SUR

LES FAMILLES DE SURFACES

A

TRAJECTOIRES ORTHOGONALES PLANES,

PAR M. É. GOURSAT.

Dans une thèse intéressante, soutenue récemment devant la Faculté des Sciences de Paris, M. Carrus (¹) a étudié les familles de surfaces à trajectoires orthogonales planes. Je voudrais présenter quelques remarques sur deux points de ce travail.

1. D'après un résultat dû à M. Cosserat, pour que l'équation

$$u(x, y, z) = \rho \tag{1}$$

représente une famille de surfaces dont les trajectoires orthogonales sont des courbes planes situées dans des plans parallèles à l'axe Ox, il faut et il suffit que u vérifie une équation aux dérivées partielles du premier ordre de la forme

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = \mathrm{F}(x, u); \tag{2}$$

M. Carrus a étudié en détail le cas où la fonction $\mathrm{F}(x, u)$ ne dépend pas de u. Dans le cas général, *l'intégration de l'équation* (2) *revient à la détermination des lignes géodésiques d'un ds^2 à deux variables.*

En laissant de côté certaines solutions formées de cylindres, qui sont évidentes géométriquement, on peut supposer que la fonction u dépend des trois variables x, y, z. Si l'on prend alors x, y, u pour les variables indépendantes et z pour la fonction inconnue, l'équation (2) devient

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 \mathrm{F}(x, u) + 1 = 0. \tag{3}$$

(¹) S. CARRUS, *Familles de surfaces à trajectoires orthogonales planes* (*Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse*, 2ᵉ série, t. VIII, 1906, p. 153-239).

Soit $z = \varphi(x, u; a)$ une intégrale de l'équation

$$(4) \qquad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 \mathrm{F}(x, u) - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 = 1,$$

renfermant une constante arbitraire a (autre qu'une constante additive). On voit immédiatement que la fonction

$$z = \sqrt{1 + b^2}\,\varphi(x, u; a) + by + c$$

est une intégrale complète de l'équation (3).

Or, l'équation (4) est celle dont dépend la détermination des lignes géodésiques des surfaces dont le ds^2 aurait pour expression

$$(5) \qquad ds^2 = \frac{du^2}{\mathrm{F}(x, u)} - dx^2.$$

Cette réduction montre bien quel est le degré de difficulté du problème, et permet de trouver *a priori* des cas d'intégrabilité. Lorsque F ne dépend que de x, le ds^2 convient à des surfaces de révolution. Dans le cas, étudié aussi par M. Carrus, où l'on a

$$\mathrm{F}(x, u) = \frac{1}{[x + \theta(u)]^2},$$

le ds^2 (5) est celui d'une surface développable. Si la fonction $\theta(u)$ est mise sous la forme $\varphi''(u) - \varphi(u)$, on a, en effet,

$$ds^2 = [x\,du - dx + \varphi''(u)\,du - \varphi(u)\,du][x\,du + dx + \varphi''(u)\,du - \varphi(u)\,du]$$

ou

$$ds^2 = d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y},$$

les facteurs X et Y ayant pour expressions

$$\mathrm{X} = e^{u}\ \ (x + \varphi' - \varphi),$$
$$\mathrm{Y} = e^{-u}(\varphi' + \varphi - x),$$

et l'on en déduit immédiatement les géodésiques.

2. Dans une autre partie de son Mémoire (p. 225-228), M. Carrus montre que l'on obtient toutes les familles de Lamé, dont les trajectoires orthogonales sont des courbes planes situées dans des plans passant par un point fixe en intégrant l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$(6) \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = \frac{4}{[x^2 + y^2 + z^2 + \theta(u)]^2},$$

$\theta(u)$ étant une fonction quelconque de u. En cherchant une intégrale complète de cette équation, composée de sphères,

$$F(x, y, z, u) = \lambda(x^2 + y^2 + z^2) + 2ax + 2by + 2cz + d = 0, \tag{7}$$

l'auteur montre ensuite que l'équation (7) définit une intégrale si a, b, c sont trois constantes assujetties à vérifier la relation

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$

et λ, d deux fonctions de u satisfaisant aux deux relations

$$2\lambda\lambda'' - \lambda'^2 + 1 + \lambda^2\theta(u) = 0, \tag{8}$$

$$d\lambda = 1 - \lambda'^2. \tag{9}$$

Pour avoir une intégrale complète, sans aucun signe de quadrature, de l'équation (6), il suffira donc de mettre la fonction arbitraire $\theta(u)$ sous une forme telle que l'on puisse obtenir, sans quadrature, une intégrale de l'équation (8) dépendant d'une constante arbitraire.

Cette équation (8) ne diffère que par les notations d'une équation que j'avais rencontrée et intégrée dans mes *Recherches sur quelques équations aux dérivées partielles du second ordre* (1). Je rappellerai en quelques mots la solution.

En différentiant l'équation (8), et en divisant par λ, on arrive à une équation différentielle linéaire du troisième ordre

$$2\lambda''' + 2\theta(u)\lambda' + \lambda\theta'(u) = 0, \tag{10}$$

qui admet pour intégrales, il est facile de le vérifier, les carrés des intégrales de l'équation linéaire du deuxième ordre

$$4\frac{d^2v}{du^2} + \theta(u)v = 0. \tag{11}$$

Soient v_1, v_2 deux intégrales particulières distinctes de l'équation (11); l'intégrale générale de l'équation (10) est d'après cela

$$\lambda = Av_1^2 + 2Bv_1v_2 + Cv_2^2, \tag{12}$$

A, B, C étant trois constantes arbitraires.

La fonction $\theta(u)$ étant arbitraire, choisissons-la de façon que l'équation (11)

(1) *Annales de la Faculté de Toulouse*, 2e série, t. I, p. 457.

admette l'intégrale particulière

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{f'(u)}};$$

il suffit pour cela de prendre pour $\theta(u)$ la fonction suivante :

$$(13) \qquad \theta(u) = 2\frac{f'''(u)}{f'(u)} - 3\left[\frac{f''(u)}{f'(u)}\right]^2,$$

et l'équation (11) admet la seconde intégrale

$$v_2 = \frac{f(u)}{\sqrt{f'(u)}},$$

de sorte que l'intégrale générale de l'équation linéaire du troisième ordre (10) est

$$(14) \qquad \lambda = \frac{A + 2Bf + Cf^2}{f'(u)}.$$

En substituant ces expressions (13) et (14) de λ et de θ dans l'équation (8), on trouve qu'elle se réduit à une identité pourvu que l'on établisse entre les constantes A, B, C la relation

$$(15) \qquad 1 + 4(AC - B^2) = 0.$$

3. On peut aussi ramener à une détermination de géodésiques d'un ds^2 à deux variables l'intégration de toute équation du premier ordre de la forme

$$(16) \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = F(\rho, u),$$

où

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

En effet, si l'on remplace les coordonnées rectangulaires par les coordonnées polaires ρ, θ, φ, l'équation (16) devient

$$(17) \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2 \sin^2\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2 = F(\rho, u).$$

Si l'on prend maintenant ρ, u et θ pour variables indépendantes, et φ pour la fonction inconnue, l'équation (17) prend la forme

$$(18) \qquad \rho^2 F(\rho, u)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 - \rho^2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\right)^2 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}.$$

Soit

$$\varphi = \Phi(u, \rho, a)$$

une intégrale, avec une constante arbitraire a, de l'équation

$$(19) \qquad \rho^2 \mathrm{F}(\rho, u)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 - \rho^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right)^2 = 1;$$

la fonction

$$\varphi = b\,\Phi(u, \rho, a) + \int \frac{\sqrt{b^2 \sin^2\theta - 1}}{\sin\theta}\,d\theta + c$$

est une intégrale complète de l'équation (18). Or, l'équation (19) est celle dont dépend la détermination des géodésiques de l'élément linéaire

$$(20) \qquad ds^2 = \frac{1}{\rho^2}\left[\frac{du^2}{\mathrm{F}(\rho, u)} - d\rho^2\right].$$

Dans le cas particulier où l'on a

$$\frac{1}{\mathrm{F}} = [\rho^2 + \theta(u)]^2,$$

on vérifie aisément que le ds^2 (20) convient à une surface à courbure constante.

Si l'on pose, en effet, $\rho = e^v$, la formule (20) devient

$$ds^2 = [e^v + \theta(u)e^{-v}]^2\,du^2 - dv^2.$$