SUR QUELQUES PRINCIPES GÉNÉRAUX

RELATIFS A

LA THÉORIE DES FONCTIONS

D'UN NOMBRE QUELCONQUE DE VARIABLES,

PAR M. CHARLES RIQUIER.

INTRODUCTION.

Le titre du présent Mémoire en indique assez clairement le but principal : nous nous proposons d'y traiter certains points de méthode, que l'étude d'une question particulière nous a conduit, récemment, à examiner de très près. Bien qu'un pareil sujet puisse paraître fort modeste, il nous a semblé qu'un exposé consciencieux des réflexions qu'il nous a suggérées ne serait pas entièrement dénué d'intérêt : beaucoup de questions d'une importance capitale comportent en effet la considération d'un nombre *quelconque* de variables, et ce seul fait entraîne, dans bien des cas, une complication très grande, à laquelle il importe de remédier le plus possible par la précision, la rigueur analytique et, en même temps, la généralité des principes. Telle est l'idée qui nous a guidé dans la rédaction de ce travail : le même sujet nous avait déjà préoccupé il y a quelques années, comme en témoignent deux Mémoires publiés en 1890 et en 1891 dans les *Annales de l'École Normale* (1); mais la forme sous laquelle nous le traitons ici nous paraît incomparablement plus générale, parfois même notablement plus simple, et, pour cette double raison, plus avantageuse.

Le Mémoire actuel est divisé en trois Parties : la première se rapporte à la continuité, la deuxième à la définition des fonctions analytiques, la troisième au calcul de ces fonctions par cheminement. Nous terminons par une application

(1) *Sur les fonctions continues d'un nombre quelconque de variables* (*Annales de l'École Normale*, 1890). — *Sur les principes de la théorie générale des fonctions* (*Annales de l'École Normale*, 1891).

des principes exposés, relative au prolongement analytique des intégrales de certains systèmes différentiels.

CHAPITRE I.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES RELATIVES A LA CONTINUITÉ.

ESPACE A UN NOMBRE QUELCONQUE DE DIMENSIONS ; RÉGIONS LIMITÉES, RÉGIONS COMPLÈTES.

1. Nous nommerons *point à n coordonnées* tout système de valeurs particulières attribuées aux n variables *réelles* x, y, ..., et *espace à n dimensions* l'ensemble de tous les points à n coordonnées; cet espace sera souvent désigné dans ce qui suit par la notation $\left[[x, y, \ldots]\right]$ (¹).

La *distance* des deux points

$$(x_1, y_1, \ldots), \quad (x_2, y_2, \ldots)$$

est, par définition, la racine carrée arithmétique (c'est-à-dire non négative) de la quantité

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + \ldots;$$

si, notamment, il n'y a qu'une seule variable réelle x, la distance des deux points x_1, x_2 est égale au module de la différence $x_1 - x_2$ (²).

Pour que deux points soient identiques, c'est-à-dire pour que leurs coordonnées semblables soient respectivement égales, il faut et il suffit que leur distance soit nulle.

Pour simplifier l'écriture, nous désignerons souvent par a, a_1, a_2, ... les points $(x, y, \ldots)$, $(x_1, y_1, \ldots)$, $(x_2, y_2, \ldots)$, ... et par aa_1, aa_2, a_1a_2, ... les distances mutuelles de ces points.

2. Dans l'espace à n dimensions, on a souvent à considérer, à l'exclusion de

(¹) Nous généraliserons plus loin (nº 17) le sens de la notation $\left[[x, y, \ldots]\right]$ pour l'étendre au cas où les variables x, y, ... sont *imaginaires*.

(²) Nous appelons *module* d'une quantité réelle ce qu'on nomme habituellement *valeur absolue* de cette quantité.

tous les autres points, ceux dont les coordonnées satisfont à telles ou telles conditions, d'une nature absolument quelconque d'ailleurs; leur ensemble constitue ce qu'on appelle une *région* de l'espace à n dimensions.

Nous établirons tout d'abord la proposition suivante :

Dans l'espace à n dimensions (nº 1), *si la distance de quelque point fixe à un point variable d'une région donnée* $\mathfrak{R}$ *reste toujours inférieure à quelque constante positive, tout point fixe jouit par rapport à* $\mathfrak{R}$ *de la même propriété :* la région, en pareil cas, est dite *limitée*.

I. *La distance de deux points quelconques est comprise entre la somme et la différence de leurs distances à un même troisième* (et peut parfois atteindre l'une ou l'autre de ces valeurs extrêmes).

Si l'on considère les points a_1, a_2, a_3 (nº 1), et que l'on pose, pour abréger,

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= \xi_2, \qquad & y_2 - y_1 &= \eta_2, \qquad & \ldots, \\ x_3 - x_1 &- \xi_3, \qquad & y_3 - y_1 &= \eta_3, \qquad & \ldots, \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} \overline{a_2 a_3}^2 &= (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + \ldots \\ &= (\xi_2 - \xi_3)^2 + (\eta_2 - \eta_3)^2 + \ldots \\ &= \overline{a_1 a_2}^2 + \overline{a_1 a_3}^2 - 2(\xi_2 \xi_3 + \eta_2 \eta_3 + \ldots), \end{aligned}$$

d'où résulte que le carré de la distance $a_2 a_3$ ne peut excéder l'intervalle des deux quantités

$$\begin{gathered} \overline{a_1 a_2}^2 + \overline{a_1 a_3}^2 - 2 \operatorname{mod}(\xi_2 \xi_3 + \eta_2 \eta_3 + \ldots), \\ \overline{a_1 a_2}^2 + \overline{a_1 a_3}^2 + 2 \operatorname{mod}(\xi_2 \xi_3 + \eta_2 \eta_3 + \ldots). \end{gathered}$$

De la relation

$$(\xi_2^2 + \eta_2^2 + \ldots)(\xi_3^2 + \eta_3^2 + \ldots) = (\xi_2 \xi_3 + \eta_2 \eta_3 + \ldots)^2 + \Sigma (\xi_2 \eta_3 - \xi_3 \eta_2)^2,$$

où la sommation indiquée dans le second membre doit s'étendre à toutes les combinaisons deux à deux des lettres ξ, η, ..., on tire d'ailleurs

$$\operatorname{mod}(\xi_2 \xi_3 + \eta_2 \eta_3 + \ldots) \leqq \sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2 + \ldots}\, \sqrt{\xi_3^2 + \eta_3^2 + \ldots} \leqq a_1 a_2 \times a_1 a_3;$$

donc, à plus forte raison, le carré de la distance $a_2 a_3$ ne pourra excéder l'intervalle des deux quantités

$$\begin{gathered} \overline{a_1 a_2}^2 + \overline{a_1 a_3}^2 - 2 a_1 a_2 \times a_1 a_3, \\ \overline{a_1 a_2}^2 + \overline{a_1 a_3}^2 + 2 a_1 a_2 \times a_1 a_3; \end{gathered}$$

on en déduit, par l'extraction des racines carrées arithmétiques,

$$\operatorname{mod}(a_1 a_2 - a_1 a_3) \leqq a_2 a_3 \leqq a_1 a_2 + a_1 a_3.$$

II. Revenons à notre énoncé et désignons par a un point variable de la région $\mathfrak{R}$, par a_1 et a_2 deux points fixes de l'espace $\big[[x, y, \ldots]\big]$ (n° 1). Si, en choisissant convenablement la constante positive M, on a, pour toute position du point a dans la région $\mathfrak{R}$, l'inégalité

$$a_1 a < \mathrm{M},$$

on aura aussi

$$a_1 a + a_1 a_2 < \mathrm{M} + a_1 a_2$$

et, à plus forte raison (I),

$$a a_2 < \mathrm{M} + a_1 a_2,$$

ce qui démontre la proposition.

3. Un point fixe sera dit *complètement extérieur* à une région donnée de l'espace à n dimensions, si sa distance à un point variable de cette dernière reste supérieure à quelque constante positive.

Une région sera dite *complète,* si tout point n'en faisant pas partie lui est complètement extérieur.

4. La remarque suivante est souvent utile :

Supposons que les n variables indépendantes (réelles) aient été partagées en un nombre quelconque de groupes, trois, par exemple,

$$x, \quad \ldots, \qquad y, \quad \ldots, \qquad z, \quad \ldots,$$

et soient

$$\mathfrak{R}_{x,\ldots}, \quad \mathfrak{R}_{y,\ldots}, \quad \mathfrak{R}_{z,\ldots} \tag{1}$$

trois régions respectivement extraites des espaces correspondants

$$\big[[x, \ldots]\big], \quad \big[[y, \ldots]\big], \quad \big[[z, \ldots]\big]; \tag{2}$$

l'association de ces trois régions en fournit évidemment une

$$(\mathfrak{R}_{x,\ldots}, \mathfrak{R}_{y,\ldots}, \mathfrak{R}_{z,\ldots}), \tag{3}$$

extraite de l'espace

$$\big[[x, \ldots, y, \ldots, z, \ldots]\big]. \tag{4}$$

Cela étant, il est extrêmement facile d'apercevoir : 1° que, *si les régions* (1) [considérées chacune dans celui des espaces (2) qui lui convient] *sont supposées limitées, la région* (3) [considérée dans l'espace (4)] *ne peut manquer de l'être aussi;* 2° que, *si les régions* (1) *sont supposées complètes, la région* (3) *jouit de la même propriété.*

Effectivement :

1° Soient

$$(x, \ldots, y, \ldots, z, \ldots)$$

un point variable de la région (3), et

$$(x_0, \ldots, y_0, \ldots, z_0, \ldots)$$

un point fixe de l'espace (4). Chacune des trois régions (1) étant supposée limitée, on a respectivement, dans toute l'étendue de ces régions,

$$\begin{aligned}(x - x_0)^2 + \ldots &< M^2,\\ (y - y_0)^2 + \ldots &< N^2,\\ (z - z_0)^2 + \ldots &< P^2,\end{aligned}$$

où M, N, P désignent trois constantes positives convenablement choisies (n° 2); on en déduit, par addition membre à membre, que, dans toute l'étendue de la région (3), le carré de la distance aa_0 (n° 1) reste inférieur à $M^2 + N^2 + P^2$ et cette distance elle-même à $\sqrt{M^2 + N^2 + P^2}$.

2° Soient

$$(x, \ldots, y, \ldots, z, \ldots)$$

un point variable de la région (3), et

$$(X, \ldots, Y, \ldots, Z, \ldots)$$

un point fixe n'en faisant pas partie, tel, par conséquent, que si l'on considère, d'une part, les trois points

$$(X, \ldots), \quad (Y, \ldots), \quad (Z, \ldots),$$

d'autre part, les trois régions (1), l'un au moins de ces trois points ne fasse pas partie de la région correspondante; nous supposerons, pour fixer les idées, que le point (X, ...) ne fait pas partie de la région $\mathfrak{R}_{x,\ldots}$. Chacune des régions (1) et, en particulier, la région $\mathfrak{R}_{x,\ldots}$, étant supposée complète, le point (X, ...) est complètement extérieur à $\mathfrak{R}_{x,\ldots}$, et, en désignant par λ une constante positive convenablement choisie, on a nécessairement, dans toute l'étendue de $\mathfrak{R}_{x,\ldots}$,

$$(x - X)^2 + \ldots > \lambda^2;$$

à plus forte raison aura-t-on, dans toute l'étendue de la région (3),

$$(x-X)^2+\ldots+(y-Y)^2+\ldots+(z-Z)^2+\ldots>\lambda^2$$

ou

$$\sqrt{(x-X)^2+\ldots+(y-Y)^2+\ldots+(z-Z)^2+\ldots}>\lambda.$$

Le point $(X, \ldots, Y, \ldots, Z, \ldots)$ est donc complètement extérieur à la région (3), ce qu'il s'agissait d'établir.

5. La région définie par la relation

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+\ldots \leqq R^2,$$

où $(x_0, y_0, \ldots)$ désigne un point fixe donné et R une constante positive donnée, nous offre un exemple très simple d'une région à la fois limitée et complète.

Elle est évidemment limitée, puisque la distance du point fixe $(x_0, y_0, \ldots)$, ou a_0, à un point variable de la région, reste moindre qu'une constante positive supérieure à R.

D'un autre côté, si l'on désigne par $(X, Y, \ldots)$ ou A un point fixe ne faisant pas partie de la région, et par λ une constante positive (>0) convenablement choisie, on a

$$Aa_0 = R+\lambda.$$

Or, quelle que soit dans l'espace la position du point $(x, y, \ldots)$, ou a, on a, en vertu d'une proposition antérieure (n° 2, I),

$$Aa \geqq Aa_0 - aa_0,$$

ou

$$Aa \geqq R - aa_0 + \lambda,$$

et comme on a, dans toute l'étendue de la région,

$$R \geqq aa_0 \quad \text{ou} \quad R - aa_0 \geqq 0,$$

on aura, à plus forte raison, dans les mêmes limites,

$$Aa \geqq \lambda;$$

la distance du point $(X, Y, \ldots)$ à un point variable de la région reste donc toujours supérieure à une constante positive moindre que λ.

VARIANTES.

6. Nous nommerons *variante* (1) (simple) un nombre (réel) variable dépendant de certains entiers positifs indéterminés, m, r, ... dont chacun peut varier arbitrairement à partir de telle ou telle valeur fixe qu'on lui assigne pour valeur minima; ces entiers indéterminés se nomment les *indices* de la variante.

Une variante $v_{m,r,\ldots}$ est dite *infiniment petite,* si, une quantité positive ε étant donnée, il existe quelque système de valeurs entières μ, ρ, ... telles que les relations simultanées

$$m \geqq \mu, \qquad r \geqq \rho, \qquad \ldots$$

entraînent comme conséquence nécessaire

$$\operatorname{mod} v_{m,r,\ldots} < \varepsilon.$$

On dit qu'une variante $v_{m,r,\ldots}$ *a pour limite* ou *tend vers* la constante V, si la variante $V - v_{m,r,\ldots}$ est infiniment petite; *une pareille limite,* lorsqu'elle existe, *est nécessairement unique.*

Une variante est dite *convergente* ou *divergente* suivant qu'elle est ou non pourvue d'une limite.

Observons, comme conséquence immédiate de ces définitions, qu'une variante infiniment petite tend vers zéro, et réciproquement.

7. Dans l'espace $[[x, y, \ldots]]$, défini par la considération des variables réelles $x, y, \ldots$ (nº 1), nous nommerons *variante* (complexe) un point variable ayant pour coordonnées diverses variantes simples, que l'on peut évidemment supposer dépendre toutes des mêmes indices.

Une variante de l'espace $[[x, y, \ldots]]$ est dite *convergente* si ses diverses coordonnées le sont toutes, et le point obtenu en remplaçant ces dernières par leurs limites respectives se nomme alors la *limite* de la variante; *une pareille limite,* lorsqu'elle existe, *est nécessairement unique.*

Une variante non convergente est dite *divergente.*

---

(1) Cette dénomination est due à M. Méray, qui l'a introduite, en 1869, dans une exposition nouvelle de la théorie des nombres incommensurables. *Voir,* au sujet de cette théorie, les indications bibliographiques que j'ai données dans un Mémoire ayant pour titre *De la distinction entre les sciences déductives et les sciences expérimentales* (*Revue de Métaphysique et de Morale,* novembre 1900).

Pour qu'une variante

$$a_{m,r,\ldots} = (x_{m,r,\ldots},\, y_{m,r,\ldots},\, \ldots)$$

tende vers la limite

$$\mathrm{A} = (\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \ldots),$$

il faut et il suffit que la distance des deux points $a_{m,r,\ldots}$, A *soit infiniment petite.*

8. Lorsque, dans l'espace $[[x, y, \ldots]]$ (n° 1), on considère simultanément deux variantes, on peut toujours, en opérant, s'il y a lieu, un changement de notations convenable, faire en sorte qu'elles n'aient aucun indice commun (on peut toujours supposer, par exemple, que les indices de l'une sont désignés par des lettres accentuées une seule fois, et les indices de l'autre par des lettres accentuées deux fois). Cela posé :

Pour que deux variantes tendent vers une même limite, il faut et il suffit qu'en les écrivant sous une forme telle qu'elles n'aient aucun indice commun leur distance soit infiniment petite.

Cette proposition, que nous supposerons établie pour les variantes simples, c'est-à-dire pour le cas particulier d'un espace à une seule dimension (n° 1), s'étend immédiatement au cas général.

On en tire la conséquence suivante :

Pour que la variante

$$a_{m,r,\ldots} = (x_{m,r,\ldots},\, y_{m,r,\ldots},\, \ldots)$$

soit convergente, il faut et il suffit que la distance des deux variantes

$$\begin{aligned} a_{m',r',\ldots} &= (x_{m',r',\ldots},\ y_{m',r',\ldots},\ \ldots), \\ a_{m'',r'',\ldots} &= (x_{m'',r'',\ldots},\ y_{m'',r'',\ldots},\ \ldots) \end{aligned}$$

soit infiniment petite.

Car, pour que le point $a_{m,r,\ldots}$ tende vers quelque limite, il faut et il suffit que les deux points $a_{m',r',\ldots}$, $a_{m'',r'',\ldots}$ tendent vers une même limite.

9. Dans le cas où la variante proposée ne dépend que d'un seul indice m, la condition de convergence peut, comme nous allons le voir, être formulée de la façon suivante :

Pour que la variante $(x_m, y_m, \ldots)$ *soit convergente, il faut et il suffit qu'un* *nombre positif* ε, *de petitesse arbitraire, étant donné, on puisse assigner pour l'entier* m *une valeur à partir de laquelle la distance des deux points*

$$(x_m, y_m, \ldots), \quad (x_{m+p}, y_{m+p}, \ldots)$$

ne cesse d'être inférieure à ε, *quelque valeur (positive) que l'on attribue à l'entier* p.

Désignons, pour abréger, par v_m la variante complexe $(x_m, y_m, \ldots)$.

Si cette variante est convergente, la distance $v_{m'}v_{m''}$ des deux points $v_{m'}$, $v_{m''}$ tend vers zéro (n° 8), et, une quantité positive ε étant donnée, on peut (n° 6) trouver des entiers μ', μ'' tels que les relations simultanées

$$m' \geqq \mu', \qquad m'' \geqq \mu''$$

entraînent comme conséquence nécessaire

$$v_{m'}v_{m''} < \varepsilon;$$

cela étant, et en désignant par μ un entier au moins égal à μ' et μ'', la relation

$$m \geqq \mu \tag{5}$$

entraînera, quel que soit p, la conséquence nécessaire

$$v_m v_{m+p} < \varepsilon. \tag{6}$$

Réciproquement, supposons que, une quantité positive ε étant donnée, on puisse trouver un entier μ tel que la relation (5) entraîne, quel que soit p, la relation (6) : pour toutes valeurs de m', m'' satisfaisant aux relations

$$m' \geqq m'' \geqq \mu,$$

on aura

$$v_{m''} v_{m''+(m'-m'')} < \varepsilon$$

ou

$$v_{m'} v_{m''} < \varepsilon;$$

pour toutes valeurs de m', m'' satisfaisant aux relations

$$m'' \geqq m' \geqq \mu,$$

on aura, de même,

$$v_{m'} v_{m'+(m''-m')} < \varepsilon$$

ou

$$v_{m'} v_{m''} < \varepsilon.$$

En résumé, donc, pour toutes valeurs de m', m'' satisfaisant aux relations

$$m' \geqq \mu, \qquad m'' \geqq \mu,$$

on aura

$$v_{m'}v_{m''} < \varepsilon.$$

La distance $v_{m'}v_{m''}$ est donc infiniment petite et la variante v_m convergente.

10. *Lorsqu'une variante convergente tombe constamment dans quelque région complète* (n° 3) *de l'espace* $[[x, y, \ldots]]$ (n° 1), *sa limite est elle-même nécessairement située dans cette région.*

Car, autrement, la limite de la variante serait complètement extérieure à la région dont il s'agit, ce qui est impossible, puisque la distance d'une variante convergente à sa limite est infiniment petite (n° 7).

11. *En désignant par* $(x_m, y_m, \ldots)$ *ou* v_m *une variante quelconque à un seul indice, et par*

$$(7) \qquad m_1, \quad m_2, \quad \ldots, \quad m_k, \quad \ldots$$

des valeurs particulières (distinctes) de son indice se succédant indéfiniment suivant quelque loi déterminée, l'expression

$$(8) \qquad w_k = v_{m_k} = (x_{m_k}, y_{m_k}, \ldots)$$

est évidemment une variante dépendant de l'indice k. Cela posé, si la variante $(x_m, y_m, \ldots)$ *reste constamment comprise dans quelque région limitée, les valeurs* (7) *et leur loi de succession peuvent être choisies de telle sorte que la variante* (8) *soit convergente.*

I. Désignons par α, β, ... des entiers indéterminés en nombre n, que nous conviendrons de considérer dans un ordre toujours le même, l'ordre α, β, ... par exemple, et soient

$$(9) \qquad \begin{cases} \alpha', & \beta', & \ldots, \\ \alpha'', & \beta'', & \ldots \end{cases}$$

deux quelconques des combinaisons obtenues en attribuant aux entiers dont il s'agit tous les systèmes possibles de valeurs positives; ces deux combinaisons étant, bien entendu, supposées distinctes, les différences

$$(10) \qquad \alpha' - \alpha'', \quad \beta' - \beta'', \quad \ldots$$

ne peuvent s'annuler à la fois. Cela posé, nous dirons que la première des combinaisons (9) est de *taxe inférieure* ou *supérieure* à la seconde, suivant que la première des différences (10) qui ne s'évanouit pas est négative ou positive.

Il importe de faire à cet égard l'observation suivante. Si l'on désigne par

$$\begin{array}{lll} \alpha', & \beta', & \ldots, \\ \alpha'', & \beta'', & \ldots, \\ \alpha''', & \beta''', & \ldots \end{array}$$

trois combinaisons de valeurs attribuées aux entiers α, β, ..., si l'on suppose en outre que la première soit de taxe inférieure à la seconde et la seconde de taxe inférieure à la troisième, la première est nécessairement de taxe inférieure à la troisième; c'est là une conséquence immédiate des relations évidentes

$$\begin{array}{l} \alpha' - \alpha''' = (\alpha' - \alpha'') + (\alpha'' - \alpha'''), \\ \beta' - \beta''' = (\beta' - \beta'') + (\beta'' - \beta'''), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

II. Désignant par x_0, y_0, ... certaines valeurs particulières des n variables réelles x, y, ..., et par X, Y, ... d'autres valeurs particulières des mêmes variables, respectivement supérieures aux premières, nous nommerons *intervalle complexe* la région de l'espace $[[x, y, \ldots]]$ définie par les relations simultanées

$$\left\{\begin{array}{l} x_0 \leqq x \leqq \mathrm{X}, \\ y_0 \leqq y \leqq \mathrm{Y}, \\ \ldots\ldots\ldots, \end{array}\right. \tag{11}$$

dont chacune, considérée isolément, définit un *intervalle simple*. Les différences (positives) $\mathrm{X} - x_0$, $\mathrm{Y} - y_0$, ... seront les *amplitudes* de l'intervalle complexe; le point

$$\left(\frac{x_0 + \mathrm{X}}{2}, \frac{y_0 + \mathrm{Y}}{2}, \ldots\right),$$

qui fait évidemment partie de la région, en sera le *centre*.

Nous nommerons *subdivision d'un intervalle complexe* l'opération consistant à subdiviser (de façons quelconques) les n intervalles simples dont l'association le constitue, puis à former de toutes les manières possibles un intervalle complexe avec n intervalles partiels pris respectivement dans chacun d'eux.

Nous aurons besoin ci-après de considérer dans un ordre déterminé les divers intervalles complexes provenant de la subdivision d'un intervalle donné; la loi de leur succession peut être choisie de bien des manières, et l'on peut, par exemple, la fixer comme il suit. En premier lieu, on adoptera pour les indéterminées x, y, ... un ordre toujours le même, soit l'ordre x, y, ... Considérant ensuite les intervalles simples partiels obtenus par la subdivision de l'intervalle simple total relatif à une indéterminée quelconque, on commencera par les ranger dans l'ordre naturel que leur assignent les valeurs croissantes de cette variable. Si l'on désigne alors par

$$\begin{array}{llll} \mathbf{i}_x^{(1)}, & \mathbf{i}_x^{(2)}, & \ldots, & \mathbf{i}_x^{(g)}, \\ \mathbf{i}_y^{(1)}, & \mathbf{i}_y^{(2)}, & \ldots, & \mathbf{i}_y^{(k)}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \end{array}$$

les diverses suites d'intervalles simples ainsi obtenues, et que l'on associe ces derniers de toutes les manières possibles en prenant un terme et un seul dans chaque ligne horizontale du Tableau précédent, deux quelconques des intervalles complexes qui en résultent pourront être désignés par les notations

(12) $$[\mathbf{i}_x^{(\alpha')}, \quad \mathbf{i}_y^{(\beta')}, \quad \ldots],$$

(13) $$[\mathbf{i}_x^{(\alpha'')}, \quad \mathbf{i}_y^{(\beta'')}, \quad \ldots],$$

où les deux combinaisons d'entiers positifs

$$\begin{array}{lll} \alpha', & \beta', & \ldots, \\ \alpha'', & \beta'', & \ldots \end{array}$$

sont nécessairement distinctes. Cela posé, nous dirons, pour abréger, que l'intervalle partiel (12) est de *taxe inférieure* ou *supérieure* à l'intervalle partiel (13), suivant que la première des deux combinaisons dont il s'agit sera elle-même de taxe inférieure ou supérieure à la seconde (I), et *nous conviendrons de considérer nos intervalles complexes partiels dans un ordre tel que leur taxe aille toujours en croissant;* nous dirons, en pareil cas, qu'ils sont *ordonnés*.

Observons, en passant, qu'*un intervalle complexe constitue une région limitée et complète de l'espace* $[[x, y, \ldots]]$. Effectivement, la relation

$$x_0 \leqq x \leqq \mathrm{X}$$

équivaut entièrement à

$$x_0 - \frac{x_0 + \mathrm{X}}{2} \leqq x - \frac{x_0 + \mathrm{X}}{2} \leqq \mathrm{X} - \frac{x_0 + \mathrm{X}}{2},$$

c'est-à-dire à

$$-\frac{\mathrm{X} - x_0}{2} \leqq x - \frac{x_0 + \mathrm{X}}{2} \leqq \frac{\mathrm{X} - x_0}{2}$$

ou enfin à

$$\left(x - \frac{x_0 + \mathrm{X}}{2}\right)^2 \leqq \left(\frac{\mathrm{X} - x_0}{2}\right)^2;$$

de même, la relation

$$y_0 \leqq y \leqq \mathrm{Y}$$

équivaut à

$$\left(y - \frac{y_0 + \mathrm{Y}}{2}\right)^2 \leqq \left(\frac{\mathrm{Y} - y_0}{2}\right)^2;$$

etc. L'ensemble des relations (11) définit donc, en vertu des nos 4 et 5, une région limitée et complète de l'espace $\big[[x, y, \ldots]\big]$.

III. Revenons à notre énoncé général.

Si l'on considère la région limitée où la variante $(x_m, y_m, \ldots)$ se trouve, par hypothèse, constamment comprise, la distance $\sqrt{x^2+y^2+\ldots}$ du point $(x, y, \ldots)$, arbitrairement variable dans toute l'étendue de cette région, au point fixe $(0, 0, \ldots)$ de l'espace $\big[[x, y, \ldots]\big]$, reste inférieure à une constante positive M convenablement choisie (n° 2); à plus forte raison a-t-on, entre les mêmes limites,

$$\operatorname{mod} x < \mathrm{M}, \qquad \operatorname{mod} y < \mathrm{M}, \qquad \ldots,$$

c'est-à-dire

$$-\mathrm{M} < x < \mathrm{M}, \qquad -\mathrm{M} < y < \mathrm{M}, \qquad \ldots.$$

Il existe donc quelque intervalle complexe,

$$x_0 \leqq x \leqq \mathrm{X}, \qquad y_0 \leqq y \leqq \mathrm{Y}, \qquad \ldots,$$

dans lequel la variante $(x_m, y_m, \ldots)$ se trouve constamment comprise, et que nous représenterons, pour abréger, par $\mathfrak{J}_1$. Si l'on divise en deux parties égales chacun des intervalles simples dont se compose $\mathfrak{J}_1$, et qu'on ordonne (II) les divers intervalles complexes résultant de cette subdivision, il existe certainement quelqu'un de ces derniers où la variante v_m tombe un nombre infini de fois. Appelons $\mathfrak{J}_2$ le premier d'entre eux pour lequel cette circonstance se réalise; opérons sur lui comme nous l'avons fait sur $\mathfrak{J}_1$, et ainsi de suite indéfiniment. Nous formerons de cette manière une suite illimitée d'intervalles complexes,

$$(14) \qquad \mathfrak{J}_1, \quad \mathfrak{J}_2, \quad \ldots, \quad \mathfrak{J}_k, \quad \ldots,$$

jouissant de la triple propriété que nous allons énoncer : 1° chacun d'eux fait entièrement partie du précédent et, par suite, de tous ceux qui viennent avant lui; 2° celui de rang k a pour amplitudes (II)

$$\frac{\mathrm{X}-x_0}{2^{k-1}}, \quad \frac{\mathrm{Y}-y_0}{2^{k-1}}, \quad \ldots;$$

3° la variante v_m tombe une infinité de fois dans chacun des intervalles (14).

Cela posé, considérons la suite illimitée

$$v_1, \quad v_2, \quad \ldots, \quad v_m, \quad \ldots$$

et soient w_1 le premier terme de cette suite, w_2 le premier des termes restants situé dans l'intervalle $\mathfrak{J}_2$, w_3 le premier des termes restants situé dans l'intervalle $\mathfrak{J}_3$, et ainsi de suite indéfiniment. La distance des deux points w_k, w_{k+h}, au plus égale à

$$\frac{1}{2^{k-1}}\sqrt{(X-x_0)^2+(Y-y_0)^2+\ldots},$$

reste, à partir d'une valeur de k suffisamment grande, moindre que toute constante positive donnée, et, par suite, la variante w_k est convergente (n° 9).

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES.

12. Désignant par x, y, ... des variables *réelles* en nombre quelconque n, considérons une région $\mathfrak{R}$ extraite de l'espace $[[x, y, \ldots]]$, et supposons qu'à chaque point $(x, y, \ldots)$ de la région on fasse, de quelque manière, correspondre un ensemble de constantes *réelles ou imaginaires* (soit une, soit plusieurs, soit une infinité) dont chacune s'appellera, pour abréger, une *caractéristique du point.*

Sur ces données, faisons en outre l'hypothèse suivante :

Si un point $(x_0, y_0, ..)$ de la région admet parmi ses caractéristiques la constante λ_0, tout point de la région $\mathfrak{R}$ suffisamment voisin du précédent admet parmi les siennes quelque constante dont la différence à λ_0 présente un module inférieur à une quantité positive assignée d'avance.

En d'autres termes, si l'on considère un point déterminé $(x_0, y_0, \ldots)$ de la région $\mathfrak{R}$, une caractéristique déterminée λ_0 de ce point, et une constante positive arbitrairement donnée α, on peut assigner une constante positive β telle que la relation

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+\ldots}<\beta,$$

supposée vérifiée pour un point $(x, y, \ldots)$ de la région $\mathfrak{R}$, entraîne pour ce dernier point l'existence de quelque caractéristique λ satisfaisant à la relation

$$\operatorname{mod}(\lambda-\lambda_0)<\alpha.$$

Cela étant, nous allons établir successivement les diverses propositions qui suivent.

13. *Les mêmes choses étant posées qu'au n° 12, et la région $\mathfrak{R}$ étant, de plus, limitée et complète, on peut assigner une constante positive*, L, *telle que tout point de la région admette, indépendamment de sa position, quelque caractéristique de module inférieur à* L.

I. Soient

$x, y, \ldots$ des variables réelles;

$\mathfrak{C}$ une région *complète* de l'espace $[[x, y, \ldots]]$;

$$\mathfrak{J}_1, \quad \mathfrak{J}_2, \quad \ldots, \quad \mathfrak{J}_q, \quad \ldots \tag{15}$$

une suite d'intervalles complexes se succédant indéfiniment suivant quelque loi déterminée, arbitrairement choisie sous les seules conditions : 1° que chacun d'eux soit entièrement contenu dans le précédent; 2° que les amplitudes (n° 11, II) de $\mathfrak{J}_q$ tendent vers zéro pour q infini; 3° que chacun des intervalles (15) contienne quelque point de la région complète $\mathfrak{C}$.

Cela étant, si l'on désigne par u_q le centre (n° 11, II) de l'intervalle complexe $\mathfrak{J}_q$, *la variante u_q tend vers une limite υ située : 1° dans l'un quelconque des intervalles* (15); 2° *dans la région* $\mathfrak{C}$.

Effectivement, si l'on désigne par $x_q, y_q, \ldots$ les valeurs extrêmes minima et par $X_q, Y_q, \ldots$ les valeurs extrêmes maxima prises par les variables $x, y, \ldots$ dans l'intervalle $\mathfrak{J}_q$, ce dernier a pour amplitudes les différences

$$X_q - x_q, \quad Y_q - y_q, \quad \ldots$$

qui, dès lors, sont infiniment petites; d'ailleurs, les deux points u_q, u_{q+r} étant compris l'un et l'autre dans l'intervalle $\mathfrak{J}_q$, leur distance est inférieure à

$$\sqrt{(X_q - x_q)^2 + (Y_q - y_q)^2 + \ldots} \tag{16}$$

et, par suite, infiniment petite pour q infini; il en résulte (n° 9) que le point u_q tend vers une limite υ.

Cela étant, si l'on donne à q une valeur particulière quelconque en laissant r variable, le point u_{q+r} tendra, pour r infini, vers cette même limite υ, et, comme il reste compris, quel que soit r, dans la région complète (n° 11, II) $\mathfrak{J}_q$, sa limite s'y trouvera elle-même comprise (n° 10).

Enfin, le point υ appartient nécessairement à la région $\mathfrak{C}$: car, s'il en était autrement, l'intervalle $\mathfrak{J}_q$ contiendrait, en même temps que υ, quelque point de la région $\mathfrak{C}$, et la distance de υ à un pareil point pourrait devenir inférieure à la quantité (16), par suite à toute quantité donnée. Or, c'est là une conclusion absurde, puisque la région $\mathfrak{C}$ est complète et que le point υ, s'il n'y est pas compris, ne peut lui être que complètement extérieur (n° 3).

II. *Les mêmes choses étant posées qu'au n° 12, et la région $\mathfrak{R}$ étant, de plus, limitée et complète, s'il existe, dans cette région, quelque point dont toute caractéristique ait un module supérieur à la constante positive ω, on peut,* *suivant une loi déterminée, assigner dans la région* $\mathfrak{R}$ *un point dont toute caractéristique ait un module supérieur ou égal à* ω.

La région $\mathfrak{R}$, étant limitée, se trouve entièrement contenue dans quelque intervalle complexe $\mathfrak{J}_1$ (n° 11, III). Divisons en deux parties égales chacun des n intervalles simples,

$$x_0 \leqq x \leqq \mathrm{X}, \qquad y_0 \leqq y \leqq \mathrm{Y}, \qquad \ldots,$$

de l'association desquels ce dernier résulte, ordonnons les intervalles complexes partiels fournis par cette subdivision (n° 11, II), et appelons $\mathfrak{J}_2$ le premier d'entre eux contenant quelque point de $\mathfrak{R}$ dont toute caractéristique ait un module supérieur à ω. En opérant sur l'intervalle $\mathfrak{J}_2$, comme nous l'avons fait sur $\mathfrak{J}_1$, et ainsi de suite indéfiniment, nous obtiendrons une succession illimitée d'intervalles complexes,

$$(17) \qquad \mathfrak{J}_1, \quad \mathfrak{J}_2, \quad \ldots, \mathfrak{J}_q, \quad \ldots,$$

jouissant de la triple propriété que nous allons énoncer :

1° Chacun d'eux fait entièrement partie du précédent;

2° Celui de rang q a pour amplitudes les quantités

$$\frac{\mathrm{X}-x_0}{2^{q-1}}, \quad \frac{\mathrm{Y}-y_0}{2^{q-1}}, \quad \ldots,$$

qui sont infiniment petites pour q infini;

3° Chacun des intervalles (17) contient quelque point de $\mathfrak{R}$ dont toute caractéristique présente un module supérieur à ω.

Cela étant, il résulte tout d'abord de l'alinéa I que, si l'on désigne par u_q le centre de $\mathfrak{J}_q$, cette variante u_q tend vers une limite, υ, située dans l'un quelconque des intervalles (17), et aussi dans la région $\mathfrak{R}$. Je dis, de plus, que toute caractéristique du point υ est forcément de module supérieur ou égal à ω.

Supposons en effet que quelque caractéristique, λ_υ, de ce point ait un module inférieur à ω, et désignons par $x, y, \ldots$ les coordonnées d'un *point quelconque commun à* $\mathfrak{R}$ *et à* $\mathfrak{J}_q$, par $\xi, \eta, \ldots$ celles du point υ. A partir d'une valeur de q suffisamment grande, la distance des deux points $(x, y, \ldots)$, $(\xi, \eta, \ldots)$ tombe au-dessous de toute quantité donnée, puisqu'elle est inférieure à

$$\frac{1}{2^{q-1}}\sqrt{(\mathrm{X}-x_0)^2+(\mathrm{Y}-y_0)^2+\ldots};$$

donc, à partir d'une valeur de q suffisamment grande, le point $(x, y, \ldots)$ admettra quelque caractéristique, λ, telle que le module de $\lambda - \lambda_\upsilon$ tombe lui-même au-dessous de toute quantité donnée, et, à plus forte raison, la valeur numérique de

$$\operatorname{mod}\lambda - \operatorname{mod}\lambda_\upsilon;$$

le module de λ_υ étant inférieur à ω, tout point commun à $\mathfrak{R}$ et à $\mathfrak{J}_q$ admettra donc, à partir d'une valeur de q suffisamment grande, quelque caractéristique de module inférieur à ω, ce qui est impossible, puisque, d'après la troisième propriété des intervalles (17), un pareil point peut toujours être choisi de manière à ce que toute caractéristique y ait un module supérieur à ω.

Toute caractéristique du point υ est donc bien, comme il s'agissait de l'établir, de module supérieur ou égal à ω.

Le raisonnement qui précède doit être complété par une observation essentielle. Pour déterminer le point υ comme nous venons de le faire, on commence par considérer un intervalle complexe, $\mathfrak{J}_1$, où la région $\mathfrak{R}$ se trouve entièrement comprise : il existe, naturellement, une infinité d'intervalles complexes jouissant de cette propriété, et, suivant que l'on prend tel ou tel d'entre eux pour point de départ des divisions successives en deux parties égales, le point υ peut n'être pas le même; mais, *l'intervalle* $\mathfrak{J}_1$ *une fois fixé, le point* υ, auquel elles conduisent finalement, *est entièrement déterminé.*

III. *Les mêmes choses étant posées qu'au n° 12, et la région* $\mathfrak{R}$ *étant, de plus, limitée et complète, considérons une suite indéfinie donnée,*

$$\omega_1,\quad \omega_2,\quad \ldots,\quad \omega_m,\quad \ldots, \tag{18}$$

de constantes positives, et supposons que, quel que soit m, *la région* $\mathfrak{R}$ *contienne quelque point dont toute caractéristique ait un module supérieur à* ω_m.

Cela étant, on peut assigner quelque variante $(x_m, y_m, \ldots)$, *tombant constamment dans la région* $\mathfrak{R}$, *et telle que toute caractéristique du point* $(x_m, y_m, \ldots)$ *ait un module supérieur ou égal à* ω_m.

En se donnant une fois pour toutes un intervalle complexe où se trouve comprise la région $\mathfrak{R}$, et en recommençant pour chaque terme de la suite (18) un raisonnement identique à celui de l'alinéa précédent, on définira une variante $(x_m, y_m, \ldots)$ satisfaisant à toutes les conditions requises.

IV. *Les mêmes choses étant posées qu'au n° 12, et la région* $\mathfrak{R}$ *étant, de plus, limitée et complète, on peut assigner une constante positive,* L', *telle que tout point de la région* $\mathfrak{R}$ *admette, indépendamment de sa position, quelque caractéristique de module inférieur ou égal à* L'.

Supposons en effet qu'il en soit autrement, c'est-à-dire que, une constante positive ω, de grandeur arbitraire, étant donnée, il existe dans la région $\mathfrak{R}$ quelque point dont toute caractéristique présente un module supérieur à ω. Cela étant, si l'on prend successivement pour ω tous les nombres entiers positifs,

$$1, \quad 2, \quad \ldots, \quad m, \quad \ldots,$$

il existe, en vertu de l'alinéa III, quelque variante $(x_m, y_m, \ldots)$, tombant constamment dans la région $\mathfrak{R}$, et telle qu'au point $(x_m, y_m, \ldots)$ toute caractéristique ait un module supérieur ou égal à m; cette variante ne sortant jamais de la région $\mathfrak{R}$, qui est limitée et complète, une variante,

$$(x_{m_k}, y_{m_k}, \ldots) = (x^{(k)}, y^{(k)}, \ldots),$$

convenablement extraite de $(x_m, y_m, \ldots)$, sera convergente (n° 11), et sa limite $(\Xi, \mathrm{H}, \ldots)$ sera située dans $\mathfrak{R}$ (n° 10). Cela étant, désignons par Λ une caractéristique du point $(\Xi, \mathrm{H}, \ldots)$: à partir d'une valeur de k suffisamment grande, le point $(x^{(k)}, y^{(k)}, \ldots)$ admettra quelque caractéristique dont la différence à Λ présente un module moindre que toute quantité donnée; à plus forte raison, la différence, prise en valeur absolue, des modules de ces deux caractéristiques sera-t-elle moindre que toute quantité donnée : or, c'est là une conclusion absurde, puisque toute caractéristique du point $(x^{(k)}, y^{(k)}, \ldots)$ possède un module supérieur ou égal à la variante infinie m_k.

V. Toute constante positive, L, supérieure à la constante L' dont il est question à l'alinéa IV, remplira évidemment les conditions requises par notre énoncé général.

14. *Les mêmes choses étant posées qu'au n° 12, et la région $\mathfrak{R}$ étant, de plus, limitée et complète, si, quelle que soit la constante positive ω, la région $\mathfrak{R}$ contient quelque point dont toute caractéristique présente un module inférieur à ω, elle contient nécessairement aussi quelque point dont toute caractéristique est nulle.*

I. *Les mêmes choses étant posées qu'au n° 12, et la région $\mathfrak{R}$ étant, de plus, limitée et complète, considérons une suite indéfinie donnée,*

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_m, \quad \ldots,$$

de constantes positives, et supposons que, quel que soit m, la région limitée et complète $\mathfrak{R}$ contienne quelque point dont toute caractéristique ait un module inférieur à ω_m.

Cela étant, on peut assigner quelque variante $(x_m, y_m, \ldots)$, tombant con-

stamment dans la région $\mathfrak{R}$, *et telle que toute caractéristique du point* $(x_m, y_m, \ldots)$ *ait un module inférieur ou égal à* ω_m.

On répétera, *mutatis mutandis,* les raisonnements faits dans les alinéas II et III du numéro précédent.

II. Revenons à notre énoncé général, et supposons, conformément à l'hypothèse, qu'une constante positive ω, de petitesse arbitraire, étant donnée, il existe dans la région $\mathfrak{R}$ quelque point dont toute caractéristique ait un module inférieur à ω. Cela étant, si l'on prend successivement pour ω les inverses arithmétiques de tous les nombres entiers positifs,

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{1}{2}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{m}, \quad \ldots,$$

il existe, en vertu de l'alinéa I, quelque variante $(x_m, y_m, \ldots)$ tombant constamment dans la région $\mathfrak{R}$, et telle qu'au point $(x_m, y_m, \ldots)$ toute caractéristique ait un module inférieur ou égal à $\frac{1}{m}$; cette variante ne sortant jamais de la région $\mathfrak{R}$, qui est limitée et complète, une variante

$$(x_{m_k}, y_{m_k}, \ldots) = (x^{(k)}, y^{(k)}, \ldots),$$

convenablement extraite de $(x_m, y_m, \ldots)$, sera convergente (n° 11), et sa limite $(\Xi, \mathrm{H}, \ldots)$ sera située dans $\mathfrak{R}$ (n° 10). Cela étant, je dis que toute caractéristique, Λ, du point $(\Xi, \mathrm{H}, \ldots)$ est forcément nulle. En effet, à partir d'une valeur de k suffisamment grande, le point $(x^{(k)}, y^{(k)}, \ldots)$ admettra quelque caractéristique dont la différence à Λ présente un module moindre que toute quantité donnée; à plus forte raison la différence, prise en valeur absolue, des modules de ces deux caractéristiques sera-t-elle moindre que toute quantité donnée : si donc le module de Λ n'était pas nul, le point $(x^{(k)}, y^{(k)}, \ldots)$ admettrait, à partir d'une valeur de k suffisamment grande, quelque caractéristique de module supérieur à la variante infiniment petite $\frac{1}{m_k}$, ce qui est impossible.

15. *Les mêmes choses étant posées qu'au n°* 12, *et la région* $\mathfrak{R}$ *étant, de plus, limitée et complète, si toutes les caractéristiques des divers points de la région sont des quantités différentes de zéro, on peut assigner une constante positive,* l, *telle que tout point de la région* $\mathfrak{R}$ *admette, indépendamment de sa position, quelque caractéristique de module supérieur à* l.

Puisque toute caractéristique est, par hypothèse, essentiellement différente de zéro, il est impossible qu'en aucun point de la région $\mathfrak{R}$ toute caractéristique soit nulle; si donc on se reporte au numéro précédent, on voit qu'en désignant par l' une constante positive convenablement choisie, il n'existe dans la région $\mathfrak{R}$ aucun point dont toute caractéristique présente un module inférieur à l'. En d'autres termes, tout point de la région $\mathfrak{R}$ possède quelque caractéristique de module supérieur ou égal à l', et, dès lors, une constante positive, l, arbitrairement choisie au-dessous de l', satisfait à la condition requise par notre énoncé.

16. *Les mêmes choses étant posées qu'au n° 12, et la région $\mathfrak{R}$ étant, de plus, limitée et complète, on peut, une constante positive α étant donnée, assigner une constante positive, β, telle que deux points arbitrairement choisis dans la région $\mathfrak{R}$ à une distance mutuelle moindre que β admettent respectivement, au nombre de leurs caractéristiques, deux quantités dont la différence ait un module moindre que α.*

I. *Les mêmes choses étant posées qu'au n° 12, si l'on considère un point déterminé $(x_0, y_0, \ldots)$ de la région $\mathfrak{R}$, on peut, une constante positive α étant donnée, assigner une constante positive, δ_0, telle que deux points arbitrairement choisis dans la région $\mathfrak{R}$, sous la seule condition que leurs distances à $(x_0, y_0, \ldots)$ soient l'une et l'autre moindres que δ_0, admettent respectivement, au nombre de leurs caractéristiques, deux quantités dont la différence ait un module moindre que α.*

Si l'on désigne en effet par λ_0 une caractéristique du point $(x_0, y_0, \ldots)$, on peut, en vertu de nos hypothèses, assigner une constante positive, δ_0, telle que la relation

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+\ldots} < \delta_0,$$

supposée vérifiée pour un point $(x, y, \ldots)$ de la région $\mathfrak{R}$, entraîne comme conséquence nécessaire, pour le point dont il s'agit, l'existence de quelque caractéristique, λ, vérifiant la relation

$$\operatorname{mod}(\lambda-\lambda_0) < \frac{\alpha}{2}.$$

Cela étant, désignons par $(x', y', \ldots)$, $(x'', y'', \ldots)$ deux points arbitrairement choisis dans la région $\mathfrak{R}$ sous les seules conditions que leurs distances à $(x_0, y_0, \ldots)$ soient l'une et l'autre moindres que δ_0 : d'après ce qui vient d'être dit, ces deux points admettront respectivement deux caractéristiques, λ', λ'', vérifiant les relations

$$\operatorname{mod}(\lambda'-\lambda_0) < \frac{\alpha}{2}, \qquad \operatorname{mod}(\lambda''-\lambda_0) < \frac{\alpha}{2},$$

d'où résulte, par addition membre à membre,

$$\operatorname{mod}(\lambda' - \lambda_0) + \operatorname{mod}(\lambda_0 - \lambda'') < \alpha$$

et, à plus forte raison,

$$\operatorname{mod}(\lambda' - \lambda'') < \alpha.$$

II. Les mêmes choses étant posées qu'au n° 12, nommons désormais *caractéristique première* d'un point déterminé (quelconque) de la région $\mathfrak{R}$ ce que jusqu'ici nous avons simplement appelé *caractéristique;* puis, considérant le nombre positif donné α, nommons *caractéristique seconde* du même point toute constante positive telle que deux points arbitrairement choisis dans la région $\mathfrak{R}$, sous les seules conditions que leurs distances au premier soient l'une et l'autre moindres que cette constante, admettent respectivement, au nombre de leurs caractéristiques premières, deux quantités dont la différence présente un module moindre que α (I). Cela étant, *si un point* $(x_0, y_0, \ldots)$ *de la région* $\mathfrak{R}$ *admet, parmi ses caractéristiques secondes, la constante positive* δ_0, *tout point de la région* $\mathfrak{R}$ *suffisamment voisin du précédent admettra parmi les siennes une constante positive dont la différence à* δ_0, *prise en valeur absolue, tombe au-dessous d'une quantité positive assignée d'avance.*

Effectivement, tout point $(\xi, \eta, \ldots)$ de la région $\mathfrak{R}$ dont la distance à $(x_0, y_0, \ldots)$ tombe au-dessous de δ_0 ne peut manquer, comme on va le voir, d'admettre au nombre de ses caractéristiques secondes la différence (positive)

$$\delta = \delta_0 - \sqrt{(x_0-\xi)^2 + (y_0-\eta)^2 + \ldots}\,; \tag{19}$$

car les relations

$$\left\{\begin{array}{l} \sqrt{(x'-\xi)^2 + (y'-\eta)^2 + \ldots} < \delta, \\ \sqrt{(x''-\xi)^2 + (y''-\eta)^2 + \ldots} < \delta, \end{array}\right. \tag{20}$$

qui peuvent s'écrire

$$\sqrt{(x'-\xi)^2 + (y'-\eta)^2 + \ldots} + \sqrt{(x_0-\xi)^2 + (y_0-\eta)^2 + \ldots} < \delta_0,$$
$$\sqrt{(x''-\xi)^2 + (y''-\eta)^2 + \ldots} + \sqrt{(x_0-\xi)^2 + (y_0-\eta)^2 + \ldots} < \delta_0,$$

entraînent, à plus forte raison (n° 2, I),

$$\sqrt{(x'-x_0)^2 + (y'-y_0)^2 + \ldots} < \delta_0,$$
$$\sqrt{(x''-x_0)^2 + (y''-y_0)^2 + \ldots} < \delta_0,$$

d'où résulte que deux points $(x', y', \ldots)$, $(x'', y'', \ldots)$ de la région $\mathfrak{R}$, s'ils satisfont aux relations (20), admettent respectivement, au nombre de leurs caractéristiques premières, deux quantités dont la différence présente un module moindre que α. La simple inspection de la formule (19) montre alors que, si le point $(\xi, \eta, \ldots)$ est suffisamment voisin de $(x_0, y_0, \ldots)$, la différence (positive) $\delta_0 - \delta$ tombe au-dessous de toute quantité donnée.

III. Revenons à notre énoncé général.

La région $\mathfrak{R}$ étant alors limitée et complète, et toute caractéristique seconde (II) d'un point de cette région étant, par définition même, essentiellement supérieure à zéro, la proposition du numéro précédent est applicable, et l'on peut affirmer qu'en désignant par β une constante positive convenablement choisie, tout point de la région $\mathfrak{R}$ admet, indépendamment de sa position, quelque caractéristique seconde supérieure à β.

Cela posé, considérons dans la région $\mathfrak{R}$ deux points, $(x_1, y_1, \ldots)$, $(x_2, y_2, \ldots)$, dont la distance mutuelle soit moindre que β : je dis que ces deux points admettent respectivement, parmi leurs caractéristiques premières, deux quantités dont la différence présente un module moindre que α. Effectivement, l'un quelconque de ces deux points, par exemple $(x_1, y_1, \ldots)$, admettant, d'après ce qui vient d'être dit, une caractéristique seconde supérieure à β, les relations

$$\left\{\begin{array}{l} \sqrt{(x' - x_1)^2 + (y' - y_1)^2 + \ldots} < \beta, \\ \sqrt{(x'' - x_1)^2 + (y'' - y_1)^2 + \ldots} < \beta, \end{array}\right. \tag{21}$$

supposées vérifiées pour deux points $(x', y', \ldots)$, $(x'', y'', \ldots)$ de la région $\mathfrak{R}$, entraînent comme conséquence nécessaire l'existence, en ces deux points, de caractéristiques premières dont la différence présente un module moindre que α. Or, la distance du point $(x_1, y_1, \ldots)$ à lui-même étant nulle, et sa distance au point $(x_2, y_2, \ldots)$ étant, par hypothèse, moindre que β, les relations (21) se trouvent vérifiées pour

$$(x', y', \ldots) = (x_1, y_1, \ldots), \qquad (x'', y'', \ldots) = (x_2, y_2, \ldots);$$

les points $(x_1, y_1, \ldots)$, $(x_2, y_2, \ldots)$ admettent donc respectivement, au nombre de leurs caractéristiques premières, deux quantités dont la différence présente un module moindre que α. C'est ce qu'il s'agissait d'établir.

FONCTIONS CONTINUES.

17. Nous nommerons *premier* et *second élément* de la quantité imaginaire $a' + ia''$ les deux quantités réelles a', a''.

Si aux n variables

$$x = x' + ix'', \qquad y = y' + iy'', \qquad \ldots, \tag{22}$$

on attribue tous les systèmes possibles de valeurs imaginaires, les systèmes de valeurs réelles que prennent alors leurs $2n$ éléments redonnent les divers points d'un espace à $2n$ dimensions,

$$\big[[x', x'', y', y'', \ldots]\big]. \tag{23}$$

Il arrive d'ailleurs sans cesse que l'on ait à considérer exclusivement, dans telle ou telle question, les systèmes de valeurs des n variables (22) satisfaisant à tel ou tel groupe de conditions entre leurs $2n$ éléments, ou, ce qui revient au même, les points situés dans telle ou telle région de l'espace (23).

Dans l'espace à $2n$ dimensions (23), à la considération duquel on est conduit par celle des n variables imaginaires (22), un point quelconque

$$(x', x'', y', y'', \ldots)$$

se désigne tout aussi bien par la notation

$$(x, y, \ldots),$$

et les valeurs $x, y, \ldots$ se nomment, en pareil cas, les *coordonnées imaginaires* du point. L'espace (23) se désigne de même par la notation

$$\big[[x, y, \ldots]\big].$$

Enfin, si l'on considère dans l'espace (23) deux points quelconques,

$$\begin{aligned} x_1 &= x'_1 + ix''_1, & y_1 &= y'_1 + iy''_1, & \ldots,\\ x_2 &= x'_2 + ix''_2, & y_2 &= y'_2 + iy''_2, & \ldots, \end{aligned}$$

leur distance, égale par définition (n° 1) à

$$\sqrt{(x'_1 - x'_2)^2 + (x''_1 - x''_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2 + (y''_1 - y''_2)^2 + \ldots},$$

peut évidemment s'écrire sous la forme

$$\sqrt{\operatorname{mod}(x_1 - x_2)^2 + \operatorname{mod}(y_1 - y_2)^2 + \ldots}.$$

Si, notamment, il n'y a qu'une seule variable imaginaire, x, la distance des deux points x_1, x_2 est égale au module de la différence $x_1 - x_2$.

18. Soient

$$x, \quad y, \quad \ldots,$$

n variables indépendantes, que nous supposerons, indifféremment, *réelles* ou *imaginaires*.

Une fonction $f(x, y, \ldots)$, bien définie dans toute l'étendue d'une région $\mathfrak{R}$ de l'espace $[[x, y, \ldots]]$ (¹), est dite *continue* dans cette région, si, un point $(x_0, y_0, \ldots)$ de la région et une constante positive α étant donnés, on peut leur faire correspondre quelque constante positive, β, telle que la relation

$$\sqrt{\operatorname{mod}(x - x_0)^2 + \operatorname{mod}(y - y_0)^2 + \ldots} < \beta,$$

supposée vérifiée pour un point $(x, y, \ldots)$ de la région $\mathfrak{R}$, entraîne comme conséquence nécessaire la relation

$$\operatorname{mod}[f(x, y, \ldots) - f(x_0, y_0, \ldots)] < \alpha; \tag{24}$$

ou, ce qui revient au même, si, le point $(x_0, y_0, \ldots)$ et la constante α étant donnés, on peut leur faire correspondre quelque constante positive, γ, telle que les relations simultanées

$$\operatorname{mod}(x - x_0) < \gamma; \qquad \operatorname{mod}(y - y_0) < \gamma, \qquad \ldots,$$

supposées vérifiées pour un point $(x, y, \ldots)$ de la région $\mathfrak{R}$, entraînent comme conséquence nécessaire la relation (24).

Si une fonction, $u = f(x, y, \ldots)$, est continue dans une région $\mathfrak{R}$ de l'espace $[[x, y, \ldots]]$, et si une variante $(x_{m,r,\ldots}, y_{m,r,\ldots}, \ldots)$, tombant constamment dans cette région, a pour limite un point $(X, Y, \ldots)$ *qui y soit également situé, la variante*

$$u_{m,r,\ldots} = f(x_{m,r,\ldots}, y_{m,r,\ldots}, \ldots)$$

de l'espace $[[u]]$ a pour limite le point

$$U = f(X, Y, \ldots)$$

de cet espace.

Effectivement, la distance du point variable $(x_{m,r,\ldots}, y_{m,r,\ldots}, \ldots)$ au point fixe $(X, Y, \ldots)$ finissant, en vertu de notre hypothèse, par tomber au dessous de

---

(¹) Cet espace est à n ou à $2n$ dimensions, suivant que les n variables $x, y, \ldots$ sont réelles ou imaginaires.

toute quantité donnée (n° 7), il résulte de la continuité de $f(x, y, \ldots)$ que le module de la différence $U - u_{m,r,\ldots}$ jouit nécessairement aussi de cette même propriété : le simple rapprochement de diverses remarques présentées aux n^os 7, 1 et 17 entraîne alors l'exactitude de celle que nous venons de formuler.

19. Si l'on observe que, dans le cas où les variables $x, y, \ldots$ sont imaginaires, l'espace $[[x, y, \ldots]]$ n'est autre chose, par définition (n° 17), que l'espace (23), si, d'un autre côté, on compare à notre hypothèse générale du n° 12 la définition, donnée ci-dessus (n° 18), de la *continuité*, on voit immédiatement qu'elle s'en déduit par la simple supposition que chaque point de la région $\mathfrak{R}$ possède une caractéristique *unique*. Nous pouvons donc, sans autre démonstration, énoncer les théorèmes suivants :

1° *Si une fonction est continue dans une région limitée et complète, son module y reste constamment inférieur à quelque quantité fixe* (n° 13).

2° *Si une fonction est continue dans une région limitée et complète, et qu'elle y puisse acquérir un module inférieur à toute quantité positive donnée, elle s'annule certainement en quelque point de la région* (n° 14).

3° *Si une fonction est continue dans une région limitée et complète, et qu'elle ne s'y annule jamais, son module y reste constamment supérieur à quelque quantité positive fixe* (n° 15).

4° *Si une fonction $f(x, y, \ldots)$ est continue dans une région limitée et complète, on peut, un nombre positif α étant donné, assigner un nombre positif β tel que, pour deux points $(x_1, y_1, \ldots)$, $(x_2, y_2, \ldots)$ arbitrairement choisis dans la région à une distance mutuelle moindre que β, la différence*

$$f(x_1, y_1, \ldots) - f(x_2, y_2, \ldots)$$

présente un module moindre que α (n° 16).

Observons enfin : 5° Que *le module d'une fonction continue $f(x, y, \ldots)$ est lui-même une fonction continue :* il suffit, pour s'en convaincre, de se reporter à notre définition du n° 18, et de remarquer que la relation

$$\operatorname{mod}[f(x, y, \ldots) - f(x_0, y_0, \ldots)] < \alpha$$

entraîne comme conséquence nécessaire

$$\text{val. abs.}[\operatorname{mod} f(x, y, \ldots) - \operatorname{mod} f(x_0, y_0, \ldots)] < \alpha.$$

20. La *composition* des fonctions continues donne lieu au principe suivant.

Soient

$$z, \quad \ldots,$$
$$s, \quad t, \quad \ldots,$$

deux groupes de variables en nombres respectivement quelconques;

$$(25) \qquad Z(s, t, \ldots), \quad \ldots,$$

des fonctions de s, t, ... en même nombre que les variables z, ..., du premier groupe;

$f(z, \ldots)$ une fonction de ces dernières.

Cela étant, *si les fonctions* (25) *sont toutes continues dans une même région,* $\mathfrak{R}_{s,t,\ldots}$, *de l'espace* $[[s, t, \ldots]]$; *si, de plus, la fonction* $f(z, \ldots)$ *est continue dans une région,* $\mathfrak{R}_{z,\ldots}$, *de l'espace* $[[z, \ldots]]$; *si, enfin, pour un choix arbitraire du point* $[[s, t, \ldots]]$ *dans la première région, le point fourni par l'association des valeurs* (25) *se trouve toujours compris dans la seconde : la fonction composée*

$$f[Z(s, t, \ldots), \ldots]$$

est certainement continue dans la région $\mathfrak{R}_{s,t,\ldots}$.

Soient, en effet,

$(s_0, t_0, \ldots)$ un point particulier (quelconque) de $\mathfrak{R}_{s,t,\ldots}$;
$z_0, \ldots$ les valeurs correspondantes des fonctions (25);
α un nombre positif choisi à volonté;
β un deuxième nombre positif, tel que la différence

$$f(z, \ldots) - f(z_0, \ldots)$$

présente un module inférieur à α, toutes les fois que le point $(z, \ldots)$ de la région $\mathfrak{R}_{z,\ldots}$ se trouve à une distance de $(z_0, \ldots)$ moindre que β;
p le nombre des variables $z, \ldots$;
γ un dernier nombre positif, tel que les p différences

$$Z(s, t, \ldots) - Z(s_0, t_0, \ldots),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

présentent toutes des modules moindres que $\frac{\beta}{\sqrt{p}}$, dès que le point $(s, t, \ldots)$ de la région $\mathfrak{R}_{s,t,\ldots}$ se trouve à une distance de $(s_0, t_0, \ldots)$ moindre que γ.

Cela étant, si un point $(s, t, \ldots)$ de la région $\mathfrak{R}_{s,t,\ldots}$ satisfait à la relation

$$\sqrt{\operatorname{mod}(s-s_0)^2+\operatorname{mod}(t-t_0)^2+\ldots}<\gamma,$$

le point $(z, \ldots)$ de la région $\mathfrak{R}_{z,\ldots}$ fourni par l'association des valeurs (25) vérifiera la relation

$$\sqrt{\operatorname{mod}(z-z_0)^2+\ldots}<\beta,$$

et l'on aura, par suite,

$$\operatorname{mod}[f(z, \ldots)-f(z_0, \ldots)]<\alpha,$$

ou

$$\operatorname{mod}\{f[Z(s, t, \ldots), \ldots]-f[Z(s_0, t_0, \ldots), \ldots]\}<\alpha.$$

21. Il nous reste à établir, sur l'*inversion* des fonctions continues, une proposition qui nous sera ultérieurement de quelque utilité, mais dont l'énoncé, pour être formulé d'une façon complète, nécessite tout d'abord la connaissance du lemme suivant.

Soient

$x, y, \ldots$ des variables indépendantes (réelles ou imaginaires) en nombre quelconque g;

$$(26)\qquad \begin{cases} u=\mathrm{U}(x, y, \ldots), \\ v=\mathrm{V}(x, y, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

des fonctions de $x, y, \ldots$, en nombre quelconque j, toutes *continues* dans une même région, $\mathfrak{R}_{x,y,\ldots}$, de l'espace $[[x, y, \ldots]]$;

$\mathfrak{R}_{u,v,\ldots}$ la région de l'espace $[[u, v, \ldots]]$ constituée par l'ensemble des divers points $(u, v, \ldots)$ qui, en vertu des formules (26), correspondent (avec répétition possible), aux divers points de $\mathfrak{R}_{x,y,\ldots}$.

Cela posé, *si la région* $\mathfrak{R}_{x,y,\ldots}$ *est à la fois limitée et complète, la région* $\mathfrak{R}_{u,v,\ldots}$ *ne peut manquer de l'être aussi.*

I. *Une fonction entière, $f(x, y, \ldots)$, est continue dans toute l'étendue de l'espace* $[[x, y, \ldots]]$ (1).

---

(1) Il s'agit de faire voir qu'en désignant par $(x_0, y_0, \ldots)$ un point fixe donné et par α une constante positive donnée, on peut assigner une constante positive, β, telle que les relations simultanées

$$\operatorname{mod}(x-x_0)<\beta, \qquad \operatorname{mod}(y-y_0)<\beta, \qquad \ldots$$

II. *Si l'on désigne par m un entier positif et par z une variable indépendante assujettie à se mouvoir dans la région* $z \geqq 0$, *la fonction (positive)* $\sqrt[m]{z}$ *est continue* (¹).

III. Revenons à notre énoncé.

La région $\mathfrak{R}_{u,v,\ldots}$ est nécessairement limitée : car, chacune des fonctions u,

---

entraînent comme conséquence nécessaire

$$\operatorname{mod}[f(x, y, \ldots) - f(x_0, y_0, \ldots)] < \alpha.$$

Effectivement, si l'on pose

$$x - x_0 = h, \quad y - y_0 = k, \quad \ldots,$$

la différence

$$f(x, y, \ldots) - f(x_0, y_0, \ldots)$$

ou

$$f(x_0 + h, y_0 + k, \ldots) - f(x_0, y_0, \ldots)$$

peut, par l'application des premières règles de l'Algèbre, être mise sous forme d'un polynome entier en $h, k, \ldots$ ayant ses termes tous dissemblables et privé de terme constant. Si ce polynome, $P(h, k, \ldots)$, n'a que des coefficients nuls, il est nul quels que soient $h, k, \ldots$, et le nombre positif β est arbitraire. Dans le cas contraire, soient q le nombre de ses termes (à coefficients non nuls), μ le plus grand module des coefficients, et β un nombre positif à la fois inférieur à 1 et à $\frac{\alpha}{\mu q}$; en supposant les modules de $h, k, \ldots$ tous inférieurs à β, celui du terme

$$C h^a k^b \ldots,$$

où $a + b + \ldots$ est forcément plus grand que zéro, est inférieur à

$$\mu \beta^{a+b+\ldots} \leqq \mu \beta < \mu \frac{\alpha}{\mu q} = \frac{\alpha}{q};$$

la somme des modules des termes du polynome $P(h, k, \ldots)$, et, à plus forte raison, le module de $P(h, k, \ldots)$, sont donc inférieurs à $q \frac{\alpha}{q}$, c'est-à-dire à α.

(¹) En effet, si l'on prend arbitrairement, dans la région $z \geqq 0$, deux valeurs z_1, z_2, on a, en désignant par z_1 la plus grande des deux,

$$\sqrt[m]{z_1} \leqq \sqrt[m]{z_2} + \sqrt[m]{z_1 - z_2},$$

comme le montre l'élévation des deux membres de l'inégalité à la puissance m. En vertu de cette relation, qui peut s'écrire sous la forme

$$\sqrt[m]{z_1} - \sqrt[m]{z_2} \leqq \sqrt[m]{z_1 - z_2},$$

il suffit, pour que la différence (prise positivement) de deux valeurs de la fonction soit inférieure à α, que la différence (prise positivement) des deux valeurs de z soit inférieure à α^m. A plus forte raison cette fonction est-elle continue dans la région dont il s'agit.

$v, \ldots$, que définissent les formules (26), étant, par hypothèse, continue dans la région limitée et complète $\mathfrak{R}_{x,y,\ldots}$, y garde un module constamment inférieur à quelque nombre positif fixe (n° 19, 1°), et, dès lors, la quantité

$$\sqrt{\operatorname{mod} u^2 + \operatorname{mod} v^2 + \ldots},$$

distance du point $(u, v, \ldots)$ au point fixe $(0, 0, \ldots)$, jouit elle-même de cette propriété.

La région $\mathfrak{R}_{u,v,\ldots}$ est, en outre, complète : si l'on désigne, en effet, par $(\upsilon, \varphi, \ldots)$ un point fixe n'en faisant pas partie, et que l'on considère la distance du point $(\upsilon, \varphi, \ldots)$ à un point variable, $(u, v, \ldots)$, de la région, cette distance,

$$\sqrt{\operatorname{mod}(u-\upsilon)^2 + \operatorname{mod}(v-\varphi)^2 + \ldots},$$

ne peut manquer d'être, comme le sont par hypothèse les fonctions $u, v, \ldots$, continue dans la région limitée et complète $\mathfrak{R}_{x,y,\ldots}$ (n° 21, I), (n° 20), (n° 19, 5°), (n° 21, II). Comme d'ailleurs la distance en question ne s'annule en aucun point de $\mathfrak{R}_{x,y,\ldots}$, elle reste constamment supérieure à quelque quantité positive fixe (n° 19, 3°); on en conclut, comme il s'agissait de l'établir, que le point $(\upsilon, \varphi, \ldots)$ est *complètement extérieur* (n° 3) à la région $\mathfrak{R}_{u,v,\ldots}$.

22. Soient

$$x, \quad y, \quad \ldots$$

un groupe de n variables indépendantes (réelles ou imaginaires), et

$$(27) \qquad \begin{cases} u = \mathrm{U}(x, y, \ldots), \\ v = \mathrm{V}(x, y, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

un groupe de fonctions de $x, y, \ldots$ *en nombre n comme les variables*. Supposons : 1° que ces fonctions soient toutes *continues* dans une même région *limitée et complète*, $\mathfrak{R}_{x,y,\ldots}$, de l'espace $[[x, y, \ldots]]$; 2° qu'à deux points *distincts* de cette région correspondent toujours, d'après les formules (27), deux points *distincts* de l'espace $[[u, v, \ldots]]$.

Il résulte de la première hypothèse qu'en désignant par $\mathfrak{R}_{u,v,\ldots}$ l'ensemble des divers points $(u, v, \ldots)$ qui correspondent ainsi aux divers points de $\mathfrak{R}_{x,y,\ldots}$, *la région* $\mathfrak{R}_{u,v,\ldots}$ *est,* comme $\mathfrak{R}_{x,y,\ldots}$, *limitée et complète* (n° 21). Il résulte de la seconde hypothèse que ces deux régions se correspondent *point par point,* et, par suite, que *les formules* (27) *définissent, dans la région* $\mathfrak{R}_{u,v,\ldots}$, *n fonctions implicites,* $x, y, \ldots$, *des variables* $u, v, \ldots$. Je dis que *les fonctions dont il s'agit sont continues.*

Pour l'établir, nous considérerons un point particulier (quelconque), $(u_0, v_0, \ldots)$, de la région $\mathfrak{R}_{u,v,\ldots}$, nous désignerons par $(x_0, y_0, \ldots)$ le point correspondant de la région $\mathfrak{R}_{x,y,\ldots}$, et nous ferons voir que, une constante positive α étant donnée, on en peut assigner une autre, β, telle que la relation

$$\sqrt{\operatorname{mod}(u-u_0)^2+\operatorname{mod}(v-v_0)^2+\ldots}<\beta,$$

supposée vérifiée pour un point $(u, v, \ldots)$ de la région $\mathfrak{R}_{u,v,\ldots}$, entraîne comme conséquence nécessaire, pour le point correspondant $(x, y, \ldots)$ de la région $\mathfrak{R}_{x,y,\ldots}$, la relation

$$\sqrt{\operatorname{mod}(x-x_0)^2+\operatorname{mod}(y-y_0)^2+\ldots}<\alpha.$$

I. *Les mêmes choses étant posées que dans l'énoncé ci-dessus, désignons par α et ω deux constantes positives, et supposons qu'il existe dans la région (limitée et complète) $\mathfrak{R}_{x,y,\ldots}$ quelque point satisfaisant à la condition*

(28) *que sa distance à $(x_0, y_0, \ldots)$ soit supérieure ou égale à α, tandis que la distance à $(u_0, v_0, \ldots)$ du point correspondant de la région $\mathfrak{R}_{u,v,\ldots}$ tombe au-dessous de ω.*

Cela étant, je dis qu'*on peut, suivant une loi déterminée, assigner dans la région $\mathfrak{R}_{x,y,\ldots}$ un point dont la distance à $(x_0, y_0, \ldots)$ soit supérieure ou égale à α, tandis que la distance à $(u_0, v_0, \ldots)$ du point correspondant est inférieure ou égale à ω.*

Considérons, en effet, un intervalle complexe, $\mathfrak{J}_1$, qui comprenne entièrement la région $\mathfrak{R}_{x,y,\ldots}$; divisons en deux parties égales chacun des intervalles simples,

$$a \text{ à } A, \quad b \text{ à } B, \quad \ldots,$$

de l'association desquels il résulte (ces intervalles simples sont en nombre n ou $2n$, suivant que les variables $x, y, \ldots$ sont réelles ou imaginaires); puis, ordonnons (n° 11, II) les intervalles complexes partiels fournis par cette subdivision, et appelons $\mathfrak{J}_2$ le premier d'entre eux contenant quelque point de $\mathfrak{R}_{x,y,\ldots}$ qui satisfasse à la condition (28). En opérant sur l'intervalle $\mathfrak{J}_2$ comme nous l'avons fait sur $\mathfrak{J}_1$, et ainsi de suite indéfiniment, nous obtiendrons une succession illimitée d'intervalles complexes,

$$(29) \qquad \mathfrak{J}_1, \quad \mathfrak{J}_2, \quad \ldots, \quad \mathfrak{J}_q, \quad \ldots,$$

satisfaisant à la triple condition ci-après énoncée :

1° Chacun d'eux fait entièrement partie du précédent;

2° Celui de rang q a pour amplitudes les quantités

$$\frac{A-a}{2^{q-1}}, \quad \frac{B-b}{2^{q-1}}, \quad \ldots,$$

qui sont infiniment petites pour q infini;

3° Chacun des intervalles (29) contient quelque point de $\mathfrak{R}_{x,y,\ldots}$ jouissant de la propriété (28).

Cela posé, il résulte tout d'abord de l'alinéa I du n° **13** que le centre de $\mathfrak{J}_q$ tend vers une limite située dans l'un quelconque des intervalles (29), et aussi dans la région $\mathfrak{R}_{x,y,\ldots}$: je dis que la distance de ce point limite à $(x_0, y_0, \ldots)$ est supérieure ou égale à α, et qu'en même temps la distance à $(u_0, v_0, \ldots)$ du point correspondant est inférieure ou égale à ω.

Désignons en effet par $(\xi, \eta, \ldots)$ le point limite dont il s'agit, par $(x, y, \ldots)$ les coordonnées d'un point quelconque commun à $\mathfrak{R}_{x,y,\ldots}$ et à $\mathfrak{J}_q$, et par $(\upsilon, \varphi, \ldots)$, $(u, v, \ldots)$ les points qui correspondent respectivement aux deux précédents dans la région $\mathfrak{R}_{u,v,\ldots}$. La distance des deux points

$$(x, y, \ldots), \quad (\xi, \eta, \ldots)$$

tombe au-dessous de toute quantité donnée à partir d'une valeur de q suffisamment grande, puisqu'elle est inférieure à

$$\frac{1}{2^{q-1}}\sqrt{(A-a)^2+(B-b)^2+\ldots};$$

et, à cause de la continuité des seconds membres de (27), la distance des deux points

$$(u, v, \ldots), \quad (\upsilon, \varphi, \ldots)$$

jouit de la même propriété. Donc, à plus forte raison (n° **2**, I), la différence, prise positivement, des distances

$$\sqrt{\operatorname{mod}(x-x_0)^2+\operatorname{mod}(y-y_0)^2+\ldots},$$

$$\sqrt{\operatorname{mod}(\xi-x_0)^2+\operatorname{mod}(\eta-y_0)^2+\ldots}$$

tombe au-dessous de toute quantité donnée à partir d'une valeur de q suffisamment grande, et la même chose a lieu pour la différence des distances

$$\sqrt{\operatorname{mod}(u-u_0)^2+\operatorname{mod}(v-v_0)^2+\ldots},$$

$$\sqrt{\operatorname{mod}(\upsilon-u_0)^2+\operatorname{mod}(\varphi-v_0)^2+\ldots}.$$

Cela étant, si l'on avait l'une ou l'autre des deux relations

$$\sqrt{\operatorname{mod}(\xi - x_0)^2 + \operatorname{mod}(\eta - y_0)^2 + \ldots} < \alpha,$$
$$\sqrt{\operatorname{mod}(\upsilon - u_0)^2 + \operatorname{mod}(\varphi - v_0)^2 + \ldots} > \omega,$$

on finirait par avoir l'une ou l'autre des deux relations

$$\sqrt{\operatorname{mod}(x - x_0)^2 + \operatorname{mod}(y - y_0)^2 + \ldots} < \alpha,$$
$$\sqrt{\operatorname{mod}(u - u_0)^2 + \operatorname{mod}(v - v_0)^2 + \ldots} > \omega,$$

ce qui est impossible, puisque, d'après la troisième propriété des intervalles (29), le point $(x, y, \ldots)$ peut toujours être choisi de manière qu'on ait à la fois

$$\sqrt{\operatorname{mod}(x - x_0)^2 + \operatorname{mod}(y - y_0)^2 + \ldots} \geqq \alpha,$$
$$\sqrt{\operatorname{mod}(u - u_0)^2 + \operatorname{mod}(v - v_0)^2 + \ldots} < \omega.$$

II. *Les mêmes choses étant posées qu'au début du présent n° 22, considérons, en même temps qu'une constante positive donnée, α, une suite indéfinie donnée,*

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_m, \quad \ldots,$$

de semblables constantes, et supposons que, quel que soit m, il existe dans la région $\mathfrak{R}_{x,y,\ldots}$ quelque point dont la distance à $(x_0, y_0, \ldots)$ soit supérieure ou égale à α, tandis que la distance à $(u_0, v_0, \ldots)$ du point correspondant de $\mathfrak{R}_{u,v,\ldots}$ tombe au-dessous de ω_m.

Cela étant, on peut assigner quelque variante, $(x_m, y_m, \ldots)$, tombant constamment dans la région $\mathfrak{R}_{x,y,\ldots}$, et telle que la distance de $(x_m, y_m, \ldots)$ à $(x_0, y_0, \ldots)$ soit supérieure ou égale à α, tandis que la distance à $(u_0, v_0, \ldots)$ du point correspondant $(u_m, v_m, \ldots)$ est inférieure ou égale à ω_m.

En se donnant une fois pour toutes un intervalle complexe où se trouve comprise la région $\mathfrak{R}_{x,y,\ldots}$, et recommençant pour chaque valeur de m le raisonnement fait à l'alinéa I, on définira une variante, $(x_m, y_m, \ldots)$, satisfaisant à toutes les conditions requises.

III. Revenons à notre énoncé général, et supposons pour un instant, contrairement à ce que nous voulons établir, qu'en désignant par ω une constante positive arbitrairement choisie, il existe dans la région $\mathfrak{R}_{u,v,\ldots}$ quelque point dont la distance à $(u_0, v_0, \ldots)$ soit moindre que ω, tandis que la distance à $(x_0, y_0, \ldots)$ du point correspondant est supérieure ou égale à α; ou, ce qui revient évidemment au même, puisque les deux régions $\mathfrak{R}_{x,y,\ldots}$, $\mathfrak{R}_{u,v,\ldots}$ se correspondent point par point, supposons qu'il existe dans la région $\mathfrak{R}_{x,y,\ldots}$ quelque point dont la distance à $(x_0, y_0, \ldots)$ soit supérieure ou égale à α, tandis que la distance à $(u_0, v_0, \ldots)$ du point correspondant tombe au-dessous de ω.

Cela étant, si l'on prend successivement pour ω les inverses arithmétiques de tous les nombres entiers positifs,

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{1}{2}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{m}, \quad \ldots,$$

il existe, d'après l'alinéa II, quelque variante, $(x_m, y_m, \ldots)$, tombant constamment dans la région $\mathfrak{R}_{x,y,\ldots}$, et telle que la distance de $(x_m, y_m, \ldots)$ à $(x_0, y_0, \ldots)$ soit supérieure ou égale à α, tandis que la distance à $(u_0, v_0, \ldots)$ du point correspondant $(u_m, v_m, \ldots)$ est inférieure ou égale à $\frac{1}{m}$. Cette variante $(x_m, y_m, \ldots)$ ne sortant jamais de la région $\mathfrak{R}_{x,y,\ldots}$, qui est limitée et complète, une variante,

$$(x_{m_k}, y_{m_k}, \ldots) = (x^{(k)}, y^{(k)}, \ldots),$$

convenablement extraite de $(x_m, y_m, \ldots)$, sera convergente (n° **11**), et sa limite, $(\Xi, \mathrm{H}, \ldots)$, sera située dans $\mathfrak{R}_{x,y,\ldots}$ (n° **10**); d'ailleurs, la distance

$$\sqrt{\operatorname{mod}(x - x_0)^2 + \operatorname{mod}(y - y_0)^2 + \ldots}$$

étant, dans cette même région, une fonction continue de $x, y, \ldots$ (n° **21**, I), (n° **19**, 5°), (n° **20**), (n° **21**, II), la variante

$$\sqrt{\operatorname{mod}(x^{(k)} - x_0)^2 + \operatorname{mod}(y^{(k)} - y_0)^2 + \ldots}$$

a pour limite (n° **18**)

$$\sqrt{\operatorname{mod}(\Xi - x_0)^2 + \operatorname{mod}(\mathrm{H} - y_0)^2 + \ldots},$$

et, comme elle reste constamment supérieure ou égale à α, sa limite satisfait, elle aussi, à la relation

$$\sqrt{\operatorname{mod}(\Xi - x_0)^2 + \operatorname{mod}(\mathrm{H} - y_0)^2 + \ldots} \geqq \alpha. \tag{30}$$

Si l'on désigne maintenant par $(\Upsilon, \Phi, \ldots)$ le point de $\mathfrak{R}_{u,v,\ldots}$ qui correspond à $(\Xi, \mathrm{H}, \ldots)$, il résulte de la continuité des seconds membres de (27) que le point $(u^{(k)}, v^{(k)}, \ldots)$, correspondant à $(x^{(k)}, y^{(k)}, \ldots)$, a pour limite $(\Upsilon, \Phi, \ldots)$; d'ailleurs, la distance

$$\sqrt{\operatorname{mod}(u - u_0)^2 + \operatorname{mod}(v - v_0)^2 + \ldots}$$

étant, dans la région $\mathfrak{R}_{u,v,\ldots}$, une fonction continue de $u, v, \ldots$, la variante

$$\sqrt{\operatorname{mod}(u^{(k)} - u_0)^2 + \operatorname{mod}(v^{(k)} - v_0)^2 + \ldots}$$

a pour limite

$$\sqrt{\operatorname{mod}(\Upsilon - u_0)^2 + \operatorname{mod}(\Phi + v_0)^2 + \ldots},$$

et, comme elle est inférieure à la variante infiniment petite $\frac{1}{m_k}$, cette limite est forcément nulle : il en résulte que $(\Upsilon, \Phi, \ldots)$ coïncide avec $(u_0, v_0, \ldots)$, et, par suite, $(\Xi, \mathrm{H}, \ldots)$ avec $(x_0, y_0, \ldots)$, ce qui est contradictoire avec la relation (30).

(*A suivre.*)