SUR LES FONCTIONS ENTIÈRES D'ORDRE FINI [1],

PAR M. EDMOND MAILLET.

J'ai indiqué dans mon Mémoire *Sur les séries divergentes et les équations différentielles* [2] le grand intérêt que présente l'étude du problème suivant :

Reconnaître si une fonction entière $F(z)$, *d'ordre fini* ρ, *a, dans un secteur du plan des z complexes, ou même le long d'une demi-droite issue de l'origine, son ordre (apparent)* $< \rho$, *c'est-à-dire si le module de* $F(z)$ *reste, dans ce secteur,*

$$(1) \qquad < e^{r^\sigma} \qquad (\text{avec } \sigma \text{ fixe} < \rho)$$

pour $|z| = r$, *dès que r est assez grand.*

Un problème analogue peut se poser pour les fonctions entières d'ordre infini ou nul, et l'on aperçoit immédiatement pour les premières des exemples où la réponse est affirmative $\left[\text{ainsi } F(z) = e^{-e^{z^2}}\right]$. Quand une fonction entière $F(z)$, d'ordre fini $\rho > 0$, jouit de cette propriété dans un secteur, on peut essayer de lui faire correspondre une série divergente sommable au sens de M. Borel [formules (14) et (15) et théorème de la page 517 du Mémoire précité].

Je signalai, en dehors du cas où $F(z)$ a son ordre apparent entier plus grand que l'ordre réel, et qui est traité dans le Mémoire précité, d'autres cas où (1) a lieu au moins le long d'une droite : 1° le cas de $\sin \pi z$ le long de l'axe réel; 2° le cas des produits canoniques de facteurs primaires $\prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n}}$, d'ordre ρ,

---

(1) *Voir* un résumé dans les *Comptes rendus* du 18 février 1907, p. 367-368 et dans l'*Intermédiaire des mathématiciens*, 1907, p. 57, réponse à la question 1477.

(2) *Annales de l'École Normale*, 1903, p. 487-518, en particulier p. 506 et 515.

avec $1 < \rho < 2$ (¹), dont toutes les racines sont réelles et de même signe; 3° divers exemples cités dans les travaux de M. Mittag-Leffler (²).

II. *Je me propose de faire connaître ici des exemples de même nature que d'autres pourront peut-être utiliser ou développer; mais je commence par faire remarquer que l'on ne peut espérer montrer pour toute fonction entière d'ordre fini l'exactitude de l'inégalité* (1), *même le long d'une demi-droite.*

En effet, soit la fonction (ρ entier)

$$F(z) = e^{iz^\rho} - e^{-iz^\rho}, \qquad z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$
$$z^\rho = r^\rho(\cos\rho\varphi + i\sin\rho\varphi) = \xi + i\eta,$$
$$e^{iz^\rho} = e^{i\xi-\eta}, \qquad e^{-iz^\rho} = e^{-i\xi+\eta},$$
$$M = |F(z)|^2 = (e^{-\eta} - e^{\eta})^2\cos^2\xi + (e^{-\eta} + e^{\eta})^2\sin^2\xi,$$
$$M = e^{2\eta} + e^{-2\eta} + 2(\sin^2\xi - \cos^2\xi).$$

M ne reste fini le long d'une demi-droite $\varphi = \varphi_0$ que si $\eta = 0$, $\sin\rho\varphi_0 = 0$; le long d'une demi-droite où $\sin\rho\varphi_0 = \lambda \neq 0$,

$$M = e^{2\lambda r^\rho} + e^{-2\lambda r^\rho} + 2(\sin^2\xi - \cos^2\xi) \geqq e^{|\lambda| r^\rho}$$

dès que r est assez grand. Alors la fonction $F(z)F(ze^{i\psi})$, avec ψ constant, a pour carré de son module

$$M' = (e^{2\eta} + e^{-2\eta} + 2\sin^2\xi - 2\cos^2\xi)(e^{2\eta_1} + e^{-2\eta_1} + 2\sin^2\xi_1 - 2\cos^2\xi_1),$$

où

$$\xi_1 = r^\rho\cos\rho(\varphi + \psi), \qquad \eta_1 = r^\rho\sin\rho(\varphi+\psi)$$

et M′ ne peut rester fini ou inférieur à $e^{\mu r^\rho}$ (μ constante positive assez petite), quand r est assez grand, le long d'une demi-droite $\varphi = \varphi_1$ que si

$$\sin\rho\varphi_1 = \sin\rho(\varphi_1 + \psi) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\sin\rho\varphi_1 = \sin\rho\psi = 0;$$

ψ étant arbitraire, on peut toujours le choisir de façon que $M' \geqq e^{\mu r^\rho}$ (μ fixe conve-

(¹) L'indication donnée dans mon Mémoire, probablement incomplète, doit être rectifiée ainsi, comme le montre au surplus le théorème de M. Wiman dont je vais parler tout à l'heure.

(²) *Acta math.*, t. XXIX, p. 124 (*voir* encore *Interm. des math.*, 1905, p. 14, réponse à la question 1477).

nable >0) dès que r est assez grand, pour une infinité de valeurs de r aussi grandes qu'on veut [1].

Cet exemple ne permet pas, il est vrai, de dire qu'il y aura des exceptions à (1) quand l'ordre n'est pas entier; mais un théorème de M. Wiman [2] montre que (1) n'est possible que quand $\rho \geqq \frac{1}{2}$.

III. Ceci posé, je passe aux exemples de fonctions entières $F(z)$ autres que ceux déjà indiqués et pour lesquels (1) a lieu.

Soient $u_n = \frac{z}{a_n}$ et le produit canonique $\prod_1^\infty f_n$, d'ordre fini $\rho > 1$ non entier, avec $\rho - p < 1$ et

$$\log f_n = \log(1 - u_n) + u_n + \frac{u_n^2}{2} + \ldots + \frac{u_n^p}{p}. \tag{2}$$

Je pose

$$u_n = \lambda e^{i\varphi};$$

on a

$$\log|f_n| = \frac{1}{2}\log(1 + \lambda^2 - 2\lambda\cos\varphi) + \lambda\cos\varphi + \frac{\lambda^2\cos 2\varphi}{2} + \ldots + \frac{\lambda^p\cos p\varphi}{p}.$$

On remarque que $f_n = 1$ pour $\lambda = 0$; $|f_n|$ sera donc $\leqq 1$, pour une valeur donnée de φ, sous la condition suffisante que, avec cette valeur de φ,

$$\frac{d\log|f_n|}{d\lambda} \leqq 0,$$

quel que soit $\lambda \geqq 0$. Or,

$$\frac{d\log|f_n|}{d\lambda} = \frac{\lambda - \cos\varphi}{1 + \lambda^2 - 2\lambda\cos\varphi} + \cos\varphi + \lambda\cos 2\varphi + \ldots + \lambda^{p-1}\cos p\varphi,$$

d'où, toutes réductions faites,

$$(1 + \lambda^2 - 2\lambda\cos\varphi)\frac{d\log|f_n|}{d\lambda} = -\lambda^p\cos(p+1)\varphi + \lambda^{p+1}\cos p\varphi,$$

d'après l'identité

$$\cos(\beta + 2\varphi) + \cos\beta = 2\cos\varphi\cos(\varphi + \beta),$$

---

(1) Cette restriction est essentielle : aucune fonction entière n'a son module $> r^\alpha$, si grand que soit α, le long de toute demi-droite issue de l'origine, même pour les valeurs de r assez grandes.

(2) *Arkiv för Mathematik*, t. II.

quel que soit β. Posant $\varphi = \alpha + \pi$,

$$(3) \qquad (1 + \lambda^2 + 2\lambda \cos\alpha) \frac{d \log |f_n|}{d\lambda} = (-1)^p \lambda^p [\cos(p+1)\alpha + \lambda \cos p\alpha].$$

Il suffira que $\cos p\alpha$ et $\cos(p+1)\alpha$ soient tous deux $\leqq 0$ quand p est pair, $\geqq 0$ quand p est impair, pour que $|f_n| \leqq 1$ le long de la demi-droite $\alpha + \pi$.

La deuxième condition a lieu quel que soit p, dans un secteur d'angle $\frac{\pi}{p+1}$ ayant pour bissectrice l'axe des u réels négatifs dans le plan des u $\left[|\alpha| \leqq \frac{\pi}{2(p+1)} \right]$; la première dans un secteur tel que, à la fois,

$$\frac{\pi}{2} \leqq p\alpha \leqq \frac{3\pi}{2}, \qquad \frac{\pi}{2} \leqq (p+1)\alpha \leqq \frac{3\pi}{2},$$

c'est-à-dire que

$$\frac{\pi}{2} \leqq p\alpha, \qquad (p+1)\alpha \leqq \frac{3\pi}{2}, \qquad \frac{\pi}{2p} \leqq \alpha \leqq \frac{3\pi}{2(p+1)},$$

ce qui est possible, car

$$2(p+1) \leqq 6p;$$

cette première condition a lieu aussi dans le secteur symétrique du secteur précédent par rapport à l'axe des u réels; je ne m'attarde pas à chercher s'il y a, dans les deux cas, d'autres secteurs possibles; je me borne à remarquer que, lorsque $p = 1$, il n'y a pas d'autre secteur où $\frac{d \log |f_n|}{d\lambda} \leqq 0$ quel que soit $\lambda > 0$.

Soit S un des secteurs en question. La conclusion, c'est qu'il y a toujours un secteur S d'angle fini où $|f_n| \leqq 1$. Si

$$z = re^{i\gamma}, \qquad a_n = r_n e^{i\gamma_n},$$

φ est égal à $\gamma - \gamma_n$.

Supposant alors que, quel que soit n, la demi-droite d'argument $\gamma - \gamma_n$ du plan des u reste comprise dans le secteur S; il en résulte que

$$\left| \prod f_n \right| \leqq 1,$$

quand z varie le long de la demi-droite γ.

On voit, de même, que le module du produit de $\prod f_n$ par un polynome ou une fonction entière d'ordre $< \rho$ satisfait à l'inégalité (1) le long de la demi-droite γ, sous les mêmes conditions.

Ces conclusions se conservent pour toutes les droites γ comprises dans un secteur d'angle 2ε du plan des z (ε positif assez petit), quand les demi-droites $\gamma - \gamma_n$, du plan des u, qui sont comprises dans S, forment toutes avec les demi-droites limitant S un angle au moins égal en valeur absolue à l'angle ε. En effet, les demi-droites d'argument $\gamma \pm \varepsilon' - \gamma_n$ du plan des u sont encore comprises dans le secteur S quand $0 < \varepsilon' \leqq \varepsilon$.

A titre d'exemple, j'énoncerai avec plus de précision les résultats que donne la méthode ci-dessus dans le cas de $p = 1$.

Si les racines de $\prod_1^\infty f_n$ *sont toutes comprises dans un secteur* S′ *d'angle* $90^\circ - 2\varepsilon$ (ε *fixe* > 0) *du plan des* z, *dans le secteur* S″, *d'angle* 2ε, *ayant pour bissectrice la demi-droite opposée à la demi-droite bissectrice du secteur* S′, *on a*

$$\left|\prod_1^\infty f_n\right| \leqq 1 \quad (^1).$$

IV. On peut se demander s'il n'y a pas des résultats analogues pour l'ordre infini non transfini. On prendra alors

$$\log f_n = \log(1 - u_n) + u_n + \frac{u_n^2}{2} + \ldots + \frac{u_n^{p_n}}{p_n},$$

où, pour $n > 1$,

$$p_n = \tau_n \log n,$$

τ_n positif variant entre deux limites fixes. Le même calcul donne

$$(1 + \lambda^2 + 2\lambda \cos\alpha)\frac{d \log|f_n|}{d\lambda} = (-1)^{p_n}\lambda^{p_n}[\cos(p_n + 1)\alpha + \lambda \cos p_n \alpha].$$

On pourra toujours choisir p_n impair par exemple; on voit que l'angle $\frac{\pi}{p_n + 1}$ du secteur S correspondant, qui a pour bissectrice l'axe des u réels négatifs, tend vers 0 avec $\frac{1}{n}$. On n'aura sûrement ici $\left|\prod_1^\infty f_n\right| \leqq 1$ que si les racines sont groupées le long d'une demi-droite dont elles sont assez voisines, et même s'en rapprochent

(1) Quand les racines sont toutes sur une même droite issue de l'origine, ou, plus exactement, *alignées* ou *orientées* le long de cette droite, suivant la définition de M. Leau (*A. E. N.*, 1906, p. 34), on retombe sur un cas traité par lui beaucoup plus en détail.

Il y aurait lieu de chercher à étendre plus ou moins les résultats de M. Leau au cas où les racines sont dans un ou plusieurs secteurs d'angles finis.

assez vite quand n croît indéfiniment. Ce sera, en particulier, le cas si les zéros sont tous groupés sur une même demi-droite : alors, le long de la demi-droite opposée,

$$\left|\prod_1^\infty f_n\right| \leqq 1.$$

On est ainsi conduit à se poser cette question que je ne résous pas :

Existe-t-il des produits canoniques de facteurs primaires d'ordre infini, et dont le module reste $\leqq 1$ *dans un secteur fini du plan des* z*?*

On ne peut se poser la même question pour les fonctions entières d'ordre infini, car la réponse est affirmative, par exemple pour $e^{G(z)-1}$, quand $G(z)$ est une fonction entière d'ordre fini dont le module est $\leqq 1$ dans un secteur fini du plan des z.