho^2 \qquad \text{pour} \qquad z = +l \qquad \text{et} \qquad z = -R,$$

où $w_0$ est une fonction d'une seule variable $t$, donnée à l'avance.

Il suffit de poser

$$\varphi = z w_0 + Q$$

pour ramener la solution du problème à la détermination d'une fonction Q, ne dépendant que de deux variables $\rho$ et $z$, à l'aide de conditions

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial Q}{\partial \rho} = 0 \tag{59}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \rho} = 0 \quad \text{pour} \quad \rho = R, \tag{60}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\alpha}{2}\rho^2 \quad \text{pour} \quad z = +l \quad \text{et} \quad z = -l. \tag{61}$$

**14.** Cherchons une solution particulière de l'équation (59) sous la forme suivante :

$$Q = Q_k = U_k(\rho)\, V_k(z),$$

où la fonction $U_k(\rho)$ ne dépend que de $\rho$, la fonction $V_k(z)$ ne dépend que de $z$.

On trouve, en substituant cette expression de Q dans (59),

$$\frac{\dfrac{d^2 V_k}{dz^2}}{V_k} + \frac{\dfrac{d^2 U_k}{d\rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{dU_k}{d\rho}}{U_k} = 0.$$

On peut donc poser

$$\frac{d^2 V_k}{dz^2} - \alpha_k^2 V_k = 0,$$

$$\frac{d^2 U_k}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dU_k}{d\rho} + \alpha_k^2 U_k = 0.$$

La première de ces équations donne

$$V_k = A'_k e^{\alpha_k z} + B'_k e^{-\alpha_k z},$$

$A'_k$, $B'_k$ désignant des constantes arbitraires.

L'intégrale générale de la seconde équation s'exprime comme il suit :

$$U_k = c_k J_0(\alpha_k \rho) + c'_k Y_0(\alpha_k \rho),$$

$c_k$ et $c'_k$ étant des constantes arbitraires, $J_0$ et $Y_0$ désignant les fonctions de Bessel de la première et de la seconde espèce.

Comme Q doit rester finie pour toutes les valeurs de $\rho$, on doit poser $c'_k = 0$, et la solution cherchée de l'équation (59) devient

$$Q_k = (A_k e^{\alpha_k z} + B_k e^{-\alpha_k z}) J_0(\alpha_k \rho),$$

où l'on a posé

$$\mathrm{A}_k = c_k \mathrm{A}'_k, \qquad \mathrm{B}_k = c_k \mathrm{B}'_k.$$

Il suffit de poser

$$\mathrm{A}_k = \mathrm{B}_k$$

pour obtenir pour $\mathrm{Q}_k$ une expression qui ne se change pas, lorsqu'on remplace $+z$ par $-z$.

On trouve ainsi

$$\mathrm{Q}_k = \mathrm{A}_k(e^{\alpha_k z} + e^{-\alpha_k z})\mathrm{J}_0(\alpha_k \rho). \tag{62}$$

Nous obtiendrons la solution plus générale de l'équation (59) si l'on pose

$$\mathrm{Q} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{A}_k(e^{\alpha_k z} + e^{-\alpha_k z})\mathrm{J}_0(\alpha_k \rho), \tag{63}$$

où $\alpha_k$ et $\mathrm{A}_k (k = 1, 2, 3, \ldots)$ désignent des constantes.

Il ne nous reste qu'à choisir $\alpha_k$ et $\mathrm{A}_k$ de telle manière que les conditions (60) et (61) soient satisfaites.

On trouve

$$\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \rho} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{A}_k(e^{\alpha_k z} + e^{-\alpha_k z}) \frac{d\mathrm{J}_0(\alpha_k \rho)}{d\rho}.$$

La condition (60) exige qu'on ait

$$\frac{d\mathrm{J}_0(\alpha_k \mathrm{R})}{d\mathrm{R}} = 0. \tag{$60_1$}$$

On sait que l'équation

$$\frac{d\mathrm{J}_0(\zeta)}{d\zeta} = 0 \tag{64}$$

admet une infinité de racines différentes positives.

En les désignant successivement par

$$\zeta_1, \quad \zeta_2, \quad \zeta_3, \quad \ldots, \quad \zeta_k, \quad \ldots, \tag{65}$$

et en posant

$$\alpha_k = \frac{\zeta_k}{\mathrm{R}} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots), \tag{66}$$

on obtient une infinité de constantes $\alpha_k$ telles que la condition (60) [ou ($60_1$)] sera satisfaite.

Quant aux conditions (61), elles se réduisent à une seule équation

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \alpha_k (e^{\alpha_k l} + e^{-\alpha_k l}) J_0(\alpha_k \rho) = \frac{\alpha}{2} \rho^2,$$

qui doit être satisfaite pour toutes les valeurs de $\rho$ comprises entre zéro et R.

Les constantes $\alpha_k$ étant connues, il suffit de choisir les constantes $A_k$ de façon que la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \alpha_k (e^{\alpha_k l} - e^{-\alpha_k l}) J_0(\alpha_k \rho)$$

représente le développement de la fonction $\frac{\alpha}{2}\rho^2$ en série procédant suivant les fonctions $J_0(\alpha_k \rho)$ de Bessel, $\alpha_k$ désignant les racines positives de l'équation transcendante (64).

On sait que cela est toujours possible.

Posons

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k J_0(\alpha_k \rho) = \frac{\alpha}{2} \rho^2, \tag{67}$$

$$B_k = A_k \alpha_k (e^{\alpha_k l} + e^{-\alpha_k l}). \tag{68}$$

En se rappelant que

$$\int_0^R \rho \, J_0(\alpha_k \rho) J_0(\alpha_m \rho) \, d\rho = 0,$$

$\alpha_k$ et $\alpha_m$ désignant deux racines différentes de l'équation ($60_1$), et que

$$\int_0^R \rho \, J_0^2(\alpha_k \rho) \, d\rho = \frac{R^2}{2} J_0^2(\alpha_k R),$$

on trouve, en multipliant (67) par $\rho J_0(\alpha_m \rho)$ et en intégrant le résultat entre les limites zéro et R,

$$B_k = \frac{\alpha}{R^2 J_0^2(\alpha_k R)} \int_0^R \rho^3 J_0(\alpha_k \rho) \, d\rho \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

On en tire, eu égard à (68), cette expression pour $A_k$ :

$$A_k = \frac{\alpha}{\alpha_k R^2 (e^{\alpha_k l} + e^{-\alpha_k l}) J_0^2(\alpha_k R)} \int_0^R \rho^3 J_0(\alpha_k \rho) \, d\rho. \tag{69}$$

**15.** En entendant maintenant par $\alpha_k$ et $A_k$ les constantes, définies par les égalités (66) et (69), on obtient cette expression pour Q satisfaisant à toutes les conditions requises [les équations (59), (60) et (61) du n° **13**],

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} A_k (e^{\alpha_k z} + e^{-\alpha_k z}) J_0(\alpha_k \rho),$$

et ensuite la fonction $\varphi$

$$\varphi = z_1 w_0 + Q,$$

satisfaisant aux conditions (54), (56) et (57).

Les vitesses du liquide auront, en vertu de (59), la forme suivante :

$$(70) \qquad \left\{ \begin{aligned} u &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k (e^{\alpha_k z} + e^{-\alpha_k z}) \frac{d J_0(\alpha_k \rho)}{d\rho}, \\ v &= \sin\theta \sum_{k=1}^{\infty} A_k (e^{\alpha_k z} + e^{-\alpha_k z}) \frac{d J_0(\alpha_k \rho)}{d\rho}, \\ w &= w_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \alpha_k (e^{\alpha_k z} - e^{-\alpha_k z}) J_0(\alpha_k \rho) - \frac{\alpha}{2}\rho^2. \end{aligned} \right.$$

Il est intéressant de remarquer que $u$, $v$, $w$ ne dépendent pas de la vitesse angulaire $r$ de la rotation du cylindre ($\sigma$) (du vase solide) autour de son axe.

A tout mouvement hélicoïdal, arbitrairement donné, d'un vase solide de la forme cylindrique, correspond un mouvement possible du liquide incompressible, contenu dans ce vase, défini par les formules (70).

**16.** Les fonctions $u, v, w$ représentent les projections sur les axes mobiles $x, y, z$ de la vitesse absolue du point ($\rho$, $\theta$, $z$) du liquide.

Supposons que l'axe des $\zeta$ de coordonnées $\xi$, $\eta$, $\zeta$, fixes dans l'espace, coïncide avec l'axe des $z$ qui, selon la supposition, ne change pas sa direction pendant le mouvement, et désignons par $\varphi$ l'angle de l'axe des $x$ avec celui des $\xi$.

On a

$$\varphi = \int r\,dt + \text{const.},$$

$r$ étant une fonction de $t$ arbitrairement donnée.

Désignant par

$$U, \quad V, \quad W$$

les projections sur les axes fixes de la vitesse absolue du point $\xi$, $\eta$, $\zeta$ du liquide,

on trouve

$$\frac{d\xi}{dt} = \mathrm{U} = u\cos\varphi - v\sin\varphi,$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \mathrm{V} = u\sin\varphi + v\cos\varphi,$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = \mathrm{W} = w.$$

La solution complète du problème du mouvement considéré se ramène à l'intégration de ces dernières équations, ce qui ne présente pas des difficultés.

17. Je me permets de faire quelques remarques complémentaires au sujet du problème que nous venons d'étudier par la méthode indiquée aux n$^{os}$ 4 à 10 de ce Mémoire.

Les tourbillons $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$

$$\omega_1 = -\Omega\sin\theta, \qquad \omega_2 = \Omega\cos\theta, \qquad \omega_3 = 0$$

satisfont évidemment à la condition (7) du n° 3.

On pourrait donc appliquer à la solution du problème proposé la méthode exposée au n° 3.

Or, cette méthode conduit au calcul plus compliqué : elle exige tout d'abord l'évaluation des intégrales

$$\int \frac{\omega_1}{r}\,d\tau, \qquad \int \frac{\omega_2}{r}\,d\tau,$$

étendues au volume du cylindre ($\sigma$) et conduit ensuite aux équations moins simples pour déterminer les fonctions P et $\Omega$.

La simplification, introduite par le procédé que nous avons employé, dépend de ce que les fonctions

$$u_1 = 0, \qquad v_1 = 0, \qquad w_1 = -\int \Omega\,d\rho$$

représentent, dans le cas considéré, une solution particulière des équations

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = -\Omega\sin\theta,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = -\Omega\cos\theta,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Je profite de l'occasion pour faire une remarque générale sur ce sujet.

**18.** Rappelons que le problème général de la théorie des tourbillons se ramène à l'intégration des équations différentielles de la forme

$$(71)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial z} = \omega_1, \\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial x} = \omega_2, \\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = \omega_3, \end{cases}$$

$$(72)\qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

jointes à la condition aux limites

$$(73)\qquad u\alpha + v\beta + w\gamma = f(x, y, z, t) \qquad \text{sur (S)},$$

où $f(x, y, z, t)$ désigne, en général, une fonction quelconque donnée à l'avance.

Supposons qu'on connaisse une solution particulière des équations (71)

$$u = u_1, \qquad v = v_1, \qquad w = w_1,$$

$u_1$, $v_1$, $w_1$ désignant les fonctions connues de variables $x, y, z, t$.

Posons

$$(74)\qquad u = \mathrm{U} + u_1, \qquad v = \mathrm{V} + v_1, \qquad w = \mathrm{W} + w_1.$$

Le problème se ramène évidemment à la détermination de trois fonctions inconnues U, V et W à l'aide de conditions

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} &= 0, \end{aligned}$$

qui résultent des équations (71).

Ces équations montrent que U, V et W sont les dérivées partielles d'une seule fonction P :

$$(75)\qquad \mathrm{U} = \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x}, \qquad \mathrm{V} = \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}, \qquad \mathrm{W} = \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial z}.$$

On obtient l'équation différentielle pour P en substituant les expressions (74), (75) dans (72) et (73).

On trouve ainsi

$$\Delta P + \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = \Delta P + H = 0 \tag{76}$$

à l'intérieur de (S), et

$$\frac{\partial P_i}{\partial n} = f(x, y, z, t) - (u_1\alpha + v_1\beta + w_1\gamma) \quad \text{sur (S)}. \tag{77}$$

Donc, toutes les fois qu'on connaît une solution particulière $u_1$, $v_1$, $w_1$ des équations (71), le problème général de la théorie des tourbillons se ramène à la détermination d'une seule fonction P satisfaisant aux conditions (76) et (77), ce qui simplifie essentiellement le calcul.

La méthode générale, que nous avons exposée aux nos 4 à 10, nous a conduit précisément à cette simplification dans la solution du problème particulier considéré au n° 10.

**19.** Cette remarque s'applique aussi au cas d'un liquide indéfini.

Dans ce cas, la condition (73) doit être remplacée par une autre qui exige que $u$, $v$, $w$ s'annulent à l'infini.

En entendant, comme précédemment, par $u_1$, $v_1$, $w_1$, les fonctions quelconques vérifiant les équations (71) et s'annulant à l'infini, on ramène la solution du problème à la détermination d'une fonction P satisfaisant à l'équation (76) en tous les points du liquide et s'annulant à l'infini comme un potentiel newtonien.

On obtient ainsi cette expression pour P,

$$P = \frac{1}{4\pi}\int \frac{H'}{r}\,d\tau',$$

qui conduit à la solution suivante du problème :

$$u = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int \frac{H'}{r}\,d\tau' + u_1,$$

$$v = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int \frac{H'}{r}\,d\tau' + v_1,$$

$$w = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int \frac{H'}{r}\,d\tau' + w_1.$$

**20.** Appliquons cette remarque à la solution d'un problème, analogue à celui du n° 10, pour le cas d'un liquide indéfini, c'est-à-dire au cas, où *toutes les lignes de tourbillon sont des cercles dont le plan est perpendiculaire à un axe fixe, pris pour l'axe* Oz, *et dont le centre est sur cet axe.*

C'est le problème bien connu qu'on considère ordinairement dans tous les Traités d'Hydrodynamique.

Supposons, comme au n° 10, que

$$\omega_1 = -\Omega \sin\theta, \qquad \omega_2 = \Omega \cos\theta, \qquad \omega_3 = 0,$$

$\Omega$ désignant une fonction ne dépendant que de $\rho$, $z$ et $t$, et s'annulant à l'infini.

On a une solution particulière des équations (71) :

$$u_1 = v_1 = 0, \qquad w_1 = -\int \Omega \, d\rho.$$

On trouve donc, en vertu de (74),

$$(78) \qquad u = \frac{\partial P}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial P}{\partial y}, \qquad w = \frac{\partial P}{\partial z} - \int \Omega \, d\rho,$$

où P est une fonction définie par l'équation

$$\Delta P - \int \frac{\partial \Omega}{\partial z} d\rho = 0,$$

qui doit être satisfaite en tous les points du liquide.

Or, pour que les expressions (78) représentent réellement les vitesses du mouvement du liquide, il faut (et il suffit) que les fonctions P et $\Omega$ satisfassent encore aux équations (38) ([1]).

En exprimant P en coordonnées semi-polaires, on trouve

$$u = \frac{\partial P}{\partial \rho}\cos\theta - \frac{\partial P}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{\rho},$$
$$v = \frac{\partial P}{\partial \rho}\sin\theta + \frac{\partial P}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{\rho},$$
$$w = \frac{\partial P}{\partial z} - \int \Omega \, d\rho.$$

Remarquons que c'est seulement par raison de symétrie qu'on en conclut ordinairement que P ne doit pas dépendre de la variable $\theta$.

En d'autres termes, on introduit d'avance une hypothèse sur la distribution de vitesses dans le liquide, en supposant que

$$u = s\cos\theta, \qquad v = s\sin\theta, \qquad w = f(t, \rho, z),$$

$s$ désignant une fonction ne dépendant pas de $\theta$.

Or, cette hypothèse deviendra inutile, si nous employons la méthode de la solution du problème que nous venons d'indiquer et en même temps tenons compte

([1]) Remarquons, en passant, qu'on ne tient pas compte de cette circonstance ordinairement lors de l'exposition de la théorie.

des équations (38), car alors la supposition tout à l'heure mentionnée résultera comme une conséquence nécessaire d'une seule hypothèse, faite plus haut au sujet de la distribution des tourbillons dans le liquide.

Répétant, en effet, les raisonnements du n° 11, en y posant d'avance $p = q = 0$, on trouve

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial\rho}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\rho} - \frac{\Omega}{\rho}\right) + \frac{\partial\Omega}{\partial z}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \int\Omega\, d\rho\right) - \frac{\partial^2 P}{\partial\theta^2}\,\frac{\Omega}{\rho^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial\rho\,\partial\theta} = 0, \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial\theta\,\partial z} = 0.$$

Les dernières de ces équations exigent qu'on ait (*voir* n° 11)

$$P = \varphi(\rho, z, t) + \psi(t).$$

Le problème se ramène à la détermination des fonctions $\varphi$ et $\Omega$ ne dépendant que de $\rho$, $z$ et $t$, et satisfaisant aux équations

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} - \int\frac{\partial\Omega}{\partial z}\,d\rho = 0, \tag{79}$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\rho} - \frac{\Omega}{\rho}\right) + \frac{\partial\Omega}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \int\Omega\,d\rho\right) = 0, \tag{80}$$

jointes aux conditions que les fonctions $\Omega$ et $\varphi$ s'annulent à l'infini.

Les fonctions $\varphi$ et $\Omega$ étant déterminées, on aura la solution du problème du mouvement du liquide sous la forme suivante :

$$\left\{\begin{aligned} &u = \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\cos\theta, \qquad v = \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\sin\theta, \\ &\qquad w = \frac{\partial\varphi}{\partial z} - \int\Omega\,d\rho. \end{aligned}\right. \tag{81}$$

21. Considérons maintenant la fonction $\Omega$ comme connue et posons

$$-\int\frac{\partial\Omega}{\partial z}\,d\rho = \omega.$$

Désignons par $r$ la distance de deux points $x, y, z$ et $x', y', z'$ :

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2.$$

La fonction $\varphi$ représente le potentiel newtonien, au point $x, y, z$, d'une matière continue, remplissant les anneaux de tourbillons, dont la densité en un point $x', y', z'$ est à égale à $\frac{\omega}{4\pi}$.

On a donc

$$\varphi = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\omega'}{r} d\tau',$$

l'intégrale, prise par rapport aux variables $x'$, $y'$, $z'$, étant étendue au volume occupé par les anneaux de tourbillon.

Pour évaluer cette intégrale, décomposons les anneaux de tourbillon en anneaux infiniment déliés de révolution autour de l'axe des $z$.

Désignant par $d\sigma$ la section d'un de ces anneaux de rayon $\rho'$ par un plan passant par l'axe des $z$, on aura

$$d\tau' = \rho' \, d\sigma \, d\theta',$$

$\theta'$ désignant l'angle de ce plan avec le plan de $xz$.

Introduisant maintenant les coordonnées semi-polaires et posant

$$x = \rho \cos\theta, \qquad y = \rho \sin\theta, \qquad x' = \rho' \cos\theta', \qquad y' = \rho' \sin\theta',$$

on trouve

$$\varphi = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\omega'}{r} \rho' \, d\sigma \, d\theta' = \frac{1}{4\pi} \int \omega' \rho' \, d\sigma \int_\alpha^{\alpha + 2\pi} \frac{d\theta'}{r}, \tag{82}$$

où $\alpha$ est un angle arbitraire,

$$r = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\theta' - \theta) + (z - z')^2}.$$

Désignons par $\psi$ une nouvelle variable et posons

$$\theta' = \theta + \psi.$$

L'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_\alpha^{\alpha + 2\pi} \frac{d\theta'}{r}$$

deviendra

$$\mathrm{I} = \int_\alpha^{\alpha + 2\pi} \frac{d\theta'}{r} = \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{r},$$

où

$$r = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos\psi + (z - z')^2}.$$

Il est aisé de voir que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{r} = 2 \int_0^{\pi} \frac{d\psi}{r}.$$

Posons maintenant

$$\psi = \pi - 2\varphi, \qquad k^2 = \frac{4\rho\rho'}{(\rho + \rho')^2 + (z - z')^2}.$$

On trouve

$$I = \frac{k}{\sqrt{\rho\rho'}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} = \frac{k}{\sqrt{\rho\rho'}} K,$$

K désignant l'intégrale elliptique complète de la première espèce.

Substituant cette expression de I dans (82), on obtient cette expression pour $\varphi$,

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \int K \frac{\omega' \rho'}{\sqrt{(\rho + \rho')^2 + (z - z')^2}} d\sigma, \tag{83}$$

l'intégrale étant étendue à tous les éléments $d\sigma$ des aires suivant lesquelles un plan, passant par l'axe des $z$, coupe les anneaux de tourbillon.

Substituant cette expression de $\varphi$ dans (80), on obtient l'équation à laquelle doit satisfaire la fonction $\Omega$.

A chaque expression de $\Omega$, vérifiant cette dernière équation, correspond l'expression bien déterminée de la fonction $\varphi$, définie par l'intégrale (83), et un mouvement déterminé du liquide dont les composantes de la vitesse s'expriment à l'aide de formules (81).

**22.** Il suffit de comparer l'analyse exposée avec celle qu'on propose d'ordinaire dans les Traités de Mécanique, pour l'étude du problème considéré, pour mettre en évidence les simplifications introduites par la méthode de la solution du problème que nous venons d'indiquer.

On pourrait pousser cette étude plus loin et examiner, par exemple, le cas d'un seul anneau infiniment délié ou de deux anneaux circulaires de même axe, mais ici nous n'insistons pas sur ce point.

Je terminerai cette étude par une remarque sur la relation qui existe entre la solution du problème indiqué plus haut et celle qu'on reproduit d'ordinaire dans les Traités de Mécanique rationnelle.

Introduisons, au lieu de la fonction $\varphi$, une autre fonction S, liée avec $\varphi$ par les relations suivantes :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = -\frac{\partial S}{\partial z}, \tag{84}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \int \Omega\, d\rho = \frac{\partial S}{\partial \rho} + \frac{S}{\rho}. \tag{85}$$

On a identiquement

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \int \Omega\, d\rho\right) = 0,$$

ce qui représente l'équation (79).

D'autre part, différentiant (84) par $z$, (85) par $\rho$ et retranchant les résultats, on trouve l'équation suivante pour S :

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{S}{\rho}\right) = -\Omega. \tag{86}$$

Le problème se ramène à la détermination de la fonction S, vérifiant l'équation (86) et s'annulant avec ses dérivées du premier ordre à l'infini.

Cette fonction étant trouvée, on obtient ces expressions pour $u$, $v$ et $w$,

$$u = -\frac{\partial S}{\partial z}\cos\theta, \qquad v = -\frac{\partial S}{\partial z}\sin\theta,$$

$$w = \frac{\partial S}{\partial q} + \frac{S}{q},$$

ce qui représente la solution du problème sous la forme usuelle (*voir*, par exemple, P. Appell, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. III, p. 432 et suiv.).

Quant à l'équation (80), elle s'écrira sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} - \frac{\partial S}{\partial z}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \rho} - \frac{\Omega}{\rho}\right) + \frac{\partial \Omega}{\partial z}\left(\frac{\partial S}{\partial \rho} + \frac{S}{\rho}\right) = 0. \tag{87}$$

*Pour obtenir une solution complète du problème du mouvement du liquide sous les suppositions faites plus haut, il faut déterminer deux fonctions* S *et* $\Omega$, *satisfaisant à deux équations différentielles* (86) *et* (87) *et s'annulant à l'infini.*

**23.** Passons maintenant à l'étude d'un autre problème de la théorie des tourbillons que j'énoncerai comme il suit :

*Déterminer un mouvement du liquide incompressible, remplissant un vase solide, limité par une surface quelconque fermée* (S) *et animé d'un mouvement arbitrairement donné, en supposant que les lignes de tourbillon sont toujours des lignes droites.*

Cette supposition exige que les tourbillons $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ ne dépendent que d'une seule variable $t$, c'est-à-dire qu'ils restent constants par rapport aux variables $x$, $y$, $z$.

On peut appliquer au cas considéré la méthode du n° **18**, car il est aisé de trouver une solution particulière des équations (71) sous une forme très simple.

En effet, il est évident que les fonctions

$$u_1 = \omega_2 z, \qquad v_1 = \omega_3 x, \qquad w_1 = \omega_1 y \tag{88}$$

vérifient les équations dont il s'agit.

La solution du problème se ramène donc à la détermination de la fonction P à l'aide de conditions

$$(89)\qquad \Delta P = 0 \qquad \text{à l'intérieur à (S),}$$

$$(90)\qquad \left(\frac{\partial P}{\partial x} - u_0 + qz - ry + \omega_2 z\right)\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial y} - v_0 + rx - pz + \omega_3 x\right)\beta + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - w_0 + py - qx + \omega_1 y\right)\gamma = 0$$

$$\text{sur (S),}$$

auxquelles se réduisent, dans le cas considéré, les équations générales (76) et (77) du n° 18.

A ces conditions, il faut encore ajouter les équations (38) du n° 9, qui prennent la forme suivante :

$$\frac{d\omega_1}{dt} - \omega_2 r + \omega_3 q = \omega_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \omega_2 \frac{\partial u}{\partial y} + \omega_3 \frac{\partial u}{\partial z},$$

$$\frac{d\omega_2}{dt} - \omega_3 p + \omega_1 r = \omega_1 \frac{\partial v}{\partial x} + \omega_2 \frac{\partial v}{\partial y} + \omega_3 \frac{\partial v}{\partial z},$$

$$\frac{d\omega_3}{dt} - \omega_1 q + \omega_2 p = \omega_1 \frac{\partial w}{\partial x} + \omega_2 \frac{\partial w}{\partial y} + \omega_3 \frac{\partial w}{\partial z}.$$

En se rappelant que

$$u = \frac{\partial P}{\partial x} + \omega_2 z, \qquad v = \frac{\partial P}{\partial y} + \omega_3 x, \qquad w = \frac{\partial P}{\partial z} + \omega_1 y,$$

et que $\omega_1$, $\omega_2$ et $\omega_3$ ne dépendent pas de $x$, $y$ et $z$, on transforme les équations précédentes en cette forme simple :

$$(91)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial x} = \dfrac{d\omega_1}{dt} + \omega_3 q - \omega_2 r - \omega_3\omega_2 = A_1, \\[2mm] \dfrac{\partial R}{\partial y} = \dfrac{d\omega_2}{dt} + \omega_1 r - \omega_3 p - \omega_1\omega_3 = A_2, \\[2mm] \dfrac{\partial R}{\partial z} = \dfrac{d\omega_3}{dt} + \omega_2 p - \omega_1 q - \omega_2\omega_1 = A_3, \end{cases}$$

où l'on a posé

$$R = \omega_1 \frac{\partial P}{\partial x} + \omega_2 \frac{\partial P}{\partial y} + \omega_3 \frac{\partial P}{\partial z}.$$

On peut remplacer trois équations précédentes par une seule,

$$(92)\qquad R = A_1 x + A_2 y + A_3 z + K(t),$$

$K(t)$ désignant une fonction arbitraire d'une seule variable $t$.

La solution du problème se ramène à la détermination d'une fonction P, de quatre variables $x$, $y$, $z$ et $t$, et de trois fonctions $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$, ne dépendant que d'une seule variable $t$, à l'aide de trois conditions (89), (90) et (91).

**24.** Considérons un cas particulier, en supposant que *la surface* (S) *du vase contenant le liquide soit un ellipsoïde à demi-axes a, b et c.*

Supposons que l'origine de coordonnées mobiles, invariablement liées avec le vase solide, soit située au centre de l'ellipsoïde et que les axes mobiles $x, y, z$ coïncident avec ses axes principaux.

Dans ce cas, l'équation de la surface (S) devient

$$f = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

et l'équation aux limites (90) s'écrira

$$(93)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x}\frac{x}{a^2} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{y}{b^2} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{z}{c^2} &- (u_0 + qz - ry - \omega_2 z)\frac{x}{a^2} \\ &- (v_0 + rx - pz - \omega_3 x)\frac{y}{b^2} \\ &- (w_0 + py - qx - \omega_1 y)\frac{z}{c^2} = 0 \\ &\text{sur (S)}. \end{aligned}$$

Posons

$$(94)\qquad 2P = \alpha x + \beta y + \gamma z + a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy,$$

où

$$\alpha,\quad \beta,\quad \gamma,\quad a_{i,k}\qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

sont certaines fonctions d'une seule variable $t$.

Pour que cette expression de P représente une solution de l'équation de Laplace (89), il faut (et il suffit) qu'on ait

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0.$$

Substituant ensuite (94) dans (93), on trouve, après un calcul simple,

$$(95)\qquad \left\{ \begin{aligned} &a_{11} = 0, && a_{22} = 0, && a_{33} = 0, \\ &\alpha = 2u_0, && \beta = 2v_0, && \gamma = 2w_0, \end{aligned} \right.$$

$$(96)\qquad \left\{ \begin{aligned} a_{23} &= \frac{p(b^2 - c^2) - \omega_1 b^2}{c^2 + b^2}, \\ a_{31} &= \frac{q(c^2 - a^2) - \omega_2 c^2}{a^2 + c^2}, \\ a_{12} &= \frac{r(a^2 - b^2) - \omega_3 a^2}{b^2 + a^2}. \end{aligned} \right.$$

Il ne nous reste qu'à satisfaire aux équations (91) [ou, ce qui revient au même, à l'équation (92)].

En remarquant que, dans le cas considéré,

$$R = A + (\omega_2 a_{12} + \omega_3 a_{31})x + (\omega_3 a_{23} + \omega_1 a_{12})y + (\omega_1 a_{31} + \omega_2 a_{23})z,$$

on obtient les équations suivantes :

$$\frac{d\omega_1}{dt} = \omega_2 a_{12} + \omega_3 a_{31} + \omega_2\omega_3 - \omega_3 q + \omega_2 r,$$

$$\frac{d\omega_2}{dt} = \omega_3 a_{23} + \omega_1 a_{12} + \omega_3\omega_1 - \omega_1 r + \omega_3 p,$$

$$\frac{d\omega_3}{dt} = \omega_1 a_{31} + \omega_2 a_{23} + \omega_1\omega_2 - \omega_2 p + \omega_1 q.$$

En y substituant les expressions (96), on trouve finalement

$$(97)\quad \left\{\begin{aligned} &(b^2+a^2)(a^2+c^2)\frac{d\omega_1}{dt}\\ &\quad = a^2(b^2-c^2)\omega_2\omega_3 + 2a^2[(a^2+c^2)\omega_2 r - (b^2+a^2)\omega_3 q],\\ &(c^2+b^2)(b^2+a^2)\frac{d\omega_2}{dt}\\ &\quad = b^2(c^2-a^2)\omega_3\omega_1 + 2b^2[(b^2+a^2)\omega_3 p - (c^2+b^2)\omega_1 r],\\ &(a^2+c^2)(c^2+b^2)\frac{d\omega_3}{dt}\\ &\quad = c^2(a^2-b^2)\omega_1\omega_2 + 2c^2[(c^2+b^2)\omega_1 q - (a^2+c^2)\omega_2 p]. \end{aligned}\right.$$

Le mouvement du vase étant donné, nous déterminerons les tourbillons $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ par l'intégration des équations (97) qui, remarquons-le en passant, ne dépendent pas de vitesses $u_0$, $v_0$, $w_0$ du mouvement de translation du vase.

A tout mouvement donné du vase, défini par les fonctions données

$$u_0,\quad v_0,\quad w_0,\quad p,\quad q,\quad r,$$

correspond un mouvement du liquide, remplissant le vase de la forme ellipsoïdale, avec les vitesses

$$(98)\quad \left\{\begin{aligned} u &= u_0 + \frac{r(a^2-b^2)-\omega_3 a^2}{a^2+b^2}y + \frac{q(c^2-a^2)+\omega_2 a^2}{a^2+c^2}z,\\ v &= v_0 + \frac{r(a^2-b^2)+\omega_3 b^2}{a^2+b^2}x + \frac{p(b^2-c^2)-\omega_1 b^2}{b^2+c^2}z,\\ w &= w_0 + \frac{q(c^2-a^2)-\omega_2 c^2}{c^2+a^2}x + \frac{p(b^2-c^2)+\omega_1 c^2}{b^2+c^2}y, \end{aligned}\right.$$

où $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ sont les fonctions de $t$ satisfaisant aux équations différentielles (97).

25. Supposons maintenant que *les parties du liquide s'attirent suivant la loi de Newton.*

Dans ce cas, la fonction U, qui figure dans l'expression (37), a la forme

$$U = D - (A x^2 + B y^2 - C z^2),$$

où

$$D = \pi abc \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{\Delta(u)}}, \qquad A = \pi abc \int_0^\infty \frac{du}{(a^2+u)\sqrt{\Delta(u)}},$$

$$B = \pi abc \int_0^\infty \frac{du}{(b^2+u)\sqrt{\Delta(u)}}, \qquad C = \pi abc \int_0^\infty \frac{du}{(c^2+u)\sqrt{\Delta(u)}},$$

$$\Delta(u) = (a^2+u)(b^2+u)(c^2+u).$$

Cela posé, substituons les valeurs trouvées (98) des vitesses $u$, $v$, $w$ du liquide dans les équations (36).

On trouve, en tenant compte de l'expression (37) de T,

$$(99)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= \alpha + A_{11}x + A_{12}y + A_{31}z,\\ \frac{\partial P}{\partial y} &= \beta + A_{12}x + A_{22}y + A_{23}z,\\ \frac{\partial P}{\partial z} &= \gamma + A_{31}x + A_{32}y + A_{33}z,\end{aligned}\right.$$

où l'on a posé, pour simplifier l'écriture,

$$(100)\qquad \left\{\begin{aligned} \alpha &= v_0(\omega_3+r) - w_0(\omega_2+q) - \frac{du_0}{dt},\\ \beta &= w_0(\omega_1+p) - u_0(\omega_3+r) - \frac{dv_0}{dt},\\ \gamma &= u_0(\omega_2+q) - v_0(\omega_1+p) - \frac{dw_0}{dt},\end{aligned}\right.$$

$$(101)\qquad \left\{\begin{aligned} A_{11} &= a_{12}(r - a_{12} - \omega_3) - (a_{31}+\omega_2)(q + a_{31}) + r(a_{12}+\omega_3) - q a_{31} - 2A,\\ A_{22} &= a_{23}(p - a_{23} - \omega_1) - (a_{12}+\omega_3)(r + a_{12}) + p(a_{23}+\omega_1) - r a_{12} - 2B,\\ A_{33} &= a_{31}(q - a_{31} - \omega_2) - (a_{23}+\omega_1)(p + a_{23}) + q(a_{31}+\omega_2) - p a_{23} - 2C\end{aligned}\right.$$

et

$$(102)\quad \begin{cases} A_{23} = (a_{12}+\omega_3)(q-a_{31}-\omega_2) - r(a_{31}+\omega_2) - \dfrac{da_{23}}{dt}, \\ A_{31} = (a_{23}+\omega_1)(r-a_{12}-\omega_3) - p(a_{12}+\omega_3) - \dfrac{da_{31}}{dt}, \\ A_{12} = (a_{31}+\omega_2)(p-a_{23}-\omega_1) - q(a_{23}+\omega_1) - \dfrac{da_{12}}{dt}, \end{cases}$$

où l'on entend par $a_{23}$, $a_{31}$, $a_{12}$ les expressions (96).

Les équations (99) déterminent la pression hydrodynamique en tous les points du liquide :

$$\begin{aligned} P = \alpha x + \beta y + \gamma z + \frac{A_{11}}{2}x^2 + \frac{A_{22}}{2}y^2 + \frac{A_{33}}{2}z^2 \\ + A_{23}yz + A_{31}zx + A_{12}xy + \psi(t), \end{aligned}$$

$\psi(t)$ désignant une fonction arbitraire de $t$.

**26.** Formons maintenant les expressions des composantes suivant les axes mobiles $x, y, z$ de la résultante et des sommes des moments des forces de la pression du liquide sur la paroi du vase.

La pression étant dirigée suivant la normale à la paroi, on trouve, en désignant par $R_x$, $R_y$, $R_z$ les projections sur les axes $x$, $y$, $z$ de la résultante des forces de la pression,

$$R_x = \int P\alpha\, ds, \qquad R_y = \int P\beta\, ds, \qquad R_z = \int P\gamma\, ds,$$

où les intégrales s'étendent à la surface de l'ellipsoïde (S).

On peut donc écrire

$$R_x = \int \frac{\partial P}{\partial x}\, d\tau, \qquad R_y = \int \frac{\partial P}{\partial y}\, d\tau, \qquad R_z = \int \frac{\partial P}{\partial z}\, d\tau,$$

les intégrales étant étendues au volume de l'ellipsoïde (S) tout entier.

En se rappelant que l'origine des coordonnées $x$, $y$, $z$ est située au centre de l'ellipsoïde et que les directions de ces axes coïncident avec celles des axes principaux de l'ellipsoïde, on trouve

$$(103)\quad \begin{cases} \displaystyle\int x\, d\tau = \int y\, d\tau = \int z\, d\tau = 0, \\ \displaystyle\int yz\, d\tau = \int zx\, d\tau = \int xy\, d\tau = 0 \end{cases}$$

et

$$(104)\qquad \begin{cases} A_1 = \int (y^2+z^2)\,d\tau = \dfrac{M}{5}(b^2+c^2), \\ B_1 = \int (z^2+x^2)\,d\tau = \dfrac{M}{5}(c^2+a^2), \\ C_1 = \int (x^2+y^2)\,d\tau = \dfrac{M}{5}(a^2+b^2), \end{cases}$$

M désignant la masse totale du liquide.

Cela posé, on trouve, en tenant compte des équations (99) et (100),

$$(105)\qquad \begin{cases} -R_x = \left(\dfrac{du_0}{dt} + w_0(\omega_2+q) - v_0(\omega_3+r)\right)M, \\ -R_y = \left(\dfrac{dv_0}{dt} + u_0(\omega_3+r) - w_0(\omega_1+p)\right)M, \\ -R_z = \left(\dfrac{dw_0}{dt} + v_0(\omega_1+p) - u_0(\omega_2+q)\right)M. \end{cases}$$

**27.** Formons les expressions de composantes suivant les axes fixes de la même résultante des forces de la pression du liquide sur la paroi du vase.

Désignons ces composantes respectivement par

$$R_\xi,\quad R_\eta,\quad R_\zeta;$$

par $\alpha_i$, $\beta_i$, $\gamma_i$ ($i = 1, 2, 3$) les cosinus directeurs des axes $x, y, z$ par rapport aux axes $\xi$, $\eta$, $\zeta$.

On peut écrire

$$\begin{aligned} -R_\xi &= -R_x\alpha_1 - R_y\alpha_2 - R_z\alpha_3 \\ &= M\frac{d}{dt}(u_0\alpha_1 + v_0\alpha_2 + w_0\alpha_3) - M\left(u_0\frac{d\alpha_1}{dt} + v_0\frac{d\alpha_2}{dt} + w_0\frac{d\alpha_3}{dt}\right) \\ &\quad + M\big\{\ u_0\,[(\omega_3+r)\alpha_2 - (\omega_2+q)\alpha_3] \\ &\qquad\quad + v_0\,[(\omega_1+p)\alpha_3 - (\omega_1+r)\alpha_1] \\ &\qquad\quad + w_0[(\omega_2+q)\alpha_1 - (\omega_1+p)\alpha_2]\big\}. \end{aligned}$$

Désignons maintenant par $U_0$, $V_0$, $W_0$ les composantes de la vitesse d'entraînement du vase suivant les axes $\xi$, $\eta$, $\zeta$; par $\Omega_1$, $\Omega_2$, $\Omega_3$ les composantes suivant les mêmes axes du tourbillon.

On a

$$U_0 = u_0\alpha_1 + v_0\alpha_2 + w_0\alpha_3,\qquad V_0 = \ldots,$$
$$\Omega_1 = \omega_1\alpha_1 + \omega_2\alpha_2 + \omega_3\alpha_3,\qquad \Omega_2 = \ldots.$$

Moyennant ces relations et en tenant compte de formules connues de la Cinématique

$$\frac{d\alpha_1}{dt} + q\alpha_3 - r\alpha_2 = 0, \qquad \ldots,$$

on transforme l'expression de $R_\xi$ en la forme suivante :

$$(106) \qquad -R_\xi = M\left(\frac{dU_0}{dt} + W_0\Omega_2 - V_0\Omega_3\right).$$

On trouvera ensuite de la même manière

$$(107) \qquad \begin{cases} -R_\eta = M\left(\dfrac{dV_0}{dt} + U_0\Omega_3 - W_0\Omega_1\right), \\ -R_\zeta = M\left(\dfrac{dW_0}{dt} + V_0\Omega_1 - U_0\,\Omega_2\right). \end{cases}$$

**28.** Désignons maintenant par

$$M_x, \quad M_y, \quad M_z$$

les composantes suivant les axes mobiles $x, y, z$ du moment, par rapport au centre de l'ellipsoïde, de forces de la pression du liquide sur la paroi du vase.

On a

$$M_x = \int P(y\gamma - z\beta)\,ds = -\int\left(z\frac{\partial P}{\partial y} - y\frac{\partial P}{\partial z}\right)d\tau,$$

$$M_y = \int P(z\alpha - x\gamma)\,ds = -\int\left(x\frac{\partial P}{\partial z} - z\frac{\partial P}{\partial x}\right)d\tau,$$

$$M_z = \int P(x\beta - y\alpha)\,ds = -\int\left(y\frac{\partial P}{\partial x} - x\frac{\partial P}{\partial y}\right)d\tau.$$

On en tire, en tenant compte de (99), (103) et (104),

$$(108) \qquad M_x = (C_1 - B_1)A_{23}, \qquad M_y = (A_1 - C_1)A_{31}, \qquad M_z = (B_1 - A_1)A_{12}.$$

**29.** Les résultats obtenus nous permettent de résoudre d'une manière très simple deux problèmes importants d'Hydrodynamique.

Considérons tout d'abord le problème suivant :

*Imaginons un corps solide ayant une cavité de la forme ellipsoïdale remplie par un liquide incompressible* (à densité *un*).

*Supposons que le liquide soit animé d'un mouvement tel que les lignes de tourbillons restent toujours des droites.*

*Supposons encore que les molécules du liquide s'attirent suivant la loi de Newton.*

*Soient enfin* L, M, N *les sommes des moments des forces extérieures agissant* *aux points du corps solide, par rapport aux axes $x$, $y$, $z$, et* X, Y, Z *les valeurs données des composantes suivant les axes fixes de la résultante de ces forces.*

*Il s'agit de déterminer le mouvement du corps solide, ainsi que le mouvement du liquide contenu dans la cavité.*

Quant au mouvement du liquide, les tourbillons $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ doivent satisfaire aux équations générales (97), ayant lieu toujours, quel que soit le mouvement du vase solide contenant le liquide.

Il ne nous reste qu'à *déduire les équations du mouvement du corps solide.*

Or ce problème se ramène tout de suite au problème correspondant de la Dynamique générale.

On peut considérer le vase solide comme un corps libre, soumis aux forces extérieures données et aux forces de la pression du liquide, appliquées à la paroi de la cavité.

Désignant par T la force vive du corps, on obtient immédiatement les équations du mouvement sous la forme suivante :

$$(109)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial u_0}\right) &= r\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial v_0} - q\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial w_0} + \mathrm{R}_x + \mathrm{X},\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial v_0}\right) &= p\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial w_0} - r\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial u_0} + \mathrm{R}_y + \mathrm{Y},\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial w_0}\right) &= q\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial u_0} - p\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial v_0} + \mathrm{R}_z + \mathrm{Z},\end{aligned}\right.$$

$$(110)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p}\right) &= w_0\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial v_0} - v_0\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial w_0} + r\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q} - q\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial r} + \mathrm{M}_x + \mathrm{L},\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q}\right) &= u_0\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial w_0} - w_0\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial u_0} + p\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial r} - r\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p} + \mathrm{M}_y + \mathrm{M},\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial r}\right) &= v_0\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial u_0} - u_0\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial v_0} + q\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p} - p\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q} + \mathrm{M}_z + \mathrm{N},\end{aligned}\right.$$

où $\mathrm{R}_x$, $\mathrm{R}_y$, $\mathrm{R}_z$, $\mathrm{M}_x$, $\mathrm{M}_y$, $\mathrm{M}_z$ sont les fonctions définies par les formules (105) et (108).

Le problème se ramène à la détermination de neuf fonctions de $t$:

$$\omega_1,\quad \omega_2,\quad \omega_3,\quad u_0,\quad v_0,\quad w_0,\quad p,\quad q,\quad r,$$

satisfaisant à neuf équations différentielles du premier ordre (97), (109) et (110).

Ces fonctions étant trouvées, nous obtiendrons les vitesses $u$, $v$, $w$ du liquide remplissant la cavité moyennant les formules (98).

Pour achever la solution du problème, il ne restera qu'à déterminer les cosinus directeurs $\alpha_i$, $\beta_i$, $\gamma_i$, ou les trois angles $\varphi$, $\theta$, $\psi$ d'Euler, ce qui conduit à l'intégration des équations

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = r\alpha_2 - q\alpha_3, \qquad \ldots,$$

ou des équations suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{d\psi}{dt}\sin\theta\sin\varphi + \frac{d\theta}{dt}\cos\varphi &= p,\\
\frac{d\psi}{dt}\sin\theta\cos\varphi + \frac{d\theta}{dt}\sin\varphi &= q,\\
\frac{d\psi}{dt}\cos\theta + \frac{d\varphi}{dt} &= r.
\end{aligned}$$

30. On voit, de ce qui précède, que la théorie des tourbillons nous conduit d'une manière fort simple à la solution du problème, énoncé au début du numéro précédent.

Les équations (109) et (110) sont tout à fait générales et contiennent comme un cas particulier les équations analogues que j'ai déduites par une autre méthode dans mon Mémoire : *Sur le mouvement d'une masse fluide incompressible de la forme ellipsoïdale dont les molécules s'attirent suivant la loi de Newton,* qui doit paraître dans peu de temps dans les *Annales de l'École Normale.*

Sans traiter la question dans toute sa généralité, faisons quelques suppositions particulières qui permettent de réduire les équations (109) et (110) à une forme beaucoup plus simple.

Supposons d'abord que *le centre de gravité du corps solide coïncide avec celui de l'ellipsoïde* (S) et désignons par $M_1$ la masse totale du corps. Dans ce cas on a

$$T = M_1\frac{u_0^2 + v_0^2 + w_0^2}{2} + T_1,$$

$T_1$ désignant la force vive de la rotation du corps autour du centre de l'ellipsoïde (S) (l'origine de coordonnées mobiles $x, y, z$).

Substituant cette expression de T dans (109) et en tenant compte des équations (105), on aura

$$(111)\qquad \left\{\begin{aligned}
\sigma\frac{du_0}{dt} &= v_0(\sigma r + M\omega_3) - w_0(\sigma q + M\omega_2) + X,\\
\sigma\frac{dv_0}{dt} &= w_0(\sigma p + M\omega_1) - u_0(\sigma r + M\omega_3) + Y,\\
\sigma\frac{dw_0}{dt} &= u_0(\sigma q + M\omega_2) - v_0(\sigma p + M\omega_1) + Z,
\end{aligned}\right.$$

où l'on a posé

$$(112)\qquad \sigma = M_1 + M.$$

Supposons ensuite que *les axes d'inertie du corps coïncident avec ceux de l'ellipsoïde* (S).

On a, en désignant par $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les moments principaux d'inertie du corps,

$$2T_1 = \alpha p^2 + \beta q^2 + \gamma r^2.$$

Les équations (110) prennent alors cette forme simple :

$$(113)\quad \begin{cases} \alpha \dfrac{dp}{dt} = (\beta - \gamma) rq - (B_1 - C_1) A_{23} + L, \\ \beta \dfrac{dq}{dt} = (\gamma - \alpha) pr - (C_1 - A_1) A_{31} + M, \\ \gamma \dfrac{dr}{dt} = (\alpha - \beta) pq - (A_1 - B_1) A_{12} + N. \end{cases}$$

31. Considérons le cas où *les forces extérieures sont nulles*, c'est-à-dire

$$X = Y = Z = L = M = N = 0.$$

Substituant dans les expressions (102) de $A_{23}$, $A_{31}$, $A_{12}$ les valeurs de $a_{23}$, $a_{31}$, $a_{12}$ définies par les formules (96), et en tenant compte des équations (97), on transforme les équations (113) à la forme suivante :

$$(114)\quad \begin{cases} \lambda_1 \dfrac{dp}{dt} = (\lambda_2 - \lambda_3) qr + K(c^2 - b^2)\omega_2\omega_3 \\ \qquad + \dfrac{2Ma^2(c^2-b^2)}{5}[c^2(a^2-b^2) r\omega_2 - b^2(c^2-a^2) q\omega_3], \\ \lambda_2 \dfrac{dq}{dt} = (\lambda_3 - \lambda_1) rp + K(a^2 - c^2)\omega_3\omega_1 \\ \qquad + \dfrac{2Mb^2(a^2-c^2)}{5}[a^2(b^2-c^2) p\omega_3 - c^2(a^2-b^2) r\omega_1], \\ \lambda_3 \dfrac{dr}{dt} = (\lambda_1 - \lambda_2) pq + K(b^2 - a^2)\omega_1\omega_2 \\ \qquad + \dfrac{2Mc^2(b^2-a^2)}{5}[b^2(c^2-a^2) q\omega_1 - a^2(b^2-c^2) p\omega_2], \end{cases}$$

où l'on a introduit les notations suivantes :

$$(115)\quad \begin{cases} \lambda_1 = \delta\alpha + \dfrac{M}{5}(b^2-c^2)^2(c^2+a^2)(a^2+b^2), \\ \lambda_2 = \delta\beta + \dfrac{M}{5}(c^2-a^2)^2(a^2+b^2)(b^2+c^2), \\ \lambda_3 = \delta\gamma + \dfrac{M}{5}(a^2-b^2)^2(b^2+c^2)(c^2+a^2), \end{cases}$$

$$\delta = (b^2+c^2)(c^2+a^2)(a^2+b^2), \qquad K = \frac{2Ma^2c^2b^2}{5},$$

Dans le cas considéré, *les équations* (97) *et* (114) *ne dépendent pas de* $u_0$, $v_0$ *et* $w_0$.

Ces équations sont précisément celles que j'ai déduites par une autre méthode dans mon Mémoire, cité plus haut, où j'ai fait d'avance la supposition particulière que le centre de l'ellipsoïde (S) reste immobile.

Dans le cas général, que nous considérons dans ce travail, il faut ajouter à ces équations encore les équations (111) qui déterminent le mouvement de translation du corps solide.

L'intégration de six équations simultanées (97) et (114) détermine le mouvement de rotation du corps autour du centre de l'ellipsoïde (S), ainsi que les tourbillons $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ en fonction de $t$, c'est-à-dire le mouvement du liquide.

Le mouvement de translation du corps sera déterminé ensuite par l'intégration des équations différentielles linéaires de la forme suivante :

$$(116)\qquad \left\{\begin{aligned} \sigma\frac{du_0}{dt} &= v_0(\sigma r + M\omega_3) - w_0(\sigma q + M\omega_2),\\ \sigma\frac{dv_0}{dt} &= w_0(\sigma p + M\omega_1) - u_0(\sigma r + M\omega_3),\\ \sigma\frac{dw_0}{dt} &= u_0(\sigma q + M\omega_2) - v_0(\sigma p + M\omega_1),\end{aligned}\right.$$

auxquelles se réduisent les équations (111), lorsque les forces extérieures sont nulles.

Remarquons que les équations (116) admettent une intégrale évidente

$$u_0^2 + v_0^2 + w_0^2 = \text{const.},$$

qui montre que *le mouvement de translation du corps est toujours uniforme.*

Il suffit de trouver encore une seule intégrale de ces équations pour ramener le problème à une quadrature, car aux équations (116) s'applique le principe du dernier multiplicateur de Jacobi. On peut remplacer les équations (116) par les autres, plus simples, si nous introduisons les composantes

$$U_0,\quad V_0,\quad W_0 \qquad \text{et} \qquad \Omega_1,\quad \Omega_2,\quad \Omega_3$$

suivant les axes fixes de la vitesse du centre de l'ellipsoïde et du tourbillon.

On aura, eu égard à (106) et (107),

$$(117)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dU_0}{dt} &= \rho(V_0\,\Omega_3 - W_0\Omega_2)\\ \frac{dV_0}{dt} &= \rho(W_0\Omega_1 - U_0\,\Omega_3)\\ \frac{dW_0}{dt} &= \rho(U_0\,\Omega_2 - V_0\,\Omega_1)\end{aligned}\right\} \qquad \rho = \frac{M}{M + M_1},$$

les équations qui ne dépendent pas explicitement de la vitesse angulaire de la rotation du corps solide.

Le but principal de ce Mémoire consiste à indiquer une méthode simple, basée sur la théorie générale des tourbillons, pour établir les équations fondamentales du problème énoncé au début du n° 29.

Quant aux recherches sur l'intégration des équations obtenues et à l'étude de divers cas possibles du mouvement, ils feront l'objet d'un Mémoire particulier.

32. Je passe maintenant à un autre problème, devenu classique d'après les recherches de Dirichlet et Riemann, à savoir au *problème du mouvement d'une masse fluide dont la surface libre conserve, sous la pression constante, la forme d'un ellipsoïde.*

Je vais montrer que la théorie générale des tourbillons, appliquée au cas considéré, conduit aussi bien que dans le cas précédent à une méthode fort simple pour déduire les équations générales du problème.

Supposons, comme précédemment, que *les molécules du liquide incompressible, remplissant un vase solide de la forme ellipsoïdale, s'attirent suivant la loi de Newton* et que *les lignes des tourbillons soient toujours des droites.*

On aura toujours, quel que soit le mouvement du vase (*voir* n° 25),

$$
(118)\qquad \begin{aligned} P = \alpha x + \beta y + \gamma z + \frac{A_{11}}{2}x^2 + \frac{A_{22}}{2}y^2 + \frac{A_{33}}{2}z^2 \\ + A_{23}yz + A_{31}zx + A_{12}xy + \psi(t), \end{aligned}
$$

où $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ et $A_{i,k}(i, k = 1, 2, 3)$ se déterminent par les formules (96), (100), (101) et (102).

Quant aux tourbillons $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$, elles doivent satisfaire aux équations différentielles (97).

Supposons maintenant que *la pression* P, définie par l'équation (118), *reste constante en tous les points de la paroi du vase,* c'est-à-dire en tous les points de la surface (S) de l'ellipsoïde.

L'équation (118) montre que cette condition sera satisfaite, si nous posons

$$
(119)\qquad \alpha = 0, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = 0, \qquad \psi(t) = \text{const.},
$$

$$
(119_1)\qquad \begin{cases} A_{23} = 0, & A_{31} = 0, & A_{12} = 0, \\ A_{11} = \dfrac{\lambda}{a_2}, & A_{22} = \dfrac{\lambda}{b^2}, & A_{33} = \dfrac{\lambda}{c^2}, \end{cases}
$$

$\lambda$ désignant un paramètre arbitraire.

Introduisons, au lieu de variables

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \omega_3, \quad p, \quad q, \quad r,$$

les nouvelles variables

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad y_1, \quad y_2, \quad y_3,$$

en posant

$$\begin{aligned}
p(b^2-c^2) &= b^2 x_1 + c^2 y_1, \qquad \omega_1 = x_1 - y_1,\\
q(c^2-a^2) &= c^2 x_2 + a^2 y_2, \qquad \omega_2 = x_2 - y_2,\\
r(a^2-b^2) &= a^2 x_3 + b^2 y_3, \qquad \omega_3 = x_3 - y_3.
\end{aligned}$$

Substituant ces expressions dans $(119_1)$ et $(97)$, on obtient, en tenant compte de $(95)$, $(96)$, $(101)$ et $(102)$, les équations suivantes :

$$(119_2)\quad \left\{\begin{aligned}
&x'_1 + y_2 y_3 + r y_2 - q y_3 = 0, \qquad y'_1 + x_2 x_3 + r x_2 - q x_3 = 0,\\
&x'_2 + y_3 y_1 + p y_3 - r y_1 = 0, \qquad y'_2 + x_3 x_1 + p x_3 - r x_1 = 0,\\
&x'_3 + y_1 y_2 + q y_1 - p y_2 = 0, \qquad y'_3 + x_1 x_2 + q x_1 - p x_2 = 0,\\
&(x_2+y_2) r - (x_2+y_2) q - x_2 y_2 - x_3 y_3 = \frac{2\lambda}{a^2} + 2\mathrm{A},\\
&(x_1+y_1) p - (x_3+y_3) r - x_3 y_3 - x_1 y_1 = \frac{2\lambda}{b^2} + 2\mathrm{B},\\
&(x_2+y_2) q - (x_1+y_1) p - x_1 y_1 - x_2 y_2 = \frac{2\lambda}{c^2} + 2\mathrm{C}.
\end{aligned}\right.$$

Or, si la pression reste constante en tous les points de la paroi du vase, on peut le supprimer et *nous obtiendrons ainsi un cas du mouvement d'une masse fluide dont la surface libre conserve, sous la pression extérieure constante, la forme d'un ellipsoïde de la figure invariable.*

Les équations $(119_2)$ sont précisément celles que j'ai déduites par une autre méthode dans mon Mémoire mentionné plus haut.

33. Nous avons supposé que les demi-axes de l'ellipsoïde ne changent pas leurs grandeurs avec le temps.

Mais cette restriction n'a rien d'essentiel et la théorie des tourbillons s'applique aussi bien au cas général.

Pour cela, il suffit seulement de remplacer la condition aux limites $(93)$ par la suivante :

$$(120)\quad \begin{aligned}
&\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x}\frac{x}{a^2} + \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}\frac{y}{b^2} + \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial z}\frac{z}{c^2}\\
&\quad - (u_0 + qz - ry - \omega_2 z)\frac{x}{a^2} - (v_0 + rx - pz - \omega_3 x)\frac{y}{b^2}\\
&\quad - (w_0 + py - qx - \omega_1 y)\frac{z}{c^2} - \frac{x^2}{a^3}\frac{da}{dt} - \frac{y^2}{b^3}\frac{db}{dt} - \frac{z^2}{c^3}\frac{dc}{dt} = 0.
\end{aligned}$$

En prenant, comme au n° **24**, pour P l'expression (94) et en la substituant dans l'équation (120), nous trouverons pour $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $a_{23}$, $a_{31}$ et $a_{12}$ les mêmes expressions qu'au n° **24**.

Quant aux trois premières des équations (95), elles se remplacent par les suivantes :

$$a_{11} = \frac{1}{a}\frac{da}{dt}, \qquad a_{22} = \frac{1}{b}\frac{db}{dt}, \qquad a_{33} = \frac{1}{c}\frac{dc}{dt}, \tag{121}$$

où $a$, $b$, $c$ sont les fonctions de $t$, liées par la relation

$$bc\frac{da}{dt} + ca\frac{db}{dt} + ab\frac{dc}{dt} = 0, \tag{122}$$

ou, ce qui revient au même,

$$abc = \text{const}.$$

Les équations (97) restent inaltérées.

Dans les expressions de $A_{i,k}(i, k = 1, 2, 3)$, il est nécessaire d'introduire les termes dépendant de $a_{11}$, $a_{22}$ et $a_{33}$, qui ne sont pas nuls dans le cas général, et dans les dérivées

$$\frac{da_{23}}{dt}, \quad \frac{da_{31}}{dt}, \quad \frac{da_{12}}{dt},$$

qui figurent dans les expressions de $A_{i,k}(i, k = 1, 2, 3)$, il faut considérer $a$, $b$, $c$ comme fonctions de $t$.

La pression P se représentera sous la forme (118).

Répétant textuellement les raisonnements du numéro précédent, nous obtiendrons les équations générales du problème de Dirichlet sous la forme d'équations (97), (119) et ($119_1$), auxquelles il faut encore ajouter les équations (121) et (122).

En effectuant le calcul indiqué, ce qui ne présente aucune difficulté, nous obtiendrons, à l'aide de (97) et ($119_1$), les équations, précisément celles que j'ai établies, par une méthode différente, dans mon Mémoire dont j'ai parlé plus haut (*voir* n° 30).

Or j'y ai supposé d'avance que le centre de l'ellipsoïde reste immobile, c'est-à-dire que les fonctions $u_0$, $v_0$, $w_0$ soient égales à zéro. Ici, je considère le cas le plus général, où $u_0$, $v_0$, $w_0$ restent différentes de zéro et se déterminent à l'aide des équations (119) qui doivent être ajoutées aux équations (97), ($119_1$), (121) et (122).

En renvoyant, pour les détails, à mon Mémoire tout à l'heure mentionné, je m'arrêterai ici au cas le plus simple, où l'ellipsoïde ne change pas sa figure pendant le mouvement.

34. Le mouvement de la masse fluide se compose de deux mouvements : d'un mouvement d'entraînement de l'ellipsoïde, comme s'il était un corps solide, et d'un mouvement du liquide relatif par rapport à ce corps.

Supposons d'abord que l'ellipsoïde soit à trois axes $a$, $b$, $c$ inégaux.

D'après un théorème énoncé par Riemann et démontré complètement dans mon Mémoire, déjà cité plusieurs fois, on sait que la rotation de l'ellipsoïde, dans le mouvement d'entraînement, doit être nécessairement permanent et que les équations (97) et (119), toujours indépendantes de vitesses $u_0$, $v_0$, $w_0$ de translation, n'admettent que deux solutions différentes, à savoir, ou

$$(1) \qquad \begin{cases} p = q = 0, & \omega_1 = \omega_2 = 0, \\ r = \text{const.}, & \omega_3 = \text{const.}, \end{cases}$$

ou

$$(2) \qquad r = 0, \qquad \omega_3 = 0.$$

L'ellipsoïde fluide peut donc, sous la pression extérieure constante, tourner uniformément comme un corps solide autour d'un de ces axes principaux, ou autour d'un axe situé dans un de ces plans principaux.

C'est un résultat connu, établi par Riemann.

Or, *la masse fluide peut être encore animée d'un mouvement de translation sans cesser de conserver la forme d'un ellipsoïde solide pendant le mouvement.*

Pour déterminer les composantes $u_0$, $v_0$, $w_0$ du mouvement de translation de l'ellipsoïde, il faut employer les équations (119) qui s'écriront, en vertu de (100), comme il suit :

$$(123) \qquad \begin{cases} \dfrac{du_0}{dt} = v_0(\omega_3 + r) - w_0(\omega_2 + q), \\[2ex] \dfrac{dv_0}{dt} = w_0(\omega_1 + p) - u_0(\omega_3 + r), \\[2ex] \dfrac{dw_0}{dt} = u_0(\omega_2 + q) - v_0(\omega_1 + p), \end{cases}$$

où, en introduisant les composantes $U_0$, $V_0$, $W_0$ de la vitesse du centre de l'ellipsoïde, et les composantes $\Omega_1$, $\Omega_2$, $\Omega_3$ du tourbillon suivant les axes fixes,

$$(124) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2 x_0}{dt} = \dfrac{dU_0}{dt} = V_0\Omega_3 - W_0\Omega_2, \\[2ex] \dfrac{d^2 y_0}{dt} = \dfrac{dV_0}{dt} = W_0\Omega_1 - U_0\Omega_3, \\[2ex] \dfrac{d^2 z_0}{dt} = \dfrac{dW_0}{dt} = U_0\Omega_2 - V_0\Omega_1, \end{cases}$$

$x_0, y_0, z_0$ désignant les coordonnées du centre de l'ellipsoïde par rapport aux axes fixes dans l'espace.

35. Considérons d'abord le premier cas, où

$$p = q = \omega_1 = \omega_2 = 0.$$

Supposant que l'axe des $\zeta$ coïncide avec l'axe fixe de la rotation de l'ellipsoïde, on trouve

$$\Omega_1 = \Omega_2 = 0, \qquad \Omega_3 = \omega = \text{const.},$$

et les équations (124) deviennent

$$\frac{dU_0}{dt} = V_0\omega, \qquad \frac{dV_0}{dt} = -U_0\omega, \qquad \frac{dW_0}{dt} = 0.$$

On a donc

$$W_0 = \text{const.}$$

Donc, l'ellipsoïde fluide se meut, comme un corps solide, uniformément le long de l'axe de rotation.

L'intégration de deux premières des équations précédentes donne ensuite

$$\frac{dx_0}{dt} = U_0 = A\cos\omega t + B\sin\omega t,$$

$$\frac{dy_0}{dt} = V_0 = B\cos\omega t - A\sin\omega t,$$

A et B étant deux constantes arbitraires.

De ces équations on tire, en les intégrant,

$$x_0 = \alpha + \frac{A}{\omega}\sin\omega t - \frac{B}{\omega}\cos t\omega,$$

$$y_0 = \beta + \frac{B}{\omega}\sin\omega t + \frac{A}{\omega}\cos\omega t,$$

$\alpha$ et $\beta$ désignant des nouvelles constantes arbitraires.

Ces équations montrent que *la projection du centre de l'ellipsoïde sur le plan, perpendiculaire à l'axe de rotation de la masse fluide, décrit dans ce plan un cercle, ayant pour équation*

$$(x_0 - \alpha)^2 + (y_0 - \beta)^2 = \frac{A^2 + B^2}{\omega^2}.$$

Donc *l'ellipsoïde fluide peut être animé, sans changer sa figure, non seulement d'une rotation uniforme autour d'un de ces axes principaux, mais encore d'un mouvement de translation.*

*Ce mouvement est uniforme, car*

$$U_0^2 + V_0^2 = \text{const.}, \qquad W_0 = \text{const.},$$

*et se compose des deux mouvements suivants :*

*D'un mouvement uniforme le long de l'axe de rotation de l'ellipsoïde autour d'un de ces axes principaux et d'un autre mouvement dans lequel son centre décrit uniformément un cercle dans le plan perpendiculaire à l'axe de rotation.*

36. Supposons maintenant que

$$r = \omega_3 = 0,$$
$$p = \text{const.}, \qquad q = \text{const.}, \qquad \omega_1 = \text{const.}, \qquad \omega_2 = \text{const.}$$

Les équations (123) prennent la forme

$$\frac{du_0}{dt} = w_0 \lambda_2, \qquad \frac{dv_0}{dt} = - w_0 \lambda_1, \tag{125}$$

$$\frac{dw_0}{dt} = v_0 \lambda_1 - u_0 \lambda_2, \tag{126}$$

où

$$-\lambda_1 = p + \omega_1, \qquad -\lambda_2 = q + \omega_2.$$

Ces équations admettent les intégrales évidentes

$$u_0^2 + v_0^2 + w_0^2 = h^2,$$
$$u_0 \lambda_1 + v_0 \lambda_2 = g,$$

$h$ et $g$ désignant deux constantes arbitraires.

La première de ces équations montre que le mouvement de translation de l'ellipsoïde doit être uniforme.

D'autre part, elles conduisent, en vertu de (126), à la relation

$$\left(\frac{dw_0}{dt}\right)^2 = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)(h^2 - w_0^2) - g^2 = \rho^2 - \sigma^2 w_0^2,$$

où l'on a posé

$$\rho^2 = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) h^2 - g^2, \qquad \sigma^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2.$$

On trouve donc

$$w_0 = \frac{\rho}{\sigma} \cos \sigma (t + \tau). \tag{127}$$

En supposant, pour plus de simplicité, que

$$\tau = 0 \quad \text{et} \quad w_0 = \gamma \quad \text{pour} \quad t = 0,$$

on peut écrire

$$w_0 = \gamma \cos \sigma t.$$

Substituant cette expression de $w_0$ dans (125), on trouve, après les intégrations,

$$(128) \qquad \begin{cases} u_0 = \alpha + \dfrac{\lambda_2 \rho}{\sigma} \sin \sigma t, \\ v_0 = \beta - \dfrac{\lambda_1 \rho}{\sigma} \sin \sigma t, \end{cases}$$

$\alpha$ et $\beta$ désignant les valeurs initiales de $u_0$ et $v_0$ (pour $t = 0$).

37. Dans le cas considéré, le mouvement de rotation de l'ellipsoïde se réduit à une rotation uniforme autour d'un axe de la direction fixe, toujours situé dans le plan $xy$.

Prenons cette direction fixe pour l'axe des $\xi$ et désignons par $\omega$ la vitesse angulaire, par $\varphi$ l'angle que fait l'axe des $\xi$ avec celui des $x$, par $\theta$ l'angle que fait l'axe des $\zeta$ avec celui des $z$.

On a

$$\theta = \omega t$$

et

$$(129) \qquad \begin{cases} \alpha_1 = \cos\varphi, & \beta_1 = \sin\varphi \cos\omega t, & \gamma_1 = \sin\varphi \sin\omega t, \\ \alpha_2 = -\sin\varphi, & \beta_2 = \cos\varphi \cos\omega t, & \gamma_2 = \cos\varphi \sin\omega t, \\ \alpha_3 = 0, & \beta_3 = -\sin\omega t, & \gamma_3 = \cos\omega t. \end{cases}$$

On trouve donc, eu égard à (127), (128) et (129),

$$(130) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx_0}{dt} = U_0 = A + C \sin\sigma t, \\ \dfrac{dy_0}{dt} = V_0 = B \cos\omega t - \gamma \cos\sigma t \sin\omega t - D \sin\sigma t \cos\omega t, \\ \dfrac{dz_0}{dt} = W_0 = B \sin\omega t + \gamma \cos\sigma t \cos\omega t + D \sin\sigma t \sin\omega t, \end{cases}$$

les expressions des composantes suivant les axes fixes de la vitesse de translation de l'ellipsoïde en fonction de $t$, où l'on a introduit les notations suivantes :

$$A = \alpha \cos\varphi - \beta \sin\varphi, \qquad B = \alpha \sin\varphi + \beta \cos\varphi,$$

$$C = \frac{\gamma}{\sigma}(\lambda_1 \sin\varphi + \lambda_2 \cos\varphi), \qquad D = \frac{\gamma}{\sigma}(\lambda_2 \sin\varphi - \lambda_1 \cos\varphi).$$

L'intégration des équations (130), qui ne présente aucune difficulté, détermine le mouvement du centre de l'ellipsoïde.

Supposant, en particulier,

$$\gamma = 0,$$

on obtient ces formules simples :

$$\frac{dx_0}{dt} = A, \qquad \frac{dy_0}{dt} = B\cos\omega t, \qquad \frac{dz_0}{dt} = B\sin\omega t,$$

$$x_0 = At + k, \qquad y_0 = \frac{B}{\omega}\sin\omega t + l, \qquad z_0 = -\frac{B}{\omega}\cos\omega t + m,$$

$k$, $l$, $m$ étant des constantes arbitraires.

Le mouvement de translation de l'ellipsoïde se compose d'un mouvement uniforme le long de l'axe de rotation de la masse fluide et d'un mouvement uniforme du point $y_0$, $z_0$ dans le plan perpendiculaire à cet axe, où ce point décrit un cercle.

On voit donc que *l'ellipsoïde fluide à trois axes inégaux, dont la surface libre est soumise à une pression extérieure constante, peut conserver sa figure invariable, si son mouvement d'entraînement se compose d'un mouvement de translation, défini par les équations* (130), *et d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe, situé dans un des plans principaux de l'ellipsoïde.*

38. Faisons enfin quelques remarques sur le cas où la surface libre du liquide conserve pendant le mouvement la forme d'un ellipsoïde de révolution.

Dans mes Notes, insérées aux *Comptes rendus* en 1906, j'ai indiqué deux cas nouveaux du mouvement d'un ellipsoïde de révolution allongé, où le mouvement du liquide n'est pas permanent, mais l'ellipsoïde ne change pas sa figure avec le temps.

J'ai démontré que ce mouvement sera possible si l'on communique à l'ellipsoïde un mouvement d'entraînement se réduisant à la rotation de celui-ci, comme s'il était un corps solide, autour de son centre fixe dans l'espace.

Or, *le même mouvement sera aussi possible, si l'on ajoute au mouvement de rotation encore un mouvement de translation, défini par le mouvement du centre de l'ellipsoïde.*

Cela résulte immédiatement de recherches du n° 32.

Rappelons que les équations (97) et ($119_1$), ne dépendant pas de $u_0$, $v_0$, $w_0$, conduisent, dans le cas considéré, aux expressions suivantes pour les tourbillons $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ :

$$\omega_1 = \omega\left(\frac{1}{|1-\varepsilon\sigma|} - \frac{1}{\sigma}\right)\cos\tau,$$

$$\omega_2 = \varepsilon'\omega\left(\frac{1}{\sigma} - \frac{\varepsilon}{1-\sigma}\right)\sin\tau,$$

$$\omega_3 = 0,$$

où

$$\tau = \varepsilon_1 \int r\,dt + \text{const}, \qquad \sigma = \sqrt{\frac{c}{c-a}},$$

$$\varepsilon = \pm 1, \qquad \varepsilon' = \pm 1, \qquad \varepsilon_1 = \pm 1,$$

$\omega$ désignant une constante donnée.

On suppose que

$$a = b \qquad \text{et} \qquad c > a.$$

Les tourbillons $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ déterminent, comme on sait, le mouvement des points du liquide.

Ce mouvement se compose d'un mouvement d'entraînement de l'ellipsoïde, comme s'il était un corps solide, et d'un mouvement relatif du liquide par rapport à ce corps.

Le premier de ces mouvements se réduit à la rotation de l'ellipsoïde autour de son centre. Les composantes de la vitesse angulaire de cette rotation se déterminent comme il suit :

La composante $r$ suivant l'axe de révolution de l'ellipsoïde peut être donnée d'avance en fonction arbitraire de $t$; les composantes $p$ et $q$ ont pour expressions

$$p = -\varepsilon\omega\cos\tau, \qquad q = -\varepsilon'\varepsilon\omega\sin\tau.$$

Tels sont les résultats obtenus dans mes Notes, mentionnées plus haut, où j'ai supposé d'avance que le centre d'ellipsoïde reste immobile.

Nous pouvons maintenant affirmer, d'après les recherches du n° 32, que *le mouvement de l'espèce considérée sera aussi possible, si l'on ajoute au mouvement de rotation encore un mouvement de translation défini par les vitesses* $u_0$, $v_0$, $w_0$ *du centre de l'ellipsoïde*.

Pour déterminer ce mouvement, il faut intégrer les équations (123) [ou (124)], qui deviennent

$$(131) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{du_0}{dt} &= v_0 r - w_0 \lambda_2 \sin\tau, \\ \frac{dv_0}{dt} &= w_0 \lambda_1 \cos\tau - u_0 r, \\ \frac{dw_0}{dt} &= u_0 \lambda_2 \sin\tau - v_0 \lambda_1 \cos\tau, \end{aligned} \right.$$

où l'on a posé

$$\lambda_1 = \omega\left(\frac{1}{|1-\varepsilon\sigma|} - \frac{1}{\sigma} - \varepsilon\right), \qquad \lambda_2 = \varepsilon'\omega\left(\frac{1}{\sigma} - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon\sigma} - \varepsilon\right).$$

Supposant, en particulier,

$$r = 0,$$

on trouve

$$p = -\varepsilon\omega = \text{const.}, \qquad q = 0, \qquad x_2 = y_2 = 0,$$

$$x_1 = \frac{\omega}{|1-\varepsilon\sigma|}, \qquad y_1 = -\frac{\omega}{\sigma}.$$

Les équations (131) prennent alors cette forme simple :

$$\frac{du_0}{dt} = 0, \qquad \frac{dv_0}{dt} = w_0\lambda_1, \qquad \frac{dw_0}{dt} = -v_0\lambda_1.$$

Dans ce cas *l'ellipsoïde tourne uniformément autour d'un axe, parallèle à l'axe des* $\xi$, *et son centre se meut dans un plan perpendiculaire à cet axe, en y décrivant, d'une manière uniforme, un cercle.* Nous retombons ici à un cas particulier du mouvement du n° 35.

39. Je terminerai mes recherches par l'application de la méthode, exposée aux n$^{os}$ 4-10, à la solution du problème sur le mouvement d'un liquide dans lequel *les lignes de courant se confondent avec les lignes de tourbillon.*

C'est un cas du mouvement possible, indiqué pour la première fois par M. Graig et étudié ensuite par E. Beltrami.

Imaginons un liquide remplissant un vase solide, animé d'un mouvement donné à l'avance, et désignons, comme précédemment, par $u_0$, $v_0$, $w_0$ les composantes suivant les axes mobiles, invariablement liées avec le vase, de la vitesse de l'origine de ces axes; par $p$, $q$, $r$ les composantes suivant les mêmes axes de la vitesse angulaire de rotation de ces axes autour de l'origine.

Le mouvement du liquide se détermine par les équations (36), jointes à la condition aux limites (3) du n° 1.

Les équations (36) peuvent être satisfaites si l'on pose

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = 0,$$

$$(132) \qquad \begin{cases} \omega_1 = \dfrac{\partial w}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial z} = \lambda(u - qz + ry), \\[2mm] \omega_2 = \dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial x} = \lambda(v - rx + pz), \\[2mm] \omega_3 = \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = \lambda(w - py + qx), \end{cases}$$

où $\lambda$ désigne une fonction arbitraire, qui dépend en général de $x$, $y$ et $z$.

La détermination du mouvement dont il s'agit se ramène à l'intégration des équations (132) et (2) du n° 1, jointes à la condition (3).

Si l'on pose, en particulier,

$$p = q = r = 0,$$

nous obtiendrons les équations du mouvement du liquide étudiées par E. Beltrami.

40. Supposons, pour plus de simplicité, que $\lambda$ soit une constante, et cherchons une solution des équations (132) en supposant que $u$, $v$ et $w$ s'expriment à l'aide de séries, disposées suivant les puissances du paramètre $\lambda$,

$$(133) \qquad u = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_k, \qquad v = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k v_k, \qquad w = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k w_k.$$

Substituant ces expressions de $u$, $v$, $w$ dans (132), on trouve ces équations pour déterminer les fonctions $u_k$, $v_k$, $w_k$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$).

$$(134) \qquad \frac{\partial w_0}{\partial y} - \frac{\partial v_0}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial u_0}{\partial z} - \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} = 0,$$

$$(135) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial w_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial z} &= u_0 - qz + ry, \\ \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial w_1}{\partial x} &= v_0 - rx + pz, \\ \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} &= w_0 - py + qx, \end{aligned} \right.$$

et, pour toutes les valeurs de $k = 2, 3, \ldots,$

$$(136) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial w_k}{\partial y} - \frac{\partial v_k}{\partial z} &= u_{k-1}, \\ \frac{\partial u_k}{\partial z} - \frac{\partial w_k}{\partial x} &= v_{k-1}, \\ \frac{\partial v_k}{\partial x} - \frac{\partial u_k}{\partial y} &= w_{k-1}. \end{aligned} \right.$$

Remplaçons maintenant dans l'expression (4) de $\varphi(x, y, z, t)$ les vitesses $u_0$, $v_0$, $w_0$ respectivement par $a$, $b$ et $c$.

La condition (3) s'écrira

$$(137) \qquad \left\{ \begin{aligned} u\alpha + v\beta + w\gamma = (a + qz - ry)\alpha& \\ + (b + rx - pz)\beta + (c + py - qx)\gamma& \qquad \text{sur (S)}. \end{aligned} \right.$$

On en tire, eu égard à (133), les équations suivantes, auxquelles doivent satisfaire les fonctions $u_k$, $v_k$, $w_k$ aux points de la surface (S) :

$$(137_1) \quad u_0\alpha + v_0\beta + w_0\gamma = (a + qz - ry)\alpha + (b + rx - pz)\beta + (c + py - qx)\gamma,$$

et, pour toutes les valeurs de l'indice $k$, à partir de $k=1$,

$$u_k\alpha + v_k\beta + w_k\gamma = 0 \quad \text{sur (S)}. \tag{138}$$

Les fonctions $u$, $v$, $w$ étant indépendantes de $t$, il faut supposer qu'il en soit de même de fonctions $p$, $q$, $r$, $a$, $b$ et $c$, c'est-à-dire que *le vase solide soit animé d'un mouvement uniforme.*

Comme le liquide est incompressible, il faut ajouter encore aux équations précédentes l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{$132_1$}$$

qui conduit aux équations suivantes pour $u_k$, $v_k$, $w_k$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) :

$$\frac{\partial u_k}{\partial x} + \frac{\partial u_k}{\partial y} + \frac{\partial w_k}{\partial z} = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{139}$$

Le problème se ramène tout d'abord à la détermination des fonctions $u_0$, $v_0$, $w_0$ à l'aide des équations (134), (137) et (139) (pour $k=0$).

On peut considérer $u_0$, $v_0$, $w_0$ comme les vitesses d'un mouvement irrotationnel du liquide contenu dans le vase solide, animé du mouvement donné, défini par les valeurs données de $a$, $b$, $c$, $p$, $q$ et $r$.

Désignant par V le potentiel de vitesse, on obtient ces équations pour V :

$$\Delta V = 0 \qquad \text{à l'intérieur du vase,}$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial n} = (a + qz - ry)\alpha + (b + rx - pz)\beta + (c + py - qx)\gamma,$$

à la paroi du vase.

La fonction V étant déterminée, on aura

$$u_0 = \frac{\partial V}{\partial x}, \qquad v_0 = \frac{\partial V}{\partial y}, \qquad w_0 = \frac{\partial V}{\partial z}.$$

**41.** On peut considérer maintenant $u_0$, $v_0$, $w_0$, qui figurent dans les équations (135), comme connues.

Posons maintenant

$$\alpha_0 = u_0 - qz + ry,$$
$$\beta_0 = v_0 - rx + pz,$$
$$\gamma_0 = w_0 - py + qx.$$

On trouve, en tenant compte de (139),

$$\frac{\partial \alpha_0}{\partial x} + \frac{\partial \beta_0}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_0}{\partial z} = 0. \tag{140}$$

On peut donc considérer $\alpha_0$, $\beta_0$, $\gamma_0$ comme les composantes, suivant les axes mobiles, des tourbillons dans un certain mouvement du liquide, $u_1$, $v_1$, $w_1$ comme les vitesses du même liquide remplissant le vase donné immobile.

En effet, les fonctions $u_1$, $v_1$, $w_1$ doivent satisfaire aux équations

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial w_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial z} = \alpha_0 \\ &\frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial w_1}{\partial x} = \beta_0 \\ &\frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} = \gamma_0 \\ &\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{à l'intérieur du vase,}$$

et à la condition

$$u_1\alpha + v_1\beta + w_1\gamma = 0 \qquad \text{sur la paroi du vase.}$$

Ces équations ont précisément la forme des équations (1), (2) et (3) du n° 1, si l'on y pose

$$\varphi(x, y, z, t) = 0.$$

Les fonctions $\alpha_0$, $\beta_0$, $\gamma_0$, vérifiant l'équation (140), satisfont encore à la condition

$$\alpha_0\alpha + \beta_0\beta + \gamma_0\gamma = a\alpha + b\beta + c\gamma \qquad \text{sur la paroi du vase.}$$

Donc, l'expression $\alpha_0\alpha + \beta_0\beta + \gamma_0\gamma$ ne s'annule pas sur la surface (S) du vase, si $a$, $b$, $c$ restent différents de zéro.

Or, *moyennant la méthode indiquée aux nos 4 à 10, nous pouvons maintenant résoudre ce problème dans chaque cas particulier*, car le problème, comme nous l'avons montré, se ramène à la solution du problème de C. Neumann et aux quadratures (*voir* nos 4 à 10).

**42.** Les fonctions $u_1$, $v_1$, $w_1$ étant trouvées, nous pouvons ensuite déterminer successivement toutes les fonctions $u_k$, $v_k$, et $w_k$ pour toutes les valeurs de l'indice $k$, à partir de $k = 2$.

Pour cela, il suffit d'employer les formules du n° 3, car les fonctions $u_{k-1}$, $v_{k-1}$, $w_{k-1}$, qui figurent dans les seconds membres des équations (136), satisfont aux conditions (6) et (7).

On obtient ainsi ces expressions pour $u_k$, $v_k$ et $w_k$ ($k = 2, 3, \ldots$) :

$$(141)\quad \left\{\begin{aligned} u_k &= S_1^{(k)} + \frac{\partial P_k}{\partial x},\\ v_k &= S_2^{(k)} + \frac{\partial P_k}{\partial y},\\ w_k &= S_3^{(k)} + \frac{\partial P_k}{\partial z},\end{aligned}\right.$$

où

$$(142)\quad \left\{\begin{aligned} S_1^{(k)} &= \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int \frac{w'_{k-1}}{r}\,d\tau' - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int \frac{v'_{k-1}}{r}\,d\tau',\\ S_2^{(k)} &= \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int \frac{u'_{k-1}}{r}\,d\tau' - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int \frac{w'_{k-1}}{r}\,d\tau',\\ S_3^{(k)} &= \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int \frac{v'_{k-1}}{r}\,d\tau' - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int \frac{u'_{k-1}}{r}\,d\tau',\end{aligned}\right.$$

les intégrales étant étendues au volume du vase.

Quant à $P_k$, c'est une fonction définie par les conditions

$$(143)\quad \left\{\begin{aligned} &\Delta P_k = 0 && \text{à l'intérieur du vase,}\\ &\frac{\partial P_{ki}}{\partial n} = -(S_1^{(k)}\alpha + S_2^{(k)}\beta + S_3^{(k)}\gamma) && \text{à la paroi du vase.}\end{aligned}\right.$$

**43.** Supposons que la surface (S) du vase satisfasse aux conditions suivantes :

1° Elle admet en chaque point un plan tangent déterminé.

2° L'angle aigu $\mathfrak{S}$ que font deux normales à (S) en deux points $p$ et $p_0$ satisfait à l'inégalité

$$\mathfrak{S} > a\rho,$$

$\rho$ désignant la distance $pp_0$, $a$ un nombre fixe.

3° Il existe un nombre D tel qu'une parallèle à la normale $n$ à (S) en un point quelconque $p$ ne puisse rencontrer (S), à l'intérieur de la sphère de rayon D, ayant $p$ pour centre, qu'en un seul point [1].

Ces conditions étant remplies, on peut appliquer la méthode de Robin pour déterminer la fonction $P_k$ vérifiant les équations (143), comme je l'ai montré dans mon Ouvrage, tout à l'heure cité [*voir* aussi mon Mémoire : *Sur les problèmes*

---

[1] *Voir* le Mémoire de M. A. Liapounoff, *Sur certaines questions qui se rattachent au problème de Dirichlet* (*Journal de Mathématiques*, 1898, 3e fasc., p. 243 et 244), ainsi que mon Ouvrage : *Les méthodes générales pour résoudre les problèmes fondamentaux de la Physique mathématique* [Kharkow, 1902, p. 17-18 (en russe)].

*fondamentaux de la Physique mathématique* (*Annales de l'École Normale*, 1902).

Posons

$$\rho_0^{(k)} = -(S_1^{(k)}\alpha + S_2^{(k)}\beta + S_3^{(k)}\gamma),$$
$$\rho_s^{(k)} = \frac{1}{2\pi}\int \rho_{s-1}^{(k)} \frac{\cos\psi}{r^2}\, ds,$$

en désignant par $r$ la distance de deux points $p_0$ et $p$ de la surface (S), par $\psi$ l'angle que fait la direction $pp_0$ ($p$ étant le point variable) avec la normale extérieure à (S) en $p_0$.

La fonction $P_k$ se représentera sous la forme du potentiel de la simple couche

$$(144) \qquad P_k = \frac{1}{2\pi}\int (\rho_0^{(k)} + \rho_1^{(k)} + \ldots + \rho_s^{(k)} + \ldots)\frac{ds}{r},$$

où $r$ désigne la distance d'un point quelconque $x, y, z$ de l'espace du point variable $p$ de la surface (S).

Désignant par $q_k$ la densité de cette couche simple, on a

$$q_k = \rho_0^{(k)} + \rho_1^{(k)} + \ldots + \rho_s^{(k)} + \ldots.$$

J'ai établi, dans mon Ouvrage déjà cité, que la série du second membre de cette égalité converge absolument et uniformément sur la surface (S) et que

$$(145) \qquad |\rho_s^{(k)}| < q R_0^{(k)} \sigma^k,$$

où $R_0^{(k)}$ désigne le maximum de module de $\rho_0^{(k)}$ sur (S), $q$ un nombre positif ne dépendant que de la surface (S), $\sigma$ un nombre positif plus petit que l'unité.

**44.** Prenons maintenant sur (S) deux points quelconques $p$ et $p'$, assez voisins l'un de l'autre, et soit $\rho$ la distance $pp'$.

Désignons par $q_k$ et $q'_k$ les valeurs de $q_k$ aux points $p$ et $p'$.

Supposons que $\rho_0^{(k)}$ satisfasse à la condition.

$$(146) \qquad |\rho_0^{(k)} - (\rho_0^k)'| < b\rho^\alpha,$$

où $b$ est un nombre fixe, $\alpha$ un autre nombre fixe satisfaisant à l'inégalité

$$\alpha \leq 1;$$

$(\rho_0^{(k)})'$ désigne la valeur de $\rho_0^{(k)}$ au point $p'$.

Démontrons que, dans ce cas,

$$(147) \qquad |q_k - q'_k| < c\rho^\beta,$$

$c$ désignant un nombre fixe ne dépendant pas de $\rho$, $\beta$ le plus petit de deux nombres $\alpha$ et $\frac{1}{2}$ (on suppose que $\rho < 1$).

Moyennant la méthode de M. Liapounoff, j'ai établi dans mon Ouvrage cité l'inégalité suivante :

$$|\rho_s^{(k)} - (\rho_s^k)'| < \mathrm{L}\mathrm{R}_{s-1}^{(k)}\sqrt{\rho}, \tag{148}$$

où L est un nombre fixe ne dépendant que de (S); $\mathrm{R}_{s-1}^{(k)}$ désigne le maximum de module de $\rho_{s-1}^{(k)}$ sur (S), $(\mathrm{S}_s^{(k)})'$ la valeur de $\rho_s^{(k)}\rho$ au point $p'$.

Cette inégalité a lieu pour toutes les valeurs de $s$ à partir de $s = 1$.

En remarquant maintenant que

$$|q_k - q'_k| < |\rho_0^{(k)} - (\rho_0^{(k)})'| + |\rho_1^{(k)} - (\rho_1^{(k)})'| + \ldots + |\rho_s^{(k)} - (\rho_s^{(k)})'| + \ldots,$$

et en tenant compte des inégalités (148) et (146), on trouve

$$|q_k - q'_k| < b\rho^\alpha + \mathrm{L}\sqrt{\rho}(\mathrm{R}_0^{(k)} + \mathrm{R}_1^{(k)} + \ldots + \mathrm{R}_s^{(k)} + \ldots),$$

d'où l'on tire, en vertu de (145),

$$|q_k - q'_k| < b\rho^\alpha + \mathrm{L}\left(1 + \frac{q}{1-\sigma}\right)\mathrm{R}_0^{(k)}\sqrt{\rho}. \tag{$147_1$}$$

Cette inégalité conduit immédiatement à l'inégalité (147).

**45.** Formons maintenant la différence

$$\rho_0^{(k)} - (\rho_0^k)',$$

en se rappelant que

$$\rho_0^{(k)} = \mathrm{S}_1^{(k)}\alpha + \mathrm{S}_2^{(k)}\beta + \mathrm{S}_3^{(k)}\gamma.$$

On a, en employant les notations adoptées plus haut,

$$\rho_0^{(k)} - (\rho_0^{(k)})' = [\mathrm{S}_1^{(k)}\alpha - (\mathrm{S}_1^k)'\alpha'] + [\mathrm{S}_2^{(k)}\beta - (\mathrm{S}_2^k)'\beta'] + [\mathrm{S}_3^{(k)}\gamma - (\mathrm{S}_3^{(k)})'\gamma']. \tag{149}$$

Considérons la différence

$$\mathrm{S}_1^{(k)}\alpha - (\mathrm{S}_1^{(k)})'\alpha',$$

qui peut s'écrire

$$\mathrm{S}_1^{(k)}(\alpha - \alpha') + [\mathrm{S}_1^{(k)} - (\mathrm{S}_1^{(k)})']\alpha' = \mathrm{S}_1^{(k)}\alpha - (\mathrm{S}_1^{(k)})'\alpha'. \tag{150}$$

Désignant par $n$ et $n'$ les directions des normales extérieures à (S) aux points $p$

et $p'$ de (S), par P une direction arbitraire, on a

$$\cos(n, P) = \cos(n', P)\cos(n, n') + \sin(n', P)\sin(n, n')\cos\psi,$$

$\psi$ désignant un certain angle.

De cette égalité on tire

$$\cos(n, P) - \cos(n', P) = -2\cos(n', P)\sin^2\frac{(n, n')}{2} + \sin(n', P)\cos\psi\sin(n, n')$$
$$= 2\sin\frac{(n, n')}{2}\left[-\cos(n', P)\sin\frac{(n, n')}{2} + \sin(n', P)\cos\psi\cos\frac{(n, n')}{2}\right].$$

On en conclut que

$$|\cos(n, P) - \cos(n', P)| < 2(n, n') = 2\vartheta,$$

d'où, eu égard aux propriétés de la surface (S), énoncées au début du n° 43,

$$|\cos(n, P) - \cos(n', P)| < 2a\rho.$$

Cette inégalité, ayant lieu quelle que soit la direction P, nous donne

$$(151) \qquad |\alpha - \alpha'| < 2a\rho.$$

46. Désignons maintenant par $K_k$, $L_k$, $M_k$ les maximums des modules des fonctions $u_{k-1}$ $v_{k-1}$, $w_{k-1}$ dans le domaine (D), par $N_{k-1}$ le plus grand des nombres $K_k$, $L_k$, $M_k$.

On trouve

$$(152) \quad |S_1^{(k)}| = \left|\frac{1}{4\pi}\int w'_{k-1}\frac{\eta - y}{r^3}d\tau' - \frac{1}{4\pi}\int v'_{k-1}\frac{\zeta - z}{r^3}d\tau'\right| < \frac{N_{k-1}}{2\pi}\int\frac{d\tau}{r^2} = QN_{k-1},$$

Q désignant un nombre fixe ne dépendant que de la surface (S).

Considérons enfin la différence

$$S_1^{(k)} - (S_1^{(k)})'.$$

Posons

$$Y^{(k)} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\frac{w'_{k-1}}{r}d\tau' = \frac{1}{4\pi}\int w'_{k-1}\frac{\eta - y}{r^3}d\tau',$$
$$Z^{(k)} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int\frac{v'_{k-1}}{r}d\tau' = \frac{1}{4\pi}\int v'_{k-1}\frac{\zeta - z}{r^3}d\tau'.$$

$Y^{(k)}$ et $Z^{(k)}$ représentent les composantes suivant les axes $y$ et $z$ de la force d'attraction des masses, à densité $\frac{w'_{k-1}}{4\pi}$ et $\frac{v'_{k-1}}{4\pi}$ respectivement, remplissant le volume (D), sur le point $x$, $y$, $z$.

Moyennant les propriétés connues du potentiel newtonien, on s'assure que

$$|Y^{(k)} - (Y^{(k)})'| < \alpha N_{k-1}\rho,$$
$$|Z^{(k)} - (Z^{(k)})'| < \alpha N_{k-1}\rho,$$

$\alpha$ étant un nombre fixe ne dépendant que du domaine (D).

En remarquant que

$$S_1^{(k)} - (S_1^{(k)})' = Y^{(k)} - (Y^k)' - [Z^{(k)} - (Z^k)'],$$

on trouve

$$|S_1^{(k)} - (S_1^{(k)})'| < 2\alpha N_{k-1}\rho.$$

Cette inégalité et les inégalités (151) et (152) nous donnent, en vertu de (150),

$$|S_1^{(k)}\alpha - (S_1^{(k)})'\alpha'| < AN_{k-1}\rho,$$

A désignant un nombre fixe ne dépendant que de la surface (S).

On démontrera de la même manière que

$$|S_2^{(k)}\beta - (S_2^{(k)})'\beta'| < AN_{k-1}\rho,$$
$$|S_3^{(k)}\gamma - (S_3^{(k)})'\gamma'| < AN_{k-1}\rho.$$

On en tire, en tenant compte de (149),

$$|\rho_0^{(k)} - (\rho_0^{(k)})'| < 3AN_{k-1}\rho.$$

La fonction $\rho_0^{(k)}$ satisfait donc à l'inégalité (146), où il faut poser

$$b = 3AN_{k-1}.$$

L'inégalité ($147_1$) devient

$$(153) \qquad |q_k - q'_k| < BN_{k-1}\sqrt{\rho},$$

B désignant un nombre fixe, car il est évident que

$$R_0^{(k)} < hN_{k-1},$$

L étant un nombre assignable.

On voit donc que la fonction $P_k$ se représente sous la forme du potentiel de la simple couche

$$P_k = \frac{1}{2\pi}\int \frac{q_k}{r}\,ds,$$

dont la densité $q_k$ satisfait à la condition (153), ainsi qu'à l'inégalité suivante :

$$(154) \qquad |q_k| < CN_{k-1},$$

qui résulte immédiatement de l'inégalité (145).

Il importe de remarquer que la constante positive C, dans l'inégalité (154), ne dépend que des dimensions du domaine (D).

47. Ces propriétés du potentiel $P_k$ étant établies, on en conclut, d'après le théorème de M. Liapounoff [1], que les dérivées

$$\frac{\partial P_k}{\partial x}, \quad \frac{\partial P_k}{\partial y}, \quad \frac{\partial P_k}{\partial z}$$

ont les valeurs bien déterminées en tous les points de la surface (S) et qu'elles satisfont aux inégalités

$$(155) \qquad \left|\frac{\partial P_k}{\partial x}\right| < MN_{k-1}, \qquad \left|\frac{\partial P_k}{\partial y}\right| < MN_{k-1}, \qquad \left|\frac{\partial P_k}{\partial z}\right| < MN_{k-1},$$

où M est un nombre fixe ne dépendant que de la surface (S).

Ces inégalités se déduisent sans peine des formules données par M. Liapounoff au n° 4 de son Mémoire, cité plus haut (p. 256, 257).

48. Les inégalités (152) et (155) conduisent aux suivantes :

$$(156) \qquad |u_k| < KN_{k-1}, \qquad |v_k| < KN_{k-1}, \qquad |w_k| < KN_{k-1},$$

où

$$K = Q + M.$$

Ces inégalités ont lieu pour tous les points du volume du vase [du domaine (D)].

Cela résulte de ce que cette propriété appartient évidemment à l'inégalité (152).

Quant aux inégalités (155), nous n'en avons démontré que pour les points de la surface (S).

Or, les dérivées

$$\frac{\partial P_k}{\partial x}, \quad \frac{\partial P_k}{\partial y}, \quad \frac{\partial P_k}{\partial z}$$

du potentiel de la simple couche sont toujours fonctions harmoniques à l'intérieur de (S).

On en conclut, en tenant compte des propriétés fondamentales des fonctions harmoniques [2], que les inégalités (155) restent vraies pour tous les points du domaine (D).

---

[1] A. LIAPOUNOFF, *Sur certaines questions*, etc. (*Journal de Mathématiques*, 1898, n° 3, p. 255 et suiv.).

[2] Une fonction harmonique, continue dans une certaine région sans être constante, ne peut avoir ni maximum ni minimum à l'intérieur de cette région. *Voir*, par exemple, JORDAN, *Cours d'Analyse*, t. II, 1894, p. 213.

Les inégalités (156) montrent que les séries (133)

$$u=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k u_k, \qquad v=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k v_k, \qquad w=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k w_k$$

convergent uniformément et absolument dans tout le domaine (D) pour toutes les valeurs du paramètre $\lambda$ satisfaisant à l'inégalité

$$(157) \qquad |\lambda|<\frac{1}{K}.$$

**49.** Posons maintenant

$$(158) \qquad u=u_0+\lambda U, \qquad v=v_0+\lambda V, \qquad w=w_0+\lambda W,$$

où

$$U=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{k-1}u_k, \qquad V=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{k-1}v_k, \qquad W=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{k-1}w_k.$$

Ces dernières séries convergent aussi uniformément et absolument dans le domaine (D), pourvu que $\lambda$ satisfasse à l'inégalité (157).

Considérons l'intégrale

$$(159) \qquad S_1=\frac{1}{4\pi}\int W\frac{\eta-y}{r^3}d\tau'-\frac{1}{4\pi}\int V\frac{\zeta-z}{r^3}d\tau'.$$

On a

$$\frac{1}{4\pi}\int W\frac{\eta-y}{r^3}d\tau'=\frac{1}{4\pi}\int\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{k-1}w'_k\right)\frac{\eta-y}{r^3}d\tau';$$

on en conclut que

$$\frac{1}{4\pi}\int W\frac{\eta-y}{r^3}d\tau'=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{k-1}\frac{1}{4\pi}\int w'_k\frac{\eta-y}{r^3}d\tau',$$

car la série

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{k-1}w'_k$$

converge uniformément dans le domaine (D).

On démontrera de la même manière que

$$\frac{1}{4\pi}\int V\frac{\zeta-z}{r^3}d\tau'=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{k-1}\frac{1}{4\pi}\int v'_k\frac{\zeta-z}{r^3}d\tau'.$$

On en conclut, eu égard à (142), que

$$\sum_{k=2}^{\infty} S_1^{(k)} \lambda^{k-2} = S_1. \tag{160}$$

Les mêmes raisonnements conduisent aux égalités analogues

$$\sum_{k=2}^{\infty} S_2^{(k)} \lambda^{k-2} = S_2, \qquad \sum_{k=2}^{\infty} S_3^{(k)} \lambda^{k-2} = S_3, \tag{160$_1$}$$

où l'on a posé

$$\left\{ \begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{4\pi} \int U \frac{\zeta - z}{r^3} d\tau' - \frac{1}{4\pi} \int W \frac{\xi - x}{r^3} d\tau', \\ S_3 &= \frac{1}{4\pi} \int V \frac{\xi - x}{r^3} d\tau' - \frac{1}{4\pi} \int U \frac{\eta - y}{r^3} d\tau'. \end{aligned} \right. \tag{159$_1$}$$

**50.** Formons maintenant la série

$$\sum_{k=2}^{\infty} \rho_0^{(k)} \lambda^{k-2} = -\sum_{k=2}^{\infty} \lambda^{k-2} (S_1^{(k)} \alpha + S_2^{(k)} \beta + S_3^{(k)} \gamma).$$

L'inégalité (152) montre que cette série converge uniformément et absolument en tous les points de la surface (S) et représente, par suite, une fonction continue sur (S).

D'autre part, il est évident que cette fonction satisfait à la condition

$$\int \left( \sum_{k=2}^{\infty} \rho_0^{(k)} \lambda^{k-2} \right) ds = 0.$$

Cherchons une fonction P satisfaisant aux conditions

$$\Delta P = 0 \qquad \text{à l'intérieur de (D)},$$
$$\frac{\partial P}{\partial x} \alpha + \frac{\partial P}{\partial y} \beta + \frac{\partial P}{\partial z} \gamma = f \qquad \text{sur (S)},$$

où l'on a posé, pour simplifier l'écriture,

$$f = \sum_{k=2}^{\infty} \rho_0^{(k)} \lambda^{k-2}.$$

Employant l'une des méthodes connues (par exemple, la méthode de C. Neumann ou celle de Robin), nous pouvons résoudre ce problème, car la surface (S) satisfait aux conditions du n° 43, d'après l'hypothèse faite.

Nous trouverons ainsi la fonction déterminée P, harmonique à l'intérieur de (D), dont la dérivée normale

$$\frac{\partial P_i}{\partial n} = \frac{\partial P}{\partial x}\alpha + \frac{\partial P}{\partial y}\beta + \frac{\partial P}{\partial z}\gamma$$

se réduit, en effet, à la fonction donnée $f$ sur (S).

La fonction P étant ainsi déterminée, posons

$$(161) \qquad \begin{cases} u = u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2\left(S_1 + \dfrac{\partial P}{\partial x}\right), \\ v = v_0 + \lambda v_1 + \lambda^2\left(S_2 + \dfrac{\partial P}{\partial y}\right), \\ w = w_0 + \lambda w_1 + \lambda^2\left(S_3 + \dfrac{\partial P}{\partial z}\right), \end{cases}$$

où $u_0$, $v_0$, $w_0$, $u_1$, $v_1$, $w_1$ sont les fonctions connues, définies par les équations (134), (135), (139) (pour $k = 0$ et $k = 1$) et par les conditions aux limites (137) et (138) (pour $k = 1$).

**51.** Il est évident que *les fonctions $u$, $v$, $w$, définies par les formules* (161), *représentent la solution cherchée du problème.*

Elles satisfont, en effet, à la condition

$$u\alpha + v\beta + w\gamma = (a + qz - ry)\alpha + (b + rx - pz)\beta + (c + py - qx)\gamma = \psi,$$

car, d'après définition,

$$u_0\alpha + v_0\beta + w_0\gamma = \psi,$$
$$u_1\alpha + v_1\beta + w_1\gamma = 0,$$
$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} + S_1\right)\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial y} + S_2\right)\beta + \left(\frac{\partial P}{\partial z} + S_3\right)\gamma = 0.$$

Elles satisfont à l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

car $u_0$, $v_0$, $w_0$, $u_1$, $v_1$ et $w$ satisfont à cette équation, et

$$\frac{\partial S_1}{\partial x} + \frac{\partial S_2}{\partial y} + \frac{\partial S_3}{\partial z} = 0,$$

ce qui résulte des expressions mêmes (159) et ($159_1$) des fonctions $S_1$, $S_2$ et $S_3$.

On a enfin

$$\frac{\partial \dfrac{\partial P}{\partial x}}{\partial x} + \frac{\partial \dfrac{\partial P}{\partial y}}{\partial y} + \frac{\partial \dfrac{\partial P}{\partial z}}{\partial z} = 0,$$

car P est une fonction harmonique à l'intérieur de (D).

Il ne nous reste qu'à montrer que les fonctions (161) satisfont aux équations (132), ce qui est d'ailleurs presque évident.

En effet, eu égard aux expressions (159) et ($159_1$), on trouve

$$\frac{\partial\left(S_3+\frac{\partial P}{\partial z}\right)}{\partial y}-\frac{\partial\left(S_2+\frac{\partial P}{\partial y}\right)}{\partial z}=-\frac{1}{4\pi}\Delta\int\frac{u'}{r}d\tau'=+U.$$

On a donc, en tenant compte de (134), (135) et (158),

$$\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{\partial w_0}{\partial y}-\frac{\partial v_0}{\partial z}+\lambda\left(\frac{\partial w_1}{\partial y}-\frac{\partial v_1}{\partial z}\right)+\lambda^2 U$$
$$=\lambda(u_0+\lambda U-qz+ry)=\lambda(u-qz+ry).$$

La première des équations (132) est donc satisfaite.

Les mêmes raisonnements montrent qu'il en est de même de deux autres des équations (132).

On voit donc que *la méthode employée résout le problème du mouvement de l'espèce considérée du liquide, au moins pour les valeurs du paramètre* $\lambda$ *dont le module ne surpasse pas une certaine limite ne dépendant que des dimensions de la surface* (S) *qui limite le vase contenant le liquide.*

**52.** Remarquons que cette méthode sera en défaut si nous supposons que le vase reste immobile, car alors

$$u_0=v_0=w_0=0,$$

et, par suite, tous les $u_k$, $v_k$, $w_k$ deviennent nuls.

Or, il est possible qu'il existe une suite de valeurs positives, bien déterminées, du paramètre $\lambda$, auxquelles correspondent les fonctions bien déterminées, différentes de zéro et satisfaisant aux équations (132), jointes à la condition

$$u\alpha+v\beta+w\gamma=0 \qquad \text{sur (S)}.$$

L'existence de ces valeurs de $\lambda$ et des fonctions correspondantes $u$, $v$, $w$, si elles existent, peut être établie, en partant des recherches précédentes, à l'aide de la méthode de Schwarz-Poincaré. Je me bornerai par cette remarque, sans étudier la question dans ce travail.

Encore une remarque pour finir.

J'ai considéré un cas, où le liquide remplit un vase solide, animé d'un mouvement uniforme, donné à l'avance.

Dans ce cas, la condition aux limites prend une forme particulière (137).

*L'analyse précédente s'applique presque sans changement à la solution d'un problème un peu plus général* que j'énoncerai comme il suit :

*Déterminer le mouvement d'une masse fluide, limité par une surface fermée* (S), *dans lequelles lignes de courant se confondent avec les lignes de tourbillon et la composante normale de la vitesse se réduit à la surface* (S) *à une fonction continue* $f(x, y, z)$ *satisfaisant à la condition*

$$\int f\,ds = 0.$$

Il est évident qu'il suffit de poser, dans les équations (132),

$$p = q = r = 0,$$

et de remplacer le second membre de l'équation (137) par $f(x, y, z)$ pour obtenir, moyennant la méthode indiquée plus haut, la solution du problème.