GROUPES DE TRANSFORMATIONS CONTINUS,

ISOMORPHES HOLOÉDRIQUES,

PAR M. W. ERMAKOFF,

Professeur à l'Université de Kief.

On rencontre souvent dans l'analyse des expressions qui ne changent pas de forme lorsqu'on effectue certaines transformations contenant des constantes arbitraires. C'est ainsi que la somme des carrés des coordonnées se transforme en une somme des carrés des coordonnées nouvelles par toute transformation des coordonnées rectangulaires ayant même origine. Sophus Lie le premier a appelé l'attention sur de telles formules de transformation. Il a donné à ces formules le nom de *groupes de transformations continus*.

Soit un groupe continu de transformations

$$x_i = f_i(x'_1, \ldots, x'_n; a_1, \ldots, a_m) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Dans ces expressions $a_1, \ldots, a_m$ sont des paramètres arbitraires. Pour abréger, nous écrirons ces équations sous la forme suivante

$$(1) \qquad x_i = f_i(x', a) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Il est convenu d'appeler *ordre du groupe* le nombre des paramètres a entrant dans ces expressions. Pour que les équations (1) forment bien un groupe, il faut que *la forme des équations* (1) *ne change pas par les transformations de l'ensemble*. Montrons à quoi revient cette condition. Effectuons sur les variables x' une transformation définie par les mêmes équations, mais avec d'autres paramètres

$$(2) \qquad x'_i = f_i(x'', b) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Si des équations (1) et (2) nous éliminons les variables x', nous devons obtenir des équations dont la forme sera la même que celle des équations (1)

$$x_i = f_i(x'', c) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Le nombre des paramètres c doit être égal à celui des paramètres a, seulement les paramètres c seront exprimés en fonctions des paramètres a et b.

Si cette condition est satisfaite, les équations (1) formeront un groupe de transformations continu.

Dans chaque groupe continu on peut faire un changement de variables. Soit

$$(3) \qquad \begin{cases} x_i = \varphi_i(y_1, \ldots, y_n) \\ x'_i = \varphi_i(y'_1, \ldots, y'_n) \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

En éliminant des équations (1) et (3) les variables x et x', nous obtiendrons le même groupe exprimé à l'aide des variables nouvelles

$$(4) \qquad y_i = \mathrm{F}_i(y', a) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

On peut de même faire un changement de paramètres en posant

$$a_j = \psi_j(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \qquad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

Après cela, les équations (4) prendront la forme suivante

$$(5) \qquad y_i = \Phi_i(y', \alpha) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Deux groupes, tels que (1) et (5), qui peuvent ainsi être transformés l'un en l'autre par une transformation des variables et des paramètres, ont reçu de Sophus Lie le nom de *groupes continus semblables* (*ännlich*).

Le premier Mémoire de Sophus Lie sur la théorie des groupes continus a paru dans les *Göttinger Nachrichten,* en 1874. Un Mémoire plus complet a paru en 1880 dans le Tome XVI des *Mathematische Annalen.* Au début, Sophus Lie s'était proposé de rechercher tous les groupes à une et à deux variables. Dans le cas d'une variable, tous les groupes peuvent être ramenés par une transformation de la variable au groupe linéaire entier ou fractionnaire. Le nombre de paramètres d'un tel groupe ne dépasse pas trois. Dans le cas de deux variables, le nombre des différents groupes se trouve être supérieur à vingt; parmi ces groupes il y en a qui ont un nombre quelconque de paramètres arbitraires. Si nous voulions continuer ces recherches dans le cas de trois variables, nous trouverions une telle quantité de différents groupes qu'il serait difficile de les énumérer.

Sophus Lie a montré que d'un groupe continu fini (1) on peut déduire un groupe de *transformations infinitésimales* et *vice versa,* un groupe de transformations infinitésimales engendre un groupe fini en différentiant les équations. Si nous désignons les transformations infinitésimales par des symboles, nous obtiendrons un *groupe symbolique* $\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2, \ldots, \mathrm{S}_m$, tel que $\mathrm{S}_i\mathrm{S}_n - \mathrm{S}_k\mathrm{S}_i$ est une fonction linéaire des mêmes symboles. Cette propriété ne change pas lorsqu'on effectue sur les symboles une transformation linéaire. On pourrait faire l'algèbre des symboles satisfaisant à la condition précédente. Ce problème, quoique très compliqué, admet une solution simple. On peut, en outre, montrer de quelle façon on peut passer d'un groupe symbolique à un groupe fini.

Il apparaît que le passage d'un groupe symbolique à un groupe fini peut être effectué de façons très variées; on peut obtenir ainsi des groupes qui ne peuvent plus être transformés les uns en les autres. Prenons, par exemple, un groupe de trois symboles que l'on rencontre fréquemment. Les symboles de ce groupe satisfont aux équations

$$S_1 S_2 - S_2 S_1 = S_1,$$
$$S_1 S_3 - S_3 S_1 = 2 S_1,$$
$$S_2 S_3 - S_3 S_2 = S_3.$$

On peut trouver trois groupes finis engendrés par ce groupe symbolique.

Premier groupe. — C'est le groupe de transformations à une variable

$$x = \frac{ax' + b}{cx' + d}.$$

Deuxième groupe. — C'est le groupe de transformations à deux variables

$$\begin{aligned} y_1 &= ay'_1 + by'_2, \\ y_2 &= cy'_1 + dy'_2, \end{aligned} \qquad ad - bc = 1.$$

Troisième groupe. — C'est le groupe de transformations orthogonales de trois coordonnées

$$\begin{aligned} z_1 &= \alpha z'_1 + \beta z'_2 + \gamma z'_3, \\ z_2 &= \alpha' z'_1 + \beta' z'_2 + \gamma' z'_3, \\ z_3 &= \alpha'' z'_1 + \beta'' z'_2 + \gamma'' z'_3. \end{aligned}$$

Il existe entre les neuf coefficients du dernier groupe six relations connues.

Sophus Lie (1) donne aux groupes finis engendrés par un même groupe symbolique le nom de *groupes isomorphes holoédriques* (*holoedrisch isomorphen* ou *gleichzusammengesetzten*).

Les trois groupes ci-dessus ne peuvent pas être transformés l'un en l'autre pour cette raison bien simple qu'ils ne contiennent pas un même nombre de variables. Il en résulte que les groupes isomorphes holoédriques ne peuvent pas toujours être transformés les uns dans les autres. Dans le Chapitre XIX de son Ouvrage,

---

(1) *Theorie der Transformationsgruppen,* Ier Abschnitt, 1888, Chapitre XVII.

Sophus Lie indique les conditions nécessaires et suffisantes pour que deux groupes soient semblables, c'est-à-dire pour que l'un de ces groupes puisse être transformé en l'autre. Il résulte de ces recherches que les groupes continus présentent une variété infinie, de sorte qu'il est impossible de les réduire à un nombre restreint de types. Une fois cette constatation faite, Sophus Lie et plusieurs autres mathématiciens après lui se mirent à étudier les propriétés particulières des groupes. On en a trouvé un très grand nombre et la littérature concernant la théorie des groupes a pris une très vaste extension et a perdu, par conséquent, une partie de son intérêt.

En réalité, l'affirmation dont je viens de parler est inexacte. Je surprendrai certainement beaucoup tous ceux qui se sont occupés de la théorie des groupes en disant que *deux groupes isomorphes holoédriques peuvent toujours être transformés l'un en l'autre indépendamment du nombre des variables de chaque groupe.*

En effet, les propriétés du groupe restent les mêmes lorsqu'on augmente un nombre quelconque de fois le nombre des variables. Si, dans un groupe donné, on augmente un certain nombre de fois le nombre des variables, on pourra toujours en déduire, par une transformation des variables, tout autre groupe isomorphe holoédrique au premier. La méthode à suivre pour faire une telle transformation sera exposée plus loin.

Le théorème énoncé étant supposé vrai, on voit clairement l'importance du problème de la réduction d'un groupe continu à sa plus simple expression avec le minimum de variables. J'ai l'intention de consacrer trois Mémoires à l'étude de ces questions. Dans le présent Mémoire, je démontre le théorème énoncé plus haut, et je l'explique par quelques exemples. Dans le deuxième, je montrerai de quelle façon un groupe continu peut être ramené à une forme rationnelle avec le minimum de variables. Dans le troisième, je m'occuperai en détails de la forme la plus simple d'un groupe continu.

Faisons tout d'abord une remarque. Dans le cas le plus général, le groupe peut contenir des variables de deux espèces; celles qui varient et celles qui restent sans changement. Ainsi, dans le groupe

$$x = ax' + b + cy,$$

la variable y ne varie pas. La variable qui ne varie pas peut être remplacée par une constante pourvu que l'ordre du groupe reste le même, c'est-à-dire que le nombre de paramètres indépendants ne change pas. Tant que y est regardée comme une variable, le groupe ci-dessus possède trois paramètres; mais, si nous regardons y comme une constante, nous n'aurons que deux paramètres : a et $b + cy$. Dans le groupe

$$x = ax' + by + cz,$$

les variables y et z ne changent pas. L'ordre de ce groupe ne sera pas modifié si nous donnons à l'une de ces variables une valeur déterminée quelconque, par exemple $z=1$.

1. — Propriétés générales des groupes continus.

Pour ne pas faire de renvois, énumérons brièvement les propriétés essentielles des groupes continus. On trouvera la démonstration de ces propriétés dans un grand nombre d'ouvrages.

Soit un groupe continu

$$x_i=f_i(x', \xi, \alpha) \qquad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

Dans ce groupe, les x représentent les variables qui varient, ξ les variables qui ne varient pas, α les paramètres.

Le nombre des quantités de chaque espèce peut être quelconque. Dans chaque groupe nous réduisons toujours les paramètres au plus petit nombre possible. Faisons observer que le nombre des paramètres ne peut pas être réduit, s'il est impossible de choisir les constantes $C_1, \ldots, C_m$ de façon que les équations

$$C_1\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_1}+C_2\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_2}+\ldots+C_m\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_m}=0 \qquad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

deviennent des identités.

Prenons les dérivées des fonctions (1) par rapport à un paramètre quelconque, et formons l'expression différentielle suivante

$$T_j=\frac{\partial f_1}{\partial \alpha_j}\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial f_2}{\partial \alpha_j}\frac{\partial}{\partial x_2}+\ldots+\frac{\partial f_n}{\partial \alpha_j}\frac{\partial}{\partial x_n}. \tag{3}$$

Dans cette expression, les coefficients des dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial x_i}$ sont des fonctions des variables x', ξ et des paramètres α. Mais des équations (1) nous pouvons tirer les variables x' en fonction des variables x, ξ et des paramètres α. Les coefficients de l'expression (3) pourront donc être regardés comme des fonctions des variables x, ξ et des paramètres α. Dans ce cas, comme on le prouve dans la théorie générale des groupes continus, l'expression (3) peut être mise sous la forme suivante

$$T_j=A_{j_1}S_1+A_{j_2}S_2+\ldots+A_{j_m}S_m.$$

Les coefficients A_{j_i} y sont des fonctions des paramètres seuls et ne dépendent pas des variables x et ξ. Quant à $S_1, S_2, \ldots, S_m$, ce sont des expressions différentielles

$$S_i = X_{i1}\frac{\partial}{\partial x_1} + X_{i2}\frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + X_{in}\frac{\partial}{\partial x_n} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

Les coefficients de ces expressions sont des fonctions des variables x et ξ et ne dépendent pas des paramètres α.

Sophus Lie a donné aux expressions différentielles (4) le nom de *transformations infinitésimales*.

Une combinaison de deux transformations infinitésimales quelconques s'exprime linéairement à l'aide des mêmes transformations infinitésimales

$$S_i S_k - S_k S_i = E_{ik1} S_1 + E_{ik2} S_2 + \ldots + E_{ikm} S_m. \tag{5}$$

Dans le second membre, les coefficients E_{ikj} sont des nombres qui ne dépendent ni des paramètres α, ni des variables x et ξ. Les transformations infinitésimales S_1, $S_2, \ldots, S_m$ qui satisfont à cette condition forment un *groupe de transformations infinitésimales*.

Le groupe des transformations infinitésimales (4) est identique au *groupe de transformations* fini (1) dans ce sens que l'un des deux découle de l'autre.

Pour déduire d'un groupe de transformations infinitésimales (4) un groupe fini (1), on procédera de la façon suivante : Formons les équations différentielles

$$\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_i} = X_{i1}, \qquad \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_i} = X_{i2}, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_i} = X_{in}.$$

Choisissons les constantes d'intégration de façon que, pour une valeur particulière du paramètre α_i, les variables $x_1, \ldots, x_n$ se réduisent respectivement à $x'_1, \ldots, x'_n$. Nous obtiendrons ainsi un *groupe de transformations d'ordre un*, c'est-à-dire un groupe de transformations à un seul paramètre

$$x_j = f_j(x'_1, \ldots, x'_n; \xi_1, \xi_2, \ldots, \alpha_i) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

En combinant ces groupes entre eux, nous aurons le groupe de transformations (1).

Entre un groupe de transformations fini (1) et le groupe de transformations infinitésimales (4) il existe encore une autre relation importante. Transformons les expressions différentielles (4) en introduisant des variables nouvelles x' à l'aide des équations (1). Nous aurons les équations suivantes

$$S_i = A_{i1} S'_1 + A_{i2} S'_2 + \ldots + A_{im} S'_m \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Dans ces équations S'_i s'obtient de l'expression (4) par une simple substitution des variables x' aux variables x. Quant aux coefficients A_{ij}, ils ne dépendent pas des variables x' et ξ et sont des fonctions des paramètres α seuls.

Nous arrivons ainsi au théorème suivant :

Théorème I. — *Toute transformation infinitésimale* (4) *se transforme à l'aide des équations* (1) *en une fonction linéaire des mêmes transformations infinitésimales.*

On doit y ajouter le théorème réciproque suivant :

Théorème II. — *Si toute transformation infinitésimale* (4) *se transforme à l'aide d'équations quelconques*

$$x_i = \varphi_i(x', \xi) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{6}$$

en une fonction linéaire des mêmes transformations infinitésimales, les équations (6) *sont contenues dans les équations* (1).

On doit entendre par là qu'on peut donner aux paramètres α des valeurs telles que les équations (1) deviennent identiques aux équations (6).

Faisons observer ensuite qu'entre les transformations infinitésimales (4) il ne doit pas exister de relation linéaire à coefficients constants. En effet, si une telle relation existait, il existerait également une relation semblable entre les expressions différentielles (3)

$$C_1 T_1 + C_2 T_2 + \ldots + C_m T_m = 0.$$

Cette relation se décompose en équations (2), ce qui est impossible si les paramètres α sont réduits au moindre nombre. Il en résulte le théorème suivant :

Théorème III. — *Si les paramètres α sont réduits au moindre nombre, il n'existe pas entre les transformations infinitésimales* (4) *de relation linéaire à coefficients constants.*

Pourtant, il peut exister entre les transformations infinitésimales (4) des relations linéaires à coefficients dépendant des variables x et ξ. De telles relations existent toujours si le nombre des variables qui varient est inférieur à celui des paramètres α.

Le théorème suivant a, en outre, lieu :

Théorème IV. — *Si les équations différentielles*

$$S_1\Phi = 0, \qquad S_2\Phi = 0, \qquad \ldots, \qquad S_m\Phi = 0 \tag{7}$$

ont une intégrale commune

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n; \xi_1, \xi_2, \ldots) = C,$$

cette fonction ne change pas par les transformations (1)

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n; \xi_1, \xi_2, \ldots) = \Phi(x'_1, \ldots, x'_n; \xi_1, \xi_2, \ldots).$$

Dans le cas général, les équations (7) peuvent avoir μ intégrales communes. Pour trouver ces intégrales, il suffit d'intégrer les $n-\mu$ équations différentielles

$$S_1\Phi = 0, \qquad S_2\Phi = 0, \qquad \ldots, \qquad S_{n-\mu}\Phi = 0.$$

Les intégrales de ces équations doivent satisfaire aux autres équations (7). Mais cela n'est possible que dans le cas où toutes les transformations infinitésimales (4) s'expriment linéairement au moyen de $n-\mu$ transformations infinitésimales. D'où le théorème suivant :

Théorème V. — *Si les équations différentielles* (7) *ont* μ *intégrales, toutes les transformations infinitésimales s'expriment linéairement au moyen de* $n-\mu$ *transformations infinitésimales.*

La réciproque est également vraie.

Tels sont les théorèmes les plus importants de la théorie des groupes.

2. — Groupe imprimitif.

Nous dirons qu'un groupe de transformations

$$(1) \qquad x_i = f_i(x', \xi, \alpha) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

est *primitif,* si l'on ne peut pas éliminer de ces équations tous les paramètres. Par contre, si des équations (1) on peut éliminer tous les paramètres α, le groupe sera dit *imprimitif.*

Il résulte de cette définition que tout groupe dans lequel le nombre des variables x qui varient est plus grand que celui des paramètres α, est imprimitif. Mais il peut arriver que le groupe soit imprimitif lors même que le nombre des variables x est plus petit que celui des paramètres α.

Montrons comment on peut reconnaître si le groupe est primitif. Démontrons que, dans le cas où le groupe est imprimitif, on peut, sans nuire à sa généralité, diminuer le nombre des variables qui varient.

Supposons que les équations (1), après élimination des paramètres, conduisent aux μ équations

$$(2) \qquad F_i(x_1, \ldots, x_n, x'_1, \ldots, x'_n; \xi_1, \xi_2, \ldots) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu).$$

En exprimant à l'aide de ces équations μ variables x en fonction des autres variables, on mettra les équations sous la forme

$$(3)\quad x_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_{n-\mu}; \xi_1, \xi_2, \ldots; q'_1, \ldots, q'_\nu) \qquad (i = n-\mu+1, \ldots, n).$$

Dans ces équations, les paramètres q' sont de certaines fonctions des variables x' et ξ. Nous pouvons toujours réduire les paramètres q' au moindre nombre. Les équations (3) ne doivent pas changer de forme, en substituant aux variables x' les expressions suivantes

$$(4)\qquad x'_i = f_i(x'', \xi, \beta) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Par cette substitution les équations (3) doivent se transformer en les équations suivantes

$$x_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_{n-\mu}; \xi_1, \xi_2, \ldots; q''_1, \ldots, q''_\nu) \qquad (i = n-\mu+1, \ldots, n).$$

Dans ces dernières équations, les paramètres q'' s'obtiennent des paramètres q' en remplaçant les variables x' par les variables x''. Il en résulte qu'après élimination des paramètres β des équations (4), on doit obtenir les équations suivantes

$$q_i(x'_1, \ldots, x'_n; \xi_1, \xi_2, \ldots) = q_i(x''_1, \ldots, x''_n; \xi_1, \xi_2, \ldots) \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Ces dernières équations doivent être équivalentes aux équations (2), et leur nombre doit être le même. Nous en déduisons le théorème suivant :

Si le groupe des transformations (1) *est imprimitif, on obtient, après élimination des paramètres* α, *une ou plusieurs équations de la forme suivante*

$$\Phi_i(x_1, \ldots, x_n; \xi_1, \xi_2, \ldots) = \Phi_i(x'_1, \ldots, x'_n; \xi_1, \xi_2, \ldots) \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu).$$

Il résulte des théorèmes IV et V (n° 1) que, dans ce cas, les équations (7), n° 1, ont μ intégrales.

On voit donc qu'il est facile de reconnaître si un groupe est imprimitif.

Le groupe (1) *est imprimitif si toutes les transformations infinitésimales s'expriment linéairement au moyen de* $n-\mu$ *transformations infinitésimales.*

Soit

$$\Phi_i(x_1, \ldots, x_n; \xi_1, \xi_2, \ldots) = \Phi_i(x'_1, \ldots, x'_n; \xi_1, \xi_2, \ldots) = \eta_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu).$$

A l'aide de ces équations, nous pouvons exprimer μ variables x et μ variables correspondantes x' en fonction des autres variables. Substituons les variables ainsi déterminées dans les équations (1). Après cela, on pourra rejeter μ équations, attendu qu'elles sont les conséquences des autres équations. En fin de compte, nous réduirons le nombre des variables x, mais en même temps on verra apparaître de nouvelles variables η qui restent sans changement.

Cela nous conduit au théorème suivant :

Dans chaque groupe imprimitif on peut, par une transformation des variables, diminuer le nombre des variables qui varient, mais le groupe devient alors primitif.

3. — Groupes identiques.

Soit un groupe primitif

$$x_i = f_i(x', \xi, \alpha) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

En laissant ξ et α sans changement, substituons aux variables x et x' les autres variables

$$y_i = f_i(y', \xi, \alpha) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Appelons les groupes ainsi formés *groupes identiques*.

Supposons que dans le groupe (1) *le nombre des variables qui varient soit plus petit que celui des paramètres.*

Nous allons montrer que, dans ce cas, le groupe (1) ne peut pas être transformé en groupe identique (2) à l'aide de formules contenant des paramètres arbitraires.

Désignons les transformations infinitésimales du groupe (1) par $S_1, S_2, \ldots, S_m$. En substituant les variables y aux variables x, nous obtiendrons les transformations infinitésimales du groupe (2)

$$T_1, \quad T_2, \quad \ldots, \quad T_m.$$

Ajoutons les équations (2) aux équations (1). Le groupe ainsi obtenu contiendra $2n$ variables qui varient. Les transformations infinitésimales de ce groupe seront

$$S_1 + T_1, \quad S_2 + T_2, \quad \ldots, \quad S_m + T_m. \tag{3}$$

Il peut arriver que le groupe ainsi formé soit imprimitif. Dans ce cas, les transformations infinitésimales (3) s'expriment linéairement en fonction de $2n - \mu$ transformations infinitésimales. Alors les équations

$$S_1\Phi + T_1\Phi = 0, \qquad S_2\Phi + T_2\Phi = 0, \qquad \ldots, \qquad S_m\Phi + T_m\Phi = 0$$

ont μ intégrales. Le nombre μ ne doit pas dépasser n; car, dans ce cas, le groupe (1) serait imprimitif.

Soit $\mu = n$. Supposons que toutes les transformations infinitésimales (3) s'expriment linéairement au moyen de n transformations infinitésimales. Dans ce cas, comme cela a été prouvé dans le n° 2, nous aurons les équations

$$\Phi_i(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n; \xi_1, \xi_2, \ldots) = \Phi_i(x'_1, \ldots, x'_n; y'_1, \ldots, y'_n; \xi_1, \xi_2, \ldots) = \beta_i$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Ces équations nous donnent

$$x_i = \varphi_i(y_1, \ldots, y_n; \xi_1, \xi_2, \ldots; \beta_1, \ldots, \beta_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{4}$$

$$x'_i = \varphi_1(y'_1, \ldots, y'_n; \xi_1, \xi_2, \ldots; \beta_1, \ldots, \beta_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{5}$$

Dans ces équations, nous pouvons considérer les quantités β comme des paramètres.

En admettant ce qui précède, les équations (1) se transforment, à l'aide des formules de transformations (4) et (5), en équations (2).

Appliquons les transformations (4) et (5), plusieurs fois de suite, mais en nous servant chaque fois de nouveaux paramètres β. Nous obtiendrons de nouveau des formules à l'aide desquelles les équations (1) se transformeront en équations (2). Il en résulte que deux transformations successives laissent la forme des équations (4) et (5) invariable; en même temps le nombre des paramètres reste également sans changement. Les équations (4) forment donc un groupe dans lequel le nombre des variables qui varient est égal à celui des paramètres; désignons les transformations infinitésimales de ce groupe par

$$\Sigma_1, \quad \Sigma_2, \quad \ldots, \quad \Sigma_n. \tag{6}$$

Le groupe (5) est identique au groupe (4); les transformations infinitésimales de ce groupe s'obtiennent des transformations infinitésimales (6) à l'aide d'une simple substitution des variables x' aux variables x

$$\Sigma'_1, \quad \Sigma'_2, \quad \ldots, \quad \Sigma'_n. \tag{7}$$

Les formules (1) et (2) transforment le groupe (4) en un groupe identique (5). Les transformations infinitésimales (6) se transforment donc à l'aide des expressions (1) en transformations infinitésimales (7); en même temps, chaque transformation (6) se transforme en une expression linéaire des transformations infinitésimales (7). En vertu du théorème II (n° 1), les équations (1) doivent être contenues dans les équations (4); mais cela n'est possible que dans le cas où le nombre des paramètres α ne dépasse pas le nombre des paramètres β.

Nous arrivons donc à la conclusion suivante :

Si, dans un groupe primitif (1), *le nombre des variables qui varient est plus petit que celui des paramètres, ce groupe ne peut pas être transformé* *en un groupe identique à l'aide de formules contenant des paramètres arbitraires.*

Par contre, si, dans un groupe primitif (1), le nombre des variables qui varient est égal à celui des paramètres, ce groupe peut toujours être transformé en un groupe identique (2) à l'aide des formules (4) et (5) contenant des paramètres arbitraires. Dans ce cas, les paramètres β peuvent être exprimés en fonction des paramètres α, de telle manière que le groupe (4) soit identique au groupe (1).

4. — Réduction d'un groupe a la forme complète.

Soit un groupe primitif

$$(1) \qquad x_i = f_i(x', \xi, \alpha) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Supposons que dans ce groupe le nombre des variables x qui varient soit plus petit que celui des paramètres α. Ajoutons à ce groupe un groupe identique

$$(2) \qquad y_i = f_i(y', \xi, \alpha) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Nous obtiendrons un groupe avec $2n$ variables x et y. Il peut arriver que ce groupe soit imprimitif; les transformations infinitésimales du groupe s'exprimeront alors linéairement au moyen de $2n - \mu$ transformations infinitésimales. Il a été démontré dans le n° 3 que μ ne doit pas dépasser n.

En vertu du n° 2 nous pouvons diminuer le nombre des variables qui varient de μ unités. Nous obtiendrons alors un groupe primitif contenant $2n - \mu$ variables qui varient. Si dans ce groupe le nombre des variables qui varient est plus petit que celui des paramètres, nous pourrons appliquer le même procédé une seconde fois. On procédera de la même manière jusqu'à ce qu'on obtienne un groupe primitif tel que le nombre des variables y soit égal à celui des paramètres.

Appelons *groupe complet* tout groupe primitif dans lequel le nombre des variables qui varient est égal à celui des paramètres.

Nous pouvons déduire de ce qui précède le théorème suivant :

Tout groupe peut être transformé en groupe complet, par une transformation de variables et par l'adjonction de groupes identiques.

5. — Groupes isomorphes holoédriques.

Soit un groupe primitif de transformations

$$(1) \qquad x_i = f_i(x', \xi, \alpha) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Soient

$$(2) \qquad S_i = X_{i1}\frac{\partial}{\partial x_1} + X_{i2}\frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + X_{in}\frac{\partial}{\partial x_n} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

les transformations infinitésimales de ce groupe.

Toute combinaison de ces transformations infinitésimales s'exprime linéairement au moyen des mêmes transformations infinitésimales

$$(3) \qquad S_i S_k - S_k S_i = \varepsilon_{ik1} S_1 + \varepsilon_{ik2} S_2 + \ldots + \varepsilon_{ikm} S_m.$$

Considérons un autre groupe primitif

$$(4) \qquad y_i = \varphi_i(y', \eta, \beta) \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Supposons que les ordres des deux groupes (1) et (4) soient les mêmes, c'est-à-dire que le nombre des paramètres α soit égal à celui des paramètres β. Le nombre des variables dans les deux groupes peut être différent. Soient

$$(5) \qquad T_i = Y_{i1}\frac{\partial}{\partial y_1} + Y_{i2}\frac{\partial}{\partial y_2} + \ldots + Y_{in}\frac{\partial}{\partial y_n} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

les transformations infinitésimales du groupe (4).

Il peut arriver que les combinaisons des transformations infinitésimales (5) s'expriment en fonction linéaire des transformations infinitésimales exactement de la même manière que les combinaisons des transformations infinitésimales (2), c'est-à-dire que l'on ait

$$(6) \qquad T_i T_k - T_k T_i = \varepsilon_{ik1} T_1 + \varepsilon_{ik2} T_2 + \ldots + \varepsilon_{ikm} T_m,$$

les coefficients des termes du second membre étant respectivement égaux à ceux de (3). Si cela a lieu, les deux groupes de transformations infinitésimales (2) et (5) seront *isomorphes holoédriques,* car à chaque transformation infinitésimale de l'un de ces groupes correspond une transformation infinitésimale de l'autre. Dans ce cas les groupes finis (1) et (4) portent également le nom de *groupes isomorphes holoédriques*.

Cherchons à résoudre la question suivante :

Peut-on transformer un groupe en un groupe qui lui soit holoédrique isomorphe?

Supposons que le nombre des variables du groupe (4) qui varient ne dépasse pas celui des variables correspondantes du groupe (1), $\nu \leqq n$. Essayons de déduire le groupe (4) du groupe (1) par une transformation des variables.

Pour cela formons les équations différentielles

$$S_i\Phi = T_i\Phi \qquad (i=1, 2, \ldots, m).$$

Substituons à Φ successivement $y_1, y_2, \ldots, y_\nu$, en considérant les variables y comme des fonctions des variables x, ξ et η. Nous obtiendrons ainsi le système d'équations différentielles

$$(7) \qquad S_i y_j = Y_{ij} \qquad (i=1, 2, \ldots, n;\ j=1, 2, \ldots, \nu).$$

En vertu des égalités (3) et (6) les parenthèses de Poisson formées de deux quelconques des équations (7) se ramènent à une combinaison linéaire des mêmes équations. Les équations (7) forment donc un système fermé. Un tel système admet toujours des intégrales dont le nombre est égal à celui des fonctions cherchées y.

On serait tenté d'en conclure que deux groupes isomorphes holoédriques peuvent être transformés l'un en l'autre. *Mais une telle conclusion n'est pas justifiée* et voici pourquoi : la théorie générale des équations différentielles aux dérivées partielles montre que les intégrales existent réellement, mais ces intégrales peuvent se présenter sous une forme dont on ne pourrait tirer parti. En effet, il peut arriver que l'une des intégrales des équations (7) se transforme en une certaine relation entre les fonctions cherchées y :

$$F(y_1, \ldots, y_\nu) = 0.$$

Cette circonstance indique que le groupe (1) ne peut pas être transformé en groupe (4). Expliquons-le sur un exemple.

Prenons le groupe suivant :

$$(8) \qquad x_1 = \frac{ax'_1 + b}{cx'_1 + d}, \qquad x_2 = \frac{x'_2}{cx'_2 + d}.$$

Ce groupe contient trois paramètres si $ad - bc = 1$. Les transformations infinitésimales de ce groupe sont

$$S_1 = \frac{\partial}{\partial x_1},$$

$$S_2 = x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{1}{2}x_2\frac{\partial}{\partial x_2},$$

$$S_3 = x_1^2\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1x_2\frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Il existe entre ces transformations infinitésimales les relations suivantes

$$(9)\qquad \begin{cases} S_1 S_2 - S_2 S_1 = S_1, \\ S_1 S_3 - S_3 S_1 = 2 S_2, \\ S_2 S_3 - S_3 S_2 = S_3. \end{cases}$$

Prenons ensuite le groupe suivant :

$$(10)\qquad y_1 = \frac{\alpha^2 y'_1 + \alpha\beta y'_2 + \beta^2}{\gamma^2 y'_1 + \gamma\delta y'_2 + \delta^2}, \qquad y_2 = \frac{2\alpha\gamma y'_1 + (\alpha\delta + \beta\gamma) y'_2 + 2\beta\delta}{\gamma^2 y'_1 + \gamma\delta y'_2 + \delta^2}.$$

Le groupe sera de nouveau du troisième ordre si $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Les transformations infinitésimales de ce groupe sont

$$T_1 = y_2 \frac{\partial}{\partial y_1} + 2 \frac{\partial}{\partial y_2},$$

$$T_2 = 2 y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_2},$$

$$T_3 = y_1 y_2 \frac{\partial}{\partial y_1} + (y_2^2 - 2 y_1) \frac{\partial}{\partial y_2}.$$

Il existe entre ces transformations infinitésimales les relations suivantes

$$(11)\qquad \begin{cases} T_1 T_2 - T_2 T_1 = T_1, \\ T_1 T_3 - T_3 T_1 = 2 T_2, \\ T_2 T_3 - T_3 T_2 = T_3. \end{cases}$$

Les formules (9) et (11) montrent que les groupes (8) et (10) sont isomorphes holoédriques. Essayons de transformer le groupe (8) en groupe (10). Les équations (7) prennent la forme suivante

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = y_2, \qquad \frac{\partial y_2}{\partial x_1} = 2,$$

$$x_1 \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} x_2 \frac{\partial y_1}{\partial x_2} = 2 y_1, \qquad x_1 \frac{\partial y_2}{\partial x_1} + \frac{1}{2} x_2 \frac{\partial y_2}{\partial x_2} = y_2,$$

$$x_1^2 \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + x_1 x_2 \frac{\partial y_1}{\partial x_2} = y_1 y_2, \qquad x_1^2 \frac{\partial y_2}{\partial x_1} + x_1 x_2 \frac{\partial y_2}{\partial x_2} = y_2^2 - 2 y_1.$$

Les intégrales de ces équations sont

$$y_1 = x_1^2, \qquad y_2 = 2 x_1.$$

Mais ces intégrales ne satisfont pas à notre problème. Qu'est-ce que l'on peut en conclure? Peut-on transformer un groupe en un autre groupe holoédrique isomorphe? Il est bien entendu qu'une telle transformation est toujours possible, mais elle ne se fait pas aussi simplement qu'on pourrait le croire à première vue.

Supposons que nous ayons deux groupes isomorphes holoédriques et que l'on demande de transformer l'un de ces groupes en l'autre. Dans ce but, réduisons tout d'abord le premier groupe à la forme complète, en nous servant pour cela du procédé indiqué dans le n° 4; après cela il sera toujours possible de déduire du groupe complet, par une transformation convenable, n'importe quel autre groupe isomorphe holoédrique. En effet, si le premier groupe est complet, le nombre des variables qui varient est égal à celui des paramètres, $n = m$. On pourra déduire des équations (7) les dérivées partielles de chacune des variables dépendantes $y_1, \ldots, y_\nu$. Nous aurons les différentielles totales des fonctions cherchées y; par conséquent le problème se ramène à l'intégration de plusieurs équations aux différentielles totales.

Pour la solution de certains problèmes particuliers il n'est pas toujours nécessaire de ramener le premier groupe à la forme complète, mais il suffit d'augmenter un certain nombre de fois le nombre des variables qui varient en ajoutant des groupes identiques.

Nous pouvons en déduire ce qui suit :

Si, par l'adjonction de groupes identiques, on augmente plusieurs fois, dans un groupe donné, le nombre des variables qui varient, on pourra, par une transformation des variables, déduire du groupe ainsi obtenu n'importe quel autre groupe isomorphe holoédrique au premier.

Expliquons ce théorème sur quelques exemples.

6. — Groupe linéaire homogène a deux variables.

Prenons le groupe suivant

$$(1)\qquad \begin{cases} y = ay' + bz', \\ z = cy' + dz'. \end{cases}$$

Ce groupe sera du troisième ordre, si $ad - bc = 1$. Posons $\frac{y}{z} = x$. Nous aurons alors

$$(2)\qquad x = \frac{ax' + b}{cx' + d}.$$

Ces deux groupes sont isomorphes holoédriques. Le premier de ces groupes peut être facilement transformé en groupe (2). Montrons de quelle façon le groupe (2) se transforme en groupe (1). Triplons pour cela le nombre des variables du second groupe

$$x = \frac{ax' + b}{cx' + d}, \qquad x_1 = \frac{ax'_1 + b}{cx'_1 + d}, \qquad x_2 = \frac{ax'_2 + b}{cx'_2 + d}. \tag{3}$$

Nous pouvons maintenant montrer que l'on peut par une transformation des variables déduire du groupe (3) le groupe (1).

Les transformations infinitésimales du groupe (3) seront

$$\left\{\begin{aligned} S_1 &= \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}, \\ S_2 &= x\frac{\partial}{\partial x} + x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2}, \\ S_3 &= x^2\frac{\partial}{\partial x} + x_1^2\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2^2\frac{\partial}{\partial x_2}. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Entre ces transformations infinitésimales existent les relation suivantes

$$\begin{aligned} S_1S_2 - S_2S_1 &= S_1, \\ S_1S_3 - S_3S_1 &= 2S_2, \\ S_2S_3 - S_3S_2 &= S_3. \end{aligned}$$

Nous devons ensuite trouver les transformations infinitésimales du groupe (1) sous une forme telle qu'elles correspondent aux transformations infinitésimales (4). Les transformations infinitésimales cherchées seront

$$T_1 = y\frac{\partial}{\partial z}, \qquad T_2 = \frac{1}{2}z\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{2}y\frac{\partial}{\partial y}, \qquad T_3 = -z\frac{\partial}{dy}.$$

Ces transformations infinitésimales correspondent réellement aux transformations infinitésimales (4), puisque l'on a

$$\begin{aligned} T_1T_2 - T_2T_1 &= T_1, \\ T_1T_3 - T_3T_1 &= 2T_2, \\ T_2T_3 - T_3T_2 &= T_3. \end{aligned}$$

Formons maintenant les équations différentielles

$$S_1\Phi = T_1\Phi, \qquad S_2\Phi = T_2\Phi, \qquad S_3\Phi = T_3\Phi.$$

Substituons successivement y et z à Φ :

$$\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x_1} + \frac{\partial y}{\partial x_2} = 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x_1} + \frac{\partial z}{\partial x_2} = y,$$

$$x\frac{\partial y}{\partial x} + x_1\frac{\partial y}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial y}{\partial x_2} = -\frac{1}{2}y, \qquad x\frac{\partial z}{\partial x} + x_1\frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial z}{\partial x_2} = \frac{1}{2}z,$$

$$x^2\frac{\partial y}{\partial x} + x_1^2\frac{\partial y}{\partial x_1} + x_2^2\frac{\partial y}{\partial x_2} = -z, \qquad x^2\frac{\partial z}{\partial x} + x_1^2\frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2^2\frac{\partial z}{\partial x_2} = 0.$$

Tirons de ces équations les dérivées partielles des fonctions y et z; avec ces dérivées partielles formons les différentielles totales; nous obtiendrons les équations suivantes

$$\begin{aligned}&(x-x_1)(x-x_2)(x_1-x_2)\,\partial y\\&\quad-\frac{y}{2}[(x_1^2-x_2^2)\,\partial x+(x_2^2-x^2)\,\partial x_1+(x^2-x_1^2)\,\partial x_2]\\&\qquad\qquad+z[(x_1-x_2)\,\partial x+(x_2-x)\,\partial x_1+(x-x_1)\,\partial x_2]=0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(x-x_1)(x-x_2)(x_1-x_2)\,\partial z\\&\quad-y[x_1x_2(x_1-x_2)\,\partial x+x_2x(x_2-x)\,\partial x_1+xx_1(x-x_1)\,\partial x_2]\\&\qquad\qquad+\frac{z}{2}[x_1^2-x_2^2)\,\partial x+(x_2^2-x^2)\,\partial x_1+(x^2-x_1^2)\,\partial x_2]=0.\end{aligned}$$

Les intégrales de ces équations seront

$$(5)\qquad y=\frac{\mathrm{A}x+\mathrm{B}x_1+\mathrm{C}x_2}{\sqrt{(x-x_1)(x-x_2)(x_1-x_2)}}, \qquad z=\frac{\mathrm{A}x_1x_2+\mathrm{B}x_2x+\mathrm{C}xx_1}{\sqrt{(x-x_1)(x-x_2)(x_1-x_2)}},$$

où les constantes sont liées par la relation

$$(6)\qquad \mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}=0.$$

Le résultat que nous venons de trouver peut être vérifié de la façon suivante : transformons les variables x, x_1 et x_2 d'après les formules (3). Les variables y et z définies par les formules (5) pourront se transformer linéairement si entre les trois constantes A, B et C il existe la relation (6).

7. — Groupe linéaire non homogène a deux variables.

Prenons le groupe de transformation suivant

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned}x_1&=a'x'_1+b'x'_2+c',\\x_2&=a\,x'_1+b\,x'_2+c.\end{aligned}\right.$$

Ce groupe contient six paramètres. Les transformations infinitésimales de ce groupe sont

$$(2)\qquad \begin{cases} S_1 = \dfrac{\partial}{\partial x_1}, & S_2 = \dfrac{\partial}{\partial x_2}, & S_3 = x_1 \dfrac{\partial}{\partial x_1}, \\ S_4 = x_2 \dfrac{\partial}{\partial x_2}, & S_5 = x_2 \dfrac{\partial}{\partial x_1}, & S_6 = x_1 \dfrac{\partial}{\partial x_2}. \end{cases}$$

Prenons ensuite le groupe suivant

$$(3)\qquad y_1 = \frac{a' y'_1 - b'}{a y'_1 - b}, \qquad y_2 = \frac{\alpha y'_1 + \beta y'_2 + \gamma}{a y'_1 - b}.$$

Montrons que ces deux groupes sont isomorphes holoédriques. Les transformations infinitésimales du groupe (3) sont

$$(4)\qquad \begin{cases} T_1 = \dfrac{\partial}{\partial y_2}, & T_2 = y_1 \dfrac{\partial}{\partial y_2}, & T_3 = y_1 \dfrac{\partial}{\partial y_1} + y_2 \dfrac{\partial}{\partial y_2}, \\ T_4 = -y_1 \dfrac{\partial}{\partial y_1}, & T_5 = -\dfrac{\partial}{\partial y_1}, & T_6 = y_1^2 \dfrac{\partial}{\partial y_1} + y_1 y_2 \dfrac{\partial}{\partial y_2}. \end{cases}$$

En formant les combinaisons des transformations infinitésimales (2) ainsi que les combinaisons des transformations infinitésimales (4), nous verrons facilement que les groupes donnés sont isomorphes holoédriques.

Les transformations infinitésimales correspondantes ont les mêmes index. Il en résulte que l'un de ces groupes peut être transformé en l'autre.

Montrons comment transformer le groupe (1) en groupe (3). En doublant le nombre des variables du groupe (1) nous obtiendrons le groupe suivant

$$(5)\qquad \begin{cases} x_1 = a' x'_1 + b' x'_2 + c', & \xi_1 = a' \xi'_1 + b' \xi'_2 + c', \\ x_2 = a\, x'_1 + b\, x'_2 + c, & \xi_2 = a\, \xi'_1 + b\, \xi'_2 + c. \end{cases}$$

De ce groupe on peut, par une transformation des variables, déduire le groupe (3). Les variables y_1 et y_2 sont données par les équations différentielles suivantes

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial y_1}{\partial \xi_1} = 0, \qquad \frac{\partial y_2}{\partial x_1} + \frac{\partial y_2}{\partial \xi_1} = 1,$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \frac{\partial y_1}{\partial \xi_2} = 0, \qquad \frac{\partial y_2}{\partial x_2} + \frac{\partial y_2}{\partial \xi_2} = y_1,$$

et

$$x_1 \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \xi_1 \frac{\partial y_1}{\partial \xi_1} = y_1, \qquad x_1 \frac{\partial y_2}{\partial x_1} + \xi_1 \frac{\partial y_2}{\partial \xi_1} = y_2,$$

$$x_2 \frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \xi_2 \frac{\partial y_1}{\partial \xi_2} = - y_1, \qquad x_2 \frac{\partial y_2}{\partial x_2} + \xi_2 \frac{\partial y_2}{\partial \xi_2} = 0,$$

$$x_2 \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial y_1}{\partial \xi_1} = - 1, \qquad x_2 \frac{\partial y_2}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial y_2}{\partial \xi_1} = 0,$$

$$x_1 \frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \xi_1 \frac{\partial y_1}{\partial \xi_2} = y_1^2, \qquad x_1 \frac{\partial y_2}{\partial x_2} + \xi_1 \frac{\partial y_2}{\partial \xi_2} = y_1 y_2.$$

Les intégrales de ces équations sont

$$y_1 = - \frac{x_1 - \xi_1}{x_2 - \xi_2}, \qquad y_2 = \frac{\xi_1 x_2 - \xi_2 x_1}{x_2 - \xi_2}.$$

Telles sont les formules qui servent pour transformer le groupe (5) en groupe (3).

Montrons maintenant la solution du problème inverse : Transformer le groupe (3) en groupe (1). Doublons pour cela le nombre des variables du groupe (3), nous obtiendrons le groupe suivant

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} y_1 &= \frac{a' y'_1 - b'}{a y'_1 - b}, \qquad & y_2 &= \frac{\alpha y'_1 + \beta y'_2 + \gamma}{a y'_1 + b}, \\ \eta_1 &= \frac{a' \eta'_1 - b'}{a \eta'_1 - b}, \qquad & \eta_2 &= \frac{\alpha \eta'_1 + \beta \eta'_2 + \gamma}{a \eta'_1 - b}. \end{aligned} \right.$$

De ce groupe, par une transformation des variables, on peut déduire le groupe (1). Les variables x_1 et x_2 peuvent être déterminées à l'aide des équations différentielles suivantes

$$\frac{\partial x_1}{\partial y_2} + \frac{\partial x_1}{\partial \eta_2} = 1, \qquad \frac{\partial x_2}{\partial y_2} + \frac{\partial x_2}{\partial \eta_2} = 0,$$

$$y_1 \frac{\partial x_1}{\partial y_2} + \eta_1 \frac{\partial x_1}{\partial \eta_2} = 0, \qquad y_1 \frac{\partial x_2}{\partial y_2} + \eta_1 \frac{\partial x_2}{\partial \eta_2} = 1,$$

$$y_1 \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + \eta_1 \frac{\partial x_1}{\partial \eta_1} = 0, \qquad y_1 \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \eta_1 \frac{\partial x_2}{\partial \eta_1} = - x_2,$$

$$y_2 \frac{\partial x_1}{\partial y_2} + \eta_2 \frac{\partial x_1}{\partial \eta_2} = x_1, \qquad y_2 \frac{\partial x_2}{\partial y_2} + \eta_2 \frac{\partial x_2}{\partial \eta_2} = x_2,$$

et

$$\frac{\partial x_1}{\partial y_1} + \frac{\partial x_1}{\partial \eta_1} = -x_2, \qquad \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \frac{\partial x_2}{\partial \eta_1} = 0,$$

$$y_1^2 \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + \eta_1^2 \frac{\partial x_1}{\partial \eta_1} + y_1 y_2 \frac{\partial x_1}{\partial y_2} + \eta_1 \eta_2 \frac{\partial x_1}{\partial \eta_2} = 0,$$

$$y_1^2 \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \eta_1^2 \frac{\partial x_2}{\partial \eta_1} + y_1 y_2 \frac{\partial x_2}{\partial y_2} + \eta_1 \eta_2 \frac{\partial x_2}{\partial \eta_2} = x_1.$$

Les intégrales de ces équations sont

$$x_1 = \frac{\eta_2 y_1 - \eta_1 y_2}{y_1 - \eta_1}, \qquad x_2 = \frac{y_2 - \eta_2}{y_1 - \eta_1}.$$

Telles sont les formules qui servent pour transformer le groupe (6) en groupe (1).

8. — Groupe de transformations orthogonales de trois coordonnées a origine fixe.

Prenons le groupe linéaire isomorphe à deux variables

(1) $$\begin{cases} x_1 = a x_1' + b x_2', \\ x_2 = c x_1' + d x_2'. \end{cases}$$

Ce groupe sera du troisième ordre si $ad - bc = 1$.

Élevons ces équations au carré et prenons-en le produit. Nous aurons

$$x_1^2 = a^2 x_1'^2 + 2ab x_1' x_2' + b^2 x_2'^2,$$

$$x_1 x_2 = ac x_2'^2 + (ad + bc) x_1' x_2' + bd x_2'^2,$$

$$x_2^2 = c^2 x_1'^2 + 2cd x_1' x_2' + d^2 x_2'^2.$$

A x_1^2, $x_1 x_2$, x_2^2 substituons respectivement y_1, y_2, y_3.

Nous obtiendrons ainsi un groupe de transformations à trois variables

(2) $$\begin{cases} y_1 = a^2 y_1' + 2ab y_2' + b^2 y_3', \\ y_2 = ac y_1' + (ad + bc) y_2' + bd y_3', \\ y_3 = c^2 y_1' + 2cd y_2' + d^2 y_3'. \end{cases}$$

Le groupe formé ainsi sera imprimitif. En éliminant les paramètres, nous obtiendrons

$$(3)\qquad y_2^2 - y_1 y_3 = y_2'^2 - y_1' y_3'.$$

Faisons un changement de variables au moyen des formules

$$(4)\qquad y_1 = z_1\sqrt{-1} + z_3,\qquad y_3 = z_1\sqrt{-1} - z_3,\qquad y_2 = z_2.$$

Nous aurons le groupe suivant

$$(5)\qquad \begin{cases} z_1 = \alpha\, z_1' + \beta\, z_2' + \gamma\, z_3', \\ z_2 = \alpha' z_1' + \beta' z_2' + \gamma' z_3', \\ z_3 = \alpha'' z_1' + \beta'' z_2' + \gamma'' z_3'. \end{cases}$$

Le groupe formé ainsi n'est autre que le groupe de transformations orthogonales de trois coordonnées, car l'égalité (3) se transforme en

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1'^2 + z_2'^2 + z_3'^2.$$

Nous voyons donc que le groupe de transformations orthogonales à trois coordonnées (5) est isomorphe holoédrique au groupe de transformations linéaires homogènes (1). Montrons comment l'un de ces groupes se transforme en l'autre.

Faisons observer tout d'abord que le groupe des transformations orthogonales (5) se transforme, à l'aide des formules (4), en groupe (2). Du groupe (2) on peut déduire le groupe (1) si nous posons

$$y_1 = x_1^2,\qquad y_2 = x_1 x_2,\qquad y_3 = x_2^2.$$

Les mêmes formules servent pour passer du groupe (1) au groupe (2), mais alors les variables sont liées par la relation suivante

$$y_2^2 = y_1 y_3.$$

Pour éviter cette relation il faut doubler le nombre des variables du groupe (1)

$$\begin{aligned} x_1 &= a x_1' + b x_2', & \xi_1 &= a \xi_1' + b \xi_2', \\ x_2 &= c x_1' + d x_2', & \xi_2 &= c \xi_1' + d \xi_2'. \end{aligned}$$

De ce dernier groupe nous pouvons déduire le groupe (2) en posant

$$y_1 = x_1^2 + \xi_1^2,\qquad y_2 = x_1 x_2 + \xi_1 \xi_2,\qquad y_3 = x_2^2 + \xi_2^2.$$

9. — Groupe de transformations orthogonales de trois coordonnées a origine variable.

Prenons le groupe de transformations orthogonales de trois coordonnées à origine variable

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} z_1 &= \alpha\, z'_1 + \beta\, z'_2 + \gamma\, z'_3 + \delta,\\ z_2 &= \alpha' z'_1 + \beta' z'_2 + \gamma' z'_3 + \delta',\\ z_3 &= \alpha'' z'_1 + \beta'' z'_2 + \gamma'' z'_3 + \delta''.\end{aligned}\right.$$

Entre les neuf coefficients des coordonnées nouvelles il existe six relations connues. Montrons que ce groupe est isomorphe holoédrique au suivant

$$(2)\qquad x_1 = \frac{cx'_1 + d}{ax'_1 + b},\qquad x_2 = \frac{x'_2 + a'x'^2_1 + b'x'_1 + c'}{(ax'_1 + b)^2}\qquad (bc - ad = 1).$$

Tout d'abord, à l'aide des formules (4), n° 8, le groupe (1) peut être ramené à la forme suivante

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} y_1 &= A^2\, y'_1 + 2AB\, y'_2 + B^2\, y'_3 + A',\\ y_2 &= AC\, y'_1 + (AD + BC)\, y'_2 + BD\, y'_3 + B',\\ y_3 &= C^2\, y'_1 + 2CD\, y'_2 + D^2\, y'_3 + C'\\ &\qquad (AD - BC = 1).\end{aligned}\right.$$

Il faut montrer que les deux derniers groupes sont isomorphes holoédriques.

Les transformations infinitésimales du groupe (2) sont

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &S_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}, && S_2 = x_1\frac{\partial}{\partial x_2}, && S_3 = x_1^2\frac{\partial}{\partial x_2},\\ &S_4 = \frac{\partial}{\partial x_1}, && S_5 = x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2}, && S_6 = x_1^2\frac{\partial}{\partial x_1} + 2x_1x_2\frac{\partial}{\partial x_2}.\end{aligned}\right.$$

Les transformations infinitésimales du groupe (3) sont

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} &T_1 = \frac{\partial}{\partial y_1},\qquad T_2 = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y_2},\qquad T_3 = \frac{\partial}{\partial y_3},\\ &T_4 = 2y_2\frac{\partial}{\partial y_1} + y_3\frac{\partial}{\partial y_2},\\ &T_5 = y_1\frac{\partial}{\partial y_1} - y_3\frac{\partial}{\partial y_3},\\ &T_6 = -y_1\frac{\partial}{\partial y_2} - 2y_2\frac{\partial}{\partial y_3}.\end{aligned}\right.$$

Si nous formons les combinaisons des transformations infinitésimales (4), ainsi que les combinaisons des transformations infinitésimales (5), nous verrons aisément que les groupes donnés sont isomorphes holoédriques.

Les transformations infinitésimales correspondantes ont les mêmes index.

Nous laissons au lecteur le soin de trouver lui-même les formules qui permettent de transformer l'un de ces groupes en l'autre.

Conclusion.

Les exemples que nous venons d'indiquer prouvent que quelquefois deux groupes, très différents quant à leur aspect extérieur, peuvent être transformés l'un en l'autre pourvu que nous puissions constater que ces groupes sont isomorphes holoédriques.

Deux groupes isomorphes holoédriques peuvent toujours être transformés l'un en l'autre, indépendamment du nombre des variables dans chaque groupe.

Ce théorème réduit considérablement le nombre de groupes différents. Il nous conduit à nous occuper du problème très important de la réduction d'un groupe donné à sa plus simple expression avec le moindre nombre de variables.

Nous avons l'intention de consacrer encore deux Mémoires à ce sujet.

Dans le deuxième nous montrerons de quelle façon n'importe quel groupe peut être ramené à une forme rationnelle avec le moindre nombre de variables. Dans le troisième nous étudierons les propriétés de cette forme rationnelle afin de la ramener à sa plus simple expression.