ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE.

SUR LES RELATIONS ET LES AFFINITÉS

ENTRE

LES SURFACES COURBES,

PAR K. M. PETERSON.

Traduit du russe par M. Eugène COSSERAT,
Professeur à l'Université de Toulouse (1).

Nous donnons le nom de *relation* entre deux surfaces à une liaison entre leurs points, dans laquelle correspond à chaque point de l'une des surfaces un point défini de l'autre surface et à deux points infiniment voisins de la première surface des points infiniment voisins de la seconde. Une telle relation s'exprime analytiquement par deux équations entre les coordonnées des deux surfaces ou, si les

(1) Le Mémoire original intitulé : Объ отношеніяхъ и сродствахъ между кривыми поверхностями a paru dans le Tome I (p. 391-438) du *Recueil mathématique* (МАТЕМАТИЧЕСКІЙ СБОРНИКЪ) publié par la Société mathématique de Moscou ; au titre est adjointe cette indication que le Mémoire a été lu le 20 novembre 1865. La traduction que l'on va lire, ainsi que celles des autres Mémoires de Peterson qui paraîtront successivement dans ces *Annales*, sont publiées avec la bienveillante autorisation de la Société mathématique de Moscou.

coordonnées sont données en fonction de variables arbitraires, par deux équations entre ces variables.

Supposons que les coordonnées x, y, z d'une surface soient données en fonction de variables l et t et les coordonnées X, Y, Z de l'autre surface en fonction de variables p et q; alors, au moyen de deux équations entre l, t, p, q nous pouvons exprimer p et q en fonction de l et t, c'est-à-dire déterminer le point p, q de l'une des surfaces correspondant au point donné l, t de l'autre surface.

En éliminant des équations définissant la seconde surface les variables p et q, nous aurons les coordonnées des deux surfaces en fonction des variables communes l et t. De telles variables communes l et t, pour deux surfaces qui se trouvent dans une relation donnée, sont arbitraires et peuvent être remplacées par d'autres variables communes l_1 et t_1 par la substitution arbitraire

$$l = f(l_1, t_1), \qquad t = \varphi(l_1, t_1).$$

Pour chaque relation donnée, nous pouvons, par exemple, choisir les variables communes p et q, de façon que les courbes qui, sur les deux surfaces x, y, z et X, Y, Z, correspondent à p et q constants, se coupent à angle droit, ou que

$$\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial q} + \frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial z}{\partial q} = 0,$$

$$\frac{\partial X}{\partial p}\frac{\partial X}{\partial q} + \frac{\partial Y}{\partial p}\frac{\partial Y}{\partial q} + \frac{\partial Z}{\partial p}\frac{\partial Z}{\partial q} = 0.$$

Supposons que les coordonnées x, y, z et X, Y, Z des deux surfaces soient données en fonction des variables communes l et t. Désignons $\left(\frac{\partial x}{\partial l}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial l}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial l}\right)^2$ par a, $\frac{\partial x}{\partial l}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial l}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial l}\frac{\partial z}{\partial t}$ par b, $\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2$ par c; nous tirons de l'équation

$$\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial q} + \frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial z}{\partial q} = 0,$$

au moyen de $\frac{\partial x}{\partial l} = \frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial l} + \frac{\partial x}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial l}$, $\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial t}$, et ainsi de suite, l'équation suivante,

$$(1) \qquad a\frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial q}{\partial t} - b\left(\frac{\partial p}{\partial l}\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial q}{\partial l}\right) + c\frac{\partial p}{\partial l}\frac{\partial q}{\partial l} = 0.$$

De la même façon, nous tirons

$$(2) \qquad A\frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial q}{\partial t} - B\left(\frac{\partial p}{\partial l}\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial q}{\partial l}\right) + C\frac{\partial p}{\partial l}\frac{\partial q}{\partial l} = 0,$$

si A, B, C ont pour la surface X, Y, Z la même signification que a, b, c pour la surface x, y, z.

Désignons $\frac{\partial p}{\partial t} : \frac{\partial p}{\partial l}$ par u, $\frac{\partial q}{\partial t} : \frac{\partial q}{\partial l}$ par v; les équations (1) et (2) prennent la forme suivante

$$a uv - b(u+v) + c = 0,$$

$$A uv - B(u+v) + C = 0$$

et peuvent être résolues par rapport à u et v. Comme ces équations sont symétriques par rapport à u et v, nous obtenons, par élimination d'une inconnue, pour u et v, la même équation, savoir

(3) $$(aB - bA)u^2 + (cA - aC)u + (bC - cB) = 0.$$

Si u et u_1 sont les deux racines de cette équation, $\frac{\partial p}{\partial t} : \frac{\partial p}{\partial l}$ devra être égalé à une racine u_1, $\frac{\partial q}{\partial t} : \frac{\partial q}{\partial l}$ à l'autre racine u_{11}; par conséquent, les variables communes cherchées seront des intégrales des équations

$$dl + u_1\, dt = 0 \qquad \text{et} \qquad dl + u_{11}\, dt = 0;$$

comme à toutes les intégrales de ces équations correspondent les mêmes courbes [puisque leur position ne change pas par la substitution de $f(p)$ et de $\varphi(q)$ à p et q], nous en concluons que :

Quelle que soit la relation entre les points de deux surfaces, sur chaque surface il n'existe jamais qu'un réseau rectangulaire de courbes correspondantes.

Remarque. — Ce réseau ne peut être imaginaire, si la relation a lieu entre des points réels des surfaces.

De l'équation

$$ds^2 = a\,dl^2 + 2b\,dl\,dt + c\,dt^2$$

il résulte alors, en effet, que a, c et $ac - b^2$ sont positifs; de la même façon, A, C et $AC - B^2$ seront positifs.

En multipliant par $aB - bA$, nous donnons à l'équation (3) la forme suivante :

(4) $$\left[(aB - bA)u + \frac{cA - aC}{2}\right]^2 = \left(\frac{cA - aC}{2} - Bb\right)^2 - (AC - B^2)(ac - b^2).$$

En posant

$$B = \sqrt{AC}\cos\varphi, \qquad b = \sqrt{ac}\cos\varphi',$$

nous décomposerons le second membre en deux facteurs positifs,

$$\frac{1}{4}\left[\sqrt{c\mathrm{A}}+\sqrt{a\mathrm{C}}-2\sqrt{ac\mathrm{AC}}\cos(\varphi-\varphi')\right]\times\left[\sqrt{c\mathrm{A}}+\sqrt{a\mathrm{C}}-2\sqrt{ac\mathrm{AC}}\cos(\varphi+\varphi')\right],$$

d'où il suit que les deux racines de l'équation (3) seront réelles.

Outre ces variables communes, auxquelles correspond sur les deux surfaces un réseau rectangulaire de courbes, nous pouvons, pour étudier une relation arbitraire entre deux surfaces données, introduire encore des variables communes p et q, telles que les courbes qui correspondent à p et q constants sur les deux surfaces soient conjuguées. Nous appellerons ces variables communes, qui sont très remarquables par leur signification géométrique, *variables communes conjuguées* de la relation donnée. Le problème de leur détermination a également une solution déterminée.

Deux systèmes de courbes qui se coupent sur la surface s'appellent *conjugués,* si les plans tangents de la surface menés le long d'une courbe d'un système se coupent dans deux positions consécutives suivant les tangentes des courbes de l'autre système. Nous pouvons encore exprimer ainsi cette propriété des courbes conjuguées : deux courbes consécutives d'un système doivent former avec deux courbes consécutives d'un autre système un quadrilatère plan infiniment petit dont les côtés opposés (les tangentes des courbes), prolongés, doivent se couper.

Supposons que p et q soient, pour une surface donnée, des variables telles que les courbes $p=$const. et $q=$const. soient conjuguées; désignons les dérivées $\frac{\partial x}{\partial p}$, $\frac{\partial x}{\partial q}$, $\frac{\partial^2 x}{\partial p\,\partial q}$, $\cdots$ des coordonnées par x', x_1, x'_1 et les cosinus directeurs de la normale à la surface par ξ, η, ζ; alors

$$\xi x'+\eta y'+\zeta z'=0,\qquad \xi x_1+\eta y_1+\zeta z_1=0.$$

Les cosinus directeurs de la tangente à une courbe $q=$ const. sont proportionnels à x', y', z'; par conséquent, les cosinus directeurs de la tangente à la courbe voisine de $q=$ const. sont proportionnels à $\left(x'+\frac{\partial x'}{\partial q}dq\right)$, $\left(y'+\frac{\partial y'}{\partial q}dq\right)$, $\left(z'+\frac{\partial z'}{\partial q}dq\right)$, ou à $(x'+x'_1\,dq)$, $(y'+y'_1\,dq)$, $(z'+z'_1\,dq)$. Comme, suivant la définition des courbes conjuguées, ces deux tangentes doivent être situées dans le plan tangent à la surface,

$$\xi x'+\eta y'+\zeta z'=0 \qquad \text{et} \qquad \xi(x'+x'_1\,dq)+\eta(y'+y'_1\,dq)+\zeta(z'+z'_1\,dq)=0;$$

nous obtenons donc la condition

$$(5)\qquad \xi x'_1+\eta y'_1+\zeta z'_1=0,$$

sous laquelle les courbes correspondant à p et q constants sont conjuguées. Si des variables imaginaires satisfont à cette condition, nous les appellerons encore, bien qu'elles n'aient pas alors cette signification géométrique, *variables conjuguées*.

DÉTERMINATION DES VARIABLES COMMUNES CONJUGUÉES.

Supposons que les coordonnées x, y, z et X, Y, Z de deux surfaces qui se trouvent en relation, soient données en fonction des variables communes arbitraires l et t, et proposons-nous d'exprimer ces coordonnées en fonction de variables communes conjuguées.

Désignons les cosinus directeurs de la normale à la surface x, y, z par ξ, η, ζ,

$$\xi\frac{\partial^2 x}{\partial l^2}+\eta\frac{\partial^2 y}{\partial l^2}+\zeta\frac{\partial^2 z}{\partial l^2} \quad \text{par} \quad a;$$

$$\xi\frac{\partial^2 x}{\partial l\,\partial t}+\eta\frac{\partial^2 y}{\partial l\,\partial t}+\zeta\frac{\partial^2 z}{\partial l\,\partial t} \quad \text{par} \quad b;$$

$$\xi\frac{\partial^2 l}{\partial t^2}+\eta\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\zeta\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad \text{par} \quad c;$$

$$\xi\frac{\partial^2 x}{\partial p^2}+\eta\frac{\partial^2 y}{\partial p^2}+\zeta\frac{\partial^2 z}{\partial p^2} \quad \text{par} \quad \alpha;$$

$$\xi\frac{\partial^2 x}{\partial q^2}+\eta\frac{\partial^2 y}{\partial q^2}+\zeta\frac{\partial^2 z}{\partial q^2} \quad \text{par} \quad \gamma;$$

on a

$$\xi\frac{\partial^2 x}{\partial p\,\partial q}+\eta\frac{\partial^2 y}{\partial p\,\partial q}+\zeta\frac{\partial^2 z}{\partial p\,\partial q}=0.$$

Au moyen des équations

$$\frac{\partial^2 x}{\partial l^2}=\frac{\partial^2 x}{\partial p^2}\left(\frac{\partial p}{\partial l}\right)^2+2\frac{\partial^2 x}{\partial p\,\partial q}\frac{\partial p}{\partial l}\frac{\partial q}{\partial l}+\frac{\partial^2 x}{\partial q^2}\left(\frac{\partial q}{\partial l}\right)^2+\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial^2 p}{\partial l^2}+\frac{\partial x}{\partial q}\frac{\partial^2 q}{\partial l^2},$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial l\,\partial t}=\frac{\partial^2 x}{\partial p^2}\frac{\partial p}{\partial l}\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial^2 x}{\partial p\,\partial q}\left(\frac{\partial p}{\partial l}\frac{\partial q}{\partial t}+\frac{\partial q}{\partial l}\frac{\partial p}{\partial t}\right)+\frac{\partial^2 x}{\partial q^2}\frac{\partial q}{\partial l}\frac{\partial q}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial^2 p}{\partial l\,\partial t}+\frac{\partial x}{\partial q}\frac{\partial^2 q}{\partial l\,\partial t},$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 x}{\partial p^2}\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)^2+2\frac{\partial^2 x}{\partial p\,\partial q}\frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial q}{\partial t}+\frac{\partial^2 x}{\partial q^2}\left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)^2+\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}+\frac{\partial x}{\partial q}\frac{\partial^2 q}{\partial t^2},$$

nous tirons

$$a=\alpha\left(\frac{\partial p}{\partial l}\right)^2+\gamma\left(\frac{\partial q}{\partial l}\right)^2, \qquad b=\alpha\frac{\partial p}{\partial l}\frac{\partial p}{\partial t}+\gamma\frac{\partial q}{\partial l}\frac{\partial q}{\partial t}, \qquad c=\alpha\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)^2+\gamma\left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)^2.$$

En éliminant α et γ, nous obtenons

$$(6) \qquad a\frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial q}{\partial t} - b\left(\frac{\partial p}{\partial l}\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial l}\frac{\partial p}{\partial t}\right) + c\frac{\partial p}{\partial l}\frac{\partial q}{\partial l} = 0.$$

De la même façon, nous avons

$$(7) \qquad \mathrm{A}\frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial q}{\partial t} - \mathrm{B}\left(\frac{\partial p}{\partial l}\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial l}\frac{\partial p}{\partial t}\right) + \mathrm{C}\frac{\partial p}{\partial l}\frac{\partial q}{\partial l} = 0,$$

si A, B, C ont pour la surface X, Y, Z la même signification que a, b, c pour la surface x, y, z.

Des deux équations (6) et (7) nous déduirons p et q, comme nous l'avons fait au moyen des équations (1) et (2); mais il y aura cette différence que, dans ce dernier cas, les variables p et q, par suite des conditions $a > 0$, $c > 0$, $ac - b^2 > 0$, seront toujours réelles, tandis que, dans le cas des équations (6) et (7), elles peuvent être aussi imaginaires; par conséquent :

Dans toute relation donnée entre deux surfaces, nous pouvons exprimer les coordonnées des deux surfaces en fonction de variables communes conjuguées (imaginaires ou réelles).

DÉTERMINATION DE RELATIONS.

La relation ou la liaison entre les points de deux surfaces se détermine, comme nous avons vu, par deux équations entre les coordonnées ou les variables des deux surfaces; nous allons maintenant donner une signification géométrique précise aux relations que nous nous proposons d'examiner et nous établirons leurs expressions analytiques.

I. *Première relation.* — En mettant les points x, y, z, X, Y, Z de deux surfaces dans une relation telle que les plans tangents ou les normales des deux surfaces aux points correspondants soient parallèles, nous aurons, pour exprimer analytiquement cette relation, les deux équations suivantes,

$$(8) \qquad \frac{\xi}{\xi_1} = \frac{\eta}{\eta_1} = \frac{\zeta}{\zeta_1},$$

où ξ, η, ζ désignent les cosinus directeurs de la normale de l'une des surfaces, ξ_1, η_1, ζ_1 ceux relatifs à l'autre surface.

Si les coordonnées x, y, z et, par conséquent, les cosinus ξ, η, ζ sont donnés en fonction des variables l et t, si X, Y, Z et ξ_1, η_1, ζ_1 sont donnés en fonction des variables p et q, alors, par élimination des variables p et q, au moyen des équations $\frac{\xi}{\xi_1} = \frac{\eta}{\eta_1} = \frac{\zeta}{\zeta_1}$, nous obtenons les coordonnées des deux surfaces en fonction des variables communes l et t, qui peuvent être remplacées par des variables communes rectangulaires ou conjuguées.

Pour exprimer plus brièvement que les plans tangents des deux surfaces aux points correspondants sont parallèles, nous dirons que les surfaces en ces points sont parallèles et nous appelons cette relation le *parallélisme* des surfaces.

II. La *deuxième relation* que nous considérerons consiste dans cette liaison des points de deux surfaces pour laquelle la droite joignant les points correspondants est une tangente commune aux deux surfaces en ces points.

Pour exprimer analytiquement cette relation, remarquons que la tangente commune, joignant les points correspondants x, y, z et X, Y, Z des deux surfaces, doit être perpendiculaire aux normales des deux surfaces en ces points, que, par conséquent,

$$(9) \qquad \begin{cases} (X-x)\xi + (Y-y)\eta + (Z-z)\zeta = 0, \\ (X-x)\xi_1 + (Y-y)\eta_1 + (Z-z)\zeta_1 = 0 \end{cases}$$

(où ξ, η, ζ et ξ_1, η_1, ζ_1 sont les cosinus directeurs des normales des deux surfaces aux points x, y, z et X, Y, Z) seront deux équations entre les coordonnées ou les variables des deux surfaces; au moyen de ces équations nous pouvons introduire des variables communes rectangulaires, conjuguées ou arbitraires.

Pour exprimer plus brièvement cette relation, nous dirons que les surfaces sont *conjointes* aux points correspondants et nous appellerons cette relation la *conjonction*.

III. La *troisième relation* est définie en disant que les points correspondants des deux surfaces sont situés sur une droite passant par un point fixe donné. Nous dirons que les points correspondants, dans ce cas, sont situés en *perspective* par rapport au point donné et nous appellerons ce dernier le *point de vue* ou le *centre de perspective*.

Admettant que le point de vue soit l'origine des coordonnées, nous obtenons les deux équations suivantes

$$(10) \qquad \frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z}.$$

Si le point de vue est à l'infini, choisissons l'axe des z parallèle à la direction de projection; nous obtenons les deux équations suivantes,

$$X = x, \qquad Y = y.$$

IV. *Quatrième relation.* — Dans la quatrième relation, nous supposons les points des deux surfaces x, y, z et X, Y, Z dans une liaison telle que les angles dans un triangle infinitésimal de l'une des surfaces soient égaux aux angles dans le triangle correspondant de l'autre surface.

Cette condition, à cause de la similitude des triangles infiniment petits correspondants, se ramène à la condition que les distances des points infiniment voisins correspondants sur les deux surfaces sont proportionnelles, ce qui revient à dire que les éléments linéaires $ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$ et $dS=\sqrt{dX^2+dY^2+dZ^2}$ des deux surfaces pour des accroissements arbitraires dp et dq des variables communes sont proportionnels.

Posons

$$ds^2 = a\,dp^2+b\,dp\,dq+c\,dq^2,$$
$$dS^2 = A\,dp^2+B\,dp\,dq+C\,dq^2;$$

d'après la condition à laquelle doivent satisfaire les variables communes des deux surfaces données, on aura

$$\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}; \tag{11}$$

en posant $\frac{A}{a}=\lambda$, où λ est une fonction des variables communes, nous obtiendrons

$$A=\lambda a, \qquad B=\lambda b, \qquad C=\lambda c,$$

par conséquent,

$$dS^2=\lambda^2\,ds^2.$$

Supposons que l et t soient les variables imaginaires de la surface x, y, z à l'aide desquelles l'élément linéaire ds de cette surface est ramené à la forme

$$ds^2=\mu^2\,dl\,dt.$$

Supposons que l_1, t_1, $dS^2=\nu^2\,dl_1\,dt_1$ soient les variables imaginaires et l'élément linéaire de la surface X, Y, Z; $l_1=l$ et $t_1=t$ ou plus généralement $l_1=f(l)$, $t_1=f(t)$ seront les deux équations cherchées entre les variables des deux surfaces; on aura, par suite,

$$dS=\frac{\nu}{\mu}\,ds,$$

ou, plus généralement,

$$dS=\frac{\nu}{\mu}f'(l)\,f'(t)\,ds=\lambda\,ds.$$

En éliminant l_1 et t_1, nous obtiendrons les coordonnées des deux surfaces en fonction des variables communes imaginaires l et t qui peuvent être remplacées par des variables communes conjuguées, rectangulaires ou arbitraires.

D'après la propriété de cette relation que les angles dans les triangles infiniment petits correspondants sont égaux, toutes les courbes sur l'une des surfaces se coupent sous les mêmes angles que les courbes qui leur correspondent sur l'autre surface; par conséquent, des figures arbitraires sur l'une des surfaces seront semblables aux figures qui leur correspondent sur l'autre surface. Nous dirons qu'aux points correspondants les deux surfaces sont rapportées *graphiquement,* et nous appellerons cette relation *relation graphique.*

SUR L'AFFINITÉ ENTRE LES SURFACES.

Nous avons appelé *relation,* la liaison entre les points de deux surfaces complètement arbitraires qui s'exprime analytiquement par deux équations entre les coordonnées ou les variables des deux surfaces. Mais une liaison qui est déterminée par trois équations ou par un plus grand nombre d'équations ne peut plus exister entre les points de deux surfaces arbitraires. Il faut supposer qu'il existe des propriétés particulières communes à ces surfaces; nous appellerons par conséquent une telle liaison, *affinité* entre les deux surfaces.

Exemple I. — *Affinité des plans correspondants.*

Une liaison entre les points x, y, z et X, Y, Z de deux surfaces, telle qu'à chaque courbe plane d'une surface correspond une courbe plane de l'autre surface se détermine évidemment par les trois équations suivantes [1]

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} X &= ax + by + cz + e,\\ Y &= a_1x + b_1y + c_1z + e_1,\\ Z &= a_{11}x + b_{11}y + c_{11}z + e_{11}, \end{aligned}\right.$$

en vertu desquelles $AX + BY + CZ + D$ ne peut être égal à zéro que si l'on a l'équation arbitraire

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$$

(A, a, α, ... sont ici des constantes).

Par suite, une liaison dans laquelle à des courbes planes correspondent des courbes planes est une affinité qui n'existe pas entre des surfaces arbitraires. D'après les équations données des surfaces x, y, z, nous pouvons déduire les équations de toutes les surfaces X, Y, Z avec lesquelles cette affinité est possible; si la surface x, y, z est une sphère, alors les surfaces X, Y, Z seront des surfaces du second ordre, des ellipsoïdes.

---

(1) *Voir* en outre les pages 51-52 de la traduction, insérée dans ce même Volume, du Mémoire : *Sur les courbes tracées sur une surface.* (*Note du traducteur.*)

Cette affinité, qui fait correspondre à des courbes planes des courbes planes, se distingue encore par cette remarquable propriété que, à toutes les courbes conjuguées d'une surface, elle fait correspondre des courbes conjuguées de l'autre surface.

Pour le démontrer, rappelons que les variables p et q d'une surface donnée x, y, z sont conjuguées, si

$$(5) \qquad \xi x'_1 + \eta y'_1 + \zeta z'_1 = 0,$$

x'_1, y'_1, z'_1 indiquent ici les dérivées partielles par rapport aux deux variables, et ξ, η, ζ les cosinus de la normale à la surface qui ont entre eux les mêmes rapports que

$$(y'z_1 - y_1 z'), \quad (z'x_1 - z_1 x'), \quad (x'y_1 - x_1 y').$$

Mais, comme au moyen des équations,

$$(12) \qquad \begin{cases} X = a\ \ x + b\ \ y + c\ \ z + e, \\ Y = a_1\, x + b_1\, y + c_1\, z + e_1, \\ Z = a_{11} x + b_{11} y + c_{11} z + e_{11}, \end{cases}$$

nous pouvons, de l'équation

$$(Y'Z_1 - Y_1 Z')X'_1 + (Z'X_1 - Z_1 X')Y'_1 + (X'Y_1 - X_1 Y')Z'_1 = 0,$$

déduire l'équation

$$(13) \qquad (y'z_1 - y_1 z')x'_1 + (z'x_1 - z_1 x')y'_1 + (x'y_1 - x_1 y')z'_1 = 0,$$

et inversement, nous en concluons que toutes les variables communes p et q qui sont conjuguées pour une surface seront aussi conjuguées pour l'autre surface; ce qu'il fallait démontrer.

De cette proposition résulte l'équation générale des courbes conjuguées sur les surfaces X, Y, Z, si l'équation générale des courbes conjuguées sur la surface x, y, z est connue.

Supposons que la surface x, y, z soit la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$; en différentiant cette équation par rapport aux deux variables p et q, nous obtenons

$$xx'_1 + yy'_1 + zz'_1 + x'x_1 + y'y_1 + z'z_1 = 0.$$

Mais, comme pour la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, les cosinus directeurs ξ, η, ζ de la normale sont identiques aux coordonnées x, y, z, il s'ensuit que

$$\xi x'_1 + \eta y'_1 + \zeta z'_1 = 0 \qquad \text{si} \qquad x'x_1 + y'y_1 + z'z_1 = 0;$$

c'est-à-dire que sur la sphère les courbes conjuguées sont les courbes qui se coupent à angle droit. L'équation de ces courbes sur la sphère sera l'équation générale des courbes conjuguées sur les surfaces du second ordre.

Exemple II. — *Perspective graphique.*

La relation entre deux surfaces pour laquelle les courbes correspondantes se coupent sous des angles égaux se ramène, comme nous avons vu, à cette condition que les distances des points infiniment voisins correspondants sur les deux surfaces sont proportionnelles, et cette relation est possible entre des surfaces arbitraires.

Exprimant les éléments linéaires ds et dS des deux surfaces au moyen de variables communes, nous obtenons $dS = \lambda\, ds$, où λ peut être une fonction arbitraire des variables communes.

Si $\lambda = 1$, c'est-à-dire si les distances des points infiniment voisins correspondants sur les deux surfaces sont égales, une telle liaison ne peut pas exister entre des surfaces arbitraires et nous obtenons l'*affinité de déformation*, dont nous nous occuperons plus tard.

La relation pour laquelle les points correspondants des deux surfaces se trouvent en ligne droite avec un point de vue donné est de même possible entre des surfaces arbitraires. Mais une liaison entre deux surfaces pour laquelle les points correspondants sont situés en ligne droite avec un point donné et en outre pour laquelle leurs distances infiniment petites sont proportionnelles, si elle est en général possible, ne peut exister entre des surfaces arbitraires. C'est une affinité qui s'exprime analytiquement par quatre équations, dont deux déterminent la relation perspective et deux la relation graphique.

Supposons que p et q soient des variables communes arbitraires de deux surfaces x, y, z et X, Y, Z se trouvant dans une telle affinité; soit

$$ds^2 = a\, dp^2 + b\, dp\, dq + c\, dq^2$$

l'élément linéaire de la surface x, y, z et soit

$$dS^2 = A\, dp^2 + B\, dp\, dq + C\, dq^2$$

celui de la surface X, Y, Z; nous aurons alors ces quatre équations

$$(10) \qquad \frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z} \qquad \text{(relation perspective)},$$

$$(11) \qquad \frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} \qquad \text{(relation graphique)}.$$

Posant $\frac{X}{x} = l$, nous obtenons

$$X = lx, \qquad Y = ly, \qquad Z = lz,$$

d'où

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2$$
$$= l^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) + 2l(x\,dx + y\,dy + z\,dz)\,dl + (x^2 + y^2 + z^2)\,dl^2.$$

Posant $\frac{A}{a} = \lambda$, nous obtenons

$$dS^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 = \lambda^2\,ds^2 = \lambda^2(dx^2 + dy^2 + dz^2);$$

par conséquent,

(14) $$(\lambda^2 - l^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2) = 2lr\,dl\,dr + r^2\,dl^2 = (2lr\,dr + r^2\,dl)\,dl,$$

en désignant $x^2 + y^2 + z^2$ par r^2.

Cette équation

$$(\lambda^2 - l^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2) = (2lr\,dr + r^2\,dl)\,dl,$$

pour des accroissements arbitraires dp et dq des variables p et q, ne peut exister que si les deux membres sont nuls; puisque si le second membre, se composant de deux facteurs réels, ne s'annule pas identiquement, il s'annule pour deux accroissements définis dp, dq; par conséquent, $\lambda^2 - l^2$ doit être nul, $dx^2 + dy^2 + dz^2$ ne s'annulant pas; de là résulte que l'une des expressions dl et $2lr\,dr + r^2\,dl = d(r^2 l)$ doit être nulle.

Examinons ces deux solutions.

Si $dl = 0$ ou $l = \text{const.}$, il suit des équations $X = lx$, $Y = ly$, $Z = lz$ que les deux surfaces sont semblables; alors cette affinité se comprend d'elle-même et est renfermée comme cas particulier dans la seconde solution.

Si $d(r^2 l) = 0$, alors $l = \frac{k}{r^2}$ (où k est une constante que nous pouvons prendre égale à un), et nous obtenons les équations suivantes des surfaces X, Y, Z dont les points peuvent être en situation perspective et graphique avec les points de la surface donnée x, y, z

(15) $$X = \frac{x}{r^2}, \qquad Y = \frac{y}{r^2}, \qquad Z = \frac{z}{r^2},$$

où

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2;$$

d'où

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$$

et

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2};$$

ainsi, le produit des rayons vecteurs allant du point de vue aux deux points correspondants des deux surfaces est constant. Nous pouvons aussi remplacer les équations qui déterminent cette affinité par les équations symétriques suivantes :

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z}, \qquad (X^2 + Y^2 + Z^2)(x^2 + y^2 + z^2) = 1. \tag{15}$$

Nous allons déduire de cette affinité quelques conclusions. Appelons, pour abréger la surface X, Y, Z, *surface graphico-perspective* de la surface x, y, z.

THÉORÈME I. — *Si deux surfaces arbitraires x, y, z et x_1, y_1, z_1 se coupent, leurs surfaces graphico-perspectives* X, Y, Z *et* X_1, Y_1, Z_1 *se coupent sous les mêmes angles en tous les points de la courbe d'intersection.*

Démonstration. — Imaginons que par le point x, y, z de la courbe d'intersection passe encore une troisième surface arbitraire x_{11}, y_{11}, z_{11}, et par le point correspondant X, Y, Z la surface X_{11}, Y_{11}, Z_{11} graphico-perspective; nous obtenons trois couples de courbes d'intersection correspondantes dont deux sont situées sur une surface. Par hypothèse, des courbes situées sur une même surface doivent se couper sous le même angle que les courbes correspondantes sur les surfaces graphico-perspectives; les angles solides aux points x, y, z et X, Y, Z seront aussi égaux; par conséquent, l'angle des surfaces x, y, z et x_1, y_1, z_1 est égal à l'angle des surfaces X, Y, Z et X_1, Y_1, Z_1.

Supposons que la surface x, y, z soit la sphère

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = \rho^2;$$

en remplaçant x, y, z par

$$x = \frac{X}{X^2+Y^2+Z^2}, \qquad y = \frac{Y}{X^2+Y^2+Z^2}, \qquad z = \frac{Z}{X^2+Y^2+Z^2},$$

nous obtenons, pour la surface graphico-perspective, l'équation

$$1 - 2(\alpha X + \beta Y + \gamma Z) = [\rho^2 - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)](X^2 + Y^2 + Z^2). \tag{16}$$

Cette surface est une sphère qui se convertit en un plan si la sphère donnée x, y, z passe par le point de vue ($\rho^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$); elle passe par le point de vue si la surface donnée x, y, z est un plan.

THÉORÈME II. — *A chaque courbe d'une surface arbitraire x, y, z qui est sphérique, c'est-à-dire qui est l'intersection de cette surface avec une sphère* *correspond une courbe sphérique (intersection avec une sphère) sur la surface graphico-perspective* X, Y, Z; *à chaque courbe plane correspond une courbe sphérique dont la sphère passe par l'origine des coordonnées; à chaque droite (intersection de deux plans) correspond un cercle passant par le point de vue; les sphères ou les plans de ces courbes coupent une surface sous le même angle que l'autre surface* (d'après le théorème I).

Les courbes conjuguées qui se coupent à angle droit se nomment *lignes de courbure*. C'est pourquoi si les variables p et q satisfont aux équations

$$(y'z_1 - y_1z')x'_1 + (z'x_1 - z_1x')y'_1 + (x'y_1 - x_1y')z'_1 = 0,$$
$$x'x_1 + y'y_1 + z'z_1 = 0,$$

à $p =$ const. et à $q =$ const. correspondent les lignes de courbure.

Théorème III. — *Aux lignes de courbure de la surface arbitraire x, y, z correspondent les lignes de courbure de la surface graphico-perspective* X, Y, Z.

Supposons que p et q soient des variables communes de deux surfaces et satisfaisant aux équations

$$(y'z_1 - y_1z')x'_1 + (z'x_1 - z_1x')y'_1 + (x'y_1 - x_1y')z'_1 = 0,$$
$$x'x_1 + y'y_1 + z'z_1 = 0;$$

démontrons qu'elles satisfont aussi aux équations

$$(Y'Z_1 - Y_1Z')X'_1 + (Z'X_1 - Z_1X')Y'_1 + (X'Y_1 - X_1Y')Z'_1 = 0,$$
$$X'X_1 + Y'Y_1 + Z'Z_1 = 0.$$

En posant

$$X = \frac{x}{x^2+y^2+z^2}, \qquad Y = \frac{y}{x^2+y^2+z^2}, \qquad Z = \frac{z}{x^2+y^2+z^2}$$

et, en différentiant, nous tirons, au moyen de $x'x_1 + y'y_1 + z'z_1 = 0$,

$$(17) \qquad \left\{ \begin{aligned} Y'Z_1 - Y_1Z' &= \frac{2hx - (x^2+y^2+z^2)(y'z_1 - y_1z')}{(x^2+y^2+z^2)^3}, \\ Z'X_1 - Z_1X' &= \frac{2hy - (x^2+y^2+z^2)(z'x_1 - z_1x')}{(x^2+y^2+z^2)^3}, \\ X'Y_1 - X_1Y' &= \frac{2hz - (x^2+y^2+z^2)(x'y_1 - x_1y')}{(x^2+y^2+z^2)^3}, \end{aligned} \right.$$

où

$$h = x(y'z_1 - y_1z') + y(z'x_1 - z_1x') + z(x'y_1 - x_1y').$$

De là, au moyen de

$$(y'z_1 - y_1 z')x'_1 + (z'x_1 - z_1 x')y'_1 + (x'y_1 - x_1 y')z'_1 = 0,$$

nous déduisons

$$(Y'Z_1 - Y_1 Z')X'_1 + (Z'X_1 - Z_1 X')Y'_1 + (X'Y_1 - X_1 Y')Z'_1 = 0,$$

et, comme l'équation $X'X_1 + Y'Y_1 + Z'Z_1 = 0$ est conséquence de l'équation $x'x_1 + y'y_1 + z'z_1 = 0$, selon l'hypothèse que les courbes correspondantes se coupent sous des angles égaux, nous en déduisons qu'aux lignes de courbure correspondent des lignes de courbure. C'est pourquoi les lignes de courbure variables seront communes et, par conséquent, seront des variables communes conjuguées rectangulaires de cette affinité.

I. *Application.* — Supposons que la surface donnée x, y, z soit la surface de révolution

$$x - a = u\cos q, \qquad y = u\sin q, \qquad z = v,$$

où u et v sont des fonctions arbitraires d'une variable p; la constante a, distance à l'axe de l'origine des coordonnées, exprime la situation arbitraire de la surface par rapport à ce point.

Les équations déterminant la surface graphico-perspective X, Y, Z seront

$$X = \frac{kx}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{k(u\cos q + a)}{a^2 + u^2 + v^2 + 2au\cos q} = \frac{k}{2a}\left[\frac{a^2 - (u^2 + v^2)}{a^2 + u^2 + v^2 + 2au\cos q} + 1\right],$$

$$Y = \frac{ky}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{ku\sin q}{a^2 + u^2 + v^2 + 2au\cos q},$$

$$Z = \frac{kz}{x^2 + y^2 + z^3} = \frac{kv}{a^2 + u^2 + v^2 + 2au\cos q}.$$

Désignons $\dfrac{a^2 + u^2 + v^2}{2au}$ par α, $\dfrac{a^2 - (u^2 + v^2)}{2au}$ par β, $\dfrac{v}{u}$ par γ (en sorte que

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 1),$$

et posons, pour abréger, $k = 2a$, nous obtenons les équations remarquables suivantes

$$(18) \qquad X - 1 = \frac{\beta}{\alpha + \cos q}, \qquad Y = \frac{\sin q}{\alpha + \cos q}, \qquad Z = \frac{\gamma}{\alpha + \cos q},$$

où α, β, γ sont des fonctions arbitraires de la variable p, assujetties seulement à la condition

$$\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 = 1.$$

En exprimant u et v au moyen de α, β, γ, nous obtenons

$$u = \frac{a}{\alpha + \beta}, \qquad v = \frac{a\gamma}{\alpha + \beta};$$

par conséquent, l'équation de la surface de révolution sera, si nous prenons a pour unité,

$$x - 1 = \frac{\cos q}{\alpha + \beta}, \qquad y = \frac{\sin q}{\alpha + \beta}, \qquad z = \frac{\gamma}{\alpha + \beta}.$$

Cette surface de révolution se trouve en relation de perspective avec la surface

$$(18) \qquad X - 1 = \frac{\beta}{\alpha + \cos q}, \qquad Y = \frac{\sin q}{\alpha + \cos q}, \qquad Z = \frac{\gamma}{\alpha + \cos q};$$

le point de vue est l'origine des coordonnées.

En posant, pour abréger,

$$\left(\frac{d\gamma}{dp}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dp}\right)^2 - \left(\frac{d\alpha}{dp}\right)^2 = 1,$$

c'est à-dire en introduisant $\int \sqrt{\left(\frac{d\gamma}{dp}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dp}\right)^2 - \left(\frac{d\alpha}{dp}\right)^2}\, dp$ comme variable à la place de p, nous obtenons, en différentiant,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{dp^2 + dq^2}{(\alpha + \beta)^2},$$

$$dS^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 = \frac{dp^2 + dq^2}{(\alpha + \cos q)^2};$$

par conséquent,

$$dS^2 = \frac{\alpha + \beta}{\alpha + \cos q} ds;$$

d'où résulte la relation graphique des deux surfaces x, y, z et X, Y, Z.

Déduisons des propriétés des surfaces de révolution quelques propriétés des surfaces graphico-perspectives

$$(18) \qquad X = \frac{\beta}{\alpha + \cos q}, \qquad Y = \frac{\sin q}{\alpha + \cos q}, \qquad Z = \frac{\gamma}{\alpha + \cos q},$$

où α, β, γ sont des fonctions arbitraires de la variable p, satisfaisant à l'équation

$$\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 = 1.$$

Les courbes correspondant à p et q constants seront des lignes de courbure (Théor. III). Les lignes de courbure d'un système $q = \text{const.}$, qui, sur la surface de révolution, sont des méridiens plans avec une inclinaison de 90°, seront sur la surface X, Y, Z des courbes sphériques dont les sphères passeront toutes par le point $X = 1$, $Y = 0$, $Z = 0$ (point de vue) et couperont la surface à angle droit (suivant les Théor. I et II). Les lignes de courbure $p = \text{const.}$ qui, sur la surface x, y, z, sont des cercles seront aussi des cercles sur la surface X, Y, Z.

II. *Application.* — Supposons que la surface donnée x, y, z soit un cône arbitraire

$$x - a = \alpha q, \qquad y = \beta q, \qquad z = \gamma q;$$

α, β, γ sont ici des fonctions arbitraires d'une variable p, assujetties seulement à la condition

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

puisque ce sont les cosinus directeurs de la droite génératrice. La constante a, que nous pouvons faire égale à 1, est la distance du sommet du cône à l'origine des coordonnées.

Les équations définissant les surfaces graphico-perspectives seront

$$X = \frac{kx}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{k(\alpha q + 1)}{1 + 2\alpha q + q^2} = \frac{k}{2}\left(\frac{1 - q^2}{1 + 2\alpha q + q^2} + 1\right),$$

$$Y = \frac{k\beta q}{1 + 2\alpha q + q^2},$$

$$Z = \frac{k\gamma q}{1 + 2\alpha q + q^2}.$$

En mettant e^{-q} à la place de q, par conséquent $2\cosh q$ et $2\sinh q$ à la place de $\frac{1}{q} + q$ et de $\frac{1}{q} - q$, et en posant $\frac{k}{2} = 1$, nous obtenons les équations

$$(19) \qquad X - 1 = \frac{\sinh q}{\alpha + \cosh q}, \qquad Y = \frac{\beta}{\alpha + \cosh q}, \qquad Z = \frac{\gamma}{\alpha + \cosh q},$$

définissant la surface graphico-perspective du cône

$$x - 1 = \alpha e^{-q}, \qquad y = \beta e^{-q}, \qquad z = \gamma e^{-q},$$

où α, β, γ sont des fonctions arbitraires de la variable p, assujetties seulement à la condition

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

Supposant $\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2=1$, nous obtenons

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2=e^{-2q}(dp^2+dq^2),$$

$$dS^2=dX^2+dY^2+dZ^2=\frac{dp^2+dq^2}{(\alpha+\cosh q)^2};$$

par conséquent,

$$dS=\frac{e^q}{\alpha+\cosh q}\,ds.$$

Les surfaces graphico-perspectives des cônes et les surfaces graphico-perspectives des surfaces de révolution sont analogues non seulement par leurs expressions analytiques, comme cela résulte des équations (15) et (19), mais aussi par leurs propriétés géométriques suivantes :

Pour le cône, les droites génératrices, correspondant à p constant, sont, comme on sait, les lignes de courbure d'un système. Les lignes de courbure de l'autre système sont, par conséquent, les courbes sphériques $q=$ const., dont les sphères ont comme centre commun le sommet et coupent le cône à angle droit. D'après cela (théor. II), pour les surfaces graphico-perspectives X, Y, Z des cônes, dont les équations sont

$$X=\frac{\sinh q}{\alpha+\cosh q},\qquad Y=\frac{\beta}{\alpha+\cosh q},\qquad Z=\frac{\gamma}{\alpha+\cosh q},$$

où α, β, γ sont des fonctions arbitraires de p, satisfaisant à l'équation

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1,$$

les courbes correspondant à p et q constants sont les lignes de courbure. Les lignes de courbure d'un système $q=$ const. seront des courbes sphériques dont les sphères coupent la surface à angle droit. Les lignes de courbure de l'autre système seront des cercles, passant par un même point.

Nous rencontrons aussi ces mêmes propriétés dans les surfaces graphico-perspectives des surfaces de révolution, mais avec cette différence que pour ces surfaces les sphères passent par un même point, et non les cercles.

Nous avons vu que, dans toute liaison définie (c'est-à-dire dans toute liaison déterminée au moins par deux équations) entre les points de deux surfaces, il y a des variables communes conjuguées p et q, c'est-à-dire des variables communes p et q telles qu'à p et q constants correspondent sur les deux surfaces des courbes conjuguées. Ces courbes conjuguées jouent dans la théorie des relations et des affinités un rôle important; dans l'étude des relations ci-dessus mentionnées, elles se présenteront à nous d'elles-mêmes par leur signification géométrique et par la possibilité d'intégrer leurs expressions.

Pour cette raison, nous les appellerons *base* de la relation, et nous dirons que la relation existe relativement à ces courbes. Si ces courbes conjuguées sont des lignes de courbure, la base sera rectangulaire.

En mettant en relation la surface donnée x, y, z avec la surface X, Y, Z, nous obtenons sur la surface x, y, z un réseau déterminé de courbes conjuguées comme base (exception faite seulement pour la relation dans laquelle à toutes les courbes conjuguées de l'une des surfaces correspondent les courbes conjuguées de l'autre surface; un cas particulier de cette relation est l'affinité ci-dessus mentionnée dans laquelle aux courbes planes correspondent des courbes planes). En mettant cette même surface x, y, z dans la même relation avec une autre surface X, Y, Z, nous obtenons, en général, une autre base. Mais ici apparaît la question de savoir quelles surfaces X, Y, Z peuvent être dans la relation donnée avec la surface x, y, z sur la même base, c'est-à-dire relativement aux mêmes courbes conjuguées. Ces surfaces X, Y, Z ne seront plus arbitraires, mais il y en aura une infinité; elles se distingueront par des propriétés générales particulières ne dépendant pas tant de la surface même x, y, z que de la base de la relation sur la surface x, y, z, parce que, en passant par toutes les bases possibles de la relation donnée sur la surface x, y, z, nous passons par toutes les surfaces qui peuvent être dans la relation donnée avec la surface x, y, z, c'est-à-dire par toutes les surfaces possibles. De cette façon, la relation se réduit à une affinité, à l'aide de laquelle nous pouvons étudier les propriétés de toutes les surfaces d'après les courbes conjuguées données d'une surface, par exemple les sphères, sur lesquelles toutes les courbes qui se coupent à angle droit sont conjuguées, ou les plans, sur lesquels toutes les courbes possibles sont conjuguées. Cette vue n'est pas nouvelle; depuis longtemps existent, pour la représentation imaginée, les dessins perspectifs et graphiques sur papier; mais notre papier peut être aussi une surface courbe, et les moyens de dessiner seront autres par suite.

CHAPITRE I.

PREMIERE RELATION.

SUR LES PLANS TANGENTS PARALLÈLES DES SURFACES. PARALLÉLISME DES SURFACES.

La relation entre deux surfaces, pour laquelle les plans tangents des deux surfaces aux points correspondants sont parallèles, s'exprime analytiquement par les équations

$$\frac{\xi}{\xi_1} = \frac{\eta}{\eta_1} = \frac{\zeta}{\zeta_1} \tag{8}$$

où ξ, η, ζ et ξ_1, η_1, ζ_1 sont les cosinus directeurs des normales des deux surfaces.

Si ξ, η, ζ sont donnés en fonction des variables p et q, ξ_1, η_1, ζ_1 en fonction des variables l et t, alors, en éliminant l et t à l'aide des deux équations $\frac{\xi}{\xi_1} = \frac{\eta}{\eta_1} = \frac{\zeta}{\zeta_1}$, nous obtenons les coordonnées des deux surfaces en fonction des variables communes p et q. Les points des deux surfaces qui se correspondent dans la relation correspondront aux mêmes valeurs de ces variables.

Afin que la relation existe entre des points réels, les équations $\frac{\xi}{\xi_1} = \frac{\eta}{\eta_1} = \frac{\zeta}{\zeta_1}$, résolues par rapport à l et t, doivent avoir au moins une racine réelle, si p, q, l et t sont des variables réelles.

Considérons les rayons menés par le centre d'une sphère parallèlement aux normales de la surface donnée; les extrémités de ces rayons couvriront au moins la partie de la sphère, dont l'aire, suivant Gauss, ne se modifie pas si l'on déforme la surface. Toute la sphère peut être, de cette façon, couverte plusieurs fois, mais il suffit que la moitié de la sphère soit couverte pour que les normales aient toutes les directions possibles et pour que la surface x, y, z ait, avec toute surface arbitraire, des normales parallèles, par conséquent aussi des plans tangents parallèles.

Nous supposerons que cette condition, que la moitié au moins de la sphère de Gauss soit couverte, est réalisée pour l'une des surfaces à comparer et nous éliminerons complètement les surfaces développables qui couvrent seulement une courbe. La relation existe alors entre des points réels.

En éliminant les variables l et t, nous obtiendrons les coordonnées x, y, z et X, Y, Z des deux surfaces en fonction des variables communes p et q. A des valeurs données de ces variables p et q appartiennent deux points correspondants; à des accroissements dp et dq, deux directions correspondantes sur les deux surfaces, savoir les directions qui passent par les points p, q et $p + dp$, $q + dq$ sur les deux surfaces.

Théorème IV. — *Si deux surfaces x, y, z et X, Y, Z se trouvent dans une relation telle que les normales aux points correspondants soient parallèles, alors, par chaque point d'une surface, passent deux directions qui sont parallèles (ou deux courbes dont les tangentes sont parallèles) aux directions correspondantes sur l'autre surface. Ces deux directions, sur chaque surface, sont conjuguées et, par conséquent, constituent sur les deux surfaces les réseaux auxquels nous avons donné le nom de* BASE DE LA RELATION.

Démonstration. — La condition pour que deux directions correspondantes dx, dy, dz et $d\mathrm{X}$, $d\mathrm{Y}$, $d\mathrm{Z}$ soient parallèles, savoir

$$\frac{d\mathrm{X}}{dx} = \frac{d\mathrm{Y}}{dy} = \frac{d\mathrm{Z}}{dz},$$

existe si $\frac{d\mathrm{X}}{dx} = \frac{d\mathrm{Y}}{dy}$, puisque les deux directions sont perpendiculaires aux normales parallèles.

Posant $dx = x'\,dp + x_1\,dq$, $d\mathrm{X} = \mathrm{X}'\,dp + x_1\,dq$ et ainsi de suite, nous obtenons

$$\frac{x'\,dp + x_1\,dq}{\mathrm{X}'\,dp + \mathrm{X}_1\,dq} = \frac{y'\,dp + y_1\,dq}{\mathrm{Y}'\,dp + \mathrm{Y}_1\,dq}$$

ou, en multipliant par $(\mathrm{X}'\,dp + \mathrm{X}_1\,dq)(\mathrm{Y}'\,dp + \mathrm{Y}_1\,dq)$,

$$(x'\mathrm{Y}' - y'\mathrm{X}')\,dp^2 + (x'\mathrm{Y}_1 - y'\mathrm{X}_1 + x_1\mathrm{Y}' - y_1\mathrm{X}')\,dp\,dq + (x_1\mathrm{Y}_1 - y_1\mathrm{X}_1)\,dq^2 = 0. \tag{20}$$

Résolvant cette équation par rapport à $\frac{dp}{dq}$, nous obtenons deux directions correspondant aux deux racines $\frac{dp}{dq}$.

Si ces deux racines sont réelles et distinctes (nous examinerons plus loin le cas des racines égales et celui des racines imaginaires), nous pouvons introduire de nouvelles variables communes p et q telles que p et q constants correspondent à ces deux directions; en d'autres termes, nous pouvons adopter pour ces nouvelles variables les intégrales des équations

$$dp - m\,dq = 0 \qquad \text{et} \qquad dp - n\,dq = 0,$$

où m et n sont les deux racines de l'équation (20); on a alors

$$\frac{\mathrm{X}'}{x'} = \frac{\mathrm{Y}'}{y'} = \frac{\mathrm{Z}'}{z'} \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{X}_1}{x_1} = \frac{\mathrm{Y}_1}{y_1} = \frac{\mathrm{Z}_1}{z_1}$$

et, en désignant $\frac{\mathrm{X}'}{x'}$ par e, $\frac{\mathrm{X}_1}{x_1}$ par ε, nous obtenons

$$\left\{\begin{aligned} d\mathrm{X} &= \mathrm{X}'\,dp + \mathrm{X}_1\,dq = e x'\,dp + \varepsilon x_1\,dq,\\ d\mathrm{Y} &= \mathrm{Y}'\,dp + \mathrm{Y}_1\,dq = e y'\,dp + \varepsilon y_1\,dq,\\ d\mathrm{Z} &= \mathrm{Z}'\,dp + \mathrm{Z}_1\,dq = e z'\,dp + \varepsilon z_1\,dq,\end{aligned}\right. \tag{21}$$

où les fonctions e et ε doivent satisfaire aux conditions d'intégrabilité, c'est-à-dire aux équations

$$\frac{\partial(e x')}{\partial q} = \frac{\partial(\varepsilon x_1)}{\partial p}, \qquad \frac{\partial(e y')}{\partial q} = \frac{\partial(\varepsilon y_1)}{\partial p}, \qquad \frac{\partial(e z')}{\partial q} = \frac{\partial(\varepsilon z_1)}{\partial p}.$$

Différentiant ces trois équations et les additionnant après les avoir multipliées en premier lieu respectivement par x', y', z', ensuite par x_1, y_1, z_1 et, enfin, par $y'z_1 - y_1 z'$, $z'x_1 - z_1 x'$, $x'y_1 - x_1 y'$, nous obtenons les trois équations suivantes qui leur sont équivalentes :

$$(22)\quad \begin{cases} (x'^2+y'^2+z'^2)\dfrac{\partial e}{\partial q} - (x'x_1+y'y_1+z'z_1)\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial p} + (e-\varepsilon)(x'x'_1+y'y'_1+z'z'_1) = 0, \\ (x_1^2+y_1^2+z_1^2)\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial p} - (x'x_1+y'y_1+z'z_1)\dfrac{\partial e}{\partial q} + (\varepsilon - e)(x_1x'_1+y_1y'_1+z_1z'_1) = 0; \end{cases}$$

$$(23)\quad (e-\varepsilon)[(y'z_1-y_1z')x'_1+(z'x_1-z_1x')y'_1+(x'y_1-x_1y')z'_1] = 0.$$

Si $e-\varepsilon=0$, il résulte des équations (22) que $\dfrac{\partial e}{\partial q}=\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial p}=0$ ou que $e=\varepsilon=\text{const.}$; par conséquent,

$$X = ex, \qquad Y = ey, \qquad Z = ez;$$

si nous laissons de côté ce cas où les deux surfaces doivent être semblables et en position parallèle, nous déduisons de l'équation (23) que

$$(5)\quad (y'z_1-y_1z')x'_1+(z'x_1-z_1x')y'_1+(x'y_1-x_1y')z'_1 = 0.$$

Cette équation, comme nous l'avons vu, est la condition sous laquelle sont conjuguées les directions correspondant à p et q constants ($dp=0$ et $dq=0$) ou, plus exactement, sous laquelle sont conjuguées les courbes $p=\text{const.}$ et $q=\text{const.}$ dont les tangentes sont ces directions.

On démontre que cette condition existe aussi pour l'autre surface X, Y, Z en substituant $X'=ex'$, $X_1=ex_1$, ... dans l'équation (5). Si donc deux surfaces x, y, z et X, Y, Z se trouvent dans la relation de parallélisme, par chaque point de l'une des surfaces passent deux courbes qui sont parallèles (c'est-à-dire qui ont des tangentes parallèles) aux courbes correspondantes sur la surface X, Y, Z. Sur les deux surfaces, ces courbes sont conjuguées et constituent, par conséquent, la base de la relation. Nous les appellerons *courbes de base*.

Théorème V. — *Les propriétés angulaires des courbes de base correspondantes sont identiques.*

Explication et démonstration. — La ligne droite passant par deux points successifs d'une courbe arbitraire s'appelle *tangente* ou *direction de la courbe;* le plan passant par trois points consécutifs s'appelle le *plan osculateur* ou *plan de la courbe;* la sphère passant par quatre points consécutifs s'appelle *sphère osculatrice* ou *sphère de la courbe;* une courbe n'ayant qu'une sphère (cette unique sphère étant osculatrice en tous les points) porte le nom de *courbe sphérique;* une courbe n'ayant qu'un plan, celui de *courbe plane,* et une courbe n'ayant qu'une direction, celui de *ligne droite.*

Si une courbe se trouve sur une surface, l'angle du plan de cette courbe et du plan de la surface (plan tangent de la surface) s'appelle *l'inclinaison de la courbe.* Une courbe dont l'inclinaison est égale à 90° s'appelle *ligne géodésique* ou *ligne la plus courte;* nous donnons à une courbe dont l'inclinaison est nulle le nom de *ligne asymptotique* (elle n'existe effectivement que sur les surfaces en forme de selle). Une courbe coupant la direction conjuguée à angle droit s'appelle *ligne de courbure;* une courbe coupant la direction conjuguée sous un angle égal à zéro (auquel cas les deux directions conjuguées coïncident) est une ligne asymptotique; nous donnons (pour la raison que nous exposerons plus loin) le nom de *courbes cylindriques* aux courbes dont les directions conjuguées sont parallèles.

Nous donnons à l'angle infiniment petit de deux directions successives d'une courbe le nom de *courbure principale* (le rapport de cet angle à l'élément d'arc s'appelle quelquefois *courbure principale*); l'angle de deux plans successifs de la courbe s'appelle *torsion.* Si nous menons par une tangente de la courbe le plan A et si nous projetons sur ce plan la tangente successive de la courbe, l'angle infiniment petit de la tangente et de la tangente successive projetée (c'est-à-dire la projection de la courbure principale sur le plan A) s'appelle *courbure de la courbe dans le plan* A ou *dans la section* A. Si la courbe se trouve sur une surface, la courbure dans la section normale s'appelle *courbure normale,* dans le plan tangent de la surface, *courbure tangentielle* ou *géodésique.*

Comme les courbes correspondantes de base de deux surfaces, se trouvant dans la relation de parallélisme, ont, aux points correspondants, des tangentes parallèles et des normales parallèles desquelles dépendent tous les angles finis et infiniment petits mentionnés (inclinaison, angle conjugué, courbure géodésique et courbure normale principale, torsion, etc.), nous en conclurons que :

Si une courbe de base, sur l'une des deux surfaces se trouvant en relation de parallélisme, est une droite (courbure principale $=0$), ou une ligne géodésique (inclinaison $=90^\circ$, courbure géodésique $=0$), ou une ligne asymptotique (inclinaison $=0$, courbure normale $=0$), ou une courbe plane (torsion $=0$), ou une ligne de courbure (angle conjugué $=90^\circ$), ou une courbe cylindrique (les directions conjuguées sont parallèles entre elles), alors la courbe de base qui lui correspond sur l'autre surface doit être de même une droite, ou une ligne géodésique, etc.

Si deux droites qui sont infiniment voisines sur toute leur étendue passent par deux points successifs d'une courbe donnée, nous donnons à la distance entre le point central de ces droites (ou leur point de rencontre si elles se coupent) et le point de la courbe par laquelle elles passent le nom de *sécance,* et aux droites le nom de *sécantes*. Dans le cas où elles se rencontrent, nous appellerons cette distance *sécance principale* et les droites elles-mêmes *sécantes principales*.

Une suite continue de sécantes qui s'appuient sur la courbe constitue une surface réglée, qui se transforme en surface développable, si les sécantes sont des sécantes principales. Si, par exemple, la courbe donnée est sur une surface arbitraire et si les sécantes sont tangentes à cette surface, alors la surface réglée sera aussi tangente à la surface. Si ces sécantes sont menées suivant des directions conjuguées de cette courbe, elles se rencontrent et constituent la surface développable qui est tangente à la surface donnée le long de la courbe donnée et qui se transforme en cylindre si les sécantes sont parallèles, en un cône si elles passent toutes par un même point. Dans le premier cas, la courbe sera *cylindrique,* dans le second nous l'appellerons *conique*.

Une sécance principale qui est normale à la courbe s'appele *rayon*. Le rayon qui est situé dans le plan osculateur de la courbe s'appelle *principal,* le rayon qui touche sa sphère s'appelle *rayon sphérique*. Si la courbe est située sur une surface, le rayon qui touche la surface s'appelle *tangentiel* ou *géodésique,* le rayon qui est en même temps normal à la surface s'appelle *normal*.

Théorème VI. — *Les sécances parallèles des courbes correspondantes de la base sont proportionnelles.*

Considérons deux sécantes par les points contigus x, y, z et $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ de la courbe de base sur la surface x, y, z et deux sécantes parallèles aux premières par les points correspondants X, Y, Z et $X+dX$, $Y+dY$, $Z+dZ$; alors les quadrilatères formés sur chaque surface par les deux sécantes, par leur plus courte distance et par l'arc infiniment petit de la courbe (ou les triangles si les sécantes se coupent), seront semblables, puisque tous leurs côtés sont parallèles; par conséquent, les sécantes parallèles seront entre elles comme les arcs infiniment petits. Si donc s et s_1 sont deux sécances arbitraires de la courbe de base au point x, y, z; S et S_1 leurs sécances parallèles de la courbe correspondante de base au point X, Y, Z, on aura

$$S : S_1 = s : s_1.$$

Par conséquent, si r, t, n désignent les rayons principal, tangentiel et normal, s la sécance tangente principale de base au point x, y, z et si R, T, N, S ont la même signification pour la courbe correspondante de base au point X, Y, Z, on aura

$$\frac{r}{R} = \frac{t}{T} = \frac{n}{N} = \frac{s}{S}. \tag{24}$$

Remarque. — Les rayons sphériques correspondants ne sont pas parallèles; c'est pour cela qu'ils ne trouvent pas leur place ici.

AFFINITÉ DE PARALLÉLISME OU RELATION DE PARALLÉLISME SUR UNE BASE DONNÉE.

Nous avons déterminé les points pour lesquels deux surfaces arbitraires x, y, z, X, Y, Z sont parallèles, c'est-à-dire ont leurs plans tangents parallèles; nous avons vu que par chaque point x, y, z de l'une des surfaces passent deux courbes qui sont parallèles, c'est-à-dire ont des tangentes parallèles aux deux courbes passant par le point X, Y, Z de l'autre surface; à ces courbes qui, sur les deux surfaces sont conjuguées, nous avons donné le nom de *base du parallélisme*. Démontrons maintenant que si une surface arbitraire x, y, z nous est donnée et sur elle un réseau de courbes conjuguées, nous pouvons trouver une surface X, Y, Z qui est parallèle à la surface x, y, z par rapport à ces courbes, c'est-à-dire qui est parallèle à la surface donnée sur la base donnée.

Snpposons que les coordonnées x, y, z soient données en fonction des variables p et q, aux valeurs constantes desquelles correspondent ces courbes conjuguées. Pour que les tangentes des courbes $q =$ const. sur les surfaces x, y, z et X, Y, Z soient parallèles, $\frac{\partial X}{\partial p}, \frac{\partial Y}{\partial p}, \frac{\partial Z}{\partial p}$ doivent être dans les mêmes rapports que $\frac{\partial x}{\partial p}, \frac{\partial y}{\partial p}, \frac{\partial z}{\partial p}$; par conséquent,

$$\frac{X'}{x'} = \frac{Y'}{y'} = \frac{Z'}{z'}.$$

De la même façon nous trouverons la condition que les courbes $p =$ const. sont parallèles

$$\frac{X_1}{x_1} = \frac{Y_1}{y_1} = \frac{Z_1}{z_1}.$$

De là résulte déjà que les plans tangents des surfaces x, y, z et X, Y, Z qui sont touchés par ces courbes sont parallèles.

Désignant $\frac{X'}{x'}$ par e, $\frac{X_1}{x_1}$ par ε, nous obtenons

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} dX &= X'\,dp + X_1\,dq = e x'\,dp + \varepsilon x_1\,dq, \\ dY &= e y'\,dp + \varepsilon y_1\,dq, \\ dZ &= e z'\,dp + \varepsilon z_1\,dq. \end{aligned} \right.$$

Si la surface X, Y, Z existe, les fonctions indéterminées e et ε doivent satisfaire aux conditions d'intégrabilité, savoir :

$$\frac{\partial(ex')}{\partial q} = \frac{\partial(\varepsilon x_1)}{\partial p}, \qquad \frac{\partial(ey')}{\partial q} = \frac{\partial(\varepsilon y_1)}{\partial p}, \qquad \frac{\partial(ez')}{\partial q} = \frac{\partial(\varepsilon z_1)}{\partial p}.$$

Ces trois conditions, comme nous l'avons vu [équat. (22) et (23)] se transforment dans les trois conditions équivalentes suivantes :

$$(22)\quad \begin{cases} (x'^2+y'^2+z'^2)\dfrac{\partial e}{\partial q}-(x'x_1+y'y_1+z'z_1)\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial p}+(e-\varepsilon)(x'x'_1+y'y'_1+z'z'_1)=0, \\ (x_1^2+y_1^2+z_1^2)\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial p}-(x'x_1+y'y_1+z'z_1)\dfrac{\partial e}{\partial q}+(e-\varepsilon)(x_1x'_1+y_1y'_1+z_1z'_1)=0; \end{cases}$$

$$(23)\qquad (e-\varepsilon)[(y'z_1-y_1z')x'_1+(z'x_1-z_1x')y'_1+(x'y_1-x_1y')z'_1]=0.$$

La troisième condition existe d'elle-même, puisque les courbes correspondant à p et q constants sont conjuguées; et nous satisfaisons aux deux premières au moyen des deux fonctions indéterminées e et ε. En intégrant les équations (22), nous obtenons, avec deux fonctions arbitraires, les fonctions e et ε, au moyen desquelles nous tirons des équations

$$(21)\quad dX=ex'\,dp+\varepsilon x_1\,dq,\qquad dY=ey'\,dp+\varepsilon y_1\,dq,\qquad dZ=ez'\,dp+\varepsilon z_1\,dq$$

les valeurs des coordonnées X, Y, Z.

Comme les coordonnées X, Y, Z renferment deux fonctions arbitraires, nous en concluons qu'il y a une infinité de surfaces X, Y, Z parallèles à la surface donnée x, y, z sur la base donnée $p=$ const., $q=$ const. Toutes ces surfaces X, Y, Z, parmi lesquelles se trouve aussi la surface donnée x, y, z ($e=\varepsilon=1$) constituent l'affinité de parallélisme, qui est caractérisée par les propriétés générales que nous avons énoncées en trois théorèmes sur le parallélisme, savoir :

1° *Les courbes* $p=$ const. *et* $q=$ const., *sur chacune de ces surfaces, sont conjuguées et parallèles aux courbes correspondantes de toutes les autres surfaces;*

2° *Les propriétés angulaires de ces courbes, sur toutes les surfaces, sont identiques;*

3° *Les sécances parallèles sont proportionnelles.*

Par conséquent :

Une surface donnée x, y, z se trouve en relation de parallélisme avec toute surface arbitraire X, Y, Z; *elle ne se trouve en affinité de parallélisme, c'est-à-dire sur une base donnée* $p=$ const., $q=$ const., *qu'avec les surfaces* X, Y, Z *satisfaisant aux conditions*

$$dX=ex'\,dp+\varepsilon x_1\,dq,\qquad dY=ey'\,dp+\varepsilon y_1\,dq,\qquad dZ=ez'\,dp+\varepsilon z_1\,dq.$$

Nous pouvons tirer de ces conditions les équations de ces surfaces et étudier leurs propriétés définies par les trois théorèmes mentionnés.

Pour la détermination des fonctions indéterminées e et ε, on peut se servir des équations

$$(22)\quad \begin{cases} (x'^2+y'^2+z'^2)\dfrac{\partial e}{\partial q}-(x'x_1+y'y_1+z'z_1)\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial p}+(e-\varepsilon)(x'x'_1+y'y'_1+z'z'_1)=0, \\ (x_1^2+y_1^2+z_1^2)\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial p}-(x'x_1+y'y_1+z'z_1)\dfrac{\partial e}{\partial q}+(\varepsilon-e)(x_1x'_1+y_1y'_1+z_1z'_1)=0 \end{cases}$$

que nous pouvons simplifier de la façon suivante :

Supposons que

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2=u^2\,dp^2+2\,uv\cos\omega\,dp\,dp+v^2\,dq^2$$

soit l'élément linéaire de la surface donnée x, y, z, alors

$$x'^2+y'^2+z'^2=u^2,\qquad x'x_1+y'y_1+z'z_1=uv\cos\omega,\qquad x_1^2+y_1^2+z_1^2=v^2;$$

par conséquent,

$$x'x'_1+y'y'_1+z'z'_1=u\frac{\partial u}{\partial q}=uu_1,\qquad x_1x'_1+y_1y'_1+z_1z'_1=v\frac{\partial v}{\partial p}=vv'.$$

Après substitution, nous déduirons des équations (22)

$$(22)\qquad \begin{cases} u\dfrac{\partial e}{\partial q}-v\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial p}\cos\omega+(e-\varepsilon)u_1=0, \\ v\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial p}-u\dfrac{\partial e}{\partial q}\cos\omega+(\varepsilon-e)v'=0 \end{cases}$$

et de là

$$(24)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial e}{\partial q}+\dfrac{u_1-v'\cos\omega}{u\sin^2\omega}(e-\varepsilon)=0, \\ \dfrac{\partial \varepsilon}{\partial p}+\dfrac{v'-u_1\cos\omega}{v\sin^2\omega}(\varepsilon-e)=0 \end{cases}$$

ou

$$(24)\qquad \frac{\partial e}{\partial q}+m(e-\varepsilon)=0,\qquad \frac{\partial \varepsilon}{\partial p}+n(\varepsilon-e)=0,$$

m, n étant des fonctions de p et q définies par les formules

$$(25)\qquad m=\frac{u_1-v'\cos\omega}{u\sin^2\omega},\qquad n=\frac{v'-u_1\cos\omega}{v\sin^2\omega}.$$

PARALLÉLISME DES SURFACES DÉFORMÉES.

Nous avons déjà vu que l'affinité de déformation est un cas particulier de la relation graphique, que les distances des points correspondants infiniment voisins, qui dans cette dernière sont proportionnelles, deviennent égales dans ce cas particulier, puisque si deux surfaces peuvent, au moyen de la déformation, être amenées en coïncidence, les distances infiniment petites entre les points coïncidants (correspondants) doivent être égales et que, si elles sont égales, rien n'empêche d'amener les surfaces à coïncider.

Nous donnerons à la base de l'affinité de déformation, c'est-à-dire aux courbes conjuguées de la surface donnée x, y, z, qui restent conjuguées si nous courbons cette surface x, y, z dans une autre forme x_1, y_1, z_1, le nom de *lignes de déformation* et nous dirons que la surface x, y, z est déformée selon ces lignes. Ces lignes de déformation sont déterminées comme base de l'affinité par les équations (6) et (7) et seront, en général, autres si nous courbons la surface x, y, z dans une troisième forme x_{11}, y_{11}, z_{11}.

Mais si deux surfaces x_1, y_1, z_1 et x_{11}, y_{11}, z_{11} peuvent être en affinité de déformation avec une surface donnée x, y, z sur la même base, c'est-à-dire si la surface x, y, z peut, selon ces mêmes lignes de déformation, être courbée dans deux formes différentes x_1, y_1, z_1 et x_{11}, y_{11}, z_{11}, nous donnerons à ces lignes le nom de *lignes principales de déformation*. (Comme nous le démontrerons plus loin, la surface peut, selon de telles lignes de déformation, être courbée dans une infinité de formes.)

Remarque. — Les lignes de déformation dont nous nous occuperons en détail dans la relation graphique ont seules cette propriété que le produit de leurs rayons normaux ne change pas pendant la déformation. Le théorème de Gauss sur la constance du produit des rayons normaux des lignes de courbure s'applique ici seulement dans le cas où les lignes de courbure, pendant la déformation, ne changent pas de nature, c'est-à-dire dans le cas où ces lignes de courbure restent lignes de courbure. Dans ce cas, la base de la déformation sera rectangulaire et pourra être, en même temps, simple ou principale. Sur une base rectangulaire principale se courbent seulement les surfaces moulures de Monge, et ces déformations ont été, en effet, obtenues par Bour (*Journal de l'École Polytechnique,* Tome XXII).

Ajoutons ici, pour illustrer les théorèmes qui suivront, des exemples de déformations sur une base obliquangle.

Supposons donnée la surface suivante :

$$x = a + \alpha, \qquad y = b + \beta, \qquad z = c + \gamma, \tag{26}$$

où a, b, c sont trois fonctions arbitraires d'une variable p; de même α, β, γ des fonctions d'une variable q.

PROPRIÉTÉS DE CES SURFACES.

1° *Les courbes, correspondant à p et q constants, sont des courbes invariables, puisque à toutes les valeurs constantes des fonctions α, β, γ correspond la même courbe dans des positions différentes; de même relativement aux fonctions a, b, c;*

2° *Ce sont des courbes cylindriques, puisque les sécances tangentes principales des courbes $q =$ const., dont les cosinus directeurs sont entre eux comme $\frac{\partial x}{\partial q}, \frac{\partial y}{\partial q}, \frac{\partial z}{\partial q}$ sont parallèles;*

3° *Ce sont des courbes conjuguées, puisque les dérivées partielles x'_1, y'_1, z'_1, par rapport aux deux variables, sont nulles et que, par conséquent,*

$$\xi x'_1 + \eta y'_1 + \zeta z'_1 = 0; \tag{5}$$

4° *Dans l'élément linéaire*

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= (a'^2 + b'^2 + c'^2)\,dp^2 + 2(a'\alpha_1 + b'\beta_1 + c'\gamma_1)\,dp\,dq + (\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2)\,dq^2, \end{aligned} \tag{27}$$

où

$$a' = \frac{da}{dp}, \qquad \alpha_1 = \frac{d\alpha}{dq}, \qquad \ldots,$$

nous remarquerons un cas intéressant dans lequel nous pouvons remplacer les fonctions a, b, c et α, β, γ par d'autres fonctions sans que l'élément linéaire varie, c'est-à-dire dans lequel nous pouvons courber la surface donnée x, y, z selon les lignes de déformation $p =$ const. et $q =$ const.

Ce cas s'exprime analytiquement par les conditions

$$la'^2 + mb'^2 + nc'^2 = 0, \qquad \lambda\alpha_1^2 + \mu\beta_1^2 + \nu\gamma_1^2 = 0, \tag{28}$$

où l, m, n; λ, μ, ν sont des constantes.

En effet, supposons que ces conditions existent entre les fonctions données a, b, c et α, β, γ et remplaçons

$$\begin{array}{llllll} a & \text{par } ga, & b & \text{par } hb, & c & \text{par } kc, \\ \alpha & \text{par } \dfrac{\alpha}{g}, & \beta & \text{par } \dfrac{\beta}{h}, & \gamma & \text{par } \dfrac{\gamma}{k} \end{array}$$

où g, h, k sont des constantes, nous obtenons l'élément linéaire

$$ds^2 = (g^2a'^2 + h^2b'^2 + k^2c'^2)\,dp^2 + 2(a'\alpha_1 + b'\beta_1 + c'\gamma_1)\,dp\,dq + \left(\frac{\alpha_1^2}{g^2} + \frac{\beta_1^2}{h^2} + \frac{\gamma_1^2}{k^2}\right)dq^2,$$

qui doit être identique à l'élément linéaire

$$ds^2 = (a'^2 + b'^2 + c'^2)\, dp^2 + 2(a'\alpha_1 + b'\beta_1 + c'\gamma_1)\, dp\, dq + (\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2)\, dq^2.$$

De là résultent les deux conditions

$$a'^2(g^2 - 1) + b'^2(h^2 - 1) + c'^2(k^2 - 1) = 0,$$

$$\alpha_1^2 \frac{g^2 - 1}{g^2} + \beta_1^2 \frac{h^2 - 1}{h^2} + \gamma_1^2 \frac{k^2 - 1}{k^2} = 0,$$

auxquelles nous pouvons satisfaire au moyen des conditions (28), en posant

$$(29) \qquad \frac{g^2 - 1}{l} = \frac{h^2 - 1}{m} = \frac{k^2 - 1}{n}, \qquad \frac{g^2 - 1}{g^2 \lambda} = \frac{h^2 - 1}{h^2 \mu} = \frac{k^2 - 1}{k^2 \nu}.$$

Trois de ces quatre équations nous déterminent les constantes inconnues g, h, k et la quatrième exprime une dépendance entre les constantes données l, m, n, λ, μ, ν des équations (28).

Si donc nous posons

$$(30) \qquad X = ga + \frac{\alpha}{g}, \qquad Y = hb + \frac{\beta}{h}, \qquad Z = kc + \frac{\gamma}{k},$$

X, Y, Z seront les coordonnées de la surface que l'on peut amener à coïncider avec la surface donnée

$$x = a + \alpha, \qquad y = b + \beta, \qquad z = c + \gamma,$$

puisque les éléments linéaires des deux surfaces sont identiques.

Les courbes correspondant à p et q constants sur les deux surfaces sont conjuguées et c'est pourquoi elles seront des bases de la déformation. Cette base sera simple puisque les constantes g, h, k (équat. 29) et, par conséquent, les coordonnées X, Y, Z n'ont qu'une valeur; au moyen des équations (29) nous obtenons encore pour g^2, h^2, k^2, en outre de la valeur précédente, la solution $g^2 = 1$, $h^2 = 1$, $k^2 = 1$ qui correspond à la surface donnée x, y, z.

Mais, si une des fonctions a, b, c, par exemple a, et une des fonctions α, β, γ, par exemple β, sont nulles d'elles-mêmes, alors les conditions

$$la'^2 + mb'^2 + nc'^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad \lambda\alpha_1^2 + \mu\beta_1^2 + \nu\gamma_1^2 = 0$$

ont lieu pour m, n, λ, ν arbitraires, si $l = \infty$ et $\mu = \infty$, et les équations (29) deviennent indéterminées.

L'équation de la surface donnée sera alors

$$(31) \qquad x = \alpha, \qquad y = b, \qquad z = c + \gamma,$$

et aux propriétés d'après lesquelles les courbes $p = \text{const.}$ et $q = \text{const.}$ sont invariables, cylindriques et conjuguées, est ajoutée encore la propriété que ces courbes sont planes.

Nous nous convaincrons facilement que dans ce cas toute surface

$$(32) \qquad X = \int \sqrt{\alpha_1^2 - k^2\gamma_1^2}\, dq, \qquad Y = \int \sqrt{b'^2 - \frac{c'^2}{k^2}}\, dp, \qquad Z = kc + \frac{\gamma}{k}$$

peut être amenée à coïncider avec la surface x, y, z, puisque

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 = (b'^2 + c'^2)\, dp^2 + 2c'\gamma_1\, dp\, dq + (\alpha_1^2 + \gamma_1^2)\, dq^2,$$

indépendamment de la constante entièrement arbitraire k, que nous appellerons *le paramètre de la déformation*. La base de cette déformation sera obliquangle principale, parce que la surface x, y, z se courbe dans les formes différentes X, Y, Z selon ces mêmes lignes $p = \text{const.}$ et $q = \text{const.}$

Soit

$$(33) \qquad x = a\alpha, \qquad y = a\beta, \qquad z = b$$

une surface donnée, où a et b sont des fonctions d'une variable p, α et β des fonctions d'une autre variable q.

PROPRIÉTÉS DE CETTE SURFACE.

1° *Les courbes correspondant à p et q constants sont planes, puisque* $\frac{y}{x} = \frac{\beta}{\alpha} = \text{const.}$ *si* $q = \text{const.}$ *et puisque* $z = b = \text{const.}$ *si* $p = \text{const.}$;

2° *Ces courbes sont conjuguées, puisque z_1 et z'_1 sont nuls et que, par conséquent,*

$$(y'z_1 - y_1z')x'_1 + (z'x_1 - z_1x')y'_1 + (x'y_1 - x_1y')z'_1 = z'(x_1y'_1 - y_1x'_1) = 0;$$

3° *Les courbes* $q = \text{const.}$ *sont cylindriques puisque les sécances tangentes principales, dont les cosinus directeurs sont entre eux comme* $\frac{d\alpha}{dq}, \frac{d\beta}{dq}$, o *sont parallèles;*

4° *Pour l'élément linéaire nous obtenons*

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= [a'^2(\alpha^2 + \beta^2) + b'^2]\, dp^2 + 2aa'(\alpha\alpha' + \beta\beta')\, dp\, dq + a^2(\alpha_1^2 + \beta_1^2)\, dq^2; \end{aligned}$$

cet élément linéaire ne change évidemment pas, si nous remplaçons

$$(34) \qquad \alpha^2 + \beta^2 \quad par \quad \alpha^2 + \beta^2 + k, \qquad b'^2 \quad par \quad b'^2 - ka'^2$$

et, si nous conservons

$$a = a \qquad et \qquad \alpha_1^2 + \beta_1^2 = \alpha_1^2 + \beta_1^2,$$

puisque

$$a'^2(\alpha^2 + \beta^2 + k^2) + b'^2 - ka'^2 = a'^2(\alpha^2 + \beta^2) + b'^2,$$

$$\frac{d(\alpha^2 + \beta^2 + k)}{dq} + \frac{d(\alpha^2 + \beta^2)}{dq} = 2(\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1),$$

k sera le paramètre de la déformation.

Par ces changements, les fonctions α, β, b recevront une forme tout autre; en effet, en désignant $\alpha^2 + \beta^2$ par γ^2, $\alpha_1^2 + \beta_1^2$ par η^2, nous obtiendrons, au moyen des équations $\alpha^2 + \beta^2 + k = \gamma^2$ et $\alpha_1^2 + \beta_1^2 = \eta^2$,

$$(35) \qquad \begin{cases} \alpha = \sqrt{\gamma^2 - k} \cos \displaystyle\int \frac{\sqrt{(\gamma^2 - k)\eta^2 - \gamma_1^2}}{\gamma^2 - k} dq, \\ \beta = \sqrt{\gamma^2 - k} \sin \displaystyle\int \frac{\sqrt{(\gamma^2 - k)\eta^2 - \gamma_1^2}}{\gamma^2 - k} dq \end{cases}$$

et, en remplaçant b'^2 par $b'^2 - ka'^2$, on voit que $\int \sqrt{b'^2 - ka'^2}\, dp$ doit être mis à la place de b et qu'il ne reste que $a = a$.

Les surfaces correspondant à ces valeurs des fonctions α, a, b, β seront

$$X = a\sqrt{\gamma^2 - k} \cos \int \frac{\sqrt{(\gamma^2 - k)\eta^2 - \gamma_1^2}}{\gamma^2 - k} dq,$$

$$Y = a\sqrt{\gamma^2 - k} \sin \int \frac{\sqrt{(\gamma^2 - k)\eta^2 - \gamma_1^2}}{\gamma^2 - k} dq,$$

$$Z = \int \sqrt{b'^2 - ka'^2}\, dp.$$

Toutes ces surfaces X, Y, Z seront des surfaces déformées de la surface x, y, z selon les lignes de déformation principales $p = \text{const.}$, $q = \text{const.}$, puisque les courbes $p = \text{const.}$ et $q = \text{const.}$ dans toutes ces surfaces sont conjuguées et puisque $dX^2 + dY^2 + dZ^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ pour toutes les valeurs du paramètre k.

Soient

$$a = \cos p, \qquad \alpha = \lambda \cos q, \qquad \beta = \mu \sin q, \qquad b = \nu \sin p$$

où λ, μ, ν sont des constantes. Alors la surface donnée x, y, z sera

$$(37) \qquad x = \lambda \cos p \cos q, \qquad y = \mu \cos p \sin q, \qquad z = \nu \sin p$$

ou

$$\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\mu^2}+\frac{z^2}{\nu^2}=1, \tag{37}$$

et nous trouvons trois séries de déformations X, Y, Z, suivant celui des trois axes de la surface donnée du second degré que nous prendrons pour axe ν. Si λ^2, μ^2 ou ν^2 sont négatifs, nous remplacerons p par pi ou par $\frac{\pi}{2}-pi$, q par qi.

Théorème VII. — *Si la surface x_1, y_1, z_1 est une surface déformée de la surface x, y, z, toutes les surfaces X_1, Y_1, Z_1 qui sont parallèles à une surface x_1, y_1, z_1 sont aussi des surfaces déformées des surfaces X, Y, Z qui sont parallèles à la surface x, y, z par rapport aux lignes de déformation.*

Ce théorème remarquable, au moyen duquel toutes les questions touchant la déformation des surfaces sont ramenées à leur principe le plus simple peut encore s'exprimer de la façon suivante :

Pour toutes les surfaces, parallèles à une surface donnée par rapport aux lignes de déformation (simples ou principales), la base du parallélisme sera formée par les lignes de déformation (simples ou principales).

On voit ainsi pourquoi les propriétés par lesquelles sont caractérisées les lignes de déformation se transportent aussi, comme propriétés angulaires, de la surface donnée aux surfaces parallèles (théorème V).

Démonstration. — Supposons que

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2=u^2\,dp^2+2uv\cos\omega\,dp\,dq+v^2\,dq^2$$

soit l'élément linéaire de la surface x, y, z et que les courbes $p=$ const. et $q=$ const. soient des lignes de déformation (ordinaires ou principales), c'est-à-dire des courbes conjuguées selon lesquelles la surface x, y, z se déforme; alors les équations des surfaces parallèles par rapport à ces courbes seront

$$dX=x'e\,dp+x_1\varepsilon\,dq,\qquad dY=y'e\,dp+y_1\varepsilon\,dq,\qquad dZ=z'e\,dp+z_1\varepsilon\,dq$$

où e et ε sont définis par les équations

$$\frac{\partial e}{\partial p}+m(e-\varepsilon)=0,\qquad \frac{\partial\varepsilon}{\partial q}+n(\varepsilon-e)=0, \tag{24}$$

$$m=\frac{u_1-v'\cos\omega}{u\sin^2\omega},\qquad n=\frac{v'-u_1\cos\omega}{v\sin^2\omega}. \tag{25}$$

De ces équations (24) et (25) résulte que la forme générale des fonctions e et ε dépend seulement des fonctions u, v et ω et, par conséquent, ne change pas pendant la déformation de la surface x, y, z, puisque l'élément linéaire $ds^2 = u^2\,dp^2 + 2uv\cos\omega\,dp\,dq + v^2\,dq^2$ ne change pas; de là nous concluons que l'élément linéaire des surfaces X, Y, Z,

$$\begin{aligned} dS^2 &= dX^2 + dY^2 + dZ^2 \\ &= e^2(x'^2 + y'^2 + z'^2)\,dp^2 + 2e\varepsilon(x'x_1 + y'y_1 + z'z_1)\,dp\,dq + \varepsilon^2(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)\,dq^2 \\ &= e^2u^2\,dp^2 + 2e\varepsilon uv\cos\omega\,dp\,dq + \varepsilon^2v^2\,dq^2 \end{aligned}$$

ne change pas pendant la déformation de la surface x, y, z.

Exemple I. — Supposons que l'on donne la surface

$$x = a\alpha, \qquad y = a\beta, \qquad z = b \tag{33}$$

où a et b sont des fonctions d'une variable p, α et β des fonctions d'une variable q.

Comme nous l'avons déjà vu, les courbes $p =$ const. et $q =$ const. sont ici des lignes de déformation principales, selon lesquelles la surface x, y, z peut être courbée dans plusieurs formes.

Les fonctions α, β, a, b, par suite de cette déformation, prennent de nouvelles valeurs, renfermant un paramètre arbitraire k. Ce paramètre k entre ici au moyen des équations

$$\left\{\begin{aligned} &\alpha^2 + \beta^2 = \alpha^2 + \beta^2 + k, \qquad &&\alpha_1^2 + \beta_1^2 = \alpha_1^2 + \beta_1^2, \\ &a = a, &&b'^2 = b'^2 - ka'^2 \end{aligned}\right. \tag{34}$$

où les premiers membres désignent les valeurs des fonctions a, b, α, β pour les surfaces déformées, et ce paramètre sera, d'après le théorème VII, le paramètre de déformation de toutes les surfaces X, Y, Z qui sont parallèles à la surface x, y, z par rapport aux lignes de déformation $p =$ const. et $q =$ const.

Établissons l'équation de ces surfaces parallèles; au moyen des équations

$$x = a\alpha, \qquad y = a\beta, \qquad z = b,$$

nous obtenons l'élément linéaire

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= a'^2(\alpha^2 + \beta^2)\,dp^2 + 2aa'(\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1)\,dp\,dq + a^2(\alpha_1^2 + \beta_1^2)\,dq^2 \\ &= u^2\,dp^2 + 2uv\cos\omega\,dp\,dp + v^2\,dq^2, \end{aligned}$$

par conséquent,

$$u = a'\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \qquad \cos\omega = \frac{\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha_1^2 + \beta_1^2)}}, \qquad v = a\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}$$

et de là

$$(35)\qquad \begin{cases} m = \dfrac{u_1 - v' \cos\omega}{u \sin^2\omega} = \dfrac{\dfrac{\partial u}{\partial q} - \dfrac{\partial v}{\partial p}\cos\omega}{u \sin^2\omega} = 0, \\[2ex] n = \dfrac{v' - u_1 \cos\omega}{v \sin^2\omega} = \dfrac{a'}{a} = \dfrac{da}{a\,dp}. \end{cases}$$

Substituant ces valeurs des fonctions m et n dans les équations

$$\frac{\partial e}{\partial q} + m(e - \varepsilon) = 0, \qquad \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} + n(\varepsilon - e) = 0$$

et intégrant, nous obtenons

$$e = \mathrm{F}(p),$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial p} + \varepsilon \frac{da}{a\,dp} = \mathrm{F}(p)\frac{da}{a\,dp},$$

par conséquent,

$$\frac{\partial(a\varepsilon)}{\partial p} = \mathrm{F}(p)\,da,$$

$$a\varepsilon = \varphi(q) + \int \mathrm{F}(p)\frac{da}{dp}\,dp,$$

et ainsi

$$(36)\qquad e = \mathrm{F}(p), \qquad \varepsilon = \frac{\varphi(q) + \displaystyle\int \mathrm{F}(p)\frac{da}{dp}\,dp}{a}.$$

Remplaçant les valeurs des fonctions e et ε dans les équations

$$d\mathrm{X} = e x'\,dp + \varepsilon x_1\,dq, \qquad d\mathrm{Y} = e y'\,dp + \varepsilon y_1\,dq, \qquad d\mathrm{Z} = e z'\,dp + \varepsilon z_1\,dq,$$

où

$$x = a\alpha, \qquad y = a\beta, \qquad z = b,$$

nous obtenons

$$d\mathrm{X} = \alpha\,\mathrm{F}(p)\frac{da}{dp}\,dp + \left(\varphi(q) + \int \mathrm{F}(p)\frac{da}{dp}\,dp\right)\frac{d\alpha}{dq}\,dq,$$

par conséquent, la première des trois équations suivantes [1],

$$(37)\qquad \begin{cases} \mathrm{X} = a\alpha\,\mathrm{F}(p) + \displaystyle\int \varphi(q)\frac{d\alpha}{dq}\,dq, \\[2ex] \mathrm{Y} = a\beta\,\mathrm{F}(p) + \displaystyle\int \varphi(q)\frac{d\beta}{dq}\,dq, \\[2ex] \mathrm{Z} = \displaystyle\int \mathrm{F}(p)\frac{db}{dp}\,dp. \end{cases}$$

---

[1] Peterson effectue ici implicitement un changement dans les notations, d'où résulte une légère confusion dont il suffit de prévenir le lecteur. (*Note du traducteur.*)

Ce sont les équations de toutes les surfaces X, Y, Z parallèles à la surface $x = a\alpha, y = a\beta, z = b$ par rapport aux courbes $p =$ const. et $q =$ const.

$F(p)$ et $\varphi(q)$ seront les fonctions arbitraires du parallélisme. Mais comme a et b sont des fonctions arbitraires données de p, $F(p)$ ne modifie évidemment pas la forme générale des surfaces X, Y, Z.

Il en résulte que les surfaces x, y, z pour des valeurs différentes des fonctions a et b sont parallèles entre elles, c'est-à-dire que nous obtenons une partie des surfaces cherchées X, Y, Z en remplaçant ces fonctions par d'autres fonctions a et b.

En posant, par suite, $F(p) = 1$, nous obtenons les surfaces X, Y, Z suivantes :

$$(38) \qquad X = a\alpha + \int \varphi(q)\frac{d\alpha}{dq}dq, \qquad Y = a\beta + \int \varphi(q)\frac{d\beta}{dq}dq, \qquad Z = b.$$

PROPRIÉTÉS.

1° *Les courbes correspondant à p et q constants seront planes;*

2° *Elles seront conjuguées;*

3° *Ce seront des lignes de déformation principales;*

4° *Les courbes* $q =$ const. *seront des lignes cylindriques.*

Ces quatre propriétés, comme propriétés angulaires, passent directement de la surface x, y, z aux surfaces parallèles X, Y, Z. Nous obtenons des déformations pour les dernières si nous remplaçons dans les équations (38) les fonctions α, β, b par les fonctions α, β, b que nous avons déterminées dans la déformation des surfaces x, y, z de l'équation (35).

EXEMPLE II. — L'affinité de parallélisme des surfaces

$$(33) \qquad x = a\alpha, \qquad y = a\beta, \qquad z = b$$

renferme, comme nous l'avons vu, seulement une nouvelle fonction $\varphi(q)$.

Le parallélisme des surfaces

$$(26) \qquad x = a + \alpha, \qquad y = b + \beta, \qquad z = c + \gamma$$

dont nous avons obtenu des déformations par les équations (30) et (32) ne renferme aucune nouvelle fonction, puisque les équations des surfaces parallèles X, Y, Z seront

$$(39) \qquad \begin{cases} X = \int f(p)\frac{da}{dp}dp + \int \varphi(q)\frac{d\alpha}{dq}dq, \\ Y = \int f(p)\frac{db}{dp}dp + \int \varphi(q)\frac{d\beta}{dq}dq, \\ Z = \int f(p)\frac{dc}{dp}dp + \int \varphi(q)\frac{d\gamma}{dq}dq, \end{cases}$$

d'où résulte que les fonctions arbitraires a, b, c, α, β, γ sont remplacées seulement par d'autres fonctions arbitraires, c'est-à-dire que les surfaces x, y, z sont déjà parallèles entre elles par rapport aux lignes de déformation.

Prenons un autre exemple de déformation sur une base simple obliquangle :

La surface

$$(40)\qquad x = \frac{\sinh cp}{\cosh p + \cos q}, \qquad y = \frac{\sin cq}{\cosh p + \cos q}, \qquad z = \frac{a \cosh cp + b \cos cq}{\cosh p + \cos q}$$

(a, b et c constants, $b^2 = 1 + a^2$) se déforme dans la forme x_1, y_1, z_1 suivante :

$$(41)\qquad x_1 = \frac{c \sinh p}{\cosh p + \cos q}, \qquad y_1 = \frac{c \sin q}{\cosh p + \cos q}, \qquad z_1 = \frac{b \cosh cp + a \cos cq}{\cosh p + \cos q}.$$

Les courbes $p = \text{const.}$ et $q = \text{const.}$ seront conjuguées, les éléments linéaires seront identiques; la déformation sera simple parce que selon ces courbes il n'existe qu'une seule déformation, et avec cela les constantes a et b s'échangent, $\sinh cp$ et $\sin cq$ se changent en $c \sinh p$ et $c \sin q$. Ces propositions résultent des propositions plus générales exposées dans la relation graphique; mais nous pouvons cependant nous assurer de leur exactitude par la différentiation.

D'après le théorème VII, toutes les surfaces X_1, Y_1, Z_1 parallèles à la surface x_1, y_1, z_1 doivent être des surfaces déformées des surfaces X, Y, Z parallèles à la surface x, y, z.

Pour obtenir l'équation de ces surfaces X, Y, Z et X_1, Y_1, Z_1, remarquons que les deux surfaces x, y, z et x_1, y_1, z_1 appartiennent aux surfaces de forme plus générale

$$(42)\qquad x = \frac{a + \alpha}{l + \lambda}, \qquad y = \frac{b + \beta}{l + \lambda}, \qquad z = \frac{c + \gamma}{l + \lambda}$$

où a, b, c et l sont des fonctions d'une variable p; α, β, γ et λ des fonctions d'une variable q, et déduisons pour elles les équations des surfaces X, Y, Z, parallèles par rapport aux courbes $p = \text{const.}$ et $q = \text{const.}$ Il sera démontré que ces courbes sont conjuguées, si nous démontrons *a posteriori* que les surfaces X, Y, Z existent.

Posons, dans ce but,

$$(43)\qquad \begin{cases} \mathrm{X} = \dfrac{a+\alpha}{l+\lambda}[\mathrm{F}(p) + \varphi(q)] - \displaystyle\int \frac{a'}{l'} \mathrm{F}'(p)\,dp - \int \frac{\alpha_1}{\lambda_1} \varphi'(q)\,dq, \\ \mathrm{Y} = \dfrac{b+\beta}{l+\lambda}[\mathrm{F}(p) + \varphi(q)] - \displaystyle\int \frac{b'}{l'} \mathrm{F}'(p)\,dp - \int \frac{\beta_1}{\lambda_1} \varphi'(q)\,dq, \\ \mathrm{Z} = \dfrac{c+\gamma}{l+\lambda}[\mathrm{F}(p) + \varphi(q)] - \displaystyle\int \frac{c'}{l'} \mathrm{F}'(p)\,dp - \int \frac{\gamma_1}{\lambda_1} \varphi'(q)\,dq \end{cases}$$

où $\frac{da}{dp}$, $\frac{d\alpha}{dq}$, ... sont désignés par a', α_1, ...; alors à l'aide de la différentiation nous obtiendrons

$$(44)\quad \left\{\begin{aligned}
dX = X'\,dp + X_1\,dq = {} & \left[F(p) + \varphi(q) - \frac{l+\lambda}{l'}F'(p)\right]\frac{\partial\left(\frac{a+\alpha}{l+\lambda}\right)}{\partial p}\,dp \\
& + \left[F(p) + \varphi(q) - \frac{l+\lambda}{\lambda_1}\varphi'(q)\right]\frac{\partial\left(\frac{a+\alpha}{l+\lambda}\right)}{\partial q}\,dq \\
= {} & \left[F(p) + \varphi(q) - \frac{l+\lambda}{l'}F'(p)\right]x'\,dp \\
& + \left[F(p) + \varphi(q) - \frac{l+\lambda}{\lambda_1}\varphi'(q)\right]x_1\,dq, \\
dY = Y'\,dp + Y_1\,dq = {} & \left[F(p) + \varphi(q) - \frac{l+\lambda}{l'}F'(p)\right]y'\,dp \\
& + \left[F(p) + \varphi(q) - \frac{l+\lambda}{\lambda_1}\varphi'(q)\right]y_1\,dq, \\
dZ = Z'\,dp + Z_1\,dq = {} & \left[F(p) + \varphi(q) - \frac{l+\lambda}{l'}F'(p)\right]z'\,dp \\
& + \left[F(p) + \varphi(q) - \frac{l+\lambda}{\lambda_1}\varphi'(q)\right]z_1\,dq.
\end{aligned}\right.$$

De là nous concluons que

$$\frac{X'}{x'} = \frac{Y'}{y'} = \frac{Z'}{z'},$$

$$\frac{X_1}{x_1} = \frac{Y_1}{y_1} = \frac{Z_1}{z_1},$$

par conséquent les surfaces X, Y, Z sont parallèles aux surfaces x, y, z par rapport aux courbes $p = \text{const.}$ et $q = \text{const.}$, ce qu'il fallait démontrer.

En posant, par suite, dans les équations (43),

$$\begin{aligned}
&a = \sinh cp, && b = 0, && c = a\cosh cp, && l = \cosh p, \\
&\alpha = 0, && \beta = \sin cq, && \gamma = b\cos cq, && \lambda = \cos q,
\end{aligned}$$

nous obtenons une classe de surfaces X, Y, Z parallèles à la surface x, y, z des équations (40) et renfermant deux fonctions arbitraires $\varphi(q)$ et $F(p)$, fonctions de parallélisme.

En posant [1]

$$a = c \sinh p, \qquad b = 0, \qquad c = b \cosh cp, \qquad l = \cosh p,$$

$$\alpha = 0, \qquad \beta = c \sin q, \qquad \gamma = a \cos cq, \qquad \lambda = \cos q,$$

nous obtenons une classe de surfaces X_1, Y_1, Z_1 parallèles à la surface x_1, y_1, z_1 des équations (41).

Les surfaces X, Y, Z seront des surfaces déformées des surfaces X_1, Y_1, Z_1, suivant les lignes de déformation simples $p = \text{const.}$, $q = \text{const.}$

(1) En suivant l'exemple donné par M. Mlodziejowski dans sa Notice sur Peterson (*voir* p. 470-471 du Tome V de ces *Annales*), on a corrigé ici et dans les équations (41) des fautes d'impression qui paraissent ressortir des quatre lignes qui suivent les équations (41).

(*Note du traducteur*.)