LES SOUS-GROUPES

DU

GROUPE LINÉAIRE HOMOGÈNE A QUATRE VARIABLES :

SOUS-GROUPES A UN ET A DEUX PARAMÈTRES,

PAR M. R. LE VAVASSEUR,

à Lyon.

CHAPITRE I.

GROUPES A UN PARAMÈTRE.

1. Soit

$$Xf = \sum_{\alpha, \beta} (a_{\alpha\beta} x_\alpha p_\beta), \qquad \alpha, \beta = 1, 2, 3, 4, \qquad p_\beta = \frac{\partial f}{\partial x_\beta}$$

la transformation infinitésimale la plus générale du groupe linéaire homogène à quatre variables.

Pour trouver les équations finies du groupe de transformations de première espèce (à un paramètre) engendré par Xf, il faut considérer les équations différentielles simultanées

$$(1) \qquad \frac{dy_\alpha}{dt} = \sum_{\beta=1}^{4} (a_{\beta\alpha} y_\beta), \qquad \alpha = 1, 2, 3, 4.$$

La solution sera complètement déterminée par les conditions

$$y_\alpha = x_\alpha, \qquad \text{pour} \qquad t = 0, \qquad \alpha = 1, 2, 3, 4.$$

Envisageons l'expression

$$u = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_4.$$

On a

$$Xu = \sum_{\alpha, \beta} (a_{\alpha\beta} x_\alpha c_\beta).$$

Si l'on veut déterminer les coefficients c_α de façon que le plan $u = 0$ soit invariant en vertu de la transformation Xf, on devra avoir

$$\sum_{\alpha,\beta}(a_{\alpha\beta}x_\alpha c_\beta) = \sigma(c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4).$$

Donc

$$\sum_{\beta=1}^{4}(a_{\alpha\beta}c_\beta) = \sigma c_\alpha, \qquad \alpha = 1, 2, 3, 4.$$

σ sera déterminé par l'équation

$$A(\sigma) = \begin{vmatrix} a_{11}-\sigma & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22}-\sigma & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\sigma & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}-\sigma \end{vmatrix} = 0.$$

En général, cette équation a quatre racines distinctes et différentes de zéro. Désignons par σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 ces quatre racines.

Je désignerai aussi par $A_{\alpha\beta}(\sigma)$ le premier mineur de $A(\sigma)$ qui correspond à l'élément situé dans la ligne de rang α et dans la ligne de rang β :

$$A_{\alpha\beta}(\sigma) = \frac{\partial A(\sigma)}{\partial a_{\alpha\beta}}.$$

Dans le système d'équations (1) j'effectue le changement d'inconnues

$$Y_\alpha = \sum_{\gamma=1}^{4}[A_{\beta\gamma}(\sigma_\alpha)y_\gamma].$$

On trouve, après un calcul facile,

$$\frac{dY_\alpha}{dt} = \sigma_\alpha Y_\alpha, \qquad \alpha = 1, 2, 3, 4.$$

Ainsi, pour le changement de variable considéré, la transformation infinitésimale envisagée se ramène à la forme suivante, qu'on appelle la *forme canonique*,

$$(1) \qquad a_1x_1p_1 + a_2x_2p_2 + a_3x_3p_3 + a_4x_4p_4$$

avec

$$(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)(a_2 - a_3)(a_2 - a_4)(a_3 - a_4)a_1a_2a_3a_4 \neq 0.$$

Les équations finies du groupe (1) sont :

$$y_\alpha = x_\alpha e^{a_\alpha \lambda} \qquad \alpha = 1, 2, 3, 4,$$

λ étant un paramètre variable.

La forme canonique (1) reste invariable si l'on fait le changement de variables

$$x_1 = a y_1, \qquad x_2 = b y_2, \qquad x_3 = c y_3, \qquad x_4 = d y_4,$$

quels que soient les coefficients a, b, c, d, tels que $abcd \neq 0$.

2. Nous prendrons comme groupe (2) le groupe obtenu en supposant que l'équation caractéristique de la transformation infinitésimale correspondante admet une racine nulle.

La forme canonique sera

$$(2) \qquad a_2 x_2 p_2 + a_3 x_3 p_3 + a_4 x_4 p_4.$$

(Équations finies... $y_1 = x_1$, $\quad y_2 = x_2 e^{a_2\lambda}$, $\quad y_3 = x_3 e^{a_3\lambda}$, $\quad y_4 = x_4 e^{a_4\lambda}$).

3. Supposons, maintenant, que $A(\sigma)$ a un zéro double, et que ce zéro double n'annule pas tous les premiers mineurs du déterminant $A(\sigma)$.

Soient σ_1, σ_2 les deux zéros simples, σ_3 le zéro double.

Posons

$$Y_h = \sum_k \frac{\partial A(\sigma_h)}{\partial a_{lk}} y_k, \qquad h = 1, 2, 3,$$

puis

$$Y_4 = \sum_k \frac{\partial^2 A(\sigma_3)}{\partial a_{lk}\, \partial \sigma_3} y_k.$$

On a, d'autre part,

$$\sum_k \left[\frac{\partial A(\sigma_3)}{\partial a_{lk}} a_{mk} \right] = \frac{\partial A(\sigma_3)}{\partial a_{lm}} \sigma_3 \qquad (l, m = 1, 2, 3, 4)$$

et, comme σ_3 est un zéro double de $A(\sigma)$,

$$\sum_k \left[\frac{\partial^2 A(\sigma_3)}{\partial a_{lk}\, \partial \sigma_3} a_{mk} \right] = \frac{\partial^2 A(\sigma_3)}{\partial a_{lm}\, \partial \sigma_3} \sigma_3 + \frac{\partial A(\sigma_3)}{\partial a_{lm}},$$

de sorte que

$$\frac{dY_h}{dt} = \sigma_h Y_h, \qquad h = 1, 2, 3, \qquad \text{et} \qquad \frac{dY_4}{dt} = \sigma_3 Y_4 + Y_3.$$

De là, on déduit pour la forme canonique

$$(3)\qquad \begin{gathered} a_1 x_1 p_1 + a_2 x_2 p_2 + a_3(x_3 p_3 + x_4 p_4) + x_3 p_4 \\ a_1 a_2 a_3 (a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_2 - a_3) \neq 0. \end{gathered}$$

Si l'une des racines simples est nulle, on a le type

$$(4)\qquad \begin{gathered} a_2 x_2 p_2 + a_3(x_3 p_3 + x_4 p_4) + x_3 p_4, \\ a_2 a_3 (a_2 - a_3) \neq 0. \end{gathered}$$

Et, si la racine double est nulle, on a le type

$$(5)\qquad \begin{gathered} a_1 x_1 p_1 + a_2 x_2 p_2 + x_3 p_4, \\ a_1 a_2 (a_1 - a_2) \neq 0. \end{gathered}$$

4. Nous allons chercher quel changement de variable conserve cette forme canonique

$$a_1 x_1 p_1 + a_2 x_2 p_2 + a_3(x_3 p_3 + x_4 p_4) + x_3 p_4.$$

Pour cela, considérons le système d'équations différentielles

$$\frac{dx_1}{dt} = a_1 x_1, \qquad \frac{dx_2}{dt} = a_2 x_2, \qquad \frac{dx_3}{dt} = a_3 x_3, \qquad \frac{dx_4}{dt} = x_3 + a_3 x_4.$$

Effectuons le changement de variables

$$x_\alpha = \sum_\beta b_{\alpha\beta} y_\beta, \qquad \alpha, \beta = 1, 2, 3, 4,$$

et cherchons à quelle condition l'on a

$$\frac{dy_1}{dt} = a_1 y_1, \qquad \frac{dy_2}{dt} = a_2 y_2, \qquad \frac{dy_3}{dt} = a_3 y_3, \qquad \frac{dy_4}{dt} = y_3 + a_3 y_4.$$

On trouve les formules

$$\begin{aligned} x_1 &= a y_1, \\ x_2 &= b y_2, \\ x_3 &= c y_3, \\ x_4 &= d y_3 + c y_4, \end{aligned}$$

($abc \neq 0$), d'où l'on déduit, si l'on pose

$$q_\beta = \frac{\partial f}{\partial y_\beta},$$

$$p_1 = \frac{1}{a} q_1, \qquad p_2 = \frac{1}{b} q_2, \qquad p_3 = \frac{1}{c} q_3 - \frac{d}{c^2} q_4$$

et

$$p_4 = \frac{1}{c} q_4.$$

Voici les équations finies des groupes (**3**), (**4**) et (**5**) :

Groupe (**3**)... $y_1 = x_1 e^{a_1\lambda}$, $y_2 = x_2 e^{a_2\lambda}$, $y_3 = x_3 e^{a_3\lambda}$, $y_4 = e^{a_3\lambda}(\lambda x_3 + x_4)$,

Groupe (**4**)... $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2 e^{a_2\lambda}$, $y_3 = x_3 e^{a_3\lambda}$, $y_4 = e^{a_3\lambda}(\lambda x_3 + x_4)$,

Groupe (**5**)... $y_1 = x_1 e^{a_1\lambda}$, $y_2 = x_2 e^{a_2\lambda}$, $y_3 = x_3$, $y_4 = \lambda x_3 + x_4$.

5. Je vais supposer, maintenant, que le zéro double annule tous les premiers mineurs de $A(\sigma)$: il ne peut annuler tous les deuxièmes mineurs, sans quoi ce serait un zéro triple; et même, il n'annule pas tous les deuxièmes mineurs principaux.

On fera d'abord

$$Y_\alpha = \sum_\gamma \frac{\partial A(\sigma_\alpha)}{\partial a_{\beta\gamma}} y_\gamma, \qquad \alpha = 1, 2,$$

ce qui donne

$$\frac{dY_1}{dt} = \sigma_1 Y_1, \qquad \frac{dY_2}{dt} = \sigma_2 Y_2.$$

On prendra ensuite

$$Y_3 = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + c_4 y_4,$$
$$Y_4 = c'_1 y_1 + c'_2 y_2 + c'_3 y_3 + c'_4 y_4,$$

c_1, c_2, c_3, c_4 et c'_1, c'_2, c'_3, c'_4 satisfaisant aux équations

$$\begin{aligned}
(a_{11} - \sigma_3) c_1 + a_{12} c_2 + a_{13} c_3 + a_{14} c_4 &= 0,\\
a_{21} c_1 + (a_{22} - \sigma_3) c_2 + a_{23} c_3 + a_{24} c_4 &= 0,\\
a_{31} c_1 + a_{32} c_2 + (a_{33} - \sigma_3) c_3 + a_{34} c_4 &= 0,\\
a_{41} c_1 + a_{42} c_2 + a_{43} c_3 + (a_{44} - \sigma_3) c_4 &= 0,
\end{aligned}$$

équations qui se réduisent à deux, par hypothèse.

Alors, on aura

$$\frac{dY_3}{dt} = \sigma_3 Y_3 \qquad \text{et} \qquad \frac{dY_4}{dt} = \sigma_3 Y_4.$$

Je déduis, de là, la forme canonique

$$(\mathbf{6}) \qquad a_1 x_1 p_1 + a_2 x_2 p_2 + a_3 (x_3 p_3 + x_4 p_4),$$
$$a_1 a_2 a_3 (a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_2 - a_3) \neq 0.$$

Si l'un des zéros simples est nul, on trouve le type

$$(7) \qquad a_2 x_2 p_2 + a_3(x_3 p_3 + x_4 p_4), \quad a_2 a_3 (a_2 - a_3) \neq 0.$$

Et, si c'est le zéro double qui est nul, on trouve le type

$$(8) \qquad a_1 x_1 p_1 + a_2 x_2 p_2, \quad a_1 a_2 (a_1 - a_2) \neq 0.$$

6. Si l'on cherche quel changement de variables reproduit l'une des formes canoniques (6), (7) ou (8), en suivant la méthode indiquée au n° 4, on trouve :

$$x_1 = a y_1,$$
$$x_2 = b y_2,$$
$$x_3 = c y_3 + d y_4,$$
$$x_4 = e y_3 + f y_4;$$

d'où

$$p_1 = \frac{1}{a} q_1,$$
$$p_2 = \frac{1}{b} q_2,$$
$$p_3 = \frac{f q_3 - e q_4}{cf - ed},$$
$$p_4 = \frac{c q_4 - d q_3}{cf - ed}.$$

Les équations finies des groupes (6), (7), (8) sont les suivantes :

Groupe (6)....	$y_1 = x_1 e^{a_1\lambda}$,	$y_2 = x_2 e^{a_2\lambda}$,	$y_3 = x_3 e^{a_3\lambda}$,	$y_4 = x_4 e^{a_3\lambda}$,
Groupe (7)....	$y_1 = x_1$,	$y_2 = x_2 e^{a_2\lambda}$,	$y_3 = x_3 e^{a_3\lambda}$,	$y_4 = x_4 e^{a_3\lambda}$,
Groupe (8)....	$y_1 = x_1 e^{a_1\lambda}$,	$y_2 = x_2 e^{a_2\lambda}$,	$y_3 = x_3$,	$y_4 = x_4$.

7. J'arrive au cas où $A(\sigma)$ admet deux zéros doubles n'annulant ni l'un ni l'autre tous les premiers mineurs du déterminant $A(\sigma)$.

Soient σ_1 et σ_3 ces deux zéros doubles.

On posera

$$Y_\alpha = \sum_\gamma \frac{\partial A(\sigma_\alpha)}{\partial a_{\beta\gamma}} y_\gamma, \qquad \alpha = 1, 3,$$

et

$$Y_\delta = \sum_\gamma \frac{\partial^2 A(\sigma_\delta)}{a_{\beta\gamma}\, \partial\sigma_\delta} y_\gamma, \qquad \delta = 2, 4, \quad \sigma_2 = \sigma_1, \qquad \sigma_4 = \sigma_3.$$

On arrive ainsi à la forme canonique

$$(9)\qquad a_1(x_1p_1+x_2p_2)+a_2(x_3p_3+x_4p_4)+x_1p_2+x_3p_4,$$
$$a_1a_2(a_1-a_2)\neq 0.$$

Et, si l'un des zéros doubles est nul, on trouve le type

$$(10)\qquad a_2(x_3p_3+x_4p_4)+x_1p_2+x_3p_4,\qquad a_2\neq 0.$$

Les équations finies de ces deux groupes sont

Groupe (9)... $y_1=x_1e^{a_1\lambda},\quad y_2=e^{a_1\lambda}(\lambda x_1+x_2),\quad y_3=x_3e^{a_2\lambda},\quad y_4=e^{a_2\lambda}(\lambda x_3+x_4),$

et

Groupe (10). $y_1=x_1,\quad y_2=\lambda x_1+x_2,\quad y_3=x_3e^{a_2\lambda},\quad y_4=e^{a_2\lambda}(\lambda x_3+x_4).$

8. Le changement de variables qui laisse subsister la forme canonique (9) ou (10) est le suivant :

$$x_1=ay_1,$$
$$x_2=by_1+ay_2.$$
$$x_3=cy_3,$$
$$x_4=dy_3+cy_4;$$

d'où je déduis

$$p_1=\frac{1}{a}q_1-\frac{b}{a^2}q_2,$$
$$p_2=\frac{1}{a}q_2,$$
$$p_3=\frac{1}{c}q_3-\frac{d}{c^2}q_4,$$
$$p_4=\frac{1}{c}q_4.$$

9. Nous supposons maintenant que $A(\sigma)$ a deux zéros doubles, dont l'un annule tous les premiers mineurs du déterminant $A(\sigma)$.

On a alors la forme canonique

$$(11)\qquad a_1(x_1p_1+x_2p_2)+a_2(x_3p_3+x_4p_4)+x_1p_2,\qquad a_1a_2(a_1-a_2)\neq 0.$$

Puis, en supposant que l'un des zéros doubles est nul,

$$(12)\qquad a_1(x_1p_1+x_2p_2)+x_1p_2,\qquad a_1\neq 0$$

et

(13) $$a_2(x_3p_3+x_4p_4)+x_1p_2, \qquad a_2\neq 0.$$

Les équations finies de ces trois groupes sont les suivantes :

Groupe (11)... $y_1=x_1e^{a_1\lambda}$, $y_2=e^{a_1\lambda}(\lambda x_1+x_2)$, $y_3=x_3e^{\lambda a_2}$, $y_4=x_4e^{\lambda a_2}$,
Groupe (12)... $y_1=x_1e^{a_1\lambda}$. $y_2=e^{a_1\lambda}(\lambda x_1+x_2)$, $y_3=x_3$, $y_4=x_4$,
Groupe (13)... $y_1=x_1$, $y_2=\lambda x_1+x_2$, $y_3=x_3e^{\lambda a_2}$, $y_4=x_4e^{\lambda a_2}$.

10. Le changement de variable qui laisse inaltérées les formes canoniques (11), (12) et (13) est le suivant :

$$x_1=ay_1,$$
$$x_2=by_1+ay_2,$$
$$x_3=cy_3+dy_4,$$
$$x_4=ey_3+fy_4,$$

$[a(cf-ed)\neq 0]$, d'où je déduis

$$p_1=\frac{1}{a}q_1-\frac{b}{a^2}q_2,$$

$$p_2=\frac{1}{a}q_2,$$

$$p_3=\frac{fq_3-eq_4}{cf-ed},$$

$$p_4=\frac{cq_4-dq_3}{cf-ed}.$$

11. Supposons, maintenant, que chaque zéro double de $A(\sigma)$ annule tous les premiers mineurs du déterminant $A(\sigma)$.

On aura les formes canoniques

(14) $$a_1(x_1p_1+x_2p_2)+a_2(x_3p_3+x_4p_4), \qquad a_1a_2(a_1-a_2)\neq 0$$

et

(15) $$x_3p_3+x_4p_4.$$

Équations finies (14). $y_1=x_1e^{a_1\lambda}$, $y_2=x_2e^{a_1\lambda}$, $y_3=x_3e^{a_2\lambda}$, $y_4=x_4e^{a_2\lambda}$,
Équations finies (15). $y_1=x_1$ $y_2=x_2$, $y_3=x_3e^{\lambda}$, $y_4=x_4e^{\lambda}$.

12. Voici pour quel changement de variables ces formes coniques restent inaltérées

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = ay_1 + by_2 \\ x_2 = cy_1 + dy_2 \\ x_3 = ey_3 + fy_4 \\ x_4 = gy_3 + hy_4 \end{array}\right\} \quad (ad - bc)(eh - fg) \neq 0.$$

On en conclut

$$p_1 = \frac{dq_1 - cq_2}{ad - bc}, \qquad p_2 = \frac{aq_2 - bq_1}{ad - bc}, \qquad p_3 = \frac{hq_3 - gq_4}{eh - fg}, \qquad p_4 = \frac{eq_4 - fq_3}{eh - fg}.$$

13. J'arrive au cas où $A(\sigma)$ a un zéro triple et un zéro simple; le zéro triple n'annulant pas tous les premiers mineurs de $A(\sigma)$.

Soient σ_1 le zéro triple, σ_4 le zéro simple.

Posons

$$Y_1 = \sum_\gamma \frac{\partial A(\sigma_1)}{\partial a_{\beta\gamma}} y_\gamma, \qquad Y_2 = \sum_\gamma \frac{\partial^2 A(\sigma_1)}{\partial a_{\beta\gamma}\, \partial\sigma_1} y_\gamma,$$

$$Y_3 = \sum_\gamma \frac{\partial^3 A(\sigma_1)}{\partial a_{\beta\gamma}\, \partial\sigma_1^2} y_\gamma, \qquad Y_4 = \sum_\gamma \frac{\partial A(\sigma_4)}{\partial a_{\beta\gamma}} y_\gamma.$$

On trouve alors

$$\frac{dY_1}{dt} = \sigma_1 Y_1, \qquad \frac{dY_2}{dt} = \sigma_1 Y_2 + Y_1, \qquad \frac{dY_3}{dt} = \sigma_1 Y_3 + 2Y_2, \qquad \frac{dY_4}{dt} = \sigma_4 Y_4.$$

De là, nous concluons aux formes canoniques suivantes :

(**16**) $a_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3) + a_2x_4p_4 + x_1p_2 + 2x_2p_3, \qquad a_1a_2(a_1 - a_2) \neq 0,$

(**17**) $a_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3) + x_1p_2 + 2x_2p_3, \qquad a_1 \neq 0,$

(**18**) $a_2x_4p_4 + x_1p_2 + 2x_2p_3, \qquad a_2 \neq 0.$

Voici les équations finies

Groupe (**16**)... $y_1 = e^{a_1\lambda}x_1, \quad y_2 = e^{a_1\lambda}(\lambda x_1 + x_2), \quad y_3 = e^{a_1\lambda}(\lambda^2 x_1 + 2\lambda x_2 + x_3), \quad y_4 = x_4 e^{\lambda a_2},$

Groupe (**17**)... $y_1 = e^{a_1\lambda}, \quad y_2 = e^{a_1\lambda}(\lambda x_1 + x_2), \quad y_3 = e^{a_1\lambda}(\lambda^2 x_1 + 2\lambda x_2 + x_3), \quad y_4 = x_4,$

Groupe (**18**)... $y_1 = x_1, \quad y_2 = \lambda x_1 + x_2, \quad y_3 = \lambda^2 x_1 + 2\lambda x_2 + x_3, \quad y_4 = x_4 e^{\lambda a_2}.$

14. Le changement de variables pour lequel les formes canoniques (**16**), (**17**) et (**18**) restent inaltérées est le suivant :

$$\begin{array}{l} x_1 = ay_1, \\ x_2 = by_1 + ay_2, \\ x_3 = cy_1 + 2by_2 + ay_3, \\ x_4 = dy_4, \end{array}$$

d'où

$$p_1 = \frac{1}{a} q_1 - \frac{b}{a^2} q_2 + \left(\frac{2b^2}{a^3} - \frac{c}{a^2} \right) q_3,$$

$$p_2 = \frac{1}{a} q_2 - \frac{2b}{a^2} q_3,$$

$$p_3 = \frac{1}{a} q_3,$$

$$p_4 = \frac{1}{d} q_4.$$

15. Supposons que le zéro triple de $A(\sigma)$ annule tous les premiers déterminants mineurs du déterminant $A(\sigma)$, mais non tous les deuxièmes mineurs, σ_1 étant le zéro triple, les équations (1)

$$\sum_\beta a_{\alpha\beta} c_\beta = \sigma_1 c_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4)$$

se réduisent à deux.

Posons

$$Y_1 = \sum_\alpha (c_\alpha y_\alpha), \qquad Y_2 = \sum_\alpha (c'_\alpha y_\alpha),$$

les coefficients c_α, c'_α satisfaisant aux équations (1), puis

$$Y_3 = \sum_\alpha \left(\frac{\partial c'_\alpha}{\partial \sigma_1} y_\alpha \right) \qquad \text{et} \qquad Y_4 = \sum_\alpha \frac{\partial A(\sigma_4)}{\partial a_{\beta\alpha}} y_\alpha,$$

σ_4 étant le zéro simple.

Alors

$$\frac{dY_1}{dt} = \sigma_1 Y_1, \qquad \frac{dY_2}{dt} = \sigma_1 Y_2, \qquad \frac{dY_3}{dt} = \sigma_1 Y_3 + Y_2, \qquad \frac{dY_4}{dt} = \sigma_4 Y_4.$$

On trouve, par conséquent, les trois types suivants :

(**19**)	$a_1(x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3) + a_2 x_4 p_4 + x_2 p_3,$	$(a_1 - a_2) a_1 a_2 \neq 0,$
(**20**)	$a_1(x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3) \qquad\qquad + x_2 p_3,$	$a_1 \neq 0,$
(**21**)	$a_2 x_4 p_4 + x_2 p_3,$	$a_2 \neq 0.$

Les équations finies de ces trois groupes sont respectivement

Groupe (**19**)...	$y_1 = x_1 e^{a_1 \lambda},$	$y_2 = x_2 e^{a_1 \lambda},$	$y_3 = e^{a_1 \lambda}(\lambda x_2 + x_3),$	$y_4 = x_4 e^{\lambda a_2},$
Groupe (**20**)...	$y_1 = x_1 e^{a_1 \lambda},$	$y_2 = x_2 e^{a_1 \lambda},$	$y_3 = e^{a_1 \lambda}(\lambda x_2 + x_3),$	$y_4 = x_4,$
Groupe (**21**)...	$y_1 = x_1,$	$y_2 = x_2,$	$y_3 = \lambda x_2 + x_3,$	$y_4 = x_4 e^{\lambda a_2}.$

16. Voici, maintenant, le changement de variables pour lequel les formes canoniques (**19**), (**20**) et (**21**) restent inaltérées :

$$x_1 = ay_1 + by_2,$$
$$x_2 = cy_2,$$
$$x_3 = dy_1 + ey_2 + cy_3,$$
$$x_4 = fy_4,$$

d'où

$$p_1 = \frac{1}{a} q_1 - \frac{d}{ac} q_3,$$

$$p_2 = -\frac{b}{ac} q_1 + \frac{1}{c} q_2 + \left(\frac{bd}{ac^2} - \frac{e}{c^2}\right) q_3,$$

$$p_3 = \frac{1}{c} q_3,$$

$$p_4 = \frac{1}{f} q_4.$$

17. J'arrive au cas où la racine triple de l'équation $A(\sigma) = 0$ annule tous les deuxièmes mineurs du déterminant $A(\sigma)$.

On a immédiatement les trois formes canoniques suivantes :

(**22**) $$a_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3) + a_2x_4p_4, \qquad a_1a_2(a_1 - a_2) \neq 0,$$

(**23**) $$x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3,$$

(**24**) $$x_4p_4.$$

Voici les équations finies :

Groupe (**22**)... $y_1 = x_1e^{a_1\lambda}$, $y_2 = x_2e^{a_1\lambda}$, $y_3 = x_3e^{a_1\lambda}$, $y_4 = x_4e^{a_2\lambda}$,

Groupe (**23**)... $y_1 = x_1e^{\lambda}$, $y_2 = x_2e^{\lambda}$, $y_3 = x_3e^{\lambda}$, $y_4 = x_4$,

Groupe (**24**)... $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_3$, $y_4 = x_4e^{\lambda}$.

18. Voici maintenant le changement de variables qui laisse inaltérées les formes canoniques (**22**), (**23**) et (**24**) :

$$x_1 = b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + b_{13}y_3,$$
$$x_2 = b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + b_{23}y_3,$$
$$x_3 = b_{31}y_1 + b_{32}y_2 + b_{33}y_3,$$
$$x_4 = by_4.$$

Posons

$$B = (b_{11}b_{22}b_{33}),$$

on a

$$p_1 = q_1 \frac{\partial \operatorname{Log} B}{\partial b_{11}} + q_2 \frac{\partial \operatorname{Log} B}{\partial b_{12}} + q_3 \frac{\partial \operatorname{Log} B}{\partial b_{13}},$$
$$p_2 = q_1 \frac{\partial \operatorname{Log} B}{\partial b_{21}} + q_2 \frac{\partial \operatorname{Log} B}{\partial b_{22}} + q_3 \frac{\partial \operatorname{Log} B}{\partial b_{23}},$$
$$p_3 = q_1 \frac{\partial \operatorname{Log} B}{\partial b_{31}} + q_2 \frac{\partial \operatorname{Log} B}{\partial b_{32}} + q_3 \frac{\partial \operatorname{Log} B}{\partial b_{33}},$$
$$p_4 = \frac{1}{b} q_4.$$

19. Dans le cas où $A(\sigma)$ admet un zéro quadruple, si l'on pose

$$Y_1 = \sum_\alpha (c_\alpha y_\alpha), \qquad Y_2 = \sum_\alpha \frac{dc_\alpha}{d\sigma_1} y_\alpha, \qquad Y_3 = \sum_\alpha \frac{d^2 c_\alpha}{d\sigma_1^2} y_\alpha, \qquad Y_4 = \sum_\alpha \frac{d^3 c_\alpha}{d\sigma_1^3} y_\alpha,$$

σ_1 étant le zéro quadruple, on en déduit

$$\frac{dY_1}{dt} = \sigma_1 Y_1, \qquad \frac{dY_2}{dt} = Y_1 + \sigma_1 Y_2, \qquad \frac{dY_3}{dt} = 2 Y_2 + \sigma_1 Y_3, \qquad \frac{dY_4}{dt} = 3 Y_3 + \sigma_1 Y_4;$$

d'où je conclus les deux formes canoniques

$$(25) \qquad a_1(x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4) + x_1 p_2 + 2 x_2 p_3 + 3 x_3 p_4, \qquad a_1 \neq 0$$

et

$$(26) \qquad x_1 p_2 + 2 x_2 p_3 + 3 x_3 p_4.$$

Les équations finies sont ici

$$y_1 = x_1 e^{a_1 \lambda}, \qquad y_2 = e^{a_1 \lambda}(\lambda x_1 + x_2), \qquad y_3 = e^{a_1 \lambda}(\lambda^2 x_1 + 2\lambda x_2 + x_3)$$

et

$$y_4 = e^{a_1 \lambda}(\lambda^3 x_1 + 3\lambda^2 x_2 + 3\lambda x_3 + x_4),$$

pour le groupe (**25**), et, pour le groupe (**26**),

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = \lambda x_1 + x_2, \quad y_3 = \lambda^2 x_1 + 2\lambda x_2 + x_3, \quad y_4 = \lambda^3 x_1 + 3\lambda^2 x_2 + 3\lambda x_3 + x_4.$$

20. Quant au changement de variables qui laisse inaltérée l'une ou l'autre de ces deux formes canoniques, le voici :

$$x_1 = a y_1,$$
$$x_2 = b y_1 + a y_2,$$
$$x_3 = c y_1 + 2 b y_2 + a y_3,$$
$$x_4 = d y_1 + 3 c y_2 + 3 b y_3 + a y_4;$$

d'où je déduis

$$p_1 = \frac{1}{a} q_1 - \frac{b}{a^2} q_2 + \left(\frac{2b^2}{a^3} - \frac{c}{a^2}\right) q_3 - \left(\frac{6b^3}{a^4} - \frac{6bc}{a^3} + \frac{d}{a^2}\right) q_4,$$

$$p_2 = \frac{1}{a} q_2 - \frac{2b}{a^2} q_3 + \left(\frac{6b^2}{a^3} - \frac{3c}{a^2}\right) q_4,$$

$$p_3 = \frac{1}{a} q_3 - \frac{3b}{b^2} q_4,$$

$$p_4 = \frac{1}{a} q_4.$$

21. Si le zéro quadruple annule tous les premiers mineurs du déterminant $A(\sigma)$, on pourra poser, ou bien

$$Y_1 = \sum_\alpha (c_\alpha y_\alpha), \qquad Y_2 = \sum_\alpha \left(\frac{dc_\alpha}{d\sigma_1} y_\alpha\right), \qquad Y_3 = \sum_\alpha \frac{d^2 c_\alpha}{d\sigma_1^2} y_\alpha, \qquad Y_4 = \sum_\alpha c'_\alpha y_\alpha,$$

ou bien

$$Y_1 = \sum_\alpha c_\alpha y_\alpha, \qquad Y_2 = \sum_\alpha \frac{dc_\alpha}{d\sigma_1} y_\alpha, \qquad Y_3 = \sum_\alpha c'_\alpha y_\alpha, \qquad Y_4 = \sum_\alpha \frac{dc'_\alpha}{d\sigma_1} y_\alpha.$$

De là les formes canoniques suivantes :

(**27**) $\quad a_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4) + x_1p_2 + 2x_2p_3, \qquad a_1 \neq 0,$

(**28**) $\quad x_1p_2 + 2x_2p_3,$

et

(**29**) $\quad a_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4) + x_1p_2 + x_3p_4, \qquad a_1 \neq 0,$

(**30**) $\quad x_1p_2 + x_3p_4,$

équations finies

(**27**) $\quad y_1 = e^{a_1\lambda}x_1, \quad y_2 = e^{a_1\lambda}(\lambda x_1 + x_2), \quad y_3 = e^{a_1\lambda}(\lambda^2 x_1 + 2\lambda x_2 + x_3), \quad y_4 = e^{a_1\lambda}x_4,$

(**28**) $\quad y_1 = x_1, \quad y_2 = \lambda x_1 + x_2, \quad y_3 = \lambda^2 x_1 + 2\lambda x_2 + x_3, \quad y_4 = x_4,$

(**29**) $\quad y_1 = e^{a_1\lambda}x_1, \quad y_2 = e^{a_1\lambda}(\lambda x_1 + x_2), \quad y_3 = e^{a_1\lambda}x_3, \quad y_4 = e^{a_1\lambda}(\lambda x_3 + x_4),$

(**30**) $\quad y_1 = x_1, \quad y_2 = \lambda x_1 + x_2, \quad y_3 = x_3, \quad y_4 = \lambda x_3 + x_4.$

22. Le changement de variables qui laisse inaltérées les formes (**27**) et (**28**) est

$$\begin{aligned} x_1 &= ay_1, \\ x_2 &= by_1 + ay_2, \\ x_3 &= cy_1 + 2by_2 + ay_3 + dy_4, \\ x_4 &= ey_1 + fy_4; \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$p_1 = \frac{1}{a}q_1 - \frac{b}{a^2}q_2 + \left(\frac{2b^2}{a^3} - \frac{c}{a^2} + \frac{de}{a^2 f}\right)q_3 - \frac{e}{af}q_4,$$
$$p_2 = \frac{1}{a}q_2 - \frac{2b}{a^2}q_3,$$
$$p_3 = \frac{1}{a}q_3,$$
$$p_4 = \frac{1}{f}q_4 - \frac{d}{af}q_3.$$

23. Relativement aux formes (**29**) et (**30**), on trouve

$$x_1 = ay_1 + by_3,$$
$$x_2 = cy_1 + ay_2 + dy_3 + by_4,$$
$$x_3 = ey_1 + fy_3,$$
$$x_4 = gy_1 + ey_2 + hy_3 + fy_4;$$

d'où

$$p_1 = \frac{fq_1 - eq_3}{af - be} + \frac{(ed - fc)(fq_2 - eq_4)}{(af - be)^2} + \frac{(eh - fg)(aq_4 - bq_2)}{(af - be)^2},$$
$$p_2 = \frac{fq_2 - bq_4}{af - be},$$
$$p_3 = \frac{aq_3 - bq_1}{af - be} + \frac{(bc - ad)(fq_2 - eq_4)}{(af - be)^2} + \frac{(bg - ah)(aq_4 - bq_2)}{(af - be)^2},$$
$$p_4 = \frac{aq_4 - bq_2}{af - be}.$$

24. Dans le cas d'un zéro quadruple annulant tous les deuxièmes mineurs, mais non tous les troisièmes mineurs, la forme canonique de notre transformation sera

(**31**) $$a_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4) + x_1p_2, \qquad a_1 \neq 0$$

ou

(**32**) $$x_1p_2,$$

équations finies

(**31**) $y_1 = x_1 e^{a_1\lambda}, \quad y_2 = e^{a_1\lambda}(\lambda x_1 + x_2), \quad y_3 = x_3 e^{a_1\lambda}, \quad y_4 = x_4 e^{a_1\lambda},$

(**32**) $y_1 = x_1, \quad y_2 = \lambda x_1 + x_2, \quad y_3 = x_3, \quad y_4 = x_4.$

25. Voici le changement de variables qui laisse invariables les formes canoniques (**31**) et (**32**),

$$x_1 = a y_1,$$
$$x_2 = b y_1 + a y_2 + c y_3 + d y_4,$$
$$x_3 = e y_1 + f y_3 + g y_4,$$
$$x_4 = h y_1 + i y_3 + j y_4;$$

d'où je déduis

$$p_1 = \frac{1}{a} q_1 - \frac{b}{a^2} q_2 - \frac{e}{a} \frac{j q_3 - i q_4}{fj - ig} - \frac{h}{a} \frac{(f q_4 - g q_3)}{fj - ig} - \frac{e(id - jc) + h(cg - fd)}{a^2 (fj - ig)} q_2,$$

$$p_2 = \frac{1}{a} q_2,$$

$$p_3 = \frac{j q_3 - i q_4}{fj - ig} + \frac{id - jc}{a(fj - ig)} q_2,$$

$$p_4 = \frac{f q_4 - g q_3}{fj - ig} + \frac{cg - fd}{a(fj - ig)} q_2.$$

26. Enfin, si tous les troisièmes mineurs sont nuls, on a la forme canonique

$$(33) \qquad x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4.$$

Les équations finies sont

$$y_\alpha = x_\alpha e^\lambda \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4);$$

tout changement de variables transforme cette forme en elle-même.

CHAPITRE II.

GROUPES DE DEUXIÈME ESPÈCE DONT LES TRANSFORMATIONS SONT ÉCHANGEABLES DEUX PAR DEUX.

27. Nous allons chercher les groupes de deuxième espèce en commençant par ceux dont les transformations sont toutes deux par deux échangeables.

Soit d'abord

$$\mathrm{X}f = a_1 x_1 p_1 + a_2 x_2 p_2 + a_3 x_3 p_3 + a_4 x_4 p_4.$$

Posons

$$\mathrm{X}f = \sum_{\alpha, \beta} b_{\alpha\beta} x_\alpha p_\beta;$$

exprimons que l'on a

$$(XY) = 0,$$

on trouve les conditions $b_{\alpha\beta} = 0$ si α est différent de β.

On en déduit deux types de groupes :

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a_1 x_1 p_1 + a_2 x_2 p_2 + a_3 x_3 p_3 + a_4 x_4 p_4, \\ b_1 x_1 p_1 + b_2 x_2 p_2 + b_3 x_3 p_3 + b_4 x_4 p_4 \end{array} \right.$$

et

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a_2 x_2 p_2 + a_3 x_3 p_3 + a_4 x_4 p_4, \\ b_2 x_2 p_2 + b_3 x_3 p_3 + b_4 x_4 p_4, \end{array} \right.$$

équations finies

$$y_\alpha = x_\alpha e^{\lambda a_\alpha + \mu b_\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4).$$

28. Envisageons maintenant les transformations (3), (4) et (5) du Chapitre I.

Soient

$$Xf = a_1 x_1 p_1 + a_2 x_2 p_2 + a_3 (x_3 p_3 + x_4 p_4) + x_3 p_4$$

et

$$Xf = \sum_{\alpha, \beta} b_{\alpha\beta} x_\alpha p_\beta.$$

Si nous cherchons à quelle condition l'on a

$$(XY) = 0,$$

on trouve pour Yf la forme

$$Yf = b_{11} x_1 p_1 + b_{22} x_2 p_2 + b_{33} (x_3 p_3 + x_4 p_4) + b_{34} x_3 p_4.$$

Si l'on applique à la transformation Yf ainsi obtenue le changement de variables du n° 4, Yf ne change pas.

De là les trois types de groupes suivants :

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a_1 x_1 p_1 + a_2 x_2 p_2 + a_3 (x_3 p_3 + x_4 p_4) + x_3 p_4, \\ b_1 x_1 p_1 + b_2 x_2 p_2 + b_3 (x_3 p_3 + x_4 p_4) + b_4 x_3 p_4, \end{array} \right.$$

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a_2 x_2 p_2 + a_3 (x_3 p_3 + x_4 p_4) + x_3 p_4, \\ b_2 x_2 p_2 + b_3 (x_3 p_3 + x_4 p_4) + b_4 x_3 p_4, \end{array} \right.$$

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a_1 x_1 p_1 + a_2 x_2 p_2 + x_3 p_4, \\ b_1 x_1 p_1 + b_2 x_2 p_2 + b_4 x_3 p_4. \end{array} \right.$$

29. J'arrive aux transformations (6), (7) et (8) du Chapitre I.

Soient

$$Xf = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 (x_3 p_3 + x_4 p_4)$$

et

$$Yf = \sum_{\alpha,\beta} b_{\alpha\beta} x_\alpha p_\beta.$$

Cherchons à déterminer Yf de manière que l'on ait

$$(XY) = 0,$$

on trouve

$$Yf = b_{11}x_1p_1 + b_{22}x_2p_2 + b_{33}x_3p_3 + b_{44}x_4p_4 + b_{34}x_3p_4 + b_{43}x_4p_3.$$

Faisons le changement de variables indiqué au nº 6.

Alors

$$\begin{aligned} Yf = b_{11}y_1q_1 + b_{22}y_2q_2 + \frac{1}{cf-ed}[& (b_{33}cf - b_{34}cd + b_{43}ef - b_{44}ed)y_3q_3 \\ & +(-b_{33}ce + b_{34}c^2 - b_{43}e^2 + b_{44}ec)y_3q_4 \\ & +(b_{33}df - b_{34}d^2 + b_{43}f^2 - b_{44}fd)y_4q_3 \\ & +(-b_{33}de + b_{34}cd - b_{43}ef + b_{44}fc)y_4q_4]. \end{aligned}$$

Ici deux cas sont à distinguer :

Supposons d'abord

$$(b_{33} - b_{44})^2 + 4b_{43}b_{34} \neq 0,$$

alors on pourra poser

$$b_{34}c^2 + (b_{44} - b_{33})ce - b_{43}e^2 = 0,$$
$$b_{34}d^2 + (b_{44} - b_{33})df - b_{43}f^2 = 0$$

et satisfaire à ces équations simultanément, sans que $cf - de$ soit nul.

On trouve alors la forme réduite

$$\begin{cases} a_1x_1p_1 + a_2x_2p_2 + a_3(x_3p_3 + x_4p_4), \\ b_1x_1p_1 + b_2x_2p_2 + b_3x_3p_3 + b_4x_4p_4, \qquad b_3 \neq b_4, \end{cases}$$

nous sommes ramenés aux types (1) et (2) déjà obtenus.

Mais soit maintenant

$$(b_{44} - b_{33})^2 + 4b_{34}b_{43} = 0.$$

Supposons d'abord

$$b_{43} = b_{34} = 0,$$

et, par suite,

$$b_{33} = b_{44}.$$

On trouve les groupes

(6) $$\begin{cases} a_1x_1p_1 + a_2x_2p_2 + a_3(x_3p_3 + x_4p_4), \\ b_1x_1p_1 + b_2x_2p_2 + b_3(x_3p_3 + x_4p_4), \end{cases}$$

(7) $$[x_2p_2,\ x_3p_3 + x_4p_4],$$

(8) $$[x_1p_1,\ x_2p_2].$$

Supposons que b_{43} et b_{34} ne sont pas nuls tous les deux. Soit, par exemple,

$$b_{43} \neq 0.$$

Posons

$$b_{34} d^2 + (b_{44} - b_{33}) df - b_{43} f^2 = 0,$$

alors, dans Yf, le coefficient de $y_4 q_3$ est nul. On peut donc reprendre le calcul au début en supposant $b_{43} = 0$ et $b_{33} = b_{44}$. Si l'on veut qu'en effectuant sur Yf le changement de variables du n° 6, le terme en $y_4 q_3$ ne réapparaisse pas, il faut supposer $d = 0$ (d'où $cf \neq 0$). Alors

$$Yf = b_{11} y_1 q_1 + b_{22} y_2 q_2 + b_{33}(y_3 q_3 + y_4 q_4) + b_{34} \frac{c}{f} y_3 q_4.$$

Si $b_{34} \neq 0$, on retrouve l'un des types (3), (4), (5) (n° 28). Sinon, nous retombons sur les groupes (6), (7), (8) trouvés tout à l'heure.

30. J'arrive à l'examen des transformations (9) et (10) du Chapitre I.

Soit

$$Xf = a_1(x_1 p_1 + x_2 p_2) + a_2(x_3 p_3 + x_4 p_4) + x_1 p_2 + x_3 p_4$$

et

$$Yf = \sum_{\alpha, \beta} b_{\alpha\beta} x_\alpha p_\beta.$$

Déterminons Yf de façon que l'on ait

$$(XY) = 0,$$

on trouve

$$Xf = b_{11}(x_1 p_1 + x_2 p_2) + b_{33}(x_3 p_3 + x_4 p_4) + b_{12} x_1 p_2 + b_{34} x_3 p_4.$$

Le changement de variable du n° 8 reproduit Yf. Il n'y a donc pas de réduction possible, et l'on trouve les deux types suivants :

$$(9) \quad \begin{cases} a_1(x_1 p_1 + x_2 p_2) + a_2(x_3 p_3 + x_4 p_4) + x_1 p_2 + x_3 p_4, \\ b_1(x_1 p_1 + x_2 p_2) + b_2(x_3 p_3 + x_4 p_4) + b_3 x_1 p_2 + b_4 x_3 p_4, \end{cases}$$

$$(10) \quad \begin{cases} a_2(x_3 p_3 + x_4 p_4) + x_1 p_2 + x_3 p_4, \\ b_2(x_3 p_3 + x_4 p_4) + b_3 x_1 p_2 + b_4 x_3 p_4. \end{cases}$$

31. Prenons maintenant les transformations (11), (12) et (13).

Soit

$$Xf = a_1(x_1 p_1 + x_2 p_2) + a_2(x_3 p_3 + x_4 p_4) + x_1 p_2.$$

Déterminons

$$Yf = \sum_{\alpha, \beta} b_{\alpha\beta} x_\alpha p_\beta,$$

de façon que l'on ait

$$(XY) = 0,$$

on trouve

$$Yf = b_{11}(x_1p_1 + x_2p_2) + b_{33}x_3p_3 + b_{44}x_4p_4 + b_{12}x_1p_2 + b_{34}x_3p_4 + b_{43}x_4p_3.$$

Si nous effectuons sur Yf le changement de variables du n° 10, on trouve

$$\begin{aligned} Yf = b_{11}(y_1q_1 + y_2q_2) & \\ + b_{12}y_1q_2 + \frac{1}{cf - ed}[& (\ b_{33}cf - b_{34}cd + b_{43}ef - b_{44}ed)y_3q_3 \\ & + (-b_{33}ce + b_{34}c^2 - b_{43}e^2 + b_{44}ec)y_3q_4 \\ & + (\ b_{33}df - b_{34}d^2 + b_{43}f^2 - b_{44}fd)y_4q_3 \\ & + (-b_{33}de + b_{34}dc - b_{43}ef + b_{44}fc)y_4q_4]. \end{aligned}$$

Si l'on a

$$(b_{44} - b_{33})^2 + 4b_{34}b_{43} \neq 0,$$

on peut alors poser simultanément

$$b_{34}c^2 + (b_{44} - b_{33})ce - b_{43}e^2 = 0,$$
$$b_{34}d^2 + (b_{44} - b_{33})df - b_{43}f^2 = 0$$

et satisfaire à ces deux équations sans que $cf - ed$ soit nul.

On trouve alors les groupes

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1(x_1p_1 + x_2p_2) + a_2(x_3p_3 + x_4p_4) \ + x_1p_2, \\ b_1(x_1p_1 + x_2p_2) + b_2x_3p_3 \ + b_3x_4p_4 + b_4x_1p_2. \end{array} \right.$$

On retombe donc sur les types (3), (4) et (5).

Soit maintenant

$$(b_{44} - b_{33})^2 + 4b_{43}b_{34} = 0;$$

si

$$b_{43} = b_{34} = 0,$$

d'où

$$b_{33} = b_{44} = 0,$$

on obtient les groupes suivants :

(11) $\left\{ \begin{array}{l} a_1(x_1p_1 + x_2p_2) + a_2(x_3p_3 + x_4p_4) + x_1p_2, \\ b_1(x_1p_1 + x_2p_2) + b_2(x_3p_3 + x_4p_4) + b_3x_1p_2, \end{array} \right.$

(12) $[x_1p_1 + x_2p_2,\ x_1p_2]$,

(13) $[x_3p_3 + x_4p_4,\ x_1p_2]$.

Si l'on suppose que b_{43} ou b_{34} soit différent de zéro, par un raisonnement analogue à celui qui a été fait à la fin du n° 29, on démontre que l'on retombe sur les types (9) et (10).

32. Je passe aux transformations (14) et (15).

Soit

$$Xf = a_1(x_1p_1 + x_2p_2) + a_2(x_3p_3 + x_4p_4).$$

Déterminons

$$Yf = \sum_{\alpha,\beta} b_{\alpha\beta}x_\alpha p_\beta$$

de façon que l'on ait

$$(XY) = 0,$$

alors

$$\begin{aligned} Yf = \quad & b_{11}x_1p_1 + b_{12}x_1p_2 + b_{21}x_2p_1 + b_{22}x_2p_2 \\ & + b_{33}x_3p_3 + b_{34}x_3p_4 + b_{43}x_4p_3 + b_{44}x_4p_4. \end{aligned}$$

Nous avons ici à utiliser le changement de variables indiqué au n° 12. Les résultats qu'il donnera se voient sans difficulté.

On trouvera d'abord les groupes

$$\begin{cases} a_1(x_1p_1 + x_2p_2) + a_2(x_3p_3 + x_4p_4), \\ b_1x_1p_1 + b_2x_2p_2 + b_3x_3p_3 + b_4x_4p_4, \end{cases}$$

avec

$$(b_1 - b_2)(b_3 - b_4) \neq 0,$$

ce qui nous ramène aux types (1) et (2).

Puis les groupes

$$\begin{cases} a_1(x_1p_1 + x_2p_2) + a_2(x_3p_3 + x_4p_4), \\ b_1x_1p_1 + b_2x_2p_2 + b_3(x_3p_3 + x_4p_4) + b_4x_3p_4 \qquad (b_1 - b_2 \neq 0), \end{cases}$$

c'est-à-dire les types (3), (4) et (5), si $b_4 \neq 0$ et, si $b_4 = 0$, les types (6), (7) et (8).

Enfin les groupes

$$\begin{cases} a_1(x_1p_1 + x_2p_2) + a_2(x_3p_3 + x_4p_4), \\ b_1(x_1p_1 + x_2p_2) + b_2(x_3p_3 + x_4p_4) + b_3x_1p_2 + b_4x_3p_4, \end{cases}$$

si l'on a $b_3b_4 \neq 0$, on trouve les types (9) et (10).

Si l'un des deux nombres b_3, b_4 est nul, mais non pas l'autre, on retombe sur les types (11), (12) et (13).

Reste enfin le cas où $b_3 = b_4 = 0$. On trouve alors le type nouveau

$$(14) \qquad [x_1p_1 + x_2p_2,\ x_3p_3 + x_4p_4].$$

33. Je passe aux transformations (16), (17) et (18) du Chapitre I.
Soit

$$Xf = a_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3) + a_2x_4p_4 + x_1p_2 + 2x_2p_3.$$

Déterminons

$$Yf = \sum_{\alpha,\beta} b_{\alpha\beta}x_\alpha p_\beta$$

par la condition que l'on ait

$$(XY) = 0,$$

on trouve

$$Yf = b_{11}(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3) + b_{44}x_4p_4 + b_{12}(x_1p_2 + 2x_2p_3) + b_{13}x_1p_3.$$

J'applique à Yf le changement de variables du nº 14. Je constate que ce changement de variables laisse la forme Yf inaltérée. On a donc les trois groupes suivants :

$$(15)\quad \begin{cases} a_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3) + a_2x_4p_4 + x_1p_2 + 2x_2p_3, \\ b_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3) + b_2x_4p_4 + b_3(x_1p_2 + 2x_2p_3) + b_4x_1p_3, \end{cases}$$

$$(16)\quad \begin{cases} a_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3) + x_1p_2 + 2x_2p_3, \\ b_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3) + b_3(x_1p_2 + 2x_2p_3) + b_4x_1p_3, \end{cases}$$

$$(17)\quad \begin{cases} a_2x_4p_4 \quad + x_1p_2 + 2x_2p_3, \\ b_2x_4p_4 \quad + b_3(x_1p_2 + 2x_2p_3) + b_4x_1p_3. \end{cases}$$

On a, en outre, les trois groupes que voici :

$$(15')\quad \begin{cases} a_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3) + a_2x_4p_4 + x_1p_2 + 2x_2p_3, \\ b_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3) + b_2x_4p_4 + b_3(x_1p_2 + 2x_2p_3), \end{cases}$$

$$(16')\quad [x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3,\ x_1p_2 + 2x_2p_3],$$

$$(17')\quad [x_4p_4,\ x_1p_2 + 2x_2p_3].$$

34. Examinons, maintenant, les transformations (19), (20) et (21).
Soit

$$Xf = a_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3) + a_2x_4p_4 + x_2p_3.$$

Si l'on cherche à déterminer Yf de façon que

$$(XY) = 0,$$

on trouve

$$Yf = b_{11}x_1p_1 + b_{22}(x_2p_2 + x_3p_3) + b_{44}x_4p_4 + b_{13}x_1p_3 + b_{21}x_2p_1 + b_{23}x_2p_3.$$

Appliquons alors à Yf le changement de variables du n° 16. Alors

$$Yf = b_{11}y_1q_1 + b_{22}(y_2q_2 + y_3q_3) + b_{44}y_4q_4 + \left[(b_{22} - b_{11})\frac{d}{c} + b_{13}\frac{a}{c}\right]y_1q_3 + \left[(b_{11} - b_{22})\frac{b}{a} + b_{21}\frac{c}{a}\right]y_2q_1 + \left[(b_{22} - b_{11})\frac{bd}{ca} + b_{13}\frac{b}{c} - b_{21}\frac{d}{a} + b_{23}\right]y_2q_3.$$

Supposons d'abord $b_{11} \neq b_{22}$; alors, on pourra poser

$$d(b_{11} - b_{22}) = b_{13}a, \qquad b(b_{22} - b_{11}) = b_{21}c,$$

alors on trouve

$$\left\{\begin{array}{l} a_1(x_1p_1 + x_2p_2 \quad + x_3p_3) + a_2x_4p_4 + x_2p_3, \\ b_1x_1p_1 \quad + b_2(x_2p_2 + x_3p_3) + b_3x_4p_4 + b_4x_2p_3. \end{array}\right.$$

Nous retombons sur les types (3), (4) et (5).

Soit, maintenant,

$$b_{11} = b_{22}.$$

Alors

$$Yf = b_{11}(y_1q_1 + y_2q_2 + y_3q_3) + b_{44}y_4q_4 + b_{13}\frac{a}{c}y_1q_3 + b_{21}\frac{c}{a}y_2q_1 + \left(b_{13}\frac{b}{c} - b_{21}\frac{d}{a} + b_{23}\right)y_2q_3;$$

si $b_{13}b_{21} \neq 0$, on peut poser

$$b_{13}\frac{a}{c} = 2\,b_{21}\frac{c}{a},$$

d'où le groupe

$$\left\{\begin{array}{l} a_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3) + a_2x_4p_4 + x_2p_3, \\ b_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3) + b_2x_4p_4 + b_3x_2p_3 + b_4(2x_1p_3 + x_2p_1), \end{array}\right.$$

c'est l'un des types (15), (16) ou (17).

Si $b_{13} = 0$, $b_{21} \neq 0$, on aura les groupes

$$(18) \qquad \left\{\begin{array}{l} a_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3) + a_2x_4p_4 + x_2p_3, \\ b_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3) + b_2x_4p_4 + b_3x_2p_3 + b_4x_2p_1, \end{array}\right.$$

$$(19) \qquad \left\{\begin{array}{l} a_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3) + x_2p_3, \\ b_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3) + b_3x_2p_3 + b_4x_2p_1, \end{array}\right.$$

$$(20) \qquad \left\{\begin{array}{l} a_2x_4p_4 \quad + x_2p_3, \\ b_2x_4p_4 \quad + b_3x_2p_3 + b_4x_2p_1. \end{array}\right.$$

Si, au contraire, on a $b_{13} \neq 0$, $b_{21} = 0$, on a les groupes

(21) $$\begin{cases} a_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3) + a_2x_4p_4 + x_2p_3, \\ b_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3) + b_2x_4p_4 + b_3x_2p_3 + b_4x_1p_3, \end{cases}$$

(22) $$\begin{cases} a_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3) + x_2p_3, \\ b_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3) + b_3x_2p_3 + b_4x_1p_3, \end{cases}$$

(23) $$\begin{cases} a_2x_4p_4 + x_2p_3, \\ b_2x_4p_4 + b_3x_2p_3 + b_4x_1p_3. \end{cases}$$

Enfin, si $b_{13} = b_{21} = 0$, on a les groupes

(24) $$\begin{cases} a_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3) + a_2x_4p_4 + x_2p_3, \\ b_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3) + b_2x_4p_4 + b_3x_2p_3, \end{cases}$$

(25) $$[x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3,\ x_2p_3],$$

(26) $$[x_4p_4,\ x_2p_3].$$

35. Je passe aux transformations (22), (23) et (24) du Chapitre I.

Soit
$$Xf = a_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3) + a_4x_4p_4.$$

Déterminons
$$Yf = \sum_{\alpha,\beta} b_{\alpha\beta}x_\alpha p_\beta$$

de façon que l'on ait
$$(XY) = 0,$$

on trouve
$$\begin{aligned} Xf = \ & b_{11}x_1p_1 + b_{12}x_1p_2 + b_{13}x_1p_3 \\ & + b_{21}x_2p_1 + b_{22}x_2p_2 + b_{23}x_2p_3 \\ & + b_{31}x_3p_1 + b_{32}x_3p_2 + b_{33}x_3p_3 + b_{44}x_4p_4. \end{aligned}$$

D'après le changement de variables indiqué au n° 18, nous pouvons énumérer les cas suivants :

Soit
$$B(\sigma) = \begin{vmatrix} b_{11} - \sigma & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} - \sigma & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} - \sigma \end{vmatrix}.$$

Le premier cas est celui où $B(\sigma)$ a trois zéros simples.

On a le groupe
$$\begin{cases} a_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3) + a_2x_4p_4, \\ b_1x_1p_1 + b_2x_2p_2 + b_3x_3p_3 + b_4x_4p_4 \end{cases}$$

avec
$$(b_1 - b_2)(b_1 - b_3)(b_2 - b_3) \neq 0.$$

Nous obtenons ainsi les types (1) et (2).

Si $B(\sigma)$ admet un zéro double, on aura la forme canonique

$$\begin{cases} a_1(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3)+a_2x_4p_4, \\ b_1x_1p_1+b_2(x_2p_2+x_3p_3)+b_3x_4p_4+b_4x_2p_3. \end{cases}$$

Si l'on a $b_4 \not\equiv 0$, cela donne les types (**3**), (**4**) et (**5**) et, si $b_4=0$, les types (**6**), (**7**) et (**8**).

Enfin, supposons que $B(\sigma)$ admette un zéro triple.

On a les types que voici :

(**27**)
$$\begin{cases} a_1(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3)+a_2x_4p_4, \\ b_1(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3)+b_2x_4p_4+b_3(x_1p_2+2x_2p_3); \end{cases}$$

(**28**)
$$[x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3,\ x_1p_2+2x_2p_3],$$

(**29**)
$$[x_4p_4,\ x_1p_2+2x_2p_3].$$

Ce sont les types (**15'**), (**16'**), (**17'**) trouvés au n° 33.

Si la racine triple annule tous les premiers mineurs de $B(\sigma)$, on retrouve les types (**24**), (**25**) et (**26**). Enfin, si la racine triple annule tous les deuxièmes mineurs de $B(\sigma)$, on a le groupe

(**30**)
$$[x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3,\ x_4p_4].$$

36. Examinons, maintenant, les transformations (**25**) et (**26**) du Chapitre I. Soit

$$Xf = a_1(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4)+x_1p_2+2x_2p_3+3x_3p_4.$$

Déterminons

$$Yf = \sum_{\alpha,\beta} b_{\alpha\beta}x_\alpha p_\beta,$$

de façon que

$$(XY)=0.$$

Alors

$$\begin{aligned} Yf = {} & b_{11}(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4) \\ & + b_{13}(x_1p_3+3x_2p_4)+b_{12}(x_1p_2+2x_2p_3+3x_3p_4)+b_{14}x_1p_4. \end{aligned}$$

Le changement de variables du n° 20 laisse cette forme inaltérée, de sorte que l'on a les deux groupes suivants :

(**31**)
$$\begin{cases} a_1(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4)+x_1p_2+2x_2p_3+3x_3p_4, \\ b_1(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4) \\ \quad +b_2(x_1p_2+2x_2p_3+3x_3p_4)+b_3(x_1p_3+3x_2p_4)+b_4x_1p_4 \end{cases}$$

et

$$(32)\qquad \begin{cases} x_1p_2+2x_2p_3+3x_3p_4, \\ b_3(x_1p_3+3x_2p_4)+b_4x_1p_4, \end{cases}$$

puis les groupes

$$(31')\qquad \begin{cases} a_1(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4)+a_2(x_1p_2+2x_2p_3+3x_3p_4)+a_3(x_1p_3+3x_2p_4), \\ b_1(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4)+b_2(x_1p_2+2x_2p_3+3x_3p_4)+b_3(x_1p_3+3x_2p_4), \end{cases}$$

$$(32')\qquad [x_1p_2+2x_2p_3+3x_3p_4,\ x_1p_3+2x_2p_4],$$

$$(31'')\qquad \begin{cases} a_1(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4)+a_2(x_1p_2+2x_2p_3+3x_3p_4)+a_3x_1p_4, \\ b_1(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4)+b_2(x_1p_2+2x_2p_3+3x_3p_4)+b_3x_1p_4, \end{cases}$$

$$(32'')\qquad [x_1p_2+2x_2p_3+3x_3p_4,\ x_1p_4];$$

enfin,

$$(32''')\qquad [x_1p_2+2x_2p_3+3x_3p_4,\ x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4].$$

37. J'arrive aux transformations (27) et (28) du Chapitre I.

Soit

$$Xf = a_1(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4)+x_1p_2+2x_2p_3.$$

Déterminons

$$Yf = \sum_{\alpha,\beta} b_{\alpha\beta}x_\alpha p_\beta,$$

de façon que

$$(XY)=0.$$

On trouve

$$\begin{aligned} Yf = {} & b_{11}(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3) \\ & + b_{44}x_4p_4+b_{12}(x_1p_2+2x_2p_3)+b_{13}x_1p_3+b_{14}x_1p_4+b_{43}x_4p_3. \end{aligned}$$

Appliquons à Yf le changement de variables du n° 22.

Il vient

$$\begin{aligned} Yf = {} & b_{11}(y_1q_1+y_2q_2+y_3q_3)+b_{44}y_4q_4+b_{12}(y_1q_2+2y_2q_3) \\ & + \left[(b_{11}-b_{44})\frac{de}{af}-b_{14}\frac{d}{f}+b_{43}\frac{e}{a}+b_{13}\right]y_1q_3 \\ & + \left[(b_{44}-b_{11})\frac{e}{f}+b_{14}\frac{a}{f}\right]y_1q_4+\left[(b_{11}-b_{44})\frac{d}{a}+e_{43}\frac{f}{a}\right]y_4q_3. \end{aligned}$$

Supposons d'abord

$$b_{11}\neq b_{44}.$$

On pourra poser

$$(b_{44}-b_{11})d = b_{43}f,$$
$$(b_{11}-b_{44})e = b_{14}a.$$

On aurait les groupes

$$\left\{\begin{array}{l} a_1(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4)+x_1p_2+2x_2p_3, \\ b_1(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3)+b_2x_4p_4+b_3(x_1p_2+2x_2p_3)+b_4x_1p_3, \qquad b_1-b_2\neq 0. \end{array}\right.$$

Ce sont les groupes (**15**), (**16**) et (**17**), si $b\neq 0$.

Si $b_4=0$, cela donne les groupes (**27**), (**28**) et (**29**).

Supposons maintenant

$$b_{44}=b_{11}.$$

Alors

$$\begin{aligned} Yf = b_{11}(y_1q_1+y_2q_2+y_3q_3+y_4q_4)+b_{12}(y_1q_2+2y_2q_3) \\ +\left(b_{13}+b_{43}\frac{e}{a}-b_{14}\frac{d}{f}\right)y_1q_3+b_{14}\frac{a}{f}y_1q_4+b_{43}\frac{f}{a}y_1q_3. \end{aligned}$$

Si $b_{43}b_{14}\neq 0$, on peut poser

$$b_{13}+b_{43}\frac{e}{a}-b_{14}\frac{d}{f}=0;$$

puis, par exemple,

$$b_{14}\frac{a}{f}=b_{43}\frac{f}{a};$$

d'où les groupes

$$(33)\qquad \left\{\begin{array}{l} a_1(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4)+x_1p_2+2x_2p_3, \\ b_1(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4)+x_1p_4+x_4p_3; \end{array}\right.$$

$$(34)\qquad [x_1p_2+2x_2p_3,\ x_1p_4+x_4p_3].$$

Si $b_{43}\neq 0$, $b_{14}=0$, on fera

$$b_{14}d=b_{13}f,$$

ce qui déterminera d; d'où le groupe

$$(35)\qquad \left\{\begin{array}{l} a_1(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4)+x_1p_2+2x_2p_3, \\ b_1(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4)+x_4p_3, \end{array}\right.$$

et le groupe

$$(36)\qquad [x_1p_2+2x_2p_3,\ x_4p_3].$$

Supposons

$$b_{43}=0, \qquad b_{14}\neq 0.$$

On fera

$$b_{43}e=-ab_{13};$$

d'où les groupes

$$(37)\qquad \left\{\begin{array}{l} a_1(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4)+x_1p_2+2x_2p_3, \\ b_1(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4)+x_1p_4 \end{array}\right.$$

et

(38) $$[x_1p_2 + 2x_2p_3, \; x_1p_4].$$

Enfin, si $b_{14} = b_{43} = 0$, on aura les groupes

(39) $$\begin{cases} a_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4) + x_1p_2 + 2x_2p_3, \\ b_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4) + b_2x_1p_3; \end{cases}$$

(40) $$[x_1p_2 + 2x_2p_3, \; x_1p_3].$$

38. Examinons maintenant les transformations (29) et (30) du Chapitre I. Soit

$$Xf = a_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4) + x_1p_2 + x_3p_4.$$

Déterminons

$$Yf = \sum_{\alpha,\beta} b_{\alpha\beta}x_\alpha p_\beta,$$

de façon que l'on ait

$$(XY) = 0.$$

On trouve

$$\begin{aligned} Yf = \; & b_{11}(x_1p_1 + x_2p_2) + b_{33}(x_3p_3 + x_4p_4) \\ & + b_{13}(x_1p_3 + x_2p_4) + b_{31}(x_3p_1 + x_4p_2) + b_{12}x_1p_2 + b_{14}x_1p_4 + b_{32}x_3p_2 + b_{34}x_3p_4. \end{aligned}$$

Effectuons sur Yf le changement de variables du n° 23.

Supposons que l'on ait

$$(b_{33} - b_{11})^2 + 4b_{13}b_{31} \neq 0.$$

On pourra alors poser

$$b_{13}a^2 + (b_{33} - b_{11})ae - b_{31}e^2 = 0,$$
$$b_{13}b^2 + (b_{33} - b_{11})bf - b_{31}f^2 = 0$$

et cela avec l'hypothèse

$$af - be = \Delta \neq 0.$$

Cela revient à supposer que dans Yf on fait $b_{13} = b_{31} = 0$. Nous voulons, en outre, que, si l'on fait sur Yf le changement de variables du n° 23 (ou un cas particulier de ce changement de variables), les termes en $y_1q_3, y_2q_4, y_3q_1, y_4q_2$ ne réapparaissent pas. Comme on suppose

$$(b_{33} - b_{11})^2 + 4b_{13}b_{31} \neq 0,$$

cela revient à dire ici, si $b_{13} = b_{31} = 0$, que l'on a

$$b_{33} \neq b_{11}.$$

On pourra, par exemple, dans le changement de variables, faire $b=e=0$, $af\neq 0$, puis déterminer g et d par les équations

$$(b_{11}-b_{33})g=b_{14}a,$$
$$(b_{11}-b_{33})d=-b_{32}f.$$

On trouve alors le groupe

$$\begin{cases} a_1(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4)+x_1p_2+x_3p_4, \\ b_1(x_1p_1+x_2p_2)+b_2(x_3p_3+x_4p_4)+b_3x_1p_2+b_4x_3p_4, \end{cases}$$

ce qui redonne les types (**9**) et (**10**).

Supposons, maintenant,

$$(b_{33}-b_{11})^2+4b_{13}b_{31}=0.$$

Nous pourrons, par exemple, supposer $b_{13}=0$; de plus, nous aurons

$$b_{33}=b_{11}.$$

Si nous voulons appliquer le changement de variables du n° 23, de façon que le terme $b_{13}(y_1q_3+y_2q_4)$ ne réapparaisse pas, il faut supposer que l'on a

$$e=0, \qquad af\neq 0.$$

En écrivant que le terme en y_1q_2 a le même coefficient que le terme en y_3q_4, on trouve

$$2b_{31}\frac{g}{a}=2b_{14}\frac{b}{f}+b_{34}-b_{12}-b_{32}\frac{f}{a},$$

équation qui déterminera g si l'on a

$$b_{31}\neq 0.$$

Alors, à cause de la présence de la transformation Xf dans notre groupe, on pourra, dans Yf, supposer nul le coefficient commun des termes en y_1q_2 et y_3q_4.

On pourra, en outre, écrire que le coefficient de y_3q_2 est nul (il suffira de faire $b=0$).

On a alors les deux groupes

(**41**) $$\begin{cases} a_1(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4)+x_1p_2+x_3p_4, \\ b_1(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4)+x_3p_1+x_4p_2+b_2x_1p_4; \end{cases}$$

(**42**) $$\begin{cases} x_1p_2+x_3p_4, \\ x_3p_1+x_4p_2+b_2x_1p_4, \end{cases}$$

puis les deux groupes

$$(41') \quad \begin{cases} a_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4) + a_2(x_1p_2 + x_3p_4) + a_3(x_1p_3 + x_2p_4), \\ b_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4) + b_2(x_1p_2 + x_3p_4) + b_3(x_1p_3 + x_2p_4) \end{cases}$$

et

$$(42') \qquad [x_1p_2 + x_3p_4, \; x_1p_3 + x_2p_4].$$

Nous avons, dans ce qui précède, supposé $b_{31} \neq 0$. Soit maintenant $b_{31} = 0$. Alors les termes en $y_1q_3 + y_2q_4$, $y_3q_1 + y_4q_2$ ont des coefficients nuls.

On peut encore égaler les coefficients de y_1q_2 et y_3q_4. Si l'on a $b_{14} \neq 0$, l'équation obtenue,

$$2b_{14}\frac{b}{f} = b_{12} - b_{14} + b_{32}\frac{f}{a},$$

déterminera b.

Alors, à cause de la présence de Xf, on peut, dans Yf, supposer nul le coefficient commun aux termes en y_1q_2, y_3q_4, et l'on a les groupes

$$(43) \qquad \begin{cases} a_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4) + x_1p_2 + x_3p_4, \\ b_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4) + b_2x_1p_4 + b_3x_3p_2; \end{cases}$$

$$(44) \qquad [x_1p_2 + x_3p_4, \; b_2x_1p_4 + b_3x_3p_2];$$

enfin le groupe

$$(45) \qquad [x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4, \; x_1p_2 + x_3p_4].$$

39. J'arrive aux transformations (31) et (32) du Chapitre I.

Soit

$$Xf = a_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4) + x_1p_2.$$

Déterminons

$$Yf = \sum_{\alpha,\beta} b_{\alpha\beta}x_\alpha p_\beta,$$

de manière que l'on ait

$$(XY) = 0.$$

Il vient

$$\begin{aligned} Yf = {} & b_{11}(x_1p_1 + x_2p_2) + b_{33}x_3p_3 + b_{44}x_4p_4 \\ & + b_{12}x_1p_2 + b_{13}x_1p_3 + b_{14}x_1p_4 + b_{32}x_3p_2 + b_{34}x_3p_4 + b_{42}x_4p_2 + b_{43}x_4p_3. \end{aligned}$$

Nous effectuons sur Yf le changement de variables du n° 25.

Nous allons d'abord supposer que l'on a

$$(b_{44} - b_{33})^2 + 4b_{34}b_{43} \neq 0.$$

Alors on pourra poser simultanément

$$b_{34}f^2 + (b_{44} - b_{33})if - b_{43}i^2 = 0,$$
$$b_{34}g^2 + (b_{44} - b_{33})gj - b_{43}j^2 = 0,$$

et supposer en même temps

$$fj - gi \neq 0.$$

Ainsi on peut supposer nuls b_{34} et b_{43}, et en même temps $b_{33} \neq b_{44}$. Pour que les coefficients b_{34} et b_{43} ne réapparaissent pas lorsque l'on effectuera sur Yf le changement de variables, on fera, par exemple,

$$g = i = 0.$$

Supposons $b_{33} - b_{11} \neq 0$, $b_{44} - b_{11} \neq 0$, faisons

$$e = \frac{b_{13}a}{b_{11} - b_{33}}, \qquad h = \frac{b_{14}a}{b_{11} - b_{44}}, \qquad c = \frac{b_{32}f}{b_{33} - b_{11}}, \qquad d = \frac{b_{42}j}{b_{44} - b_{11}}.$$

Remarquons enfin qu'à cause de la présence de Xf on peut supposer que le coefficient de $y_1 q_2$ dans Yf est nul. Il vient

$$\begin{cases} a_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4) + x_1p_2, \\ b_1(x_1p_1 + x_2p_2) + b_2x_3p_3 + b_3x_4p_4, \qquad (b_1 - b_2)(b_1 - b_3)(b_2 - b_3) \neq 0. \end{cases}$$

On retrouve les types (**3**), (**4**) et (**5**).

Si l'on suppose $b_{33} = b_{11}$, alors on a nécessairement

$$b_{44} \neq b_{11};$$

puisque, par hypothèse, on a

$$b_{33} \neq b_{44}.$$

On pourra toujours poser

$$h = \frac{b_{14}a}{b_{11} - b_{44}}, \qquad d = \frac{b_{42}j}{b_{44} - b_{11}}.$$

Si $b_{13}b_{32} \neq 0$, on fera

$$b_{13}\frac{a}{f} = b_{32}\frac{f}{a};$$

on a alors les groupes

$$a_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4) + x_1p_2,$$
$$b_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3) + b_2x_4p_4 + b_3(x_1p_3 + x_3p_2).$$

On retrouve alors les types (**15**), (**16**) et (**17**), etc.

Soit maintenant

$$(b_{44} - b_{33})^2 + 4b_{43}b_{34} = 0,$$

on pourra toujours poser

$$b_{34}g^2 + (b_{44} - b_{33})gj - b_{43}j^2 = 0.$$

Cela revient à supposer $b_{43} = 0$ dans Yf. Alors on a, en même temps,

$$b_{44} = b_{33}.$$

Pour que le coefficient de $y_4 q_3$ ne réapparaisse pas dans la transformée de Yf, il faudra supposer $g = 0$.

Si $b_{33} \neq b_{11}$, on fera

$$e = \frac{b_{13}a}{b_{11} - b_{33}},$$

puis

$$hf - ie = \frac{b_{13}ia - b_{14}af - b_{34}ef}{b_{33} - b_{11}},$$

ce qui déterminera h. Ensuite,

$$c(b_{11} - b_{33}) + b_{32}f + b_{42}i - b_{34}\frac{fd}{j} = 0$$

déterminera c et

$$(b_{11} - b_{33})d + b_{42}j = 0$$

déterminera d.

On trouve ainsi

$$\begin{cases} a_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4) + x_1p_2, \\ b_1(x_1p_1 + x_2p_2) + b_2(x_3p_3 + x_4p_4) + b_3x_3p_4, \qquad b_1 - b_2 \neq 0. \end{cases}$$

Ce sont les types (9) et (10).

Si $b_3 = 0$, on retombe aussi sur des types déjà obtenus.

Revenons sur l'hypothèse $b_{33} \neq b_{11}$. Soit $b_{33} = b_{11}$.

Si $b_{34} \neq 0$, on déterminera e et d par les équations

$$b_{34}ef = b_{13}ia - b_{14}af,$$
$$b_{34}\frac{fd}{j} = b_{32}f + e_{42}i.$$

Quelles que soient les hypothèses faites, on retrouve des types déjà obtenus.

Soit alors $b_{34} = 0$; voici les groupes que l'on obtient :

(46) $$\begin{cases} a_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4) + a_2x_1p_3 + a_3x_2p_3, \\ b_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4) + b_2x_1p_3 + b_3x_2p_3; \end{cases}$$

(47) $$[x_1p_3,\ x_2p_3]$$

et

$$(48)\quad \begin{cases} a_1(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4)+a_2x_1p_2+a_3x_1p_3, \\ b_1(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4)+b_2x_1p_2+b_3x_1p_3; \end{cases}$$

$$(49)\quad [x_1p_2,\ x_1p_3];$$

$$(50)\quad [x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4,\ x_1p_2].$$

40. Reste la transformation $x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4$.

En l'adjoignant successivement aux 33 types de groupes de première espèce, nous aurons autant de groupes de deuxième espèce à transformations toutes échangeables :

$$(a_1x_1p_1+a_2x_2p_2+a_3x_3p_3+a_4x_4a_4,\ x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4)$$

rentre dans le type (**1**), même si $a_1=0$.

$$[a_1x_1p_1+a_2x_2p_2+a_3(x_3p_3+x_4p_4)+x_3p_4,\ x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4]$$

rentre dans le type (**3**), même si $a_1=0$ ou si $a_3=0$.

$$[a_1x_1p_1+a_2x_2p_2+a_3(x_3p_3+x_4p_4),\ x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4]$$

rentre dans le type (**6**), même si $a_1=0$ ou si $a_3=0$.

$$[a_1(x_1p_1+x_2p_2)+a_2(x_3p_3+x_4p_4)+x_1p_2+x_3p_4,\ x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4]$$

rentre dans le type (**9**), même si $a_1=0$.

$$[a_1(x_1p_1+x_2p_2)+a_2(x_3p_3+x_4p_4)+x_1p_2,\ x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4]$$

rentre dans le type (**11**), même si $a_1=0$ ou si $a_2=0$.

$$[a_1(x_1p_1+x_2p_2)+a_2(x_3p_3+x_4p_4),\ x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4]$$

rentre dans le type (**14**).

$$[a_1(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3)+a_2x_4p_4+x_1p_2+2x_2p_3,\ x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4]$$

rentre dans le type (**15**), même si $a_1=0$ ou si $a_2=0$.

$$[a_1(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3)+a_2x_4p_4+x_2p_3,\ x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4]$$

rentre dans le type (**18**), même si a_1 ou a_2 est nul.

$$[a_1(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3)+a_2x_4p_4,\ x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4]$$

rentre dans le type (**27**), même si a_1 ou a_2 est nul.

De même,

$$[x_1p_2 + 2x_2p_3 + 3x_3p_4,\ x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4]$$

est du type (31).

$$[x_1p_2 + 2x_2p_3,\ x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4]$$

est du type (39).

$$[x_1p_2 + x_3p_4,\ x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4]$$

est du type (45) et

$$[x_1p_2,\ x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4]$$

est du type (50).

Tous les groupes ainsi obtenus ont donc été déjà énumérés.

CHAPITRE III.

GROUPES DE DEUXIÈME ESPÈCE DONT LES TRANSFORMATIONS NE SONT PAS TOUTES DEUX A DEUX ÉCHANGEABLES.

41. Nous allons maintenant chercher les groupes à deux paramètres, dont les transformations génératrices ne sont pas échangeables.

En appelant Xf, Yf ces transformations génératrices, on a

$$(XY) = \lambda Xf + \mu Yf.$$

Remplaçons Y par $Y - \alpha X$,

$$\begin{aligned}(X, Y - \alpha X) &= (XY)\\ &= \lambda X + \mu Y = \lambda X + \mu(Y - \alpha X) + \mu\alpha X = (\lambda + \mu\alpha)X + \mu(Y - \alpha X).\end{aligned}$$

On pourra donc, si l'on suppose $\mu \neq 0$, disposer de α de façon à avoir

$$\lambda + \mu\alpha = 0.$$

C'est dire qu'on pourra toujours s'arranger, si μ est différent de zéro, de façon à avoir

$$(XY) = \mu Y.$$

Prenons d'abord les groupes (1) et (2) du Chapitre I. On a

$$Xf = a_1x_1p_1 + a_2x_2p_2 + a_3x_3p_3 + a_4x_4p_4,$$

soit

$$Yf = \sum_{\alpha,\beta} b_{\alpha,\beta} x_\alpha p_\beta.$$

Si nous posons

$$(XY) = \lambda Xf + \mu Yf,$$

il vient d'abord

$$b_{\alpha\beta}(a_\alpha - a_\beta - \mu) = 0, \qquad \alpha \neq \beta,$$

puis

$$\lambda a_\alpha + \mu b_{\alpha\alpha} = 0, \qquad \alpha = 1, 2, 3, 4.$$

De ces dernières équations il résulte que, si l'on suppose $\mu = 0$, on en déduirait $\lambda = 0$. On peut donc supposer $\mu \neq 0$, et par suite $\lambda = 0$, d'après la remarque faite au début de cet article; cela revient à dire que l'on a

$$b_{\alpha\alpha} = 0, \qquad \alpha = 1, 2, 3, 4.$$

Dès lors, l'un des coefficients $b_{\alpha\beta}$ ($\alpha \neq \beta$) est différent de zéro. Supposons, pour fixer les idées, $b_{12} \neq 0$. Alors, on a

$$\mu = a_1 - a_2.$$

On en déduit

$$b_{13} = b_{14} = b_{21} = b_{32} = b_{42} = 0,$$

$$\begin{aligned}
&(2a_2 - a_1 - a_3) b_{23} = 0, \qquad &&(a_2 + a_3 - a_1 - a_4) b_{34} = 0,\\
&(2a_2 - a_1 - a_4) b_{24} = 0, \qquad &&(a_4 + a_2 - 2a_1) b_{41} \quad = 0,\\
&(a_2 + a_3 - 2a_1) b_{31} = 0, \qquad &&(a_2 + a_4 - a_1 - a_3) b_{43} = 0.
\end{aligned}$$

Si nous supposons qu'il n'y a aucune relation entre a_1, a_2, a_3, a_4, on en conclut que, sauf b_{12}, tous les autres $b_{\alpha\beta}$ sont nuls. On a donc le groupe

$$\text{(I)} \qquad [a_1 x_1 p_1 + a_2 x_2 p_2 + a_3 x_3 p_3 + a_4 x_4 p_4,\ x_1 p_2].$$

Les équations finies du groupe sont, en posant $\mu_0 = \dfrac{\mu}{\lambda(a_1 - a_2)}[e^{\lambda(a_1 - a_2)} - 1]$,

$$y_1 = x_1 e^{\lambda a_1}, \qquad y_2 = e^{\lambda a_2}(\mu_0 x_1 + x_2), \qquad y_3 = x_3 e^{\lambda a_3}, \qquad y_4 = x_4 e^{\lambda a_4}.$$

42. Je garde les notations du n° **41**.

Je suppose que l'on ait

$$a_1 = 2a_2 - a_3,$$

alors,

$$b_{24} = b_{31} = b_{43} = 0, \qquad (2a_3 - a_2 - a_4) b_{34} = 0,$$
$$(a_4 - 3a_2 + 2a_3) b_{41} = 0,$$

$$Yf = b_{12} x_1 p_2 + b_{23} x_2 p_3,$$

ou, en faisant usage du changement de variables indiqué au n° 2,

$$Yf = b_{12}\frac{a}{b}y_1q_2 + b_{23}\frac{b}{c}y_2q_3.$$

On pourra poser

$$b = ab_{12}, \qquad c = bb_{23} = ab_{12}b_{23}.$$

De là le groupe

(II) $$[(2a_2 - a_3)x_1p_1 + a_2x_2p_2 + a_3x_3p_3 + a_4x_4p_4,\ x_1p_2 + x_2p_3].$$

Les équations finies du groupe (II) sont, en posant $\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda(a_2 - a_3)}[e^{\lambda(a_2 - a_3)} - 1]$,

$$y_1 = x_1e^{\lambda(2a_2 - a_3)}, \qquad y_2 = e^{\lambda a_2}(\mu_0 x_1 + x_2),$$
$$y_3 = e^{\lambda a_3}(\tfrac{1}{2}\mu_0^2x_1 + \mu_0x_2 + x_3), \qquad y_4 = e^{\lambda a_4}x_4.$$

43. Nous gardons les notations du n° 42, je suppose

$$a_2 = 2a_3 - a_4$$

et, par suite,

$$a_1 = 3a_3 - 2a_4.$$

Alors

$$Yf = b_{12}x_1p_2 + b_{23}x_2p_3 + b_{34}x_3p_4 = b_{12}\frac{a}{b}y_1q_2 + b_{23}\frac{b}{c}y_2q_3 + b_{34}\frac{c}{d}y_3q_4;$$

on posera

$$b = ab_{12}, \qquad c = ab_{12}b_{23}, \qquad d = ab_{12}b_{23}b_{34},$$

d'où le groupe

(III) $$\begin{cases} (3a_3 - 2a_4)x_1p_1 + (2a_3 - a_4)x_2p_2 + a_3x_3p_3 + a_4x_4p_4, \\ x_1p_2 + x_2p_3 + x_3p_4. \end{cases}$$

En posant $\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda(a_3 - a_4)}[e^{\lambda(a_3 - a_4)} - 1]$ on a, pour les équations finies du groupe (III),

$$y_1 = x_1e^{\lambda(3a_3 - 2a_4)}, \qquad y_2 = (\mu_0x_1 + x_2)e^{\lambda(2a_3 - a_4)},$$
$$y_3 = (\tfrac{1}{2}\mu_0^2x_1 + \mu_0x_2 + x_3)e^{\lambda a_3}, \qquad y_4 = (\tfrac{1}{6}\mu_0^3x_1 + \tfrac{1}{2}\mu_0^2x_2 + \mu_0x_3 + x_4)e^{\lambda a_4}.$$

44. Je reviens au n° 42; je fais maintenant

$$a_4 = 3a_2 - 2a_3, \qquad a_1 = 2a_2 - a_3.$$

La substitution $(x_1x_2x_3x_4)$ nous ramène le groupe trouvé au groupe (III).

45. Je reviens au n° 41. Je suppose

$$a_2 = 2a_1 - a_3.$$

Alors

$$b_{23} = b_{34} = b_{41} = 0, \qquad (3a_1 - 2a_3 - a_4)b_{24} = 0, \qquad (a_1 + a_4 - 2a_3)b_{43} = 0.$$

Avec l'emploi de la substitution $(x_1 x_2 x_3)$, on retrouve le groupe (II).

46. Je garde les notations du n° 45.

Je fais

$$a_1 = 2a_3 - a_4,$$

d'où

$$a_2 = 3a_3 - 2a_4.$$

Avec l'aide de la substitution $(x_1 x_3 x_2 x_4)$, on retrouve le groupe (III).

47. Je reviens au n° 45.

Je fais

$$a_4 = 3a_1 - 2a_3, \qquad \text{avec} \qquad a_2 = 2a_1 - a_3.$$

La substitution $(x_1 x_2 x_3)$ fait retrouver le groupe (III).

48. Je reviens au n° 41. Soit

$$a_1 = a_2 + a_3 - a_4.$$

Alors

$$b_{24} = b_{43} = 0,$$

$$(a_2 + a_4 - 2a_3)b_{23} = 0, \qquad (2a_4 - a_2 - a_3)b_{31} = 0, \qquad (3a_4 - a_2 - 2a_3)b_{41} = 0,$$

$$\mathrm{Y}f = b_{12}x_1 p_2 + b_{34}x_3 p_4 = b_{12}\frac{a}{b}y_1 q_2 + b_{34}\frac{c}{d}y_3 q_4\,;$$

on posera

$$b = ab_{12}, \qquad d = cb_{34},$$

d'où le groupe

$$\text{(IV)} \qquad \left\{\begin{array}{l} (a_2 + a_3 - a_4)x_1 p_1 + a_2 x_2 p_2 + a_3 x_3 p_3 + a_4 x_4 p_4, \\ x_1 p_2 + x_3 p_4. \end{array}\right.$$

En posant $\mu_0 = \dfrac{\mu}{\lambda(a_3 - a_4)}[e^{\lambda(a_3 - a_4)} - 1]$ on a, pour les équations finies,

$$y_1 = x_1 e^{\lambda(a_2 + a_3 - a_4)}, \qquad y_2 = e^{\lambda a_2}(\mu_0 x_1 + x_2), \qquad y_3 = e^{\lambda a_3}x_3, \qquad y_4 = e^{\lambda a_4}(\mu_0 x_3 + x_4).$$

49. Je garde les notations du n° 48. Je suppose

$$a_2 = 2a_3 - a_4,$$

on a

$$a_1 = 3a_3 - 2a_4,$$

puis

$$b_{31} = b_{41} = 0$$

et l'on retrouve le type (III).

50. Je reviens au n° 48. L'hypothèse $a_2 = 2a_4 - a_3$ étant inadmissible parce qu'elle entraîne $a_1 = a_4$, je fais

$$a_2 = 3a_4 - 2a_3.$$

A l'aide de la substitution $(x_1 x_2)(x_3 x_4)$, on retrouve le groupe (III).

51. Considérons maintenant la transformation

$$Xf = a_1 x_1 p_1 + a_2 x_2 p_2 + a_3 x_3 p_3.$$

Comme l'hypothèse

$$(XY) = \lambda X + \mu Y,$$

où

$$Y = \sum_{\alpha, \beta} (b_{\alpha,\beta} x_\alpha p_\beta),$$

entraîne, par exemple, la condition

$$\lambda a_1 + \mu b_{11} = 0,$$

si l'on suppose $\mu = 0$, on a aussi, nécessairement,

$$\lambda = 0.$$

Donc on a $\mu \neq 0$ et alors, d'après la remarque faite au n° 41, on peut supposer que l'on a

$$(XY) = \mu Y,$$

c'est-à-dire que $\lambda = 0$. Il reste alors à discuter les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
&b_{12}(a_1 - a_2 - \mu) = 0, &\quad& b_{21}(a_2 - a_1 - \mu) = 0,\\
&b_{13}(a_1 - a_3 - \mu) = 0, && b_{23}(a_2 - a_3 - \mu) = 0,\\
&b_{14}(a_1 - \mu) \qquad = 0, && b_{24}(a_2 - \mu) \qquad = 0,\\
&b_{31}(a_3 - a_1 - \mu) = 0, && b_{41}(a_1 + \mu) \qquad = 0,\\
&b_{32}(a_3 - a_2 - \mu) = 0, && b_{42}(a_2 + \mu) \qquad = 0,\\
&b_{34}(a_3 - \mu) \qquad = 0, && b_{43}(a_3 + \mu) \qquad = 0.
\end{aligned}$$

52. Supposons d'abord $b_{12} \neq 0$. Faisons donc $\mu = a_1 - a_2$.
Alors (n° 41),

$$b_{13} = b_{14} = b_{21} = b_{32} = b_{42} = 0,$$

$$\begin{aligned} &b_{23}(2a_2 - a_1 - a_3) = 0, && b_{34}(a_2 + a_3 - a_1) = 0, \\ &b_{24}(2a_2 - a_1) \quad\;\; = 0, && b_{41}(a_2 - 2a_1) \quad\; = 0, \\ &b_{31}(a_2 + a_3 - 2a_1) = 0, && b_{43}(a_2 - a_1 - a_3) = 0. \end{aligned}$$

On a d'abord le groupe

$$\text{(V)} \qquad [a_1 x_1 p_1 + a_2 x_2 p_2 + a_3 x_3 p_3,\ x_1 p_2],$$

dont les équations finies sont, en posant $\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda(a_1 - a_2)}[e^{\lambda(a_1 - a_2)} - 1]$,

$$y_1 = x_1 e^{\lambda a_1}, \qquad y_2 = e^{\lambda a_2}(\mu_0 x_1 + x_2), \qquad y_3 = e^{\lambda a_3} x_3, \qquad y_4 = x_4.$$

53. Je reviens au n° 52. Je fais, en plus, l'hypothèse $a_1 = 2a_2 - a_3$. Tout se passe comme au n° 42, avec l'hypothèse $a_4 = 0$ en plus.

On trouve le groupe

$$\text{(VI)} \qquad [(2a_2 - a_3)x_1 p_1 + a_2 x_2 p_2 + a_3 x_3 p_3,\ x_1 p_2 + x_2 p_3],$$

dont les équations finies sont, en posant $\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda(a_2 - a_3)}[e^{\lambda(a_2 - a_3)} - 1]$,

$$y_1 = x_1 e^{\lambda(2a_2 - a_3)}, \quad y_2 = e^{\lambda a_2}(\mu_0 x_1 + x_2), \quad y_3 = e^{\lambda a_3}(\tfrac{1}{2}\mu_0^2 x_1 + \mu_0 x_2 + x_3), \quad y_4 = x_4.$$

54. Je garde les notations du n° 53, mais je fais l'hypothèse $a_2 = 2a_3$, d'où $a_1 = 3a_3$ (*voir* le n° 43).

On trouve le groupe

$$\text{(VII)} \qquad [3x_1 p_1 + 2x_2 p_2 + x_3 p_3,\ x_1 p_2 + x_2 p_3 + x_3 p_4].$$

En posant $\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda}(e^{\lambda} - 1)$ on a, pour les équations finies du groupe,

$$\begin{aligned} &y_1 = x_1 e^{3\lambda}, && y_2 = (\mu_0 x_1 + x_2)e^{2\lambda}, \\ &y_3 = (\tfrac{1}{2}\mu_0^2 x_1 + \mu_0 x_2 + x_3)e^{\lambda}, && y_4 = \tfrac{1}{6}\mu_0^3 x_1 + \tfrac{1}{2}\mu_0^2 x_2 + \mu_0 x_3 + x_4. \end{aligned}$$

55. Je reviens au n° 53. Je fais $a_2 = \frac{2}{3}a_3$. J'obtiens alors un groupe qui, par l'emploi de la substitution $(x_1 x_2 x_3 x_4)$, prend la forme canonique

$$\text{(VIII)} \qquad [x_2 p_2 + 2x_3 p_3 + 3x_4 p_4,\ x_1 p_2 + x_2 p_3 + x_3 p_4].$$

Les équations finies du groupe peuvent s'écrire, en posant $\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda}(1 - e^{-\lambda})$,

$$\begin{aligned} &y_1 = x_1, && y_2 = e^{\lambda}(\mu_0 x_1 + x_2), \\ &y_3 = e^{2\lambda}(\tfrac{1}{2}\mu_0^2 x_1 + \mu_0 x_2 + x_3), && y_4 = e^{3\lambda}(\tfrac{1}{6}\mu_0^3 x_1 + \tfrac{1}{2}\mu_0^2 x_2 + \mu_0 x_3 + x_4). \end{aligned}$$

56. Je reviens au n° 52. Je fais $a_1 = 2a_2$. Alors

$$b_{23} = b_{34} = b_{41} = 0,$$

puis

$$(a_3 - 3a_2)b_{31} = 0, \qquad (a_2 + a_3)b_{43} = 0.$$

On obtient ainsi un groupe que la substitution $(x_3 x_4)$ ramène à la forme

$$\text{(IX)} \qquad [2a_2 x_1 p_1 + a_2 x_2 p_2 + a_3 x_4 p_4,\ x_1 p_2 + x_2 p_3]$$

et qui a pour équations finies, en posant $\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda a_2}(e^{\lambda a_2} - 1)$,

$$y_1 = x_1 e^{2\lambda a_2}, \qquad y_2 = e^{\lambda a_2}(\mu_0 x_1 + x_2), \qquad y_3 = \tfrac{1}{2}\mu_0^2 x_1 + \mu_0 x_2 + x_3, \qquad y_4 = e^{\lambda a_3} x_4.$$

57. Si, au n° 56, on suppose $a_3 = 3a_2$ avec $a_1 = 2a_2$, en faisant sur le groupe obtenu la substitution $(x_1 x_2 x_3)$, on retombe sur le groupe (VII) (n° 54).

58. Si, au contraire, au n° 56, on fait $a_3 = -a_2$ avec $a_1 = 2a_2$, on trouve un groupe que la substitution $(x_3 x_4)$ amène à la forme

$$\text{(X)} \qquad [2x_1 p_1 + x_2 p_2 - x_4 p_4,\ x_1 p_2 + x_2 p_3 + x_3 p_4]$$

et dont les équations finies sont, en posant $\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda}(e^{\lambda} - 1)$,

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 e^{2\lambda}, & y_2 &= e^{\lambda}(\mu_0 x_1 + x_2), \\ y_3 &= \tfrac{1}{2}\mu_0^2 x_1 + \mu_0 x_2 + x_3, & y_4 &= e^{-\lambda}(\tfrac{1}{6}\mu_0^3 x_1 + \tfrac{1}{2}\mu_0^2 x_2 + \mu_0 x_3 + x_4). \end{aligned}$$

59. Je reviens au n° 52. Je fais l'hypothèse $a_2 = 2a_1 - a_3$.
Alors

$$b_{23} = b_{34} = b_{41} = 0, \qquad (3a_1 - 2a_3)b_{24} = 0, \qquad (a_1 - 2a_3)b_{43} = 0.$$

La substitution $(x_1 x_2 x_3)$ ramène le groupe trouvé au groupe (VI).

60. Si, au n° 59, on fait $a_1 = \frac{2}{3}a_3$ et qu'on effectue la substitution $(x_1 x_2 x_3)$, on retombe sur le groupe (VII).

61. Si, au n° 59, on suppose $a_1 = 2a_3$, la substitution $(x_1 x_3 x_2 x_4)$ nous fait retrouver le groupe (VIII).

62. Je reviens au n° 52. Je fais $a_1 = a_2 + a_3$; alors

$$b_{24} = b_{43} = 0;$$

de plus

$$(a_2 - 2a_3)b_{23} = 0, \qquad (a_2 + a_3)b_{31} = 0, \qquad (a_2 + 2a_3)b_{41} = 0.$$

On a d'abord le groupe

$$\text{(XI)} \qquad [(a_2 + a_3)x_1p_1 + a_2x_2p_2 + a_3x_3p_3,\ x_1p_2 + x_3p_4]$$

qui, en posant $\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda a_3}(e^{\lambda a_3} - 1)$, a pour équations finies

$$y_1 = x_1e^{\lambda(a_2+a_3)}, \qquad y_2 = e^{\lambda a_2}(\mu_0x_1 + x_2), \qquad y_3 = e^{\lambda a_3}x_3, \qquad y_4 = \mu_0x_3 + x_4.$$

63. Si, au n° 62, je fais $a_2 = 2a_3$, d'où $a_1 = 3a_3$, je retrouve le groupe (VII).

64. L'hypothèse $a_2 = -a_3$, faite au n° 62, entraîne $a_1 = 0$. Elle est inadmissible. Soit donc $a_2 = -2a_3$. Avec la substitution $(x_1x_3)(x_2x_4)$, le groupe obtenu se met sous la forme

$$\text{(XII)} \qquad [x_1p_1 - x_3p_3 - 2x_4p_4,\ x_1p_2 + x_2p_3 + x_3p_4]$$

qui a pour équations finies, en posant $\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda}(e^{\lambda} - 1)$,

$$y_1 = x_1e^{\lambda}, \qquad y_2 = \mu_0x_1 + x_2,$$
$$y_3 = e^{-\lambda}(\tfrac{1}{2}\mu_0^2x_1 + \mu_0x_2 + x_3), \qquad y_4 = e^{-2\lambda}(\tfrac{1}{6}\mu_0^3x_1 + \tfrac{1}{2}\mu_0^2x_2 + \mu_0x_3 + x_4).$$

65. Je reviens au n° 52. Je fais $a_2 = 2a_1$. Alors

$$b_{24} = b_{43} = b_{31} = 0,$$

puis

$$(3a_1 - a_3)b_{23} = 0, \qquad (a_1 + a_3)b_{34} = 0.$$

Avec l'emploi de la substitution $(x_1x_2x_3x_4)$, je trouve le groupe

$$\text{(XIII)} \qquad [a_1x_2p_2 + 2a_1x_3p_3 + a_3x_4p_4,\ x_1p_2 + x_2p_3].$$

Équations finies :

$$\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda a_1}(1 - e^{-\lambda a_1}).$$

$$y_1 = x_1, \qquad y_2 = e^{\lambda a_1}(\mu_0x_1 + x_2), \qquad y_3 = e^{2\lambda a_1}(\tfrac{1}{2}\mu_0^2x_1 + \mu_0x_2 + x_3), \qquad y_4 = x_4e^{\lambda a_3}.$$

66. Si, au n° 65, je fais $a_3 = 3a_1$, $a_2 = 2a_1$, la substitution $(x_1x_2x_3x_4)$ nous permettra de retrouver le groupe (VIII).

67. Si, au n° 65, je fais $a_3 = -a_1$, $a_2 = 2a_1$, avec la substitution $(x_1 x_3)(x_2 x_4)$ on retrouve le groupe (XII).

68. Je reviens au n° 52. Je fais $a_1 = a_2 - a_3$. Alors

$$b_{23} = b_{34} = 0,$$

puis

$$(a_2 + a_3) b_{24} = 0, \qquad (3a_3 - a_2) b_{31} = 0, \qquad (2a_3 - a_2) b_{41} = 0.$$

On trouve alors, en effectuant la substitution $(x_3 x_4)$, le groupe

$$\text{(XIV)} \qquad [(a_2 - a_3) x_1 p_1 + a_2 x_2 p_2 + a_3 x_4 p_4,\ x_1 p_2 + x_3 p_4]$$

qui a pour équations finies, en posant $\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda a_3}[1 - e^{-\lambda a_3}]$,

$$y_1 = x_1 e^{\lambda(a_2 - a_3)}, \qquad y_2 = e^{\lambda a_2}(\mu_0 x_1 + x_2), \qquad y_3 = x_3, \qquad y_4 = e^{\lambda a_3}(\mu_0 x_3 + x_4).$$

69. Si, au n° 68, je fais $a_2 = -a_3$, $a_1 = -2a_3$, avec la substitution $(x_3 x_4)$, on retrouve le groupe (X).

70. Si, au n° 68, je fais $a_2 = 3a_3$, $a_1 = 2a_3$, à l'aide de la substitution $(x_1 x_3 x_2 x_4)$ on retombe sur le groupe (VIII).

71. L'hypothèse $a_2 = 2a_3$ (n° 68) entraîne $a_1 = a_3$. Elle est inadmissible.

72. Je reviens au n° 51. Je suppose $\mu = a_1$.
Alors

$$b_{12} = b_{13} = b_{24} = b_{34} = b_{41} = 0,$$

$$\begin{aligned} &(a_2 - 2a_1) b_{21} = 0, &&(a_2 - a_1 - a_3) b_{23} = 0, &&(a_3 - 2a_1) b_{31} = 0,\\ &(a_3 - a_1 - a_2) b_{32} = 0, &&(a_2 + a_1) b_{42} = 0, &&(a_3 + a_1) b_{43} = 0. \end{aligned}$$

Avec l'emploi de la substitution $(x_2 x_4)$ je trouve d'abord le groupe

$$\text{XV)} \qquad [a_1 x_1 p_1 + a_3 x_3 p_3 + a_2 x_4 p_4,\ x_1 p_2].$$

Équations finies :

$$\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda a_1}(e^{\lambda a_1} - 1),$$

$$y_1 = x_1 e^{\lambda a_1}, \qquad y_2 = \mu_0 x_1 + x_2, \qquad y_3 = x_3 e^{\lambda a_3}, \qquad y_4 = x_4 e^{\lambda a_2}.$$

73. Je reviens au n° 72. Je fais $a_2 = 2a_1$. Alors

$$b_{23} = b_{42} = 0,$$

puis

$$(a_3-2a_1)b_{31}=0, \qquad (a_3-3a_1)b_{32}=0, \qquad (a_3+a_1)b_{43}=0.$$

Avec la substitution $(x_1x_2)(x_3x_4)$, on retombe d'abord sur le groupe (IX), n° 56.

74. Si, au n° 73, on fait $a_3=2a_1$, il vient $a_2=a_3$, l'hypothèse est inadmissible. Soient $a_3=2a_1$, $a_2=2a_1$, la substitution (x_1x_3) permet de retrouver le groupe (VII), n° 54.

75. Si, au n° 73, on fait $a_3=-a_1$, $a_2=2a_1$, avec l'emploi de la substitution $(x_1x_2)(x_3x_4)$ on retombe sur le groupe (X), n° 58.

76. Je reviens au n° 72. Je fais l'hypothèse $a_1=a_2-a_3$, d'où

$$b_{32}=b_{43}=0,$$

puis

$$(2a_3-a_2)b_{21}=0, \qquad (3a_3-2a_2)b_{31}=0, \qquad (2a_2-a_3)b_{42}=0.$$

La substitution $(x_1x_3x_2)$ montre que l'on retombe d'abord sur le groupe (XI), n° 62.

77. L'hypothèse $a_2=2a_3$ (n° 76) donne $a_1=a_3$. Elle est inadmissible. Soient donc

$$a_3=\tfrac{2}{3}a_2, \qquad a_1=\tfrac{1}{3}a_2.$$

La substitution $(x_1x_3x_2)$ montre que l'on retrouve le groupe (VII), n° 54.

78. Si, au n° 76, on fait $a_3=2a_2$, d'où $a_1=-a_2$ avec l'emploi de la substitution $(x_2x_3x_4)$, on retrouve le groupe (XII), n° 64.

79. Je reviens au n° 72. Soit $a_2=-a_1$; alors

$$b_{21}=b_{32}=b_{43}=0,$$

puis

$$(2a_1+a_3)b_{23}=0, \qquad (a_3-2a_1)b_{31}=0.$$

A l'aide de la substitution $(x_2x_3x_4)$ on trouve le groupe

$$\text{(XVI)} \qquad [a_1x_1p_1-a_1x_3p_3+a_3x_4p_4,\ x_1p_2+x_2p_3],$$

dont les équations finies sont, en posant $\mu_0=\dfrac{\mu}{\lambda a_1}(e^{\lambda a_1}-1)$,

$$y_1=x_1e^{\lambda a_1}, \qquad y_2=\mu_0x_1+x_2, \qquad y_3=e^{-\lambda a_1}(\tfrac{1}{2}\mu_0^2x_1+\mu_0x_2+x_3), \qquad y_4=e^{\lambda a_3}x_4.$$

80. Si, au n° 79, on fait $a_3 = -2a_1$ avec $a_2 = -a_1$, puis si l'on effectue la substitution $(x_2 x_3 x_4)$, on retrouve le groupe (XII), n° 64.

81. Si, au n° 79, on fait $a_3 = 2a_1$, $a_2 = -a_1$ et si l'on effectue la substitution $(x_1 x_2 x_4 x_3)$, on retrouve le groupe (X), n° 58.

82. Je reviens au n° 51. Je fais $\mu = -a_1$.
Alors
$$b_{14} = b_{31} = b_{21} = b_{42} = b_{43} = 0$$
et
$$\begin{array}{lll} (2a_1 - a_2) b_{12} = 0, & (2a_1 - a_3) b_{13} = 0, & (a_1 + a_3 - a_2) b_{32} = 0, \\ (a_1 + a_3) b_{34} = 0, & (a_1 + a_2 - a_3) b_{23} = 0, & (a_1 + a_2) b_{24} = 0. \end{array}$$

Si nous effectuons la substitution $(x_1 x_2 x_4)$, on trouve d'abord le groupe

(XVII) $$[a_1 x_2 p_2 + a_3 x_3 p_3 + a_2 x_4 p_4,\ x_1 p_2],$$

dont les équations finies sont, en posant $\mu_0 = \dfrac{\mu}{\lambda a_1}(1 - e^{-\lambda a_1})$,
$$y_1 = x_1, \qquad y_2 = e^{\lambda a_1}(\mu_0 x_1 + x_2), \qquad y_3 = x_3 e^{\lambda a_3}, \qquad y_4 = x_4 e^{\lambda a_2}.$$

83. Je garde les notations du n° 82. Je fais $a_2 = 2a_1$. Alors,
$$b_{32} = b_{24} = 0.$$
J'ai
$$(2a_1 - a_3) b_{13} = 0, \qquad (a_1 + a_3) b_{34} = 0, \qquad (3a_1 - a_3) b_{23} = 0.$$

En effectuant la substitution $(x_1 x_2 x_3 x_4)$ sur le groupe tout d'abord obtenu, on retombe sur le groupe (XIII), n° 65.

84. L'hypothèse $a_3 = 2a_1$ (n° 83) entraîne $a_2 = a_3$. Elle est inadmissible. Soit donc $a_3 = -a_1$, avec $a_2 = 2a_1$. La substitution $(x_1 x_3)(x_2 x_4)$ étant effectuée sur le groupe obtenu, on retronve le groupe (XII), n° 64.

85. Si, au n° 83, je suppose $a_3 = 3a_1$ et $a_2 = 2a_1$ et que j'effectue la substitution $(x_1 x_2 x_3 x_4)$, je retrouve le groupe (VIII), n° 55.

86. Je reviens au n° 82. Soit $a_1 = a_2 - a_3$; alors
$$b_{34} = b_{23} = 0,$$
$$(a_2 - 2a_3) b_{12} = 0, \qquad (2a_2 - 3a_3) b_{13} = 0, \qquad (2a_2 - a_3) b_{24} = 0.$$

La substitution $(x_1 x_4 x_3)$ nous fait retrouver le groupe (XIV), n° 68.

87. Si, au n° 86, on fait $a_2 = 2a_3$, à l'aide de la substitution $(x_1 x_2 x_4)$ on retombe sur le groupe (VIII), n° 55.

88. Si, au n° 86, on fait $a_3 = 2a_2$, à l'aide de la substitution $(x_1 x_4 x_3)$ on retombe sur le groupe (X), n° 58.

89. Je reviens au n° 82. Je fais $a_1 = -a_2$; alors

$$b_{12} = b_{34} = b_{23} = 0,$$

puis

$$(2a_2 + a_3)b_{13} = 0, \qquad (a_3 - 2a_2)b_{32} = 0.$$

La substitution $(x_1 x_3 x_4 x_2)$ nous fait retrouver le groupe (XVI), n° 79.

90. Si, au n° 89, je fais $a_3 = -2a_2$, à l'aide de la substitution $(x_1 x_3 x_4 x_2)$ je retrouve le groupe (XII), n° 64.

91. Enfin, si au n° 89 je fais $a_3 = 2a_2$, à l'aide de la substitution $(x_1 x_4 x_3)$ nous retomberons sur le groupe (XI), n° 58.

92. J'arrive maintenant à la transformation (3),

$$Xf = a_1 x_1 p_1 + a_2 x_2 p_2 + a_3(x_3 p_3 + x_4 p_4) + x_3 p_4.$$

Soit

$$Yf = \sum_{\alpha, \beta} b_{\alpha\beta} x_\alpha p_\beta.$$

Écrivons que

$$(XY) = \lambda Xf + \mu Yf.$$

On trouve d'abord

$$\lambda a_1 + \mu b_{11} = 0,$$

de sorte que l'hypothèse $\mu = 0$ entraîne $\lambda = 0$. Le cas $\mu = \lambda = 0$ ayant déjà été examiné (Chap. II), on peut supposer $\mu \neq 0$. Mais alors, d'après la remarque du n° 41, on peut supposer $\lambda = 0$.

Il en résulte

$$b_{11} = b_{22} = b_{33} = b_{44} = b_{34} = b_{43} = 0,$$

puis

$$\begin{aligned}
&(a_1 - a_2 - \mu)b_{12} = 0, && (a_2 - a_1 - \mu)b_{21} = 0,\\
&(a_1 - a_3 - \mu)b_{14} = b_{13}, && (a_2 - a_3 - \mu)b_{23} = 0,\\
&(a_1 - a_3 - \mu)b_{13} = 0, && (a_2 - a_3 - \mu)b_{24} = b_{23},\\
&(a_3 - a_1 - \mu)b_{31} + b_{41} = 0, && (a_3 - a_2 - \mu)b_{32} + b_{42} = 0,\\
&(a_3 - a_1 - \mu)b_{41} = 0, && (a_3 - a_2 - \mu)b_{42} = 0.
\end{aligned}$$

93. Soit

$$\mu = a_1 - a_2,$$

alors

$$b_{21} = b_{13} = b_{14} = b_{42} = b_{32} = 0,$$

puis

$$(2a_2 - a_1 - a_3)b_{23} = 0, \qquad (a_2 + a_3 - 2a_1)b_{31} + b_{41} = 0,$$
$$(2a_2 - a_1 - a_3)b_{24} = b_{23}, \qquad (a_2 + a_3 - 2a_1)b_{41} \qquad = 0.$$

On a tout d'abord le groupe

(XVIII) $$[a_1x_1p_1 + a_2x_2p_2 + a_3(x_3p_3 + x_4p_4) + x_3p_4,\ x_1p_2],$$

dont les équations finies sont, en posant $\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda(a_1 - a_2)}[e^{\lambda(a_1-a_2)} - 1]$,

$$y_1 = x_1e^{\lambda a_1}, \qquad y_2 = e^{\lambda a_2}(\mu_0x_1 + x_2), \qquad y_3 = x_3e^{\lambda a_3}, \qquad y_4 = e^{\lambda a_3}(\lambda x_3 + x_4).$$

94. Si, au n° 93, on fait $a_1 = 2a_2 - a_3$, alors on a

$$Yf = b_{12}x_1p_2 + b_{24}x_2p_4 = b_{12}\frac{a}{b}y_1q_2 + b_{24}\frac{b}{c}y_2q_4 \qquad (\text{n}^\circ\ 4).$$

On fera $b = ab_{12}$, $c = bb_{24}$, puis on effectuera la substitution (x_3x_4) et l'on trouve ainsi le groupe

(XIX) $$[(2a_2 - a_3)x_1p_1 + a_2x_2p_2 + a_3(x_3p_3 + x_4p_4) + x_4p_3,\ x_1p_2 + x_2p_3].$$

Équations finies :

$$\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda(a_2 - a_3)}[e^{\lambda(a_2-a_3)} - 1],$$
$$y_1 = x_1e^{\lambda(2a_2-a_3)}, \qquad y_2 = e^{\lambda a_2}(\mu_0x_1 + x_2),$$
$$y_3 = e^{\lambda a_3}(\tfrac{1}{2}\mu_0^2x_1 + \mu_0x_2 + x_3 + \lambda x_4), \qquad y_4 = e^{\lambda a_3}x_4.$$

95. Si, au n° 93, je fais $a_2 = 2a_1 - a_3$, en utilisant le changement de variables du n° 4 et effectuant la substitution $(x_1x_2x_3)$, j'arrive au groupe

(XX) $$[a_1x_2p_2 + (2a_1 - a_3)x_3p_3 + a_3(x_1p_1 + x_4p_4) + x_1p_4,\ x_1p_2 + x_2p_3].$$

Équations finies :

$$\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda(a_3 - a_1)}[e^{\lambda(a_3-a_1)} - 1],$$
$$y_1 = x_1e^{\lambda a_3}, \qquad y_2 = e^{\lambda a_1}(\mu_0x_1 + x_2),$$
$$y_3 = e^{\lambda(2a_1-a_3)}(\tfrac{1}{2}\mu_0^2x_1 + \mu_0x_2 + x_3), \qquad y_4 = e^{\lambda a_3}(\lambda x_1 + x_4).$$

96. Je reviens au n° 92 et je fais $\mu = a_1 - a_3$.
Alors

$$b_{12} = b_{23} = b_{24} = b_{41} = b_{31} = 0,$$

puis

$$(a_2 + a_3 - 2a_1)b_{21} = 0, \qquad \begin{aligned}(2a_3 - a_1 - a_2)b_{32} + b_{42} &= 0,\\ (2a_3 - a_1 - a_2)b_{42} \qquad &= 0.\end{aligned}$$

A l'aide de la substitution $(x_2 x_4)$ on arrive au groupe

(XXI) $$[a_1 x_1 p_1 + a_2 x_4 p_4 + a_3(x_2 p_2 + x_3 p_3) + x_3 p_2,\ x_1 p_2].$$

Équations finies :

$$\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda(a_1 - a_3)}(e^{\lambda(a_1 - a_3)} - 1),$$

$$y_1 = x_1 e^{\lambda a_1}, \qquad y_2 = e^{\lambda a_3}(\mu_0 x_1 + x_2 + \lambda x_3), \qquad y_3 = x_3 e^{\lambda a_3}, \qquad y_4 = x_4 e^{\lambda a_2}.$$

97. Si, au n° 96, je fais $a_2 = 2a_1 - a_3$, je trouve

$$Yf = b_{21} x_2 p_1 + b_{14} x_1 p_4 = b_{21}\frac{b}{a} y_2 q_1 + b_{14}\frac{a}{c} y_1 q_4 \qquad (\text{n}^\circ\ 4).$$

Nous poserons $a = bb_{21}$, $c = ab_{14}$.
Puis nous effectuerons la substitution $(x_1 x_2)(x_3 x_4)$.
On retombe alors sur le groupe (XIX), n° 94.

98. Si, au n° 96, on fait $a_1 = 2a_3 - a_2$, puis si l'on effectue la substitution $(x_2 x_4)$, on trouve le groupe

(XXII) $$[(2a_3 - a_2)x_1 p_1 + a_2 x_4 p_4 + a_3(x_2 p_2 + x_3 p_3) + x_3 p_2,\ x_1 p_2 + x_3 p_4].$$

Équations finies :

$$\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda(a_3 - a_2)}[e^{\lambda(a_3 - a_2)} - 1],$$

$$y_1 = x_1 e^{\lambda(2a_3 - a_2)}, \qquad y_2 = e^{\lambda a_3}(\mu_0 x_1 + x_2 + \lambda a_3),$$
$$y_3 = x_3 e^{\lambda a_3}, \qquad y_4 = e^{\lambda a_2}(\mu_0 x_3 + x_4).$$

99. Je reviens au n° 92. Je fais $\mu = a_3 - a_1$.
Alors

$$b_{41} = b_{21} = b_{13} = b_{14} = b_{42} = b_{32} = 0,$$

puis

$$(2a_1 - a_2 - a_3)b_{12} = 0, \qquad \begin{aligned}(a_1 + a_2 - 2a_3)b_{23} &= 0,\\ (a_1 + a_2 - 2a_3)b_{24} &= b_{23}.\end{aligned}$$

Effectuant la substitution $(x_1 x_2 x_3)$, on arrive d'abord au groupe

$$\text{(XXIII)} \qquad [a_1 x_2 p_2 + a_2 x_3 p_3 + a_3(x_1 p_1 + x_4 p_4) + x_1 p_4,\ x_1 p_2].$$

En posant $\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda(a_3 - a_1)}[e^{\lambda(a_3-a_1)} - 1]$, il vient pour les équations finies du groupe

$$y_1 = x_1 e^{\lambda a_3}, \qquad y_2 = e^{\lambda a_1}(\mu_0 x_1 + x_2), \qquad y_3 = x_3 e^{\lambda a_2}, \qquad y_4 = e^{\lambda a_3}(\lambda x_1 + x_4).$$

100. Si, au n° 99, je fais $a_2 = 2a_1 - a_3$, à l'aide de la substitution $(x_1 x_2 x_3)$ je retrouve le groupe (XX), n° 95.

101. Si, au n° 99, je fais $a_1 = 2a_3 - a_2$, à l'aide de la substitution $(x_1 x_2 x_3)$ je retrouve le groupe (XXII), n° 98.

102. J'arrive à la transformation (4),

$$a_2 x_2 p_2 + a_3(x_3 p_3 + x_4 p_4) + x_3 p_4 = Xf$$

qui se déduit de (3) par l'hypothèse $a_1 = 0$. Si

$$Yf = \sum_{\alpha,\beta}(b_{\alpha\beta} x_\alpha p_\beta),$$

en exprimant que

$$(XY) = \lambda Xf + \mu Yf,$$

on trouve, entre autres, l'équation

$$\lambda a_2 + \mu b_{22} = 0.$$

Il en résulte que l'hypothèse $\mu = 0$ entraîne comme conséquence $\lambda = 0$. Ce cas a déjà été examiné (Chap. II). On peut donc supposer $\mu \neq 0$. Alors, d'après la remarque faite au n° 41, on peut faire $\lambda = 0$.

On arrive alors aux équations

$$(a_2 + \mu) b_{12} = 0,$$
$$(a_2 - \mu) b_{21} = 0,$$
$$\begin{aligned} &(a_3 + \mu) b_{13} = 0, && (a_3 - \mu) b_{31} + b_{41} = 0, \\ &(a_3 + \mu) b_{14} + b_{13} = 0, && (a_3 - \mu) b_{41} = 0, \\ &(a_2 - a_3 - \mu) b_{23} = 0, && (a_3 - a_2 - \mu) b_{32} + b_{42} = 0, \\ &(a_2 - a_3 - \mu) b_{24} = b_{23}, && (a_3 - a_2 - \mu) b_{42} = 0. \end{aligned}$$

103. Soit d'abord $\mu = -a_2$. On a

$$b_{21} = b_{13} = b_{14} = b_{42} = b_{32} = 0,$$
$$(2a_2 - a_3)b_{23} = 0, \qquad (a_2 + a_3)b_{31} + b_{41} = 0,$$
$$(2a_2 - a_3)b_{24} = b_{23}, \qquad (a_2 + a_3)b_{41} \qquad = 0.$$

On a d'abord le groupe

$$\text{(XXIV)} \qquad (a_2x_2p_2 + a_3(x_3p_3 + x_4p_4) + x_3p_4,\ x_1p_2].$$

Équations finies :

$$\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda a_2}(1 - e^{-\lambda a_2}),$$
$$y_1 = x_1, \qquad y_2 = e^{\lambda a_2}(\mu_0 x_1 + x_2), \qquad y_3 = x_3 e^{\lambda a_3}, \qquad y_4 = e^{\lambda a_3}(\lambda x_3 + x_4).$$

104. Je reviens au n° 103 et je fais $a_3 = -a_2$.
A l'aide de la substitution $(x_1x_2x_3)$, on trouve alors le groupe

$$\text{(XXV)} \qquad [a_3(x_1p_1 - x_3p_3 + x_4p_4) + x_1p_4,\ x_1p_2 + x_2p_3].$$

En posant $\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda a_3}(e^{\lambda a_3} - 1)$, on trouve pour les équations finies :

$$y_1 = x_1 e^{\lambda a_3}, \qquad y_2 = \mu_0 x_1 + x_2,$$
$$y_3 = e^{-\lambda a_3}(\tfrac{1}{2}\mu_0^2 x_1 + \mu_0 x_2 + x_3), \qquad y_4 = e^{\lambda a_3}(\lambda x_1 + x_4).$$

105. Si, au n° 103, je fais $a_3 = 2a_2$, à l'aide de la substitution (x_3x_4), j'arrive au groupe

$$\text{(XXVI)} \qquad [a_2(x_2p_2 + 2x_3p_3 + 2x_4p_4) + x_4p_3,\ x_1p_2 + x_2p_3].$$

En posant $\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda a_2}(1 - e^{-\lambda a_2})$, il vient, pour les équations finies du groupe :

$$y_1 = x_1, \qquad y_2 = e^{\lambda a_2}(\mu_0 x_1 + x_2),$$
$$y_4 = e^{2\lambda a_2}(\tfrac{1}{2}\mu_0^2 x_1 + \mu_0 x_2 + x_3 + \lambda x_4), \qquad y_4 = x_4 e^{2\lambda a_2}.$$

106. Je reviens au n° 102 ; je fais $\mu = a_2$; alors

$$b_{12} = b_{23} = b_{24} = b_{31} = b_{41} = 0,$$
$$(a_2 + a_3)\,b_{13} = 0, \qquad (a_3 - 2a_2)\,b_{32} + b_{42} = 0,$$
$$(a_2 + a_3)\,b_{14} + b_{13} = 0, \qquad (a_3 - 2a_2)\,b_{42} = 0.$$

On amène le premier groupe que l'on trouve, à l'aide de la substitution $(x_1 x_2)$, à la forme

(XXVII) $$[a_2 x_1 p_1 + a_3(x_3 p_3 + x_4 p_4) + x_3 p_4,\ x_1 p_2].$$

Équations finies :

$$\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda a_2}(e^{\lambda a_2} - 1),$$

$$y_1 = x_1 e^{\lambda a_2}, \qquad y_2 = \mu_0 x_1 + x_2, \qquad y_3 = x_3 e^{\lambda a_3}, \qquad y_4 = e^{\lambda a_3}(\lambda x_3 + x_4).$$

107. Si, au n° 106, je fais $a_2 = -a_3$, j'arrive, à l'aide de la substitution $(x_1 x_2)(x_3 x_4)$, au groupe

(XXVIII) $$[a_3(-x_1 p_1 + x_3 p_3 + x_4 p_4) + x_4 p_3,\ x_1 p_2 + x_2 p_3].$$

En posant $\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda a_3}(1 - e^{-\lambda a_3})$, on a pour les équations finies du groupe

$$y_1 = x_1 e^{-\lambda a_3}, \qquad y_2 = \mu_0 x_1 + x_2,$$
$$y_3 = e^{\lambda a_3}(\tfrac{1}{2}\mu_0^2 x_1 + \mu_0 x_2 + x_3 + \lambda x_4), \qquad y_4 = x_4 e^{\lambda a_3}.$$

108. Si, au n° 106, on fait $a_3 = 2a_2$, on trouve, à l'aide de la substitution $(x_1 x_3)$, le groupe

(XXIX) $$[a_2(2x_1 p_1 + x_2 p_2 + 2x_4 p_4) + x_1 p_4,\ x_1 p_2 + x_2 p_3].$$

Équations finies :

$$\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda a_3}(e^{\lambda a_2} - 1),$$

$$y_1 = x_1 e^{2\lambda a_2}, \qquad y_2 = e^{\lambda a_2}(\mu_0 x_1 + x_2),$$
$$y_3 = \tfrac{1}{2}\mu_0^2 x_1 + \mu_0 x_2 + x_3, \qquad y_4 = e^{2\lambda a_2}(\lambda x_1 + x_4).$$

109. Je reviens au n° 102. Je fais $\mu = -a_3$.
Alors

$$b_{13} = b_{12} = b_{23} = b_{24} = b_{31} = b_{41} = 0,$$

$$(a_2 + a_3) b_{21} = 0, \qquad \begin{cases} (2a_3 - a_2) b_{32} + b_{42} = 0, \\ (2a_3 - a_2) b_{42}. \end{cases}$$

Le groupe que l'on trouve tout d'abord prend, lorsque l'on effectue la substitution $(x_2 x_4)$, la forme canonique

(XXX) $$[a_2 x_4 p_4 + a_3(x_2 p_2 + x_3 p_3) + x_3 p_2,\ x_1 p_2].$$

Équations finies :

$$\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda a_3}(1 - e^{-\lambda a_3}),$$

$$y_1 = x_1, \qquad y_2 = e^{\lambda a_3}(\mu_0 x_1 + x_2 + \lambda x_3), \qquad y_3 = x_3 e^{\lambda a_3}, \qquad y_4 = x_4 e^{\lambda a_2}.$$

110. Si, au n° 109, je fais $a_2 = - a_3$, à l'aide de la substitution $(x_1 x_2)(x_3 x_4)$, je retrouve le groupe (XXVIII) du n° 107.

111. Si, au n° 109, je fais $a_2 = 2 a_3$, le groupe obtenu peut se mettre sous les deux formes canoniques suivantes :

La substitution $(x_2 x_4)$ donne

(XXXI) $$[a_3(x_2 p_2 + x_3 p_3 + 2 x_4 p_4) + x_3 p_2, \; x_1 p_2 + x_3 p_4].$$

La substitution $(x_1 x_3)$ donne

(XXXI) $$[a_3(x_1 p_1 + x_4 p_4 + 2 x_2 p_2) + x_1 p_4, \; x_1 p_2 + x_3 p_4].$$

Nous choisirons, par exemple, la première forme canonique.

Les équations finies sont alors, en posant $\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda a_3}(1 - e^{-\lambda a_3})$,

$$y_1 = x_1, \qquad y_2 = e^{\lambda a_3}(\mu_0 x_1 + x_2 + \lambda x_3), \qquad y_3 = x_3 e^{\lambda a_3}, \qquad y_4 = e^{2\lambda a_3}(\mu_0 x_3 + x_4).$$

112. Je reviens au n° 102. Je fais $\mu = a_3$.

Alors

$$b_{41} = b_{21} = b_{13} = b_{14} = b_{42} = b_{32} = 0,$$

$$(a_2 + a_3)\, b_{12} = 0, \qquad (a_2 - 2 a_3)\, b_{23} = 0,$$

$$(a_2 - 2 a_3)\, b_{24} = b_{23}.$$

On trouve d'abord le groupe suivant [en effectuant la substitution $(x_1 x_2 x_3)$]

(XXXII) $$[a_2 x_3 p_3 + a_3(x_1 p_1 + x_4 p_4) + x_1 p_4, \; x_1 p_2].$$

Équations finies :

$$\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda a_3}(e^{\lambda a_3} - 1),$$

$$y_1 = x_1 e^{\lambda a_3}, \qquad y_2 = \mu_0 x_1 + x_2, \qquad y_3 = x_3 e^{\lambda a_2}, \qquad y_4 = e^{\lambda a_3}(\lambda x_1 + x_4).$$

113. Si, au n° 112, on fait $a_2 = - a_3$, à l'aide de la substitution $(x_1 x_2 x_3)$, on retrouve le groupe (XXV) du n° 104.

114. Si, au n° **112**, on fait $a_2 = 2a_3$, le groupe obtenu peut se mettre sous deux formes : avec la substitution $(x_1 x_4 x_2)$, on trouve

(XXXIII) $$[a_3(2x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3] + x_3p_2,\ x_1p_2 + x_3p_4]$$

et, avec la substitution $(x_1 x_2 x_3)$,

(XXXIII) $$[a_3(2x_3p_3 + x_1p_1 + x_4p_4) + x_1p_4,\ x_1p_2 + x_3p_4].$$

Nous choisirons, par exemple, la première forme.

Alors les équations finies seront, en posant $\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda a_3}(e^{\lambda a_3} - 1)$,

$$y_1 = x_1 e^{2\lambda a_3}, \qquad y_2 = e^{\lambda a_3}(\mu_0 x_1 + x_2 + \lambda x_3),$$
$$y_3 = x_3 e^{\lambda a_3}, \qquad y_4 = \mu_0 x_3 + x_4.$$

115. Je reviens au n° **102**. Je fais $\mu = a_2 - a_3$.

Alors

$$b_{23} = b_{21} = b_{13} = b_{14} = 0,$$
$$(2a_2 - a_3)\, b_{12} = 0, \qquad (2a_3 - a_2)\, b_{31} + b_{41} = 0,$$
$$(2a_3 - a_2)\, b_{41} = 0.$$

A l'aide de la substitution $(x_1 x_4 x_2)$, on trouve d'abord le groupe

(XXXIV) $$[a_2x_1p_1 + a_3(x_2p_2 + x_3p_3) + x_3p_2,\ x_1p_2].$$

En posant $\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda(a_2 - a_3)}(e^{\lambda(a_2 - a_3)} - 1)$, on a pour les équations finies du groupe

$$y_1 = x_1 e^{\lambda a_2}, \qquad y_2 = e^{\lambda a_3}(\mu_0 x_1 + x_2 + \lambda x_3), \qquad y_3 = x_3 e^{\lambda a_3}, \qquad y_4 = x_4.$$

116. Si, au n° **115**, on fait $a_3 = 2a_2$, à l'aide de la substitution $(x_3 x_4)$, on retrouve le groupe (XXVI), n° **105**.

117. Si, au n° **115**, on fait $a_2 = 2a_3$, et si l'on effectue la substitution $(x_1 x_2 x_3)$, on retombe sur le groupe (XXXIII), n° **114**.

118. Je reviens au n° **102**. Je fais $\mu = a_3 - a_2$.

Alors

$$b_{42} = b_{12} = b_{23} = b_{24} = b_{31} = b_{41} = 0.$$

Puis

$$(2a_2 - a_3)\, b_{21} = 0, \qquad (2a_3 - a_2)\, b_{13} = 0,$$
$$(2a_3 - a_2)\, b_{14} + b_{13} = 0.$$

La substitution $(x_1 x_3)$ donne le premier groupe obtenu sous la forme

(XXXV) $$[a_2 x_2 p_2 + a_3(x_1 p_1 + x_4 p_4) + x_1 p_4,\ x_1 p_2].$$

Les équations finies sont, en posant $\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda(a_3 - a_2)}(e^{\lambda(a_3-a_2)} - 1)$,

$$y_1 = x_1 e^{\lambda a_3}, \qquad y_2 = e^{\lambda a_3}(\mu_0 x_1 + x_2),$$
$$y_3 = x_3, \qquad y_4 = e^{\lambda a_3}(\lambda\ x_1 + x_4).$$

119. Si, au n° **118**, je fais $a_3 = 2a_2$, à l'aide de la substitution $(x_1 x_3)$, je retrouve le groupe (XXIX), n° **108**.

120. Si, au n° **118**, on fait $a_2 = 2a_3$, et si l'on effectue la substitution $(x_2 x_4)$, on retrouve le groupe (XXXI), n° **111**.

121. J'arrive à la transformation (**5**),

$$Xf = a_1 x_1 p_1 + a_2 x_2 p_2 + x_3 p_4.$$

On a (n° **92**)

$$\lambda a_1 + \mu b_{11} = 0.$$

Donc, si μ est nul, λ est nul aussi. Le cas ayant été traité, supposons $\mu \neq 0$, et appliquons la remarque du n° **41**. Nous aurons à discuter le système

$$(a_1 - a_2 - \mu)\, b_{12} = 0,$$
$$(a_2 - a_1 - \mu)\, b_{21} = 0,$$
$$\begin{cases} (a_1 - \mu)\, b_{14} = b_{13}, \\ (a_1 - \mu)\, b_{13} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} (a_2 - \mu)\, b_{23} = 0, \\ (a_2 - \mu)\, b_{24} = b_{23}, \end{cases}$$
$$\begin{cases} (a_1 + \mu)\, b_{31} = b_{41}, \\ (a_1 + \mu)\, b_{41} = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} (a_2 + \mu)\, b_{32} = b_{42}, \\ (a_2 + \mu)\, b_{42} = 0. \end{cases}$$

122. Soit d'abord $\mu = a_1 - a_2$.

Alors

$$b_{21} = b_{13} = b_{14} = b_{32} = b_{42} = 0.$$

Puis

$$(2a_2 - a_1)\, b_{23} = 0, \qquad (2a_1 - a_2)\, b_{31} = b_{41},$$
$$(2a_2 - a_1)\, b_{24} = b_{23}, \qquad (2a_1 - a_2)\, b_{41} = 0.$$

On a d'abord le groupe

(XXXVI) $$[a_1 x_1 p_1 + a_2 x_2 p_2 + x_3 p_4,\ x_1 p_2]$$

dont les équations finies sont, en posant $\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda(a_1 - a_2)}(e^{\lambda(a_1-a_2)} - 1)$,

$$y_1 = x_1 e^{\lambda a_1}, \quad y_2 = e^{\lambda a_2}(\mu_0 x_1 + x_2), \quad y_3 = x_3, \quad y_4 = \lambda x_3 + x_4.$$

123. Si, au n° **122**, je fais $a_1 = 2a_2$, et si j'effectue la substitution $(x_3 x_4)$, je trouve le groupe

XXXVII) $$[a_2(2x_1p_1 + x_2p_2) + x_4p_3,\ x_1p_2 + x_2p_3]$$

dont les équations finies sont, en posant $\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda a_2}(e^{\lambda a_2} - 1)$,

$$y_1 = x_1 e^{2\lambda a_2}, \quad y_2 = e^{\lambda a_2}(\mu_0 x_1 + x_2), \quad y_3 = \tfrac{1}{2}\mu_0^2 x_1 + \mu_0 x_2 + x_3 + \lambda x_4, \quad y_4 = x_4.$$

124. Si, au n° **122**, je fais $a_2 = 2a_1$, à l'aide de la substitution $(x_1 x_2 x_3)$, j'obtiens le groupe

(XXXVIII) $$[a_2(x_2p_2 + 2x_3p_3) + x_1p_4,\ x_1p_2 + x_2p_3]$$

dont les équations finies sont, en posant $\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda a_2}(1 - e^{-\lambda a_2})$,

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = e^{\lambda a_2}(\mu_0 x_1 + x_2), \quad y_3 = e^{2\lambda a_2}(\tfrac{1}{2}\mu_0^2 x_1 + \mu_0 x_2 + x_3), \quad y_4 = \lambda x_1 + x_4.$$

125. Je reviens au n° **121**. Je fais $\mu = a_1$.

Alors

$$b_{13} = b_{12} = b_{23} = b_{24} = b_{31} = b_{41} = 0.$$

Puis

$$(a_2 - 2a_1)\,b_{21} = 0, \qquad (a_1 + a_2)\,b_{32} = b_{42},$$
$$(a_1 + a_2)\,b_{42} = 0.$$

A l'aide de la substitution $(x_2 x_4)$, on trouve d'abord le groupe

(XXXIX) $$[a_1x_1p_1 + a_2x_4p_4 + x_3p_2,\ x_1p_2]$$

dont les équations finies sont, en posant $\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda a_1}(e^{\lambda a_1} - 1)$,

$$y_1 = x_1 e^{\lambda a_1}, \quad y_2 = \mu_0 x_1 + x_2 + \lambda x_3, \quad y_3 = x_3, \quad y_4 = x_4 e^{\lambda a_2}.$$

126. Si, au n° **125**, on fait $a_0 = 2a_1$, et si l'on effectue la substitution $(x_1 x_2)(x_3 x_4)$, on retrouve le groupe (XXXVII), n° **123**.

127. Si, au n° **125**, on fait $a_2 = -a_1$, le groupe obtenu peut se mettre sous deux formes canoniques acceptables au même titre :

Avec la substitution $(x_2 x_4)$, on trouve la forme

(XL) $$[a_1(x_1p_1 - x_4p_4) + x_3p_2,\ x_1p_2 + x_3p_4].$$

Avec la substitution $(x_1 x_3)$, on trouve la forme

(XL) $$[a_1(x_3p_3 - x_2p_2) + x_1p_4,\ x_1p_2 + x_3p_4].$$

Choisissons, par exemple, la première forme. Alors, les équations finies du groupe sont, en posant $\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda a_1}(e^{\lambda a_1} - 1)$,

$$y_1 = x_1 e^{\lambda a_1}, \qquad y_2 = \mu_0 x_1 + x_2 + \lambda x_3, \qquad y_3 = x_3, \qquad y_4 = e^{-\lambda a_1}(\mu_0 x_3 + x_4).$$

128. Je reviens au nº **121**. Je fais $\mu = -a_1$.

Alors
$$b_{41} = b_{21} = b_{13} = b_{14} = b_{32} = b_{42} = 0.$$
Puis
$$(2a_1 - a_2)\,b_{12} = 0, \qquad (a_1 + a_2)\,b_{23} = 0,$$
$$(a_1 + a_2)\,b_{24} = b_{23}.$$

A l'aide de la substitution $(x_1 x_2 x_3)$, on trouve d'abord le groupe

(XLI) $$[a_1 x_2p_2 + a_2 x_3p_3 + x_1p_4,\ x_1p_2],$$

dont les équations finies sont, en posant $\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda a_1}(1 - e^{-\lambda a_1})$,

$$y_1 = x_1, \qquad y_2 = e^{\lambda a_1}(\mu_0 x_1 + x_2), \qquad y_3 = x_3 e^{\lambda a_2}, \qquad y_4 = \lambda x_1 + x_4.$$

129. Si, au nº **128**, je fais $a_2 = 2a_1$, à l'aide de la substitution $(x_1 x_2 x_3)$, je retrouve le groupe (XXXVIII), nº **124**.

130. Si, au nº **128**, je fais $a_2 = -a_1$, et si j'effectue la substitution $(x_1 x_2 x_3)$, je retrouve le groupe (XL), nº **127**. (Il suffit de changer a_1 en $-a_1$.)

131. J'arrive à la transformation (**6**),

$$Xf = a_1 x_1p_1 + a_2 x_2p_2 + a_3(x_3p_3 + x_4p_4).$$

Soit
$$Yf = \sum_{\alpha,\beta} b_{\alpha\beta} x_\alpha p_\beta.$$

Si nous cherchons à quelles conditions on aura

$$(XY) = \lambda.Xf + \mu.Yf,$$

on trouve le système d'équations que voici :

$$
\begin{array}{lll}
\lambda a_1 + \mu b_{11} = 0, & (a_1 - a_2 - \mu)\, b_{12} = 0, & (a_2 - a_1 - \mu)\, b_{21} = 0, \\
\lambda a_2 + \mu b_{22} = 0, & (a_1 - a_3 - \mu)\, b_{13} = 0, & (a_2 - a_3 - \mu)\, b_{23} = 0, \\
\lambda a_3 + \mu b_{33} = 0, & (a_1 - a_3 - \mu)\, b_{14} = 0, & (a_2 - a_3 - \mu)\, b_{24} = 0, \\
\lambda a_3 + \mu b_{44} = 0, & (a_3 - a_1 - \mu)\, b_{31} = 0, & (a_3 - a_2 - \mu)\, b_{32} = 0, \\
\mu b_{34} = 0, \quad \mu b_{43} = 0, & (a_3 - a_1 - \mu)\, b_{41} = 0, & (a_3 - a_2 - \mu)\, b_{42} = 0.
\end{array}
$$

132. Si l'on fait $\mu = 0$, comme $\lambda a_1 + \mu b_{11} = 0$, $a_1 \neq 0$, on en conclut $\lambda = 0$. Le cas a déjà été traité (Chap. II). On peut donc appliquer (en supposant $\mu \neq 0$) la remarque du n° 41 ; c'est-à-dire que l'on a

$$b_{11} = b_{22} = b_{33} = b_{44} = b_{34} = b_{43} = 0.$$

Il reste à discuter les équations

$$
\begin{array}{ll}
(a_1 - a_2 - \mu)\, b_{12} = 0, & (a_2 - a_1 - \mu)\, b_{21} = 0, \\
(a_1 - a_3 - \mu)\, b_{13} = 0, & (a_2 - a_3 - \mu)\, b_{23} = 0, \\
(a_1 - u_3 - \mu)\, b_{14} = 0, & (a_2 - a_3 - \mu)\, b_{24} = 0, \\
(a_3 - a_1 - \mu)\, b_{31} = 0, & (a_3 - a_2 - \mu)\, b_{32} = 0, \\
(a_3 - a_1 - \mu)\, b_{41} = 0, & (a_3 - a_2 - \mu)\, b_{42} = 0.
\end{array}
$$

133. Je fais d'abord $\mu = a_1 - a_2$.

Alors

$$b_{21} = b_{13} = b_{14} = b_{32} = b_{42} = 0.$$

Puis

$$
\begin{array}{ll}
(2a_2 - a_1 - a_3)\, b_{23} = 0, & (a_2 + a_3 - 2a_1)\, b_{31} = 0, \\
(2a_2 - a_1 - a_3)\, b_{24} = 0, & (a_2 + a_3 - 2a_1)\, b_{41} = 0.
\end{array}
$$

On a donc, tout d'abord, le groupe

$$\text{(XLII)} \qquad [a_1 x_1 p_1 + a_2 x_2 p_2 + a_3 (x_3 p_3 + x_4 p_4),\ x_1 p_2],$$

dont les équations finies sont, en posant $\mu_0 = \dfrac{\mu}{\lambda(a_1 - a_2)}(e^{\lambda(a_1 - a_2)} - 1)$,

$$y_1 = x_1 e^{\lambda a_1}, \qquad y_2 = e^{\lambda a_2}(\mu_0 x_1 + x_2), \qquad y_3 = x_3 e^{\lambda a_3} \quad \text{et} \quad y_4 = x_4 e^{\lambda a_3}.$$

134. Je fais, au n° 133, $a_1 = 2a_2 - a_3$.

Je trouve

$$Yf = b_{12} x_1 p_2 + b_{23} x_2 p_3 + b_{24} x_2 p_4.$$

En effectuant le changement de variables indiqué au n° 6, il vient

$$Yf = b_{12}\frac{a}{b}y_1q_2 + \frac{by_2}{cf-ed}[(b_{23}f - b_{24}d)q_3 + (b_{24}c - b_{23}e)q_4].$$

On fera

$$b_{24}c - b_{23}e = 0, \qquad \frac{b(b_{23}f - b_{24}d)}{cf-ed} = \frac{ab_{12}}{b},$$

et l'on arrivera ainsi au groupe

(XLIII) $\quad [(2a_2 - a_3)x_1p_1 + a_2x_2p_2 + a_3(x_3p_3 + x_4p_4),\ x_1p_2 + x_2p_3],$

qui a pour équations finies, en posant $\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda(a_2-a_3)}(e^{\lambda(a_2-a_3)} - 1)$,

$$y_1 = x_1e^{\lambda(2a_2-a_3)}, \qquad y_2 = e^{\lambda a_2}(\mu_0x_1 + x_2),$$
$$y_3 = e^{\lambda a_3}(\tfrac{1}{2}\mu_0^2x_1 + \mu_0x_2 + x_3), \qquad y_4 = x_4e^{\lambda a_3}.$$

135. Je reviens au n° **133**, je fais $a_2 = 2a_1 - a_3$.

Je trouve

$$Yf = b_{12}x_1p_2 + b_{31}x_3p_1 + b_{41}x_4p_1,$$

ou (n° 6)

$$Yf = b_{12}\frac{a}{b}y_1q_2 + \frac{q_1}{a}[(b_{31}c + b_{41}e)y_3 + (b_{31}d + b_{41}f)y_4].$$

Soit

$$b_{31}d + b_{41}f = 0, \qquad b_{31}c + b_{41}e = \frac{a^2}{b}b_{12}.$$

Effectuons, de plus, la substitution (x_1x_3). On arrive au groupe

(XLIV) $\quad [(2a_2 - a_3)x_3p_3 + a_2x_2p_2 + a_3(x_1p_1 + x_4p_4),\ x_1p_2 + x_2p_3].$

Ses équations finies sont, en posant $\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda(a_3-a_2)}(e^{\lambda(a_3-a_2)} - 1)$,

$$y_1 = x_1e^{\lambda a_3}, \qquad y_2 = e^{\lambda a_2}(\mu_0x_1 + x_2),$$
$$y_3 = e^{\lambda(2a_2-a_3)}(\tfrac{1}{2}\mu_0^2x_1 + \mu_0x_2 + x_3), \qquad y_4 = x_4e^{\lambda a_3}.$$

136. Je reviens au n° **132**. Je fais $\mu = a_1 - a_3$.

Alors

$$b_{12} = b_{23} = b_{24} = b_{31} = b_{41} = 0.$$

Puis

$$(a_2 + a_3 - 2a_1)b_{21} = 0, \qquad (2a_3 - a_1 - a_2)b_{32} = 0,$$
$$(2a_3 - a_1 - a_2)b_{42} = 0.$$

On trouve

$$Yf = b_{13}x_1p_3 + b_{14}x_1p_4$$

ou bien (n° 6)

$$\mathrm{Y}f = \frac{a y_1}{cf - ed}[(b_{13}f - b_{14}d)q_3 + (b_{14}c - b_{13}e)q_4].$$

On fera

$$b_{14}c - b_{13}e = 0, \qquad b_{13}f - b_{14}d = \frac{cf - ed}{a},$$

puis on effectuera la substitution $(x_2 x_3)$, ce qui donnera le groupe

(XLV) $$[a_1 x_1 p_1 + a_2 x_3 p_3 + a_3(x_2 p_2 + x_4 p_4),\ x_1 p_2],$$

qui a pour équations finies, en posant $\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda(a_1 - a_3)}(e^{\lambda(a_1 - a_3)} - 1)$,

$$y_1 = x_1 e^{\lambda a_1}, \qquad y_2 = e^{\lambda a_3}(\mu_0 x_1 + x_2), \qquad y_3 = x_3 e^{\lambda a_2}, \qquad y_4 = x_4 e^{\lambda a_3}.$$

137. Si, au n° 136, je fais

$$a_2 = 2a_1 - a_3, \qquad \mathrm{Y}f = b_{13}x_1 p_3 + b_{14}x_1 p_4 + b_{21}x_2 p_1,$$

ou bien (n° 6)

$$\mathrm{Y}f = \frac{a y_1}{cf - ed}[(b_{13}f - b_{14}d)q_3 + (b_{14}c - b_{13}e)q_4] + b_{21}\frac{b}{a}y_2 q_1.$$

On fera

$$b_{14}c - b_{13}e = 0, \qquad b_{13}f - b_{14}d = \frac{b(cf - ed)}{a^2}b_{21},$$

puis on effectuera la substitution $(x_1 x_2)$, et l'on retrouvera le groupe (XLIII), n° 134.

138. Si, au n° 136, je fais

$$a_3 = \frac{a_1 + a_2}{2},$$

je trouve

$$\mathrm{Y}f = b_{13}x_1 p_3 + b_{14}x_1 p_4 + b_{32}x_3 p_2 + b_{42}x_4 p_2,$$

ou (n° 6)

$$\mathrm{Y}f = \frac{a y_1}{cf - ed}[(b_{13}f - b_{14}d)q_3 + (b_{14}c - b_{13}e)q_4] + \frac{q_2}{b}[(b_{32}c + b_{42}e)y_3 + (b_{32}d + b_{42}f)y_4].$$

On fera

$$b_{14}c - b_{13}e = 0, \qquad b_{11}d + b_{42}f = 0,$$

ce qui exige que l'on ait

$$b_{13}b_{32} + b_{14}b_{42} \neq 0.$$

Effectuons alors la substitution $(x_2 x_3)$, on trouve le groupe

$$\text{(XLVI)} \quad [2a_1 x_1 p_1 + 2a_2 x_3 p_3 + (a_1 + a_2)(x_2 p_2 + x_4 p_4),\; x_1 p_2 + x_2 p_3],$$

dont les équations finies sont, en posant $\mu_0 = \dfrac{\mu}{\lambda(a_1 - a_2)}(e^{\lambda(a_1 - a_2)} - 1)$

$$y_1 = x_1 e^{2\lambda a_1}, \qquad y_2 = e^{\lambda(a_1 + a_2)}(\mu_0 x_1 + x_2),$$
$$y_3 = e^{2\lambda a_2}(\tfrac{1}{2}\mu_0^2 x_1 + \mu_0 x_2 + x_3), \qquad y_4 = x_4 e^{\lambda(a_1 + a_2)}.$$

139. Supposons maintenant

$$b_{13} b_{32} + b_{14} b_{42} = 0.$$

Alors les équations

$$b_{14} c - b_{13} e = 0, \qquad b_{32} c + b_{42} e = 0$$

sont compatibles.

On fera

$$c = a b_{13}, \qquad e = a b_{14}, \qquad b = b_{32} d + b_{42} f.$$

Si l'on effectue la substitution $(x_2 x_4 x_3)$, on trouve le groupe

$$\text{(XLVII)} \quad [2a_1 x_1 p_1 + 2a_2 x_4 p_4 + (a_1 + a_2)(x_2 p_2 + x_3 p_3),\; x_1 p_2 + x_3 p_4].$$

Avec la substitution $(x_1 x_3 x_4)$, on l'amène à une autre forme

$$\text{(XLVII)} \quad [2a_1 x_3 p_3 + 2a_2 x_2 p_2 + (a_1 + a_2)(x_1 p_1 + x_4 p_4),\; x_1 p_2 + x_3 p_4].$$

En choisissant, par exemple, la première forme, on a, pour les équations finies du groupe, si l'on pose $\mu_0 = \dfrac{\mu}{\lambda(a_2 - a_1)}(e^{\lambda(a_2 - a_1)} - 1)$,

$$y_1 = x_1 e^{2\lambda a_1}, \quad y_2 = e^{\lambda(a_1 + a_2)}(\mu_0 x_1 + x_2), \quad y_3 = x_3 e^{\lambda(a_1 + a_2)}, \quad y_4 = e^{2\lambda a_2}(\mu_0 x_3 + x_4).$$

140. Je reviens au nº **132**. Je fais $\mu = a_3 - a_1$.

Alors

$$b_{21} = b_{13} = b_{14} = b_{32} = b_{42} = 0.$$

Puis

$$(2a_1 - a_2 - a_3) b_{12} = 0, \qquad (a_1 + a_2 - 2a_3) b_{23} = 0,$$
$$(a_1 + a_2 - 2a_3) b_{24} = 0.$$

On trouve

$$Yf = b_{31} x_3 p_1 + b_{41} x_4 p_1 = \frac{q_1}{a}[(b_{31} c + b_{41} e) y_3 + (b_{31} d + b_{41} f) y_4].$$

On fera

$$b_{31} d + b_{41} f = 0, \qquad b_{31} c + b_{41} e = a.$$

En effectuant ensuite la substitution $(x_1 x_2 x_3)$, on arrive au groupe

$$\text{(XLVIII)} \qquad [a_1 x_2 p_2 + a_2 x_3 p_3 + a_3(x_1 p_1 + x_4 p_4),\ x_1 p_2],$$

dont les équations finies sont, en posant $\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda(a_3 - a_1)}[e^{\lambda(a_3-a_1)} - 1]$,

$$y_1 = x_1 e^{\lambda a_3}, \qquad y_2 = e^{\lambda a_1}(\mu_0 x_1 + x_2), \qquad y_3 = x_3 e^{\lambda a_2}, \qquad y_4 = x_4 e^{\lambda a_3}.$$

141. Si, au n° **140**, on fait $a_2 = 2a_1 - a_3$, alors

$$Yf = b_{31} x_3 p_1 + b_{41} x_4 p_1 + b_{12} x_1 p_2$$

ou

$$Yf = \frac{q_1}{a}[(b_{31}c + b_{41}e)y_3 + (b_{31}d + b_{41}f)y_4] + b_{12}\frac{a}{b}y_1 q_2.$$

Soit

$$b_{31}d + b_{41}f = 0, \qquad b_{31}c + b_{41}e = \frac{a^2}{b}b_{12};$$

effectuons ensuite la substitution $(x_1 x_2 x_3)$, on retrouve le groupe (XLIV), n° **135**.

142. Si, au n° **140**, on fait $a_3 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$, à l'aide de la substitution $(x_1 x_2)$, on retrouve les groupes (XLVI) et (XLVII), n^{os} **138** et **139**.

143. Je prends maintenant pour Xf la transformation (7),

$$a_2 x_2 p_2 + a_3(x_3 p_3 + x_4 p_4),$$

si nous nous reportons au n° **131**, comme $\lambda a_2 + \mu b_{22} = 0$, l'hypothèse $\mu = 0$ exige $\lambda = 0$. On peut donc supposer $\mu \neq 0$, alors (n° **41**), on peut supposer $\lambda = 0$.

Les équations du n° **132** deviennent

$$\begin{array}{ll}
(a_2 + \mu)b_{12} = 0, & (a_2 - \mu)b_{21} = 0, \\
(a_3 + \mu)b_{13} = 0, & (a_2 - a_3 - \mu)b_{23} = 0, \\
(a_3 + \mu)b_{14} = 0, & (a_2 - a_3 - \mu)b_{24} = 0, \\
(a_3 - \mu)b_{31} = 0, & (a_3 - a_2 - \mu)b_{32} = 0, \\
(a_3 - \mu)b_{41} = 0, & (a_3 - a_2 - \mu)b_{42} = 0.
\end{array}$$

144. Je suppose d'abord $\mu = -a_2$. Alors

$$b_{21} = b_{13} = b_{14} = b_{32} = b_{42} = 0,$$

$$\begin{array}{ll}
(2a_2 - a_3)b_{23} = 0, & (a_2 + a_3)b_{31} = 0, \\
(2a_2 - a_3)b_{24} = 0, & (a_2 + a_3)b_{41} = 0.
\end{array}$$

On a d'abord le groupe

$$\text{(XLIX)} \qquad [a_2 x_2 p_2 + a_3(x_3 p_3 + x_4 p_4),\ x_1 p_2],$$

qui a pour équations finies, en posant $\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda a_2}(1 - e^{-\lambda a_2})$,

$$y_1 = x_1, \qquad y_2 = e^{\lambda a_2}(\mu_0 x_1 + x_2), \qquad y_3 = x_3 e^{\lambda a_3}, \qquad y_4 = x_4 e^{\lambda a_3}.$$

145. Si, au n° **144**, je fais $a_3 = 2a_2$, alors

$$Yf = b_{12} x_1 p_2 + b_{23} x_2 p_3 + b_{24} x_2 p_4$$

ou

$$Yf = b_{12}\frac{a}{b} y_1 q_2 + \frac{b y_2}{cf - ed}[(b_{23} f - b_{24} d) q_3 + (b_{24} c - b_{23} e) q_4] \qquad (\text{n}^\circ\ 6).$$

On fera

$$b_{24} c - b_{23} e = 0, \qquad b_{23} f - b_{24} d = \frac{a}{b^2}(cf - ed) b_{12}.$$

On a ainsi le groupe

$$\text{(L)} \qquad [x_2 p_2 + 2(x_3 p_3 + x_4 p_4),\ x_1 p_2 + x_2 p_3]$$

dont les équations finies sont, en posant $\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda}(1 - e^{-\lambda})$,

$$y_1 = x_1, \qquad y_2 = e^{\lambda}(\mu_0 x_1 + x_2), \qquad y_3 = e^{2\lambda}(\tfrac{1}{2}\mu_0^2 x_1 + \mu_0 x_2 + x_3), \qquad y_4 = x_4 e^{2\lambda}.$$

146. Si, au n° **144**, je fais $a_2 = -a_1$, alors

$$Yf = b_{12} x_1 p_2 + b_{31} x_3 p_1 + b_{41} x_4 p_1$$

ou (n° 6)

$$Yf = b_{12}\frac{a}{b} y_1 q_2 + \frac{q_1}{a}[(b_{31} c + b_{41} e) y_3 + (b_{31} d + b_{41} f) y_4].$$

On fera

$$b_{31} d + b_{41} f = 0, \qquad b_{31} c + b_{41} e = \frac{a^2}{b} b_{12},$$

puis on effectuera la substitution $(x_1 x_2 x_3)$, et l'on aura ainsi le groupe

$$\text{(LI)} \qquad [x_1 p_1 - x_3 p_3 + x_4 p_4,\ x_1 p_2 + x_2 p_3].$$

Les équations finies sont, en posant $\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda}(e^{\lambda} - 1)$,

$$y_1 = x_1 e^{\lambda}, \qquad y_2 = \mu_0 x_1 + x_2, \qquad y_3 = e^{-\lambda}(\tfrac{1}{2}\mu_0^2 x_1 + \mu_0 x_2 + x_3), \qquad y_4 = x_4 e^{\lambda}.$$

147. Je reviens au n° **143**. Je fais $\mu = a_2$.

Alors

$$b_{12}=b_{23}=b_{24}=b_{31}=b_{41}=0,$$

$$(a_2+a_3)b_{13}=0, \qquad (a_3-2a_2)b_{32}=0,$$

$$(a_2+a_3)b_{14}=0, \qquad (a_3-2a_2)b_{42}=0.$$

A l'aide de la substitution $(x_1 x_2)$ on trouve d'abord le groupe

(LII) $$[a_2x_1p_1+a_3(x_3p_3+x_4p_4),\ x_1p_2].$$

En posant $\mu_0=\frac{\mu}{\lambda a_2}(e^{\lambda a_2}-1)$, on a, pour les équations finies,

$$y_1=x_1e^{\lambda a_2}, \qquad y_2=\mu_0x_1+x_2, \qquad y_3=x_3e^{\lambda a_3}, \qquad y_4=x_4e^{\lambda a_3}.$$

148. Si, au n° **147**, je fais $a_2=-a_3$, alors

$$Yf=b_{21}x_2y_1+b_{13}x_1p_3+b_{14}x_1p_4$$

ou (n° 6)

$$Yf=b_{21}\frac{b}{a}y_2q_1+ay_1\frac{1}{cf-ed}[(b_{13}f-b_{14}d)q_3+(b_{14}c-b_{13}e)q_4].$$

On fera

$$b_{14}c-b_{13}e=0,$$

puis

$$b_{13}f-b_{14}d=\frac{b}{a^2}(cf-ed)b_{21}.$$

Alors, à l'aide de la substitution $(x_1 x_2)$ on trouve le groupe

(LIII) $$[-x_1p_1+x_3p_3+x_4p_4,\ x_1p_2+x_2p_3]$$

dont les équations finies sont, en posant $\mu_0=\frac{\mu}{\lambda}(1-e^{-\lambda})$,

$$y_1=x_1e^{-\lambda}, \qquad y_2=\mu_0x_1+x_2, \qquad y_3=e^{\lambda}(\tfrac{1}{2}\mu_0^2x_1+\mu_0x_2+x_3), \qquad y_4=e^{\lambda}x_4.$$

149. Si, au n° **147**, je fais $a_3=2a_2$, alors

$$Yf=b_{21}x_2p_1+b_{32}x_3p_2+b_{42}x_4p_2$$

ou (n° 6)

$$Yf=b_{21}\frac{b}{a}y_2q_1+\frac{q_2}{b}[(b_{32}c+b_{42}e)y_3+(b_{32}d+b_{42}f)y_4].$$

Faisons

$$b_{32}d+b_{42}f=0, \qquad b_{32}c+b_{42}e=\frac{b^2}{a}b_{21}.$$

A l'aide de la substitution $(x_1 x_3)$ on arrive au groupe

(LIV) $$[x_2 p_2 + 2(x_1 p_1 + x_4 p_4),\ x_1 p_2 + x_2 p_3].$$

En posant $\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda}(e^\lambda - 1)$, on a, pour les équations finies,

$$y_1 = x_1 e^{2\lambda},\qquad y_2 = e^\lambda(\mu_0 x_1 + x_2),\qquad y_3 = \tfrac{1}{2}\mu_0^2 x_1 + \mu_0 x_2 + x_3,\qquad y_4 = x_4 e^{2\lambda}.$$

150. Je reviens au n° 143. Je fais $\mu = -a_3$.
Alors

$$b_{12} = b_{23} = b_{24} = b_{31} = b_{41} = 0,$$
$$(a_2 + a_3)b_{21} = 0,\qquad (2a_3 - a_2)b_{32} = 0,$$
$$(2a_3 - a_2)b_{42} = 0.$$

On a d'abord

$$Yf = b_{13}x_1 p_3 + b_{14}x_1 p_4 = \frac{a y_1}{cf - ed}[(b_{13}f - b_{14}d)q_3 + (b_{14}c - b_{13}e)q_4].$$

On fera

$$b_{14}c - b_{13}e = 0,\qquad b_{13}f - b_{14}d = \frac{cf - ed}{a}.$$

Puis on effectuera la substitution $(x_2 x_3)$. On obtient ainsi le groupe

(LV) $$[a_2 x_3 p_3 + a_3(x_2 p_2 + x_4 p_4),\ x_1 p_2],$$

qui a pour équations finies, en posant $\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda a_3}(1 - e^{-\lambda a_3})$,

$$y_1 = x_1,\qquad y_2 = e^{\lambda a_3}(\mu_0 x_1 + x_2),\qquad y_3 = x_3 e^{\lambda a_2},\qquad y_4 = x_4 e^{\lambda a_3}.$$

151. Si, au n° 150, je fais $a_2 = -a_3$, de sorte que

$$Yf = b_{21}x_2 p_1 + b_{13}x_1 p_3 + b_{14}x_1 y_4$$

ou (n° 6)

$$Yf = b_{21}\frac{b}{a}y_2 q_1 + \frac{a y_1}{cf - ed}[(b_{13}f - b_{14}d)q_3 + (b_{14}c - b_{13}e)q_4],$$

on fera

$$b_{14}c = b_{13}e,$$

puis on effectuera sur le groupe obtenu la substitution $(x_1 x_2)$, et l'on retrouvera le groupe (LIII), n° 148.

152. Si, au n° 150, je suppose $a_2 = 2a_3$, on trouve

$$Yf = b_{13}x_1 p_3 + b_{14}x_1 p_4 + b_{32}x_3 p_2 + b_{42}x_4 p_2$$

ou (n° 6)

$$\mathrm{Y}f = \frac{a y_1}{cf - ed}[(b_{13}f - b_{14}d)q_3 + (b_{14}c - b_{13}e)q_4]$$
$$+ \frac{q_2}{b}[(b_{32}c + b_{42}e)y_3 + (b_{32}d + b_{42}f)y_4].$$

Supposons d'abord

$$b_{14}b_{42} + b_{13}b_{32} \neq 0.$$

On fera

$$b_{14}c - b_{13}e = 0, \qquad b_{32}d + b_{42}f = 0,$$
$$\frac{a(b_{13}f - b_{14}d)}{cf - ed} = \frac{b_{22}c + b_{42}e}{b}.$$

A l'aide de la substitution (x_2x_3), on arrive alors au groupe

(LVI) $$[x_2p_2 + 2x_3p_3 + x_4p_4,\ x_1p_2 + x_2p_3],$$

qui a pour équations finies, en posant $\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda}(1 - e^{-\lambda})$,

$$y_1 = x_1, \qquad y_2 = e^{\lambda}(\mu_0x_1 + x_2), \qquad y_3 = e^{2\lambda}(\tfrac{1}{2}\mu_0^2x_1 + \mu_0x_2 + x_3), \qquad y_4 = x_4e^{\lambda}.$$

153. Supposons maintenant

$$b_{14}b_{42} + b_{13}b_{32} = 0 \qquad (\text{n}^\circ\ 152).$$

On fera alors

$$b_{14}c - b_{13}e = 0, \qquad b_{32}c + b_{42}e = 0,$$
$$\frac{a(b_{13}f - b_{14}d)}{cf - ed} = \frac{1}{b}(b_{32}d + b_{42}f).$$

Le groupe obtenu peut se mettre sous les deux formes canoniques suivantes.

A l'aide de la substitution $(x_2x_4x_3)$, on trouve

(LVII) $$[x_2p_2 + x_3p_3 + 2x_4p_4,\ x_1p_2 + x_3p_4].$$

Tandis que la substitution $(x_1x_3x_4)$ donne

(LVII) $$[x_1p_1 + 2x_2p_2 + x_4p_4,\ x_1p_2 + x_3p_4].$$

En prenant, par exemple, la première forme, on trouve pour les équations finies, si l'on pose $\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda}(1 - e^{-\lambda})$,

$$y_1 = x_1, \qquad y_2 = e^{\lambda}(\mu_0x_1 + x_2), \qquad y_3 = x_3e^{\lambda}, \qquad y_4 = e^{2\lambda}(\mu_0x_3 + x_4).$$

154. Je reviens au n° **143**, et je fais $\mu = a_3$. Alors

$$b_{21} = b_{13} = b_{14} = b_{32} = b_{42} = 0.$$

Puis

$$(a_2+a_3)b_{12}=0, \qquad (a_2-2a_3)b_{23}=0,$$
$$(a_2-2a_3)b_{24}=0.$$

On trouve

$$Yf=b_{31}x_3p_1+b_{41}x_4p_1$$

ou (n° 6)

$$Yf=\frac{q_1}{a}[(b_{31}c+b_{41}e)y_3+(b_{31}d+b_{41}f)y_4].$$

On fera

$$b_{31}d+b_{41}f=0, \qquad b_{31}c+b_{41}e=a.$$

Puis l'on effectuera la substitution $(x_1x_2x_3)$. On trouve ainsi le groupe

(LVIII) $$[a_2x_3p_3+a_3(x_4p_4+x_1p_1),\ x_1p_2]$$

qui a pour équations finies, en posant $\mu_0=\frac{\mu}{\lambda a_3}(e^{\lambda a_3}-1)$,

$$y_1=x_1e^{\lambda a_3}, \qquad y_2=\mu_0x_1+x_2, \qquad y_3=x_3e^{\lambda a_2}, \qquad y_4=x_4e^{\lambda a_3}.$$

155. Si, au n° 154, on fait $a_2=-a_3$, alors

$$Yf=b_{12}x_1p_2+b_{31}x_3p_1+b_{41}b_4p_1$$

ou (n° 6)

$$Yf=b_{12}\frac{a}{b}y_1q_2+\frac{q_1}{a}[(b_{31}c+b_{41}e)y_3+(b_{31}d+b_{41}f)y_4].$$

On fera

$$b_{31}d+b_{41}f=0, \qquad b_{31}c+b_{41}e=\frac{a^2}{b}b_{12},$$

puis l'on effectuera la substitution $(x_1x_2x_3)$. On retrouve ainsi le groupe (LI), n° 146.

156. Si, au n° 154, je fais $a_2=2a_3$, je trouve

$$Yf=b_{31}x_3p_1+b_{41}x_4p_1+b_{23}x_2p_3+b_{24}x_2p_4$$

ou (n° 6)

$$Yf=\frac{q_1}{a}[(b_{31}c+b_{41}e)y_3+(b_{31}d+b_{41}f)y_4]$$
$$+\frac{by_2}{cf-ed}[(b_{23}f-b_{24}d)q_3+(b_{24}c-b_{23}e)q_4].$$

Si l'on suppose

$$b_{23}b_{31}+b_{24}b_{41}\neq 0,$$

à l'aide de la substitution $(x_1 x_3 x_2)$, on obtient le groupe

(LIX) $$[2x_1p_1 + x_2p_2 + x_4p_4,\ x_1p_2 + x_2p_3],$$

dont les équations finies sont, en posant $\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda}(e^\lambda - 1)$,

$$y_1 = x_1 e^{2\lambda}, \qquad y_2 = e^\lambda(\mu_0 x_1 + x_2), \qquad y_3 = \tfrac{1}{2}\mu_0^2 x_1 + \mu_0 x_2 + x_3, \qquad y_4 = e^\lambda x_4.$$

157. Supposons, au contraire,

$$b_{23}b_{31} + b_{24}b_{41} = 0 \qquad (\text{n}^\circ\ 156);$$

alors on peut poser

$$b_{31}d + b_{41}f = 0, \qquad b_{23}f - b_{24}d = 0,$$
$$(cf - ed)(b_{31}c + b_{41}e) = ab(b_{24}c - b_{23}e).$$

Effectuant alors la substitution $(x_1 x_2 x_3)$, on trouve le groupe

(LX) $$[x_1p_1 + 2x_3p_3 + x_4p_4,\ x_1p_2 + x_3p_4],$$

et, avec la substitution $(x_1 x_4 x_2)$, le même groupe prend la forme

(LX) $$[2x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3,\ x_1p_2 + x_3p_4].$$

En ayant égard à la première forme, on trouve, pour les équations finies, si l'on pose $\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda}(e^\lambda - 1)$,

$$y_1 = x_1 e^\lambda, \qquad y_2 = \mu_0 x_1 + x_2, \qquad y_3 = x_3 e^{2\lambda}, \qquad y_4 = e^\lambda(\mu_0 x_3 + x_4).$$

158. Je reviens au n° 143, et je fais $\mu = a_2 - a_3$.

Alors on a

$$b_{21} = b_{13} = b_{14} = b_{32} = b_{42} = 0,$$

puis

$$(2a_2 - a_3)b_{12} = 0, \qquad (2a_3 - a_2)b_{31} = 0,$$
$$(2a_3 - a_2)b_{41} = 0.$$

Donc

$$Yf = b_{23}x_2p_3 + b_{24}x_2p_4 = \frac{by_2}{cf - ed}[(b_{23}f - b_{24}d)q_3 + (b_{24}c - b_{23}e)q_4] \qquad (\text{n}^\circ\ 6).$$

Faisons

$$b_{24}c - b_{23}e = 0, \qquad b_{23}f - b_{24}d = \frac{cf - ed}{b}.$$

A l'aide de la substitution $(x_1 x_3 x_2)$, on arrive au groupe

(LXI) $$[a_2x_1p_1 + a_3(x_2p_2 + x_4p_4),\ x_1p_2].$$

Équations finies

$$\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda(a_2 - a_3)}[e^{\lambda(a_2-a_3)} - 1],$$

$$y_1 = x_1 e^{\lambda a_2}, \qquad y_2 = e^{\lambda a_3}(\mu_0 x_1 + x_2), \qquad y_3 = x_3, \qquad y_4 = x_4 e^{\lambda a_3}.$$

159. Si, au n° **158**, on fait $a_3 = 2a_2$, on retrouve le groupe (L), n° **145**.

160. Si, au n° **158**, on fait $a_2 = 2a_3$, en se reportant au n° **156**, on voit que l'on retombe sur les groupes (LIX) et (LX), n^{os} **156** et **157**.

161. Je reviens au n° **143**. Je fais $\mu = a_3 - a_2$.

Alors

$$b_{12} = b_{23} = b_{24} = b_{31} = b_{41} = 0.$$

Puis

$$(2a_2 - a_3)b_{21} = 0, \qquad (2a_3 - a_2)b_{13} = 0,$$
$$(2a_3 - a_2)b_{14} = 0.$$

Alors

$$Yf = b_{32}x_3p_2 + b_{42}x_4p_2 = \frac{q_2}{b}[(b_{32}c + b_{42}e)y_3 + (b_{32}d + b_{42}f)y_4] \qquad (\text{n° } 6).$$

On fera

$$b_{32}d + b_{42}f = 0, \qquad b_{32}c + b_{42}e = b.$$

A l'aide de la substitution $(x_1 x_3)$, le groupe prend la forme

$$\text{(LXII)} \qquad [a_2x_2p_2 + a_3(x_1p_1 + x_4p_4),\ x_1p_2].$$

Équations finies

$$\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda(a_3 - a_1)}[e^{\lambda(a_3-a_2)} - 1],$$

$$y_1 = x_1 e^{\lambda a_3}, \qquad y_2 = e^{\lambda a_2}(\mu_0 x_1 + x_2), \qquad y_3 = x_3, \qquad y_4 = x_4 e^{\lambda a_3}.$$

162. Si, au n° **161**, on fait $a_3 = 2a_3$, la substitution $(x_1 x_3)$ nous fait retrouver le groupe (LIV), n° **149**.

163. Si, au n° **161**, on fait $a_2 = 2a_3$, on a

$$Yf = b_{32}x_3p_2 + b_{42}x_4p_2 + b_{13}x_1p_3 + b_{14}x_1p_4.$$

En se reportant aux n^{os} **152**, **153**, on voit qu'on retombera sur des groupes déjà obtenus.

164. Je prends maintenant pour Yf la transformation (**8**),

$$Xf = a_1x_1p_1 + a_2x_2p_2.$$

C'est la transformation (6) où l'on suppose $a_3 = 0$.

Si l'on se reporte au n° 131, on a $\lambda a_1 + \mu b_{11} = 0$, de sorte que, si $\mu = 0$, on en déduit $\lambda = 0$. Dès lors, le cas ayant déjà été traité, nous pouvons supposer $\mu \neq 0$ et, par suite (n° 41), il nous est permis de supposer $\lambda = 0$, donc

$$b_{11} = b_{22} = b_{33} = b_{44} = b_{34} = b_{43} = 0.$$

Il reste à discuter les équations suivantes (*voir* n° 132)

$$(a_1 - a_2 - \mu) b_{12} = 0, \qquad (a_2 - a_1 - \mu) b_{21} = 0;$$

$$(a_1 - \mu) b_{13} = 0, \quad (a_2 - \mu) b_{23} = 0, \quad (a_1 + \mu) b_{31} = 0, \quad (a_2 + \mu) b_{32} = 0,$$
$$(a_1 - \mu) b_{14} = 0, \quad (a_2 - \mu) b_{24} = 0, \quad (a_1 + \mu) b_{41} = 0, \quad (a_2 + \mu) b_{42} = 0.$$

165. Je suppose d'abord $\mu = a_1 - a_2$. Alors

$$b_{21} = b_{13} = b_{14} = b_{32} = b_{42} = 0.$$

Puis

$$(2a_2 - a_1) b_{23} = 0, \qquad (2a_1 - a_2) b_{31} = 0,$$
$$(2a_2 - a_1) b_{24} = 0, \qquad (2a_1 - a_2) b_{41} = 0.$$

On a d'abord le groupe

(LXIII) $$[a_1 x_1 p_1 + a_2 x_2 p_2, \ x_1 p_2],$$

dont les équations finies sont, en posant $\mu_0 = \dfrac{\mu}{\lambda(a_1 - a_2)}[e^{\lambda(a_1 - a_2)} - 1]$,

$$y_1 = x_1 e^{\lambda a_1}, \qquad y_2 = e^{\lambda a_2}(\mu_0 x_1 + x_2), \qquad y_3 = x_3, \qquad y_4 = x_4.$$

166. Si, au n° 165, on fait $a_1 = 2a_2$, on obtient le groupe

(LXIV) $$[2x_1 p_1 + x_2 p_2, \ x_1 p_2 + x_2 p_3].$$

Équations finies :

$$\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda}(e^\lambda - 1),$$

$$y_1 = x_1 e^{2\lambda}, \qquad y_2 = e^\lambda(\mu_0 x_1 + x_2), \qquad y_3 = \tfrac{1}{2}\mu_0^2 x_1 + \mu_0 x_2 + x_3, \qquad y_4 = x_4.$$

167. Si, au n° 165, on fait $a_2 = 2a_1$, et si l'on effectue la substitution $(x_1 x_2 x_3)$, on trouve le groupe

(LXV) $$[x_2 p_2 + 2x_3 p_3, \ x_1 p_2 + x_2 p_3].$$

Équations finies :

$$\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda}(1 - e^{-\lambda}),$$

$$y_1 = x_1, \qquad y_2 = e^{\lambda}(\mu_0 x_1 + x_2), \qquad y_3 = e^{2\lambda}(\tfrac{1}{2}\mu_0^2 x_1 + \mu_0 x_2 + x_3), \qquad y_4 = x_4.$$

168. Je reviens au n° 164. Je fais $\mu = a_1$.

Alors

$$b_{12} = b_{23} = b_{24} = b_{31} = b_{41} = 0,$$

$$(a_2 - 2a_1)b_{21} = 0, \qquad (a_1 + a_2)b_{32} = 0,$$
$$(a_1 + a_2)b_{42} = 0.$$

$$Yf = b_{13}x_1p_3 + b_{14}x_1p_4 = \frac{ay_1}{cf - ed}[(b_{13}f - b_{14}d)q_3 + (b_{14}c - b_{13}e)q_4] \qquad (\text{n}^\circ\ 6).$$

A l'aide de la substitution $(x_2 x_3)$ on trouve le groupe

(LXVI) $$[a_1x_1p_1 + a_2x_3p_3,\ x_1p_2],$$

dont les équations finies sont, en posant $\mu_0 = \dfrac{\mu}{\lambda a_1}(e^{\lambda a_1} - 1)$,

$$y_1 = x_1e^{\lambda a_1}, \qquad y_2 = \mu_0x_1 + x_2, \qquad y_3 = x_3e^{\lambda a_2}, \qquad y_4 = x_4.$$

169. Si, au n° 168, on fait $a_2 = 2a_1$, à l'aide de la substitution (x_1x_2) on retrouve le groupe (LXIV), n° 166.

170. Si, au n° 168, on fait $a_2 = -a_1$, on trouve

$$Yf = b_{13}x_1p_3 + b_{14}x_1p_4 + b_{32}x_3p_2 + b_{42}x_4p_2.$$

En se reportant aux n^{os} 138, 139, on en conclut l'existence de deux nouveaux groupes.

A l'aide de la substitution (x_2x_3) le premier groupe prend la forme

(LXVII) $$[x_1p_1 + x_3p_3,\ x_1p_2 + x_2p_3].$$

Équations finies :

$$\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda}(e^{\lambda} - 1),$$

$$y_1 = x_1e^{\lambda}, \qquad y_2 = \mu_0x_1 + x_2, \qquad y_3 = e^{-\lambda}(\tfrac{1}{2}\mu_0^2x_1 + \mu_0x_2 + x_3), \qquad y_4 = x_4.$$

171. A l'aide de la substitution $(x_2x_4x_3)$ le second groupe prend la forme

(LXVIII) $$[x_1p_1 - x_4p_4,\ x_1p_2 + x_3p_4]$$

ou, à l'aide de la substitution $(x_1 x_3 x_4)$, la forme

(LXVIII) $$[x_2 p_2 - x_3 p_3,\ x_1 p_2 + x_3 p_4].$$

Avec la première forme on a, pour les équations finies, en posant

$$\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda}(e^{\lambda} - 1),$$

$$y_1 = x_1 e^{\lambda},\qquad y_2 = \mu_0 x_1 + x_2,\qquad y_3 = x_3,\qquad y_4 = e^{-\lambda}(\mu_0 x_3 + x_4).$$

172. Je reviens au n° 164. Je fais $\mu = -a_1$.

Alors

$$b_{21} = b_{13} = b_{14} = b_{32} = b_{42} = 0,$$

$$(a_2 - 2a_1) b_{12} = 0,\qquad (a_1 + a_2) b_{23} = 0,$$

$$(a_1 + a_2) b_{24} = 0.$$

A l'aide de la substitution $(x_1 x_2 x_3)$ on trouve d'abord le groupe

(LXIX) $$[a_1 x_2 p_2 + a_2 x_3 p_3,\ x_1 p_2].$$

Équations finies :

$$\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda a_1}(1 - e^{-\lambda a_1}),$$

$$y_1 = x_1,\qquad y_2 = \mu_0 x_1 + x_2,\qquad y_3 = x_3 e^{\lambda a_2},\qquad y_4 = x_4.$$

173. Si, au n° 172, on fait $a_2 = 2a_1$, à l'aide de la substitution $(x_1 x_2 x_3)$, on retrouve le groupe (LXV), n° 167.

174. Si, au n° 172, on fait $a_2 = -a_1$, la substitution $(x_1 x_2 x_3)$ nous fait retrouver le groupe (LXVII), n° 170, et à l'aide de la substitution $(x_1 x_2 x_3)$ on retombe sur le groupe (LXVIII), n° 171.

175. J'aborde le cas où l'on prend pour Xf la transformation (9) du Chapitre I

$$Xf = a_1(x_1 p_1 + x_2 p_2) + a_2(x_3 p_3 + x_4 p_4) + x_1 p_2 + x_3 p_4.$$

Si nous prenons

$$Yf = \sum_{\alpha,\beta} b_{\alpha\beta} x_\alpha p_\beta$$

et si nous écrivons que l'on a

$$(XY) = \lambda Xf + \mu Yf,$$

il vient (n° 30)

$$\begin{array}{rl} \lambda a_1 + \mu b_{11} = b_{21}, & (a_1 - a_2 - \mu) b_{13} + b_{23} = 0, \\ \lambda + \mu b_{12} = b_{22} - b_{11}, & (a_1 - a_2 - \mu) b_{14} + b_{24} - b_{13} = 0, \\ \lambda a_1 + \mu b_{22} = - b_{21}, & (a_1 - a_2 - \mu) b_{23} = 0, \\ \lambda a_2 + \mu b_{33} = b_{43}, & (a_1 - a_2 - \mu) b_{24} = b_{23}, \\ \lambda + \mu b_{34} = b_{44} - b_{33}, & (a_2 - a_1 - \mu) b_{31} + b_{41} = 0, \\ \lambda a_2 + \mu b_{44} = - b_{43}, & (a_2 - a_1 - \mu) b_{32} + b_{42} - b_{31} = 0, \\ \mu b_{21} = 0, & (a_2 - a_1 - \mu) b_{42} = b_{41}, \\ \mu b_{43} = 0, & (a_2 - a_1 - \mu) b_{41} = 0. \end{array}$$

176. Si l'on suppose $\mu = 0$, comme l'on a

$$2\lambda a_1 + \mu(b_{11} + b_{22}) = 0,$$

on en conclut $\lambda = 0$. Le cas a donc déjà été traité (Chap. II).

Mais, si $\mu \neq 0$ (n° 41), on peut faire $\lambda = 0$.

On a donc

$$b_{21} = b_{43} = 0, \qquad b_{11} = b_{22} = b_{33} = b_{44} = 0$$

et, par suite,

$$b_{12} = b_{34} = 0.$$

Il reste

$$\begin{array}{ll} (a_1 - a_2 - \mu) b_{13} + b_{23} = 0, & (a_2 - a_1 - \mu) b_{31} + b_{41} = 0, \\ (a_1 - a_2 - \mu) b_{14} + b_{24} - b_{13} = 0, & (a_2 - a_1 - \mu) b_{32} + b_{42} - b_{31} = 0, \\ (a_1 - a_2 - \mu) b_{23} = 0, & (a_2 - a_1 - \mu) b_{42} = b_{41}, \\ (a_1 - a_2 - \mu) b_{24} = b_{23}, & (a_2 - a_1 - \mu) b_{41} = 0. \end{array}$$

177. Soit, d'abord, $\mu = a_1 - a_2$. Alors

$$Yf = b_{13}(x_1 p_3 + x_2 p_4) + b_{14} x_1 p_4$$

ou (n° 8)

$$Yf = b_{13} \frac{a}{c} (y_1 q_3 + y_2 q_4) + \left[\frac{b_{13}}{c^2} (bc - ad) + b_{14} \frac{a}{c} \right] y_1 q_4.$$

On fera

$$b_{13}(bc - ad) + b_{14} ac = 0 \qquad (ac \neq 0).$$

Si b_{13} est différent de zéro, on pourra, par exemple, de cette équation tirer d. Le groupe pourra se mettre sous deux formes canoniques différentes. La substitution $(x_2 x_3)$ nous donne la forme

(LXX) $[a_1(x_1 p_1 + x_3 p_3) + a_2(x_2 p_2 + x_4 p_4) + x_1 p_3 + x_2 p_4, \; x_1 p_2 + x_3 p_4],$

et la substitution $(x_1 x_2 x_3 x_4)$ la forme

(LXX) $[a_1(x_1p_1 + x_3p_3) + a_2(x_2p_2 + x_4p_4) + x_3p_1 + x_4p_2,\ x_1p_2 + x_3p_4]$.

Avec la première forme canonique on a, pour les équations finies, en posant $\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda(a_1 - a_2)}[e^{\lambda(a_1-a_2)} - 1]$,

$$y_1 = x_1 e^{\lambda a_1}, \qquad y_2 = e^{\lambda a_2}(\mu_0 x_1 + x_2), \qquad y_3 = e^{\lambda a_1}(\lambda x_1 + x_3),$$
$$y_4 = e^{\lambda a_2}(\lambda\mu_0 x_1 + \lambda x_2 + \mu_0 x_3 + x_4).$$

178. Si, au n° 177, l'on suppose $b_{13} = 0$, et si l'on fait la substitution $(x_2 x_4)$, on trouve

(LXXI) $[a_1(x_1p_1 + x_4p_4) + a_2(x_2p_2 + x_3p_3) + x_1p_4 + x_3p_2,\ x_1p_2]$.

Équations finies :

$$\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda(a_1 - a_2)}[e^{\lambda(a_1-a_2)} - 1],$$
$$y_1 = x_1 e^{\lambda a_1}, \qquad y_2 = e^{\lambda a_2}(\mu_0 x_1 + x_2 + \lambda x_3), \qquad y_3 = e^{\lambda a_2} x_3, \qquad y_4 = e^{\lambda a_1}(\lambda x_1 + x_4).$$

179. Je reviens au n° 156. Je fais $\mu = a_2 - a_1$; alors

$$Yf = b_{31}(x_3p_1 + x_4p_2) + b_{32}x_3p_2.$$

La substitution $(x_1 x_3)(x_2 x_4)$ nous ramène aux cas traités aux n^{os} 177 et 178.

180. J'arrive à la transformation (10)

$$Xf = a_1(x_1p_1 + x_2p_2) + x_1p_2 + x_3p_4,$$

qui se déduit de (9) par l'hypothèse $a_2 = 0$. Le raisonnement fait au n° 176 subsiste, puisqu'il repose sur le seul fait qu'on a $a_1 \neq 0$. On a donc à discuter le système d'équations

$$\begin{aligned}
(a_1 - \mu)b_{13} + b_{23} &= 0, & (a_1 + \mu)b_{31} - b_{41} &= 0,\\
(a_1 - \mu)b_{14} + b_{24} - b_{13} &= 0, & (a_1 + \mu)b_{32} - b_{42} + b_{31} &= 0,\\
(a_1 - \mu)b_{23} &= 0, & (a_1 + \mu)b_{42} + b_{41} &= 0,\\
(a_1 - \mu)b_{24} &= b_{23}, & (a_1 + \mu)b_{41} &= 0.
\end{aligned}$$

181. Soit d'abord $\mu = a_1$. On trouve deux groupes (n^{os} 177, 178); le premier de ces groupes aura l'une des formes canoniques

(LXXII) $[a_1(x_1p_1 + x_3p_3) + x_1p_3 + x_2p_4,\ x_1p_2 + x_3p_4]$

ou

(LXXII) $$[a_1(x_1p_1+x_3p_3)+x_3p_1+x_4p_2,\ x_1p_2+x_3p_4].$$

Équations finies (avec la première forme):

$$\mu_0=\frac{\mu}{\lambda a_1}(e^{\lambda a_1}-1),$$
$$y_1=x_1e^{\lambda a_1},\qquad y_2=\mu_0x_1+x_2,\qquad y_3=e^{\lambda a_1}(\lambda x_1+x_3),$$
$$y_4=\lambda\mu_0x_1+\lambda x_2+\mu_0x_3+x_4.$$

182. Dans le second groupe obtenu (n° **181**) faisons la substitution (x_2x_4); il vient

(LXXIII) $$[a_1(x_1p_1+x_4p_4)+x_4p_4+x_3p_2,\ x_1p_2].$$

Équations finies :

$$\mu_0=\frac{\mu}{\lambda a_1}(e^{\lambda a_1}-1),$$
$$y_1=x_1e^{\lambda a_1},\qquad y_2=\mu_0x_1+x_2+\lambda x_3,\qquad y_3=x_3,\qquad y_4=e^{\lambda a_1}(\lambda x_1+x_4).$$

183. Je reviens au n° **180**. Je fais $\mu=-a_1$; cela me donne deux groupes. A l'aide des substitutions $(x_1x_2x_4x_3)$ et (x_1x_4) je mets le premier groupe sous les deux formes

(LXXIV) $$[a_1(x_2p_2+x_4p_4)+x_1p_3+x_2p_4,\ x_1p_2+x_3p_4]$$

ou

$$[a_1(x_2p_2+x_4p_4)+x_3p_1+x_4p_2,\ x_1p_2+x_3p_4].$$

Équations finies (avec la première forme) :

$$\mu_0=\frac{\mu}{\lambda a_1}(1-e^{-\lambda a_1}),$$
$$y_1=x_1,\qquad y_2=e^{\lambda a_1}(\mu_0x_1+x_2),\qquad y_3=\lambda x_1+x_3,$$
$$y_4=e^{\lambda a_1}(\lambda\mu_0x_1+\lambda x_2+\mu_0x_3+x_4).$$

184. Le second groupe trouvé au n° **183**, si l'on effectue la substitution (x_3x_1), prend la forme

(LXXV) $$[a_1(x_2p_2+x_3p_3)+x_3p_2+x_1p_4,\ x_1p_2].$$

Équations finies :

$$\mu_0=\frac{\mu}{\lambda a_1}(1-e^{-\lambda a_1}),$$
$$y_1=x_1,\qquad y_2=e^{\lambda a_1}(\mu_0x_1+x_2+\lambda x_3),\qquad y_3=x_3e^{\lambda a_1},\qquad y_4=\lambda x_1+x_4.$$

185. J'arrive au cas où l'on prend pour Xf la transformation (11)

$$Xf = a_1(x_1p_1 + x_2p_2) + a_2(x_3p_3 + x_4p_4) + x_1p_2.$$

Soit

$$Yf = \sum_{\alpha,\beta} b_{\alpha\beta} x_\alpha p_\beta.$$

En écrivant que l'on a

$$(XY) = \lambda Xf + \mu Yf,$$

il vient (n° 31)

$$\begin{array}{lll}
\lambda a_1 + \mu b_{11} = b_{21}, & (a_1 - a_2 - \mu) b_{13} + b_{23} = 0, & (a_2 - a_1 - \mu) b_{31} = 0,\\
\lambda + \mu b_{12} = b_{22} - b_{11}, & (a_1 - a_2 - \mu) b_{14} + b_{24} = 0, & (a_2 - a_1 - \mu) b_{32} = b_{31},\\
\lambda a_1 + \mu b_{22} = - b_{21}, & (a_1 - a_2 - \mu) b_{23} \qquad = 0, & (a_2 - a_1 - \mu) b_{41} = 0,\\
\lambda a_2 + \mu b_{33} = 0, & (a_1 - a_2 - \mu) b_{24} \qquad = 0, & (a_2 - a_1 - \mu) b_{42} = b_{41},
\end{array}$$

$$\lambda a_2 + \mu b_{44} = 0, \qquad \mu b_{21} = 0, \qquad \mu b_{43} = 0, \qquad \mu b_{34} = 0.$$

186. Si je suppose $\mu = 0$, à cause de l'équation $\lambda a_2 + \mu b_{33} = 0$, par exemple, on voit que $\lambda = 0$. Ce cas ayant déjà été traité, nous pouvons supposer $\mu \neq 0$ et appliquer dès lors la remarque du n° 41, c'est-à-dire supposer $\lambda = 0$.

On a alors

$$b_{21} = b_{43} = b_{34} = b_{12} = b_{11} = b_{22} = b_{33} = b_{44} = 0.$$

Puis

$$\begin{array}{ll}
(a_1 - a_2 - \mu) b_{13} + b_{23} = 0, & (a_2 - a_1 - \mu) b_{32} = b_{31},\\
(a_1 - a_2 - \mu) b_{14} + b_{24} = 0, & (a_2 - a_1 - \mu) b_{42} = b_{41},\\
(a_1 - a_2 - \mu) b_{23} \qquad = 0, & (a_2 - a_1 - \mu) b_{31} = 0,\\
(a_1 - a_2 - \mu) b_{24} \qquad = 0, & (a_2 - a_1 - \mu) b_{41} = 0.
\end{array}$$

187. Soit, d'abord, $\mu = a_1 - a_2$. Alors

$$Yf = b_{13} x_1 p_3 + b_{14} x_1 y_4$$

ou (n° 10)

$$Yf = \frac{a y_1}{cf - ed} [(b_{13} f - b_{14} d) q_3 + (b_{14} c - b_{13} e) q_4].$$

On fera $b_{14} c - b_{13} e = 0$ et, à l'aide de la substitution $(x_2 x_3)$, on arrive au groupe

(LXXVI) $\qquad [a_1(x_1p_1 + x_3p_3) + a_2(x_2p_2 + x_4p_4) + x_1p_3,\ x_1p_2],$

dont les équations finies sont, en posant $\mu_0 = \dfrac{\mu}{\lambda(a_1 - a_2)}[e^{\lambda(a_1 - a_2)} - 1]$,

$$y_1 = x_1 e^{\lambda a_1}, \qquad y_2 = e^{\lambda a_2}(\mu_0 x_1 + x_2), \qquad y_3 = e^{\lambda a_1}(\lambda x_1 + x_3), \qquad y_4 = x_4 e^{\lambda a_2}.$$

188. Je reviens au n° **186**. Je fais $\mu = a_2 - a_1$; alors

$$Yf = b_{32} x_3 p_2 + b_{42} x_4 p_2$$

ou bien (n° **10**)

$$Yf = \frac{q_2}{a}[(b_{32}c + b_{42}e)y_3 + (b_{32}d + b_{42}f)y_4].$$

On fera $b_{32}d + b_{42}f = 0$, puis on effectuera la substitution $(x_1 x_3)$; on trouve alors le groupe

$$\text{(LXXVII)} \qquad [a_1(x_2 p_2 + x_3 p_3) + a_2(x_1 p_1 + x_4 p_4) + x_3 p_2,\ x_1 p_2].$$

Équations finies :

$$\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda(a_2 - a_1)}[e^{\lambda(a_2 - a_1)} - 1],$$

$$y_1 = x_1 e^{\lambda a_2}, \qquad y_2 = e^{\lambda a_1}(\mu_0 x_1 + x_2 + \lambda x_3), \qquad y_3 = x_3 e^{\lambda a_1}, \qquad y_4 = x_4 e^{\lambda a_1}.$$

189. Je passe à la transformation (**12**)

$$a_1(x_1 p_1 + x_2 p_2) + x_1 p_2.$$

Reportons-nous au n° **185**. Comme on a simultanément

$$\lambda a_1 + \mu b_{11} = b_{21}, \qquad \lambda a_1 + \mu b_{22} = - b_{21},$$

on en déduit

$$2\lambda a_1 + \mu(b_{11} + b_{22}) = 0.$$

Donc, si $\mu = 0$, λ est nul ; on peut donc supposer $\mu \neq 0$ et appliquer la remarque du n° **41**.

En conséquence, nous avons à discuter le système d'équations

$$\begin{aligned}
(a_1 - \mu) b_{13} + b_{23} &= 0, & (a_1 + \mu) b_{32} + b_{31} &= 0,\\
(a_1 - \mu) b_{14} + b_{24} &= 0, & (a_1 + \mu) b_{42} + b_{41} &= 0,\\
(a_1 - \mu) b_{23} &= 0, & (a_1 + \mu) b_{31} &= 0,\\
(a_1 - \mu) b_{24} &= 0, & (a_1 + \mu) b_{41} &= 0.
\end{aligned}$$

190. L'hypothèse $\mu = a_1$ donne, à l'aide de la substitution $(x_2 x_3)$, le groupe

$$\text{(LXXVIII)} \qquad [a_1(x_1 p_1 + x_3 p_3) + x_1 p_3,\ x_1 p_2].$$

Équations finies :

$$\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda a_1}(e^{\lambda a_1} - 1),$$

$$y_1 = x_1 e^{\lambda a_1}, \qquad y_2 = \mu_0 x_1 + x_2, \qquad y_3 = e^{\lambda a_1}(\lambda x_1 + x_3), \qquad y_4 = x_4.$$

191. L'hypothèse $\mu = -a_1$ donne, à l'aide de la substitution $(x_1 x_3)$, le groupe

(LXXIX) $$[a_1(x_2 p_2 + x_3 p_3) + x_3 p_2,\ x_1 p_2].$$

Équations finies :

$$\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda a_1}(1 - e^{-\lambda a_1}),$$

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = e^{\lambda a_1}(\mu_0 x_1 + x_2 + \lambda x_3), \quad y_3 = x_3 e^{\lambda a_1}, \quad y_4 = x_4.$$

192. J'arrive à la transformation (**13**)

$$Xf = a_2(x_3 p_3 + x_4 p_4) + x_1 p_2.$$

Les considérations du n° **186** subsistent, et l'on a à discuter le système

$$\begin{aligned}
(a_2 + \mu) b_{13} &= b_{23}, & (a_2 - \mu) b_{32} &= b_{31},\\
(a_2 + \mu) b_{14} &= b_{24}, & (a_2 - \mu) b_{42} &= b_{41},\\
(a_2 + \mu) b_{23} &= 0, & (a_2 - \mu) b_{31} &= 0,\\
(a_2 + \mu) b_{24} &= 0, & (a_2 - \mu) b_{41} &= 0.
\end{aligned}$$

193. Si l'on fait $\mu = -a_2$, à l'aide de la substitution $(x_2 x_3)$ on trouve le groupe

(LXXX) $$[a_2(x_2 p_2 + x_4 p_4) + x_1 p_3,\ x_1 p_2].$$

Équations finies :

$$\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda a_2}(1 - e^{-\lambda a_2}),$$

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = e^{\lambda a_2}(\mu_0 x_1 + x_2), \quad y_3 = \lambda x_1 + x_3, \quad y_4 = e^{\lambda a_2} x_4.$$

194. Si $\mu = a_2$, à l'aide de la substitution $(x_1 x_3)$ on trouve le groupe

(LXXXI) $$[a_2(x_1 p_1 + x_4 p_4) + x_3 p_2,\ x_1 p_2].$$

Équations finies :

$$y_1 = x_1 e^{\lambda a_2}, \quad y_2 = \mu_0 x_1 + x_2 + \lambda x_3, \quad y_3 = x_3, \quad y_4 = x_4 e^{\lambda a_2}, \quad \mu_0 = \frac{\mu}{\lambda a_2}(e^{\lambda a_2} - 1).$$

195. J'arrive à la transformation (**14**)

$$Xf = a_1(x_1 p_1 + x_2 p_2) + a_2(x_3 + x_4 p_4).$$

Soit

$$Yf = \sum_{\alpha, \beta} b_{\alpha\beta} x_\alpha p_\beta.$$

J'exprime que

$$(XY) = \lambda Xf + \mu Yf.$$

J'ai (nº 32) le système d'équations suivant

$$\begin{array}{llll}
\lambda a_1 + \mu b_{11} = 0, & \mu b_{12} = 0, & (a_1 - a_2 - \mu) b_{13} = 0, & (a_2 - a_1 - \mu) b_{31} = 0, \\
\lambda a_1 + \mu b_{22} = 0, & \mu b_{21} = 0, & (a_1 - a_2 - \mu) b_{14} = 0, & (a_2 - a_1 - \mu) b_{32} = 0, \\
\lambda a_2 + \mu b_{33} = 0, & \mu b_{34} = 0, & (a_1 - a_2 - \mu) b_{23} = 0, & (a_2 - a_1 - \mu) b_{41} = 0, \\
\lambda a_2 + \mu b_{44} = 0, & \mu b_{43} = 0, & (a_1 - a_2 - \mu) b_{24} = 0, & (a_2 - a_1 - \mu) b_{42} = 0.
\end{array}$$

196. Si $\mu = 0$, l'équation $\lambda a_1 + \mu b_{11} = 0$, par exemple, indique que $\lambda = 0$. Donc (nº 41), on peut supposer

$$\mu \neq 0, \qquad \lambda = 0, \qquad b_{11} = b_{22} = b_{33} = b_{44} = b_{12} = b_{21} = b_{34} = b_{43} = 0,$$

et il reste à discuter les équations

$$\begin{array}{ll}
(a_1 - a_2 - \mu) b_{13} = 0, & (a_2 - a_1 - \mu) b_{31} = 0, \\
(a_1 - a_2 - \mu) b_{14} = 0, & (a_2 - a_1 - \mu) b_{32} = 0, \\
(a_1 - a_2 - \mu) b_{23} = 0, & (a_2 - a_1 - \mu) b_{41} = 0, \\
(a_1 - a_2 - \mu) b_{24} = 0, & (a_2 - a_1 - \mu) b_{42} = 0.
\end{array}$$

197. Supposons d'abord $\mu = a_1 - a_2$.

Alors

$$Yf = b_{13} x_1 p_3 + b_{14} x_1 p_4 + b_{23} x_2 p_3 + b_{24} x_2 p_4.$$

Appliquons le changement de variables du nº 12.

Si l'on suppose

$$b_{14} b_{23} - b_{13} b_{24} \neq 0,$$

on arrive, à l'aide de la substitution $(x_2 x_3)$, au groupe

(LXXXII) $\qquad [a_1(x_1 p_1 + x_3 p_3) + a_2(x_2 p_2 + x_4 p_4),\ x_1 p_2 + x_3 p_4],$

qui a pour équations finies, en posant $\mu_0 = \dfrac{\mu}{\lambda(a_1 - a_2)}[e^{\lambda(a_1 - a_2)} - 1]$,

$$y_1 = x_1 e^{\lambda a_1}, \qquad y_2 = e^{\lambda a_2}(\mu_0 x_1 + x_2), \qquad y_3 = x_3 e^{\lambda a_1}, \qquad y_4 = e^{\lambda a_2}(\mu_0 x_3 + x_4).$$

198. L'hypothèse $b_{14} b_{23} - b_{13} b_{24} = 0$ et la substitution $(x_2 x_3)$ donnent le groupe

(LXXXIII) $\qquad [a_1(x_1 p_1 + x_3 p_3) + a_2(x_2 p_2 + x_4 p_4),\ x_1 p_2].$

Équations finies

$$\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda(a_1 - a_2)}(e^{\lambda(a_1-a_2)} - 1),$$

$$y_1 = x_1 e^{\lambda a_1}, \qquad y_2 = e^{\lambda a_2}(\mu_0 x_1 + x_2), \qquad y_3 = x_3 e^{\lambda a_1}, \qquad y_4 = x_4 e^{\lambda a_2}.$$

199. J'arrive à la transformation (15), $x_1 p_1 + x_2 p_2$.

Les considérations du n° 196 subsistent. On a à discuter le système d'équations

$$(1-\mu) b_{13} = 0, \qquad (1-\mu) b_{14} = 0, \qquad (1-\mu) b_{23} = 0, \qquad (1-\mu) b_{24} = 0,$$
$$(1+\mu) b_{31} = 0, \qquad (1+\mu) b_{32} = 0, \qquad (1+\mu) b_{41} = 0, \qquad (1+\mu) b_{42} = 0.$$

200. En faisant $\mu = 1$, on est conduit à la même discussion qu'au n° 97. La substitution $(x_2 x_3)$ donne le groupe

(LXXXIV) $$[x_1 p_1 + x_3 p_3,\ x_1 p_2 + x_3 p_4].$$

Équations finies :

$$\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda}(e^{\lambda} - 1),$$

$$y_1 = x_1 e^{\lambda}, \qquad y_2 = \mu_0 x_1 + x_2, \qquad y_3 = x_3 e^{\lambda}, \qquad y_4 = \mu_0 x_3 + x_4.$$

201. On trouve ensuite le groupe

(LXXXV) $$[x_1 p_1 + x_3 p_3,\ x_1 p_2].$$

Équations finies :

$$\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda}(e^{\lambda} - 1),$$

$$y_1 = x_1 e^{\lambda}, \qquad y_2 = \mu_0 x_1 + x_2, \qquad y_3 = x_3 e^{\lambda}, \qquad y_4 = x_4.$$

202. Si l'on revient au n° 199 et si l'on fait $\mu = -1$, une discussion analogue donne deux nouveaux groupes. Le premier, à l'aide de la substitution $(x_1 x_4)$, devient

(LXXXVI) $$[x_2 p_2 + x_4 p_4,\ x_1 p_2 + x_3 p_4].$$

Équations finies :

$$\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda}(1 - e^{-\lambda}),$$

$$y_1 = x_1, \qquad y_2 = e^{\lambda}(\mu_0 x_1 + x_2), \qquad y_3 = x_3, \qquad y_4 = e^{\lambda}(\mu_0 x_3 + x_4).$$

203. Avec la substitution $(x_1 x_2 x_3)$ le second groupe prend la forme

(LXXXVII) $$[x_2 p_2 + x_3 p_3,\ x_1 p_2].$$

Équations finies :

$$\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda}(1 - e^{-\lambda}),$$

$$y_1 = x_1, \qquad y_2 = e^{\lambda}(\mu_0 x_1 + x_2), \qquad y_3 = x_3 e^{\lambda}, \qquad y_4 = x_4.$$

204. J'arrive à la transformation (**16**)

$$Xf = a_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3) + a_2x_4p_4 + x_1p_2 + 2x_2p_3.$$

Soit

$$Yf = \sum_{\alpha, \beta} b_{\alpha\beta} x_\alpha p_\beta.$$

Écrivons que l'on a

$$(XY) = \lambda Xf + \mu Yf.$$

Il vient (n° 33)

$$\begin{array}{lll}
\lambda a_1 + \mu b_{11} = b_{21}, & \mu b_{13} = b_{23} - 2b_{12}, & (a_1 - a_2 - \mu) b_{14} + b_{24} = 0, \\
\lambda + \mu b_{12} = b_{22} - b_{11}, & \mu b_{21} = 2b_{31}, & (a_1 - a_2 - \mu) b_{24} + 2b_{34} = 0, \\
\lambda a_1 + \mu b_{22} = 2b_{32} - b_{21}, & \mu b_{31} = 0, & (a_1 - a_2 - \mu) b_{34} = 0, \\
2\lambda + \mu b_{23} = 2(b_{33} - b_{22}), & \mu b_{32} = - b_{31}, & (a_2 - a_1 - \mu) b_{41} = 0, \\
\lambda a_1 + \mu b_{33} = -2b_{32}, & & (a_2 - a_1 - \mu) b_{42} = b_{41}, \\
\lambda a_2 + \mu b_{44} = 0, & & (a_2 - a_1 - \mu) b_{43} = 2b_{42}.
\end{array}$$

205. Si l'on suppose $\mu = 0$, l'équation $\lambda a_2 + \mu b_{44} = 0$ donne $\lambda = 0$. Le cas a déjà été traité. On peut donc supposer $\mu \neq 0$, et alors (n° **41**), $\lambda = 0$. On trouve alors

$$b_{31} = b_{21} = b_{32} = b_{11} = b_{22} = b_{33} = b_{12} = b_{23} = b_{44} = b_{13} = 0,$$

puis

$$\begin{array}{ll}
(a_1 - a_2 - \mu) b_{14} + b_{24} = 0, & (a_2 - a_1 - \mu) b_{42} = b_{41}, \\
(a_1 - a_2 - \mu) b_{24} + 2b_{34} = 0, & (a_2 - a_1 - \mu) b_{43} = 2b_{42}, \\
(a_1 - a_2 - \mu) b_{34} = 0, & (a_2 - a_1 - \mu) b_{41} = 0.
\end{array}$$

206. Soit d'abord $\mu = a_1 - a_2$. A l'aide de la substitution (x_2x_4) on trouve le groupe

(LXXXVIII) $[a_1(x_1p_1 + x_3p_3 + x_4p_4) + a_2x_2p_2 + x_1p_6 + 2x_4p_3,\ x_1p_2]$,

dont les équations finies sont, en posant $\mu_0 = \dfrac{\mu}{\lambda(a_1 - a_2)}[e^{\lambda(a_1 - a_2)} - 1]$,

$$y_1 = x_1 e^{\lambda a_1}, \qquad y_2 = e^{\lambda a_2}(\mu_0 x_1 + x_2), \qquad y_3 = e^{\lambda a_1}(\lambda^2 x_1 + x_3 + 2\lambda x_4),$$
$$y_4 = e^{\lambda a_1}(\lambda x_1 + x_4).$$

207. Revenons au n° 205, et soit $\mu = a_2 - a_1$. Alors, à l'aide de la substitution $(x_1 x_3 x_2 x_4)$, par exemple, on amène le groupe à avoir la forme

(LXXXIX) $[a_1(x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4) + a_2 x_1 p_1 + x_3 p_4 + 2 x_4 p_2,\ x_1 p_2]$.

Équations finies :

$$\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda(a_2 - a_1)}[e^{\lambda(a_2 - a_1)} - 1],$$

$$y_1 = x_1 e^{\lambda a_2}, \qquad y_2 = e^{\lambda a_1}(\mu_0 x_1 + x_2 + \lambda^2 x_3 + 2\lambda x_4), \qquad y_3 = x_3 e^{\lambda a_1},$$
$$y_4 = e^{\lambda a_1}(\lambda x_3 + x_4).$$

208. J'arrive à la transformation (17)

$$Xf = a_1(x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3) + x_1 p_2 + 2 x_2 p_3.$$

Des relations écrites au n° 204 il résulte que l'on a

$$3\lambda a_1 + \mu(b_{11} + b_{22} + b_{33}) = 0.$$

Par suite, si $\mu = 0$, on a aussi $\lambda = 0$. Or ce cas a déjà été traité (Chap. II). Donc, on peut supposer $\mu \neq 0$ et, par suite, $\lambda = 0$ (n° 41).

Le système d'équations à discuter devient alors (n° 205)

$$\begin{array}{ll}
(a_1 - \mu) b_{14} + \ \ b_{24} = 0, & (a_3 + \mu) b_{42} + \ \ b_{41} = 0, \\
(a_1 - \mu) b_{24} + 2 b_{34} = 0, & (a_1 + \mu) b_{43} + 2 b_{42} = 0, \\
(a_1 - \mu) b_{34} = 0, & (a_1 + \mu) b_{40} = 0.
\end{array}$$

209. Si $\mu = a_1$, et si l'on fait la substitution $(x_2 x_4)$ on trouve le groupe

(XC) $[a_1(x_1 p_1 + x_3 p_3 + x_4 p_4) + x_1 p_4 + 2 x_4 p_3,\ x_1 p_2]$.

Équations finies :

$$\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda a_1}(e^{\lambda a_1} - 1),$$

$$y_1 = x_1 e^{\lambda a_1}, \quad y_2 = \mu_0 x_1 + x_2, \quad y_3 = e^{\lambda a_1}(\lambda^2 x_1 + x_3 + 2\lambda x_4), \quad y_4 = e^{\lambda a_1}(\lambda x_1 + x_4).$$

210. Pour $\mu = -a_1$, en faisant la substitution $(x_1 x_3 x_2 x_4)$, on trouve le groupe

(XCI) $[a_1(x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4) + x_3 p_4 + 2 x_4 p_2,\ x_1 p_2]$.

Équations finies :

$$\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda a_1}(1 - e^{-\lambda a_1}),$$

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = e^{\lambda a_1}(\mu_0 x_1 + x_2 + \lambda^2 x_3 + 2\lambda x_4), \quad y_3 = x_3 e^{\lambda a_1}, \quad y_4 = e^{\lambda a_1}(\lambda x_3 + x_4).$$

211. J'arrive à la transformation (**18**)

$$Xf = a_2 x_4 p_4 + x_1 p_2 + 2 x_2 p_3.$$

Les considérations du n° **205** subsistent, et l'on a à discuter le système d'équations

$$\begin{aligned} (a_2+\mu) b_{14} &= b_{24}, & (a_2-\mu) b_{42} &= b_{41}, \\ (a_2+\mu) b_{24} &= 2 b_{34}, & (a_2-\mu) b_{43} &= 2 b_{42}, \\ (a_2+\mu) b_{34} &= 0, & (a_2-\mu) b_{41} &= 0. \end{aligned}$$

212. Si $\mu = -a_2$, à l'aide de la substitution $(x_2 x_4)$ on trouve le groupe

(XCII) $$[a_2 x_2 p_2 + x_1 p_4 + 2 x_4 p_3,\ x_1 p_2].$$

Équations finies :

$$\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda a_2}(1 - e^{-\lambda a_2}),$$

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = e^{\lambda a_2}(\mu_0 x_1 + x_2), \quad y_3 = \lambda^2 x_1 + x_3 + 2\lambda x_4, \quad y_4 = \lambda x_1 + x_4.$$

213. L'hypothèse $\mu = a_2$ donne, avec la substitution $(x_1 x_3 x_2 x_4)$, le groupe

(XCIII) $$[a_2 x_1 p_1 + x_3 p_4 + 2 x_4 p_2,\ x_1 p_2].$$

Équations finies :

$$\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda a_2}(e^{\lambda a_2} - 1),$$

$$y_1 = x_1 e^{\lambda a_2}, \quad y_2 = \mu_0 x_1 + x_2 + \lambda^2 x_3 + 2\lambda x_4, \quad y_3 = x_3, \quad y_4 = \lambda x_3 + x_4.$$

214. Passons à la transformation (**19**)

$$Xf = a_1(x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3) + a_2 x_4 p_4 + x_2 p_3.$$

Soit

$$Yf = \sum_{\alpha,\beta} b_{\alpha\beta} x_\alpha p_\beta.$$

J'écris que l'on a

$$(XY) = \lambda Xf + \mu Yf.$$

On a (*voir* n° 34)

$$\begin{aligned} \lambda a_1 + \mu b_{11} &= 0, & \mu b_{12} &= 0, & (a_1 - a_2 - \mu) b_{14} &= 0, \\ \lambda a_1 + \mu b_{22} &= b_{32}, & \mu b_{13} &= -b_{12}, & (a_1 - a_2 - \mu) b_{24} + b_{34} &= 0, \\ \lambda \quad + \mu b_{23} &= b_{33} - b_{22}, & \mu b_{21} &= b_{31}, & (a_1 - a_2 - \mu) b_{34} &= 0, \\ \lambda a_1 + \mu b_{33} &= -b_{32}, & \mu b_{31} &= 0, & (a_2 - a_1 - \mu) b_{41} &= 0, \\ \lambda a_2 + \mu b_{44} &= 0, & \mu b_{32} &= 0, & (a_2 - a_1 - \mu) b_{42} &= 0, \\ & & & & (a_2 - a_1 - \mu) b_{43} &= b_{42}. \end{aligned}$$

215. Si l'on fait $\mu = 0$, l'une des équations $\lambda a_1 + \mu b_{11} = 0$, ou $\lambda a_2 + \mu b_{44} = 0$, donnera toujours $\lambda = 0$. Le cas a déjà été traité (Chap. II). Donc on peut supposer $\mu \neq 0$, et alors (n° 41) $\lambda = 0$.

Donc

$$b_{12} = b_{13} = b_{31} = b_{32} = b_{21} = b_{11} = b_{22} = b_{33} = b_{44} = b_{23} = 0.$$

Il reste les équations

$$\begin{aligned} &(a_1 - a_2 - \mu)\, b_{14} = 0, & &(a_2 - a_1 - \mu)\, b_{41} = 0,\\ &(a_1 - a_2 - \mu)\, b_{24} + b_{34} = 0, & &(a_2 - a_1 - \mu)\, b_{42} = 0,\\ &(a_1 - a_2 - \mu)\, b_{34} = 0, & &(a_2 - a_1 - \mu)\, b_{43} = b_{42}. \end{aligned}$$

216. Soit $\mu = a_1 - a_2$. Alors

$$Yf = \frac{q_4}{f}[b_{14} a y_1 + (b_{14} b + b_{24} c) y_2], \qquad acf \neq 0 \quad (\text{n° } 16).$$

Si l'on veut annuler le coefficient de $y_2 q_4$, il vient

$$b_{14} b + b_{24} c = 0,$$

Si $b_{14} \neq 0$, cette équation déterminera b. Yf se réduit à $y_1 q_4$.

Si $b_{14} = 0$, on a un autre groupe. Yf se réduit à $y_2 q_4$.

Avec la substitution $(x_2 x_4)$, le premier groupe prend la forme

$$(\text{XCIV}) \qquad [a_1(x_1 p_1 + x_3 p_3 + x_4 p_4) + a_2 x_2 p_2 + x_4 p_3,\ x_1 p_2].$$

Équations finies :

$$\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda(a_1 - a_2)}[e^{\lambda(a_1 - a_2)} - 1],$$

$$y_1 = x_1 e^{\lambda a_1}, \qquad y_2 = e^{\lambda a_2}(\mu_0 x_1 + x_2), \qquad y_3 = e^{\lambda a_1}(x_3 + \lambda x_4), \qquad y_4 = x_4 e^{\lambda a_1}.$$

217. Le deuxième groupe, à l'aide de la substitution $(x_1 x_4 x_2)$, prend la forme canonique

$$(\text{XCV}) \qquad [a_1(x_1 p_1 + x_3 p_3 + x_4 p_4) + a_2 x_2 p_2 + x_1 p_3,\ x_1 p_2].$$

Équations finies :

$$\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda(a_1 - a_2)}[e^{\lambda(a_1 - a_2)} - 1],$$

$$y_1 = x_1 e^{\lambda a_1}, \qquad y_2 = e^{\lambda a_2}(\mu_0 x_1 + x_2), \qquad y_3 = e^{\lambda a_1}(\lambda x_1 + x_3), \qquad y_4 = x_4 e^{\lambda a_1}.$$

218. Je reviens au n° 215, et je fais $\mu = a_2 - a_1$. Alors

$$Yf = b_{41} x_4 p_1 + b_{43} x_4 p_3,$$

ou (n° 16)

$$Yf = fy_4\left[\frac{b_{41}}{a}q_1 + \left(\frac{b_{43}}{c} - \frac{b_{41}d}{ac}\right)q_3\right] \qquad afc \neq 0.$$

Si $b_{41} \neq 0$, l'équation $b_{43}a = b_{41}d$ déterminera d, alors

$$Yf = y_4 q_1.$$

Si $b_{41} = 0$, Yf se réduit à $y_4 q_3$. De là deux types de groupes.

Si l'on effectue la substitution $(x_1 x_2 x_4)$, le premier groupe prend la forme

(XCVI) $$[a_1(x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4) + a_2x_1p_1 + x_4p_3,\ x_1p_2].$$

Équations finies :

$$\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda(a_2 - a_1)}[e^{\lambda(a_2-a_1)} - 1],$$

$$y_1 = x_1 e^{\lambda a_2}, \qquad y_2 = e^{\lambda a_1}(\mu_0 x_1 + x_2), \qquad y_3 = e^{\lambda a_1}(x_3 + \lambda x_4), \qquad y_4 = x_4 e^{\lambda a_1}.$$

219. A l'aide de la substitution $(x_1 x_3 x_2 x_4)$ le deuxième groupe prend la forme

(XCVII) $$[a_1(x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4) + a_2x_1p_1 + x_4p_2,\ x_1p_2].$$

Équations finies :

$$\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda(a_2 - a_1)}[e^{\lambda(a_2-a_1)} - 1],$$

$$y_1 = x_1 e^{\lambda a_2}, \qquad y_2 = e^{\lambda a_1}(\mu_0 x_1 + x_2 + \lambda x_4), \qquad y_3 = x_3 e^{\lambda a_1}, \qquad y_4 = x_4 e^{\lambda a_1}.$$

220. J'arrive à la transformation (20)

$$Xf = a_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3) + x_2p_3.$$

Les résultats du n° 215 subsistent et l'on a les équations

$$\begin{aligned}
&(a_1 - \mu)\,b_{14} = 0, && (a_1 + \mu)\,b_{41} = 0,\\
&(a_1 - \mu)\,b_{24} + b_{34} = 0, && (a_1 + \mu)\,b_{42} = 0,\\
&(a_1 - \mu)\,b_{34} = 0, && (a_1 + \mu)\,b_{43} + b_{42} = 0.
\end{aligned}$$

221. Si $\mu = a_1$ il y a deux groupes possibles. Avec la substitution $(x_2 x_4)$ le premier prend la forme

(XCVIII) $$[a_1(x_1p_1 + x_3p_3 + x_4p_4) + x_4p_3,\ x_1p_2].$$

Équations finies :

$$\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda a_1}(e^{\lambda a_1} - 1),$$

$$y_1 = x_1 e^{\lambda a_1}, \qquad y_2 = \mu_0 x_1 + x_2, \qquad y_3 = e^{\lambda a_1}(x_3 + \lambda x_4), \qquad y_4 = x_4 e^{\lambda a_1}.$$

222. La substitution $(x_1 x_4 x_2)$ donne au deuxième groupe la forme

(IC) $$[a_1(x_1p_1 + x_3p_3 + x_4p_4) + x_1p_3,\ x_1p_2].$$

Équations finies :

$$\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda a_1}(e^{\lambda a_1} - 1),$$

$$y_1 = x_1 e^{\lambda a_1}, \qquad y_2 = \mu_0 x_1 + x_2, \qquad y_3 = e^{\lambda a_1}(\lambda x_1 + x_3), \qquad y_4 = x_4 e^{\lambda a_1}.$$

223. Je reviens au n° 220, et je fais $\mu = - a_1$. On obtient encore deux groupes. Avec la substitution $(x_1 x_2 x_4)$ le premier de ces groupes prend la forme

(C) $$[a_1(x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4) + x_4p_3,\ x_1p_2].$$

Équations finies :

$$\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda a_1}(1 - e^{-\lambda a_1}),$$

$$y_1 = x_1, \qquad y_2 = e^{\lambda a_1}(\mu_0 x_1 + x_2), \qquad y_3 = e^{\lambda a_1}(x_3 + \lambda x_4), \qquad y_4 = x_4 e^{\lambda a_1}.$$

224. La substitution $(x_1 x_3 x_2 x_4)$ donne au deuxième groupe la forme

(CI) $$[a_1(x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4) + x_4p_2,\ x_1p_2].$$

Équations finies :

$$\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda a_1}(1 - e^{-\lambda a_1}),$$

$$y_1 = x_1, \qquad y_2 = e^{\lambda a_1}(\mu_0 x_1 + x_2 + \lambda x_4), \qquad y_3 = x_3 e^{\lambda a_1}, \qquad y_4 = x_4 e^{\lambda a_1}.$$

225. J'arrive à la transformation (**21**)

$$a_2 x_4 p_4 + x_2 p_3.$$

Les conclusions du n° **215** subsistent, et l'on a à discuter les équations

$$\begin{aligned} (a_2 + \mu)\, b_{14} &= 0, & (a_2 - \mu)\, b_{41} &= 0,\\ (a_2 + \mu)\, b_{24} &= b_{34}, & (a_2 - \mu)\, b_{42} &= 0,\\ (a_2 + \mu)\, b_{34} &= 0, & (a_2 - \mu)\, b_{43} &= b_{42}. \end{aligned}$$

226. Si $\mu = -a_2$, on a deux groupes dont le premier, à l'aide de la substitution $(x_2 x_4)$, prend la forme

(CII) $$[a_2 x_2 p_2 + x_4 p_3,\ x_1 p_2].$$

Équations finies :

$$\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda a_2}(1 - e^{-\lambda a_2}),$$

$$y_1 = x_1 e^{\lambda a_1}, \qquad y_2 = \mu_0 x_1 + x_2, \qquad y_3 = x_3 + \lambda x_4, \qquad y_4 = x_4.$$

227. Pour le deuxième groupe, la substitution $(x_1 x_4 x_2)$ donne la forme

(CIII) $$[a_2 x_2 p_2 + x_1 p_3,\ x_1 p_2].$$

Équations finies :

$$\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda a_2}(1 - e^{-\lambda a_2}),$$

$$y_1 = x_1, \qquad y_2 = e^{\lambda a_2}(\mu_0 x_1 + x_2), \qquad y_3 = \lambda x_1 + x_3, \qquad y_4 = x_4.$$

228. Si $\mu = a_2$, on a également deux groupes; le premier, à l'aide de la substitution $(x_1 x_2 x_4)$, prend la forme

(CIV) $$[a_2 x_1 p_1 + x_4 p_3,\ x_1 p_2].$$

Équations finies :

$$\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda a_2}(e^{\lambda a_2} - 1),$$

$$y_1 = x_1 e^{\lambda a_2}, \qquad y_2 = \mu_0 x_1 + x_2, \qquad y_3 = x_3 + \lambda x_4, \qquad y_4 = x_4.$$

229. La substitution $(x_1 x_3 x_2 x_4)$ donne le second sous la forme

(CV) $$[a_2 x_1 p_1 + x_4 p_2,\ x_1 p_2].$$

Équations finies :

$$\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda a_2}(e^{\lambda a_2} - 1),$$

$$y_1 = x_1 e^{\lambda a_2}, \qquad y_2 = \mu_0 x_1 + x_2 + \lambda x_4, \qquad y_3 = x_3, \qquad y_4 = x_4.$$

230. J'arrive au groupe (**22**)

$$Xf + a_1(x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3) + a_2 x_4 p_4.$$

Soit

$$Yf = \sum_{\alpha,\beta} b_{\alpha\beta} x_\alpha p_\beta.$$

Exprimons que l'on a

$$(XY) = \lambda Xf + \mu Yf.$$

On a

$$\begin{array}{llll} & \lambda a_1 + \mu b_{11} = 0, & & (a_1 - a_2 - \mu)\, b_{14} = 0, \\ & \lambda a_1 + \mu b_{22} = 0, & & (a_1 - a_2 - \mu)\, b_{24} = 0, \\ & \lambda a_1 + \mu b_{33} = 0, & & (a_1 - a_2 - \mu)\, b_{34} = 0, \\ & \lambda a_2 + \mu b_{44} = 0, & & (a_2 - a_1 - \mu)\, b_{41} = 0, \\ \mu b_{12} = 0, & \mu b_{13} = 0, & \mu b_{21} = 0, & (a_2 - a_1 - \mu)\, b_{42} = 0, \\ \mu b_{23} = 0, & \mu b_{31} = 0, & \mu b_{32} = 0, & (a_2 - a_1 - \mu)\, b_{43} = 0. \end{array}$$

231. Comme a_1 et a_2 ne peuvent être nuls simultanément, des équations $\lambda a_1 + \mu b_{11} = 0$, $\lambda a_2 + \mu b_{44} + 0$ on déduit que, si $\mu = 0$, on a nécessairement $\lambda = 0$. Or, le cas $\lambda = \mu = 0$ ayant déjà été traité, on peut supposer $\mu \neq 0$, $\lambda = 0$ (n° **41**), donc

$$b_{11} = b_{22} = b_{33} = b_{44} = b_{12} = b_{21} = b_{13} = b_{31} = b_{23} = b_{32} = 0.$$

Il reste

$$\begin{array}{ll} (a_1 - a_2 - \mu)\, b_{14} = 0, & (a_2 - a_1 - \mu)\, b_{41} = 0, \\ (a_1 - a_2 - \mu)\, b_{24} = 0, & (a_2 - a_1 - \mu)\, b_{42} = 0, \\ (a_1 - a_2 - \mu)\, b_{34} = 0, & (a_2 - a_1 - \mu)\, b_{43} = 0. \end{array}$$

232. Soit $\mu = a_1 - a_2$. Alors

$$Yf = b_{14} x_1 p_4 + b_{24} x_2 p_4 + b_{34} x_3 p_4.$$

En utilisant le changement de variables du n° **18**, et en effectuant la substitution $(x_2 x_4)$, on trouve le groupe

$$\text{(CVI)} \qquad [a_1(x_1 p_1 + x_3 p_3 + x_4 p_4) + a_2 x_2 p_2,\ x_1 p_2],$$

dont les équations finies sont, en posant $\mu_0 = \dfrac{\mu}{\lambda(a_1 - a_2)}(e^{\lambda(a_1 - a_2)} - 1)$,

$$y_1 = x_1 e^{\lambda a_1}, \qquad y_2 = e^{\lambda a_2}(\mu_0 x_1 + x_2), \qquad y_3 = x_3 e^{\lambda a_1}, \qquad y_4 = x_4 e^{\lambda a_1}.$$

233. Soit, maintenant, $\mu = a_2 - a_1$. Avec la substitution $(x_1 x_2 x_4)$ on obtient le groupe

$$\text{(CVII)} \qquad [a_1(x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4) + a_2 x_1 p_1,\ x_1 p_2].$$

Équations finies :

$$\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda(a_2 - a_1)}(e^{\lambda(a_2 - a_1)} - 1),$$

$$y_1 = x_1 e^{\lambda a_2}, \qquad y_2 = e^{\lambda a_1}(\mu_0 x_1 + x_2), \qquad y_3 = x_3 e^{\lambda a_1}, \qquad y_4 = x_4 e^{\lambda a_1}.$$

234. J'arrive à la transformation (**23**)

$$Xf = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3.$$

Les considérations du n° **231** subsistent. On a deux groupes :

Le premier est le groupe

$$(\text{CVIII}) \qquad [x_1p_1 + x_3p_3 + x_4p_4,\ x_1p_2].$$

Équations finies :

$$\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda}(e^\lambda - 1);$$

$$y_1 = x_1e^\lambda, \qquad y_2 = \mu_0x_1 + x_2, \qquad y_3 = x_3e^\lambda, \qquad y_4 = x_4e^\lambda.$$

235. Le second est le groupe

$$(\text{CIX}) \qquad [x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4,\ x_1p_2].$$

Équations finies :

$$\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda}(1 - e^{-\lambda});$$

$$y_1 = x_1, \qquad y_2 = e^\lambda(\mu_0x_1 + x_2), \qquad y_3 = x_3e^\lambda, \qquad y_4 = x_4e^\lambda.$$

236. Si maintenant je prends la transformation (**24**), x_4p_4, les considérations du n° **231** subsistent toujours, et l'on a deux groupes :

Le premier est le groupe

$$(\text{CX}) \qquad [x_2p_2,\ x_1p_2].$$

Équations finies :

$$\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda}(1 - e^{-\lambda});$$

$$y_1 = x_1, \qquad y_2 = e^\lambda(\mu_0x_1 + x_2), \qquad y_3 = x_3, \qquad y_4 = x_4.$$

237. Le second est le groupe

$$(\text{CXI}) \qquad [x_1p_1,\ x_1p_2].$$

Équations finies :

$$\mu_0 = \frac{\mu}{\lambda}(e^\lambda - 1);$$

$$y_1 = x_1e^\lambda, \qquad y_2 = \mu_0x_1 + x_2, \qquad y_3 = x_3, \qquad y_4 = x_4.$$

238. J'arrive à la transformation (**25**)

$$Xf = a_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4) + x_1p_2 + 2x_2p_3 + 3x_3p_4.$$

Soit

$$Yf = \sum_{\alpha,\beta} b_{\alpha\beta} x_\alpha p_\beta.$$

Je vais exprimer que l'on a

$$(XY) = \lambda Xf + \mu Yf.$$

En me servant du calcul fait au n° 36, je trouve

$$\begin{array}{lll}
a_1\lambda + \mu b_{11} = b_{21}, & \mu b_{13} = b_{23} - 2b_{12}, & \\
\lambda + \mu b_{12} = b_{22} - b_{11}, & \mu b_{14} = b_{24} - 3b_{13}, & \\
\lambda a_1 + \mu b_{22} = 2b_{32} - b_{21}, & \mu b_{21} = 2b_{31}, & \\
2\lambda + \mu b_{23} = 2(b_{33} - b_{22}), & \mu b_{24} = 2b_{34} - 3b_{23}, & \\
\lambda a_1 + \mu b_{33} = 3b_{43} - 2b_{32}, & \mu b_{31} = 3b_{41}, & \\
3\lambda + \mu b_{34} = 3(b_{44} - b_{33}), & \mu b_{32} = 3b_{42} - b_{31}, & \\
\lambda a_1 + \mu b_{44} = -3b_{43}, & \mu b_{41} = 0, & \mu b_{42} = -b_{41}, \qquad \mu b_{43} = -2b_{42}.
\end{array}$$

239. Si $a \neq 0$, comme

$$4\lambda a_1 + \mu(b_{11} + b_{22} + b_{33} + b_{44}) = 0,$$

on voit que l'hypothèse $\mu = 0$ entraîne la condition $\lambda = 0$.

On peut donc supposer $\mu \neq 0$ et, par suite, $\lambda = 0$ (n° 41).

On se rend alors aisément compte qu'il n'y a pas de groupe pour $a_1 \neq 0$.

240. Supposons $a_1 = 0$, puis $\mu = 0$, $\lambda \neq 0$; à l'aide du changement de variables du n° 20, on retrouve le groupe (III).

241. J'arrive au groupe (27)

$$Xf = a_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4) + x_1p_2 + 2x_2p_3.$$

Je pose

$$Yf = \sum_{\alpha,\beta} b_{\alpha\beta} x_\alpha p_\beta.$$

J'exprime que

$$(XY) = \lambda Xf + \mu Yf.$$

On trouve (n° 37) :

$$\begin{array}{lll}
\lambda a_1 + \mu b_{11} = b_{21}, & \mu b_{13} = b_{23} - 2b_{12}, & \\
\lambda + \mu b_{12} = b_{22} - b_{11}, & \mu b_{14} = b_{24}, & \mu b_{21} = 2b_{31}, \\
\lambda a_1 + \mu b_{22} = 2b_{32} - b_{21}, & \mu b_{24} = 2b_{34}, & \mu b_{31} = 0, \\
2\lambda + \mu b_{23} = 2(b_{33} - b_{22}), & \mu b_{32} = -b_{31}, & \mu b_{34} = 0, \\
\lambda a_1 + \mu b_{33} = -2b_{32}, & \mu b_{41} = 0, & \mu b_{42} = -b_{41}. \\
\lambda a_1 + \mu b_{44} = 0, & \mu b_{43} = -2b_{42}, &
\end{array}$$

242. Si l'on suppose $a_1 \neq 0$, on voit que l'hypothèse $\mu = 0$ entraîne la condition $\lambda = 0$. Dès lors, on peut supposer $\mu \neq 0$, puis $\lambda = 0$ (n° **41**).

On se rend alors aisément compte qu'il n'y a pas de groupe pour $a_1 \neq 0$.

243. Supposons maintenant $a_1 = 0$, $\mu = 0$, $\lambda \neq 0$; à l'aide du changement de variables du n° **22**, on retrouve les groupes (XIX) et (XX) (n^{os} **94**, **95**).

244. J'arrive à la transformation (**29**)

$$Xf = a_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4) + x_1p_2 + x_3p_4.$$

Soit

$$Yf = \sum_{\alpha,\beta}(b_{\alpha\beta}x_\alpha p_\beta).$$

Écrivons que l'on a

$$(XY) = \lambda Xf + \mu Yf \qquad (\text{n}^\circ\ 38).$$

Il vient (n° 38) :

$$\begin{array}{lll}
\lambda a_1 + \mu b_{11} = b_{21}, & \mu b_{13} = b_{23}, & \mu b_{31} = b_{41}, \\
\lambda + \mu b_{12} = b_{22} - b_{11}, & \mu b_{14} = b_{24} - b_{13}, & \mu b_{32} = b_{42} - b_{31}, \\
\lambda a_1 + \mu b_{22} = - b_{21}, & \mu b_{21} = 0, & \mu b_{41} = 0, \\
\lambda a_1 + \mu b_{33} = b_{43}, & \mu b_{23} = 0, & \mu b_{42} = - b_{41}, \\
\lambda + \mu b_{34} = b_{44} - b_{33}, & \mu b_{24} = - b_{23}, & \mu b_{43} = 0. \\
\lambda a_1 + \mu b_{44} = - b_{43}, & &
\end{array}$$

245. Supposons d'abord $a_1 \neq 0$. Alors on a, par exemple,

$$2\lambda a_1 + \mu(b_{11} + b_{22}) = 0.$$

Donc l'hypothèse $\mu = 0$ entraîne $\lambda = 0$. Or le cas a déjà été traité (Chap. II). Si l'on suppose $\mu \neq 0$ et, par suite, $\lambda = 0$ (n° **41**), on se convainc sans peine que le groupe cherché n'existe pas.

246. Si $a_1 = 0$, $\mu = 0$, $\lambda \neq 0$, on remarque que l'équation caractéristique de Yf n'admet pas une racine quadruple, de sorte que l'on retombe sur des groupes déjà énumérés.

247. Considérons enfin la transformation (**31**)

$$Xf = a_1(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4) + x_1p_2.$$

Soit

$$Yf = \sum_{\alpha,\beta} b_{\alpha\beta} x_\alpha p_\beta.$$

Écrivons qu'on a

$$(XY) = \lambda Xf + \mu Yf.$$

On trouve (n° 39) :

$$\begin{array}{lll}
\lambda a_1 + \mu b_{11} = b_{21}, & \mu b_{13} = b_{23}, & \mu b_{14} = b_{24}, \\
\lambda + \mu b_{12} = b_{22} - b_{11}, & \mu b_{21} = 0, & \mu b_{23} = 0, \\
\lambda a_1 + \mu b_{22} = - b_{21}, & \mu b_{24} = 0, & \mu b_{31} = 0, \\
\lambda a_1 + \mu b_{33} = 0, & \mu b_{32} = - b_{31}, & \mu b_{34} = 0, \\
\lambda a_1 + \mu b_{44} = 0, & \mu b_{41} = 0, & \mu b_{42} = - b_{41}. \\
 & \mu b_{43} = 0, &
\end{array}$$

248. Si l'on suppose $a_1 \neq 0$, comme $\lambda a_1 + \mu b_{33} = 0$, si $\mu = 0$, on a aussi

$$\lambda = 0.$$

Donc on peut supposer $\mu \neq 0$ et, par suite (n° 41), $\lambda = 0$.

On se convainc alors facilement que le groupe cherché n'existe pas.

249. Si $a_1 = 0$, $\lambda \neq 0$, $\mu = 0$, l'équation caractéristique de Yf n'a pas quatre racines égales, donc on retrouvera des groupes déjà énumérés.

TABLEAU DES FORMES CANONIQUES OBTENUES.

CHAPITRE I.

GROUPES A UN PARAMÈTRE.

(1)	$a_1 x_1 p_1 + a_2 x_2 p_2 + a_3 x_3 p_3 + a_4 x_4 p_4$	Nos 1
(2)	$a_2 x_2 p_2 + a_3 x_3 p_3 + a_4 x_4 p_4$	2
(3)	$a_1 x_1 p_1 + a_2 x_2 p_2 + a_3 (x_3 p_3 + x_4 p_4) + x_3 p_4$	3
(4)	$a_2 x_2 p_2 + a_3 (x_3 p_3 + x_4 p_4) + x_3 p_4$	3
(5)	$a_1 x_1 p_1 + a_2 x_2 p_2 + x_3 p_4$	3
(6)	$a_1 x_1 p_1 + a_2 x_2 p_2 + a_3 (x_3 p_3 + x_4 p_4)$	5
(7)	$a_2 x_2 p_2 + a_3 (x_3 p_3 + x_4 p_4)$	5
(8)	$a_1 x_1 p_1 + a_2 x_2 p_2$	5
(9)	$a_1 (x_1 p_1 + x_2 p_2) + a_2 (x_3 p_3 + x_4 p_4) + x_1 p_2 + x_3 p_4$	7
(10)	$a_2 (x_3 p_3 + x_4 p_4) + x_1 p_2 + x_3 p_4$	7
(11)	$a_1 (x_1 p_1 + x_2 p_2) + a_2 (x_3 p_3 + x_4 p_4) + x_1 p_2$	9
(12)	$a_1 (x_1 p_1 + x_2 p_2) + x_1 p_2$	9
(13)	$a_2 (x_3 p_3 + x_4 p_4) + x_1 p_2$	9
(14)	$a_1 (x_1 p_1 + x_2 p_2) + a_2 (x_3 p_3 + x_4 p_4)$	11
(15)	$x_3 p_3 + x_4 p_4$	11
(16)	$a_1 (x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3) + a_2 x_4 p_4 + x_1 p_2 + 2 x_2 p_3$ $a_1 a_2 (a_1 - a_2) \neq 0$	13
(17)	$a_1 (x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3) + x_1 p_3 + 2 x_2 p_3$	13
(18)	$a_2 x_4 p_4 + x_1 p_2 + 2 x_2 p_3$	13
(19)	$a_1 (x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3) + a_2 x_4 p_4 + x_2 p_3$	15
(20)	$a_1 (x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3) + x_2 p_3$	15
(21)	$a_2 x_4 p_4 + x_2 p_3$	15
(22)	$a_1 (x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3) + a_2 x_4 p_4$	17
(23)	$x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3$	17
(24)	$x_4 p_4$	17

CHAPITRE II.

GROUPES DE DEUXIÈME ESPÈCE, A TRANSFORMATIONS DEUX A DEUX ÉCHANGEABLES.

(16) $[a_1(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3)+x_1p_2+2x_2p_3,$
$b_1(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3)+b_3(x_1p_1+2x_2p_3)+b_4x_1p_3]$ 33

(17) $[a_2x_4p_4+x_1p_2+2x_2p_3,\ b_2x_4p_4+b_3(x_1p_2+2x_2p_3)+b_4x_1p_3]$ 33

(18) $[a_1(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3)+a_2x_4p_4+x_2p_3,$
$b_1(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3)+b_2x_4p_4+b_3x_2p_3+b_4x_2p_1]$ 34

(19) $[a_1(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3)+x_2p_3,$
$b_1(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3)+b_3x_2p_3+b_4x_2p_1]$ 34

(20) $[a_2x_4p_4+x_2p_3,\ b_2x_4p_4+b_3x_2p_3+b_4x_2p_1]$ 34

(21) $[a_1(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3)+a_2x_4p_4+x_2p_3,$
$b_1(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3)+b_2x_4p_4+p_3x_2p_3+b_4x_1p_3]$ 34

(22) $[a_1(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3)+x_2p_3,$
$b_1(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3)+b_3x_2p_3+b_4x_1p_3]$ 34

(23) $[a_2x_4p_4+x_2p_3,\ b_2x_4p_4+b_3x_2p_3+b_4x_1p_3]$ 34

(24) $[a_1(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3)+a_2x_4p_4+x_2p_3,$
$b_1(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3)+b_2x_4p_4+b_3x_2p_3]$ 34

(25) $[x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3,\ x_2p_3]$ 34

(26) $[x_4p_4,\ x_2p_3]$

(27) $[a_1(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3)+a_2x_4p_4,$
$b_1(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3)+b_2x_4p_4+b_3(x_1p_2+2x_2p_3)]$ 35

(28) $[x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3,\ x_1p_2+2x_2p_3]$ 35

(29) $[x_4p_4,\ x_1p_2+2x_2p_3]$ 35

(30) $[x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3,\ x_4p_4]$ 35

(31) $\left\{\begin{array}{l} a_1(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4)+x_1p_2+2x_2p_3+3x_3p_4 \\ b_1(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4) \\ \quad +b_2(x_1p_2+2x_2p_3+3x_3p_4)+b_3(x_1p_3+3x_2p_4)+b_4x_1p_4 \end{array}\right.$ 36

(32) $\left\{\begin{array}{l} x_1p_2+2x_2p_3+3x_3p_4, \\ b_3(x_1p_3+3x_2p_4)+b_4x_1p_4 \end{array}\right.$ 36

(31′) $\left\{\begin{array}{l} a_1(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4)+a_2(x_1p_2+2x_2p_3+3x_3p_4)+a_3(x_1p_3+3x_2p_4), \\ b_1(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4)+b_2(x_1p_2+2x_2p_3+3x_3p_4)+b_3(x_1p_3+3x_2p_4) \end{array}\right.$ 36

(32′) $[x_1p_2+2x_2p_3+3x_3p_4,\ x_1p_3+2x_2p_4]$ 36

(31″) $\left\{\begin{array}{l} a_1(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4)+a_2(x_1p_2+2x_2p_3+3x_3p_4)+a_3x_1p_4, \\ b_1(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4)+b_2(x_1p_2+2x_2p_3+3x_3p_4)+b_3x_1p_4 \end{array}\right.$ 36

(**32″**) $[x_1p_2+2x_2p_3+3x_3p_4,\ x_1p_4]$ 36

(**32‴**) $[x_1p_2+2x_2p_3+3x_3p_4,\ x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4]$ 36

(**33**) $\begin{cases} a_1(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4)+x_1p_2+2x_2p_3, \\ b_1(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4)+x_1p_4+x_4p_3 \end{cases}$ 37

(**34**) $[x_1p_2+2x_2p_3,\ x_1p_4+x_4p_3]$ 37

(**35**) $\begin{cases} a_1(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4)+x_1p_2+2x_2p_3, \\ b_1(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4)+x_4p_3 \end{cases}$ 37

(**36**) $[x_1p_2+2x_2p_3,\ x_4p_3]$ 37

(**37**) $\begin{cases} a_1(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4)+x_1p_2+2x_2p_3, \\ b_1(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4)+x_1p_4 \end{cases}$ 37

(**38**) $[x_1p_2+2x_2p_3,\ x_1p_4]$ 37

(**39**) $\begin{cases} a_1(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4)+x_1p_2+2x_2p_3, \\ b_1(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4)+b_2x_1p_3 \end{cases}$ 37

(**40**) $[x_1p_2+2x_2p_3,\ x_1p_3]$ 37

(**41**) $\begin{cases} a_1(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4)+x_1p_2+x_3p_4, \\ b_1(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4)+x_3p_1+x_4p_2+b_2x_1p_4 \end{cases}$ 38

(**42**) $\begin{cases} x_1p_2+x_3p_4, \\ x_3p_1+x_4p_2+b_2x_1p_4 \end{cases}$ 38

(**41′**) $\begin{cases} a_1(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4)+a_2(x_1p_2+x_3p_4)+a_3(x_1p_3+x_2p_4), \\ b_1(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4)+b_2(x_1p_2+x_3p_4)+b_3(x_1p_3+x_2p_4) \end{cases}$ 38

(**42′**) $[x_1p_2+x_3p_4,\ x_1p_3+x_2p_4]$

(**43**) $\begin{cases} a_1(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4)+x_1p_2+x_3p_4, \\ b_1(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4)+b_2x_1p_4+b_3x_3p_2 \end{cases}$ 38

(**44**) $[x_1p_2+x_3p_4,\ b_2x_1p_4+b_3x_3p_2]$ 38

(**45**) $[x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4,\ x_1p_2+x_3p_4]$ 38

(**46**) $\begin{cases} a_1(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4)+a_2x_1p_3+a_3x_2p_3, \\ b_1(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4)+b_2x_1p_3+b_3x_2p_3 \end{cases}$ 39

(**47**) $[x_1p_3,\ x_2p_3]$ 39

(**48**) $\begin{cases} a_1(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4)+a_2x_1p_2+a_3x_1p_3, \\ b_1(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4)+b_2x_1p_2+b_3x_1p_3 \end{cases}$ 39

CHAPITRE III.

GROUPE DE DEUXIÈME ESPÈCE DONT LES TRANSFORMATIONS NE SONT PAS TOUTES DEUX A DEUX ÉCHANGEABLES.

(XXII)	$[(2a_3 - a_2)x_1p_1 + a_2x_4p_4 + a_3(x_2p_2 + x_3p_3) + x_3p_2,\ x_1p_2 + x_3p_4]$	98
(XXIII)	$[a_1x_2p_2 + a_2x_3p_3 + a_3(x_1p_1 + x_4p_4) + x_1p_4,\ x_1p_2]$	99
(XXIV)	$[a_2x_2p_2 + a_3(x_3p_3 + x_4p_4) + x_3p_4,\ x_1p_2]$	103
(XXV)	$[a_3(x_1p_1 - x_3p_3 + x_4p_4) + x_1p_4,\ x_1p_2 + x_2p_3]$	104
(XXVI)	$[a_2(x_2p_2 + 2x_3p_3 + 2x_4p_4) + x_4p_3,\ x_1p_2 + x_2p_3]$	105
(XXVII)	$[a_2x_1p_1 + a_3(x_3p_3 + x_4p_4) + x_3p_4,\ x_1p_2]$	106
(XXVIII)	$[a_3(-x_1p_1 + x_3p_3 + x_4p_4) + x_4p_3,\ x_1p_2 + x_2p_3]$	107
(XXIX)	$[a_2(2x_1p_1 + x_2p_2 + 2x_4p_4)x_1p_4,\ x_1p_2 + x_2p_3]$	108
(XXX)	$[a_2x_4p_4 + a_3(x_2p_2 + x_3p_3) + x_3p_2,\ x_1p_2]$	109
(XXXI)	$[a_3(x_2p_2 + x_3p_3 + 2x_4p_4) + x_3p_2,\ x_1p_2 + x_3p_4]$	111
(XXXII)	$[a_2x_3p_3 + a_2(x_1p_1 + x_4p_4) + x_1p_4,\ x_1p_2]$	112
(XXXIII)	$[a_3(2x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3) + x_3p_2,\ x_1p_2 + x_3p_4]$	114
(XXXIV)	$[a_2x_1p_1 + a_3(x_2p_2 + x_3p_3) + x_3p_2,\ x_1p_2]$	115
(XXXV)	$[a_2x_2p_2 + a_3(x_1p_1 + x_4p_4) + x_1p_4,\ x_1p_2]$	118
(XXXVI)	$[a_1x_1p_1 + a_2x_2p_2 + x_3p_4,\ x_1p_2]$	122
(XXXVII)	$[a_2(2x_1p_1 + x_2p_2) + x_4p_3,\ x_1p_2 + x_2p_3]$	123
(XXXVIII)	$[a_2(x_2p_2 + 2x_3p_3) + x_1p_4,\ x_1p_2 + x_2p_3]$	124
XXXIX)	$[a_1x_1p_1 + a_2x_4p_4 + x_3p_2,\ x_1p_2]$	125
(XL)	$[a_1(x_1p_1 - x_4p_4) + x_3p_2,\ x_1p_2 + x_3p_4]$	127
(XLI)	$[a_1x_2p_2 + a_2x_3p_3 + x_1p_4,\ x_1p_2]$	128
(XLII)	$[a_1x_1p_1 + a_2x_2p_2 + a_3(x_3p_3 + x_4p_4),\ x_1p_2]$	133
(XLIII)	$[(2a_2 - a_3)x_1p_1 + a_2x_2p_2 + a_3(x_3p_3 + x_4p_4),\ x_1p_2 + x_2p_3]$	134
(XLIV)	$[(2a_2 - a_3)x_3p_3 + a_2x_2p_2 + a_3(x_1p_1 + x_4p_4),\ x_1p_2 + x_2p_3]$	135
(XLV)	$[a_1x_1p_1 + a_2x_3p_3 + a_3(x_2p_2 + x_4p_4),\ x_1p_2]$	136
(XLVI)	$[2a_1x_1p_1 + 2a_2x_3p_3 + (a_1 + a_2)(x_2p_2 + x_4p_4),\ x_1p_2 + x_2p_3]$	138
(XLVII)	$[2a_1x_1p_1 + 2a_2x_4p_4 + (a_1 + a_2)(x_2p_2 + x_3p_3),\ x_1p_2 + x_3p_4]$	139
(XLVIII)	$[a_1x_2p_2 + a_2x_3p_3 + a_3(x_1p_1 + x_4p_4),\ x_1p_2]$	140
(XLIX)	$[a_2x_2p_2 + a_3(x_3p_3 + x_4p_4),\ x_1p_2]$	144