SUR UN PROBLÈME

RELATIF A LA

THÉORIE DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

DU SECOND ORDRE

(SECOND MÉMOIRE),

PAR M. É. GOURSAT.

Ce Mémoire est consacré à l'étude du même problème que le précédent ([1]). Mais, au lieu de supposer la fonction $f(x, y, z, p, q)$ et les données analytiques, je suppose les variables essentiellement réelles et les conditions de continuité réduites au minimum. La marche suivie offre un parallélisme presque complet avec la marche suivie dans le premier travail; les méthodes seules sont différentes, en particulier celle qui est employée pour résoudre les équations fonctionnelles que l'on rencontre. Il est clair que, dans ce nouveau problème, il ne saurait être question de l'emploi des séries entières.

La nouvelle méthode s'appliquerait aussi sans difficulté au cas déjà traité des intégrales analytiques.

1. Je rappellerai d'abord les résultats obtenus par M. Picard ([2]) pour deux problèmes spéciaux, que l'on peut considérer comme deux cas particuliers importants du problème général dont je m'occupe.

Étant donnée une équation

$$s = f(x, y, z, p, q),$$

il existe, sous certaines conditions de continuité inutiles à rappeler dans ce résumé, une intégrale qui est continue, ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre, lorsque x varie de zéro à $\alpha (\alpha > 0)$, et y de zéro à $\beta (\beta > 0)$, et qui

([1]) *Voir* Tome V de ce Journal (2e Série, p. 405-436).

([2]) Note du Tome IV de la *Théorie générale des surfaces* de M. Darboux.

se réduit pour $y=0$ à une fonction déterminée $\varphi(x)$ de x, et pour $x=0$ à une fonction déterminée $\psi(y)$ de y.

Dans le cas particulier des équations linéaires

$$s = ap + bq + cz,$$

on peut énoncer le résultat sous une forme plus précise. Si les fonctions a, b, c sont continues dans le rectangle R obtenu en faisant varier x de 0 à l, et y de 0 à m, et si les fonctions données $\varphi(x)$, $\psi(y)$ sont continues et admettent des dérivées partielles du premier ordre continues lorsque x varie de 0 à l et y de 0 à m, l'intégrale répondant aux conditions initiales est elle-même continue dans le rectangle R.

La méthode employée par M. Picard permet aussi, comme il l'indique rapidement, de déterminer une intégrale d'une équation linéaire, se réduisant, pour $y=0$, à une fonction donnée $f(x)$ et, pour $y=x$, à une autre fonction $\varphi(x)$. Il n'y aurait aucune difficulté à étendre la méthode au cas d'une équation de la forme plus générale $s=f(x, y, z, p, q)$. On pourrait aussi, à l'aide d'une transformation que nous emploierons plus loin (n° 10), traiter le même problème lorsque la droite $y=x$ est remplacée par une courbe issue de l'origine, en ramenant ce problème au problème de M. Picard.

Il ne reste donc à examiner, dans le même ordre d'idées, que le cas où l'on se donne les valeurs de l'intégrale le long de deux courbes issues d'un même point, aucune de ces courbes n'étant une caractéristique.

2. Nous traiterons d'abord un certain nombre de problèmes préliminaires :

Problème I. — *Soit $\pi(x)$ une fonction définie dans l'intervalle $(0, a)$, où a est positif. Déterminer une autre fonction $\varphi(x)$, définie dans le même intervalle, et telle que l'on ait*

$$(1) \qquad \varphi(\alpha x) - \varphi(x) = \pi(x) \qquad (0 < x < a),$$

α étant une constante positive différente de l'unité.

Nous pouvons supposer $\alpha > 1$; en effet, en changeant x en $\frac{x}{\alpha}$ dans la relation précédente, elle devient

$$\varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right) - \varphi(x) = -\pi\left(\frac{x}{\alpha}\right),$$

et nous obtenons une relation de même forme, où α est remplacé par $\frac{1}{\alpha}$, et $\pi(x)$ par $-\pi\left(\frac{x}{\alpha}\right)$. Nous supposerons constamment dans la suite α supérieur à un.

Si la fonction cherchée $\varphi(x)$ doit être continue pour $x=0$, ce que nous admettons aussi, $\varphi(\alpha x)-\varphi(x)$ tend vers zéro avec x; la fonction $\pi(x)$ doit donc tendre vers zéro lorsque x tend vers zéro pour que le problème soit possible. Cette condition étant vérifiée, on déduit de la relation (1), en y remplaçant successivement x par $\frac{x}{\alpha}, \frac{x}{\alpha^2}, \ldots, \frac{x}{\alpha^n}, \ldots$,

$$\begin{aligned}
&\varphi(x) \quad -\varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)=\pi\left(\frac{x}{\alpha}\right),\\
&\varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right) -\varphi\left(\frac{x}{\alpha^2}\right)=\pi\left(\frac{x}{\alpha^2}\right),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\varphi\left(\frac{x}{\alpha^{n-1}}\right)-\varphi\left(\frac{x}{\alpha^n}\right)=\pi\left(\frac{x}{\alpha^n}\right),
\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\varphi(x)=\varphi\left(\frac{x}{\alpha^n}\right)+\pi\left(\frac{x}{\alpha}\right)+\pi\left(\frac{x}{\alpha^2}\right)+\ldots+\pi\left(\frac{x}{\alpha^n}\right). \tag{2}$$

Lorsque le nombre n croît indéfiniment, $\frac{x}{\alpha^n}$ tend vers zéro et $\varphi\left(\frac{x}{\alpha^n}\right)$ a pour limite $\varphi(0)$. Pour qu'il existe une fonction $\varphi(x)$ répondant à la question, il faut donc que la série dont le terme général est $\pi\left(\frac{x}{\alpha^n}\right)$ soit convergente, et, lorsqu'il en est ainsi, la fonction $\varphi(x)$ a pour expression

$$\varphi(x)=\varphi(0)+\pi\left(\frac{x}{\alpha}\right)+\pi\left(\frac{x}{\alpha^2}\right)+\ldots+\pi\left(\frac{x}{\alpha^n}\right)+\ldots. \tag{3}$$

On voit que cette fonction $\varphi(x)$ est complètement définie, à une constante arbitraire près $\varphi(0)$, comme il était évident *a priori*, et l'on vérifie immédiatement sur la formule (3) que la fonction $\varphi(x)$ satisfait bien à la relation (1) dont on est parti.

Si la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\pi\left(\frac{x}{\alpha^n}\right) \tag{4}$$

est convergente dans un intervalle $(0, b)$, où $0<b<a$, elle sera convergente dans tout l'intervalle $(0, a)$, car, à partir d'une valeur de n assez grande, $\frac{x}{\alpha^n}, \frac{x}{\alpha^{n+1}}, \ldots$ seront inférieurs à b. Tout dépend donc de la façon dont la fonction $\pi(x)$ tend vers zéro avec x. S'il existe une puissance positive de x, soit x^μ, telle que le rapport $\frac{\pi(x)}{x^\mu}$ tende vers une limite, la série est convergente. Plus

généralement, supposons qu'il existe trois nombres positifs μ, ε, K, tels que l'on ait

$$|\pi(x)| < \mathrm{K}x^{\mu} \quad \text{pour} \quad 0 < x < \varepsilon.$$

A partir d'une valeur de n assez grande, $\frac{x}{\alpha^n}$ sera inférieur à ε, et l'on aura

$$\left|\pi\left(\frac{x}{\alpha^n}\right)\right| < \mathrm{K}\frac{x^{\mu}}{\alpha^{n\mu}} < \frac{\mathrm{K}a^{\mu}}{\alpha^{n\mu}},$$

les termes de la série (4) sont donc inférieurs en valeur absolue aux termes d'une progression géométrique dont la raison $\alpha^{-\mu}$ est inférieure à l'unité.

Le même raisonnement prouve que la série est uniformément convergente dans l'intervalle $(0, a)$. Si la fonction $\pi(x)$ est continue dans cet intervalle, il en sera donc de même de la fonction $\varphi(x)$.

Remarques. — 1° Lorsque la série (4) est convergente, la fonction $\varphi(x)$ est définie dans un intervalle $(0, a\alpha)$, plus grand que l'intervalle $(0, a)$, mais la relation (1) n'est vérifiée que dans l'intervalle $(0, a)$, si la fonction $\pi(x)$ n'est définie que pour les valeurs de x inférieures à a.

2° Il est facile de former des exemples où la fonction $\pi(x)$ tend vers zéro avec x, sans que la série (4) soit convergente. Soit

$$\pi(x) = \frac{-1}{\log x} \qquad (a < 1),$$

on a

$$\pi\left(\frac{x}{\alpha^n}\right) = \frac{-1}{\log\left(\frac{x}{\alpha^n}\right)} = \frac{1}{n\log\alpha - \log x},$$

et le produit $n\pi\left(\frac{x}{\alpha^n}\right)$ a une limite positive $\frac{1}{\log\alpha}$: la série (4) est donc divergente.

3° Le problème que nous venons de résoudre n'offre aucune difficulté si l'on suppose la constante α négative.

Soit $\alpha = -\beta$, β étant positif. On peut choisir arbitrairement la fonction $\varphi(x)$ dans l'intervalle $(0, a)$ et la relation

$$\varphi(-\beta x) - \varphi(x) = \pi(x)$$

fait connaître le prolongement de cette fonction dans l'intervalle $(-a\beta, 0)$. Le problème est donc tout à fait indéterminé dans ce cas.

3. Nous allons supposer maintenant que la fonction $\pi(x)$ est continue et admet une dérivée $\pi'(x)$ continue dans l'intervalle $(0, a)$, et, en outre, que cette dé-

rivée $\pi'(x)$ satisfait à la condition de Lipschitz, c'est-à-dire qu'il existe une constante positive K_1 telle que l'on ait l'inégalité

$$|\pi'(x)| < K_1 x \tag{5}$$

pour toute valeur de x comprise entre o et a. Si K est la valeur maximum de $\pi'(x)$ dans cet intervalle, on aura aussi, d'après la formule des accroissements finis,

$$|\pi(x)| < Kx \tag{6}$$

pour toute valeur de x entre o et a.

Prenons $\varphi(0) = 0$. La série qui représente $\varphi(x)$ et celle que l'on obtient en prenant les dérivées

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^n} \pi'\left(\frac{x}{\alpha^n}\right)$$

sont uniformément convergentes dans l'intervalle $(0, a)$. La remarque a déjà été faite pour la première; quant à la seconde, remarquons que l'on a

$$\left|\frac{1}{\alpha^n} \pi'\left(\frac{x}{\alpha^n}\right)\right| < \frac{K_1 x}{\alpha^{2n}} < \frac{K_1 a}{\alpha^{2n}},$$

et $\dfrac{K_1 a}{\alpha^{2n}}$ est le terme général d'une progression géométrique décroissante. La fonction $\varphi(x)$ admet donc aussi une dérivée $\varphi'(x)$ continue dans l'intervalle $(0, a)$, et nous pouvons écrire

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \pi\left(\frac{x}{\alpha^n}\right), \qquad \varphi'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^n} \pi'\left(\frac{x}{\alpha^n}\right).$$

Il est facile, d'après ces formules, d'avoir des limites supérieures pour les valeurs absolues de $\varphi(x)$ et de $\varphi'(x)$. Nous avons, en effet, d'après les inégalités (5) et (6),

$$|\varphi(x)| < K x \left\{ \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} + \ldots + \frac{1}{\alpha^n} + \ldots \right\} = \frac{Kx}{\alpha - 1}, \tag{7}$$

$$|\varphi'(x)| < K_1 x \left\{ \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^4} + \ldots + \frac{1}{\alpha^{2n}} + \ldots \right\} = \frac{K_1 x}{\alpha^2 - 1}. \tag{8}$$

4. Problème II. — *Soit $f(x, y)$ une fonction continue dans le rectangle* R *défini par les inégalités*

$$0 \leqq x \leqq a, \qquad 0 \leqq y \leqq a\alpha;$$

déterminer une intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = f(x, y), \tag{9}$$

continue dans ce rectangle, et s'annulant le long des segments des droites $y = x$ et $y = \alpha x$ ($\alpha > 1$), situés dans ce rectangle.

L'intégrale générale de l'équation (9) est

$$z = \mathrm{F}(x, y) + \varphi(x) + \psi(y),$$

$\varphi(x)$ et $\psi(y)$ étant deux fonctions arbitraires, et $\mathrm{F}(x, y)$ étant l'intégrale double

$$\mathrm{F}(x, y) = \int_0^x du \int_0^y f(u, v)\, dv \qquad (0 \leqq x \leqq a,\ 0 \leqq y \leqq a\alpha).$$

Les deux fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(y)$ sont déterminées par les deux conditions

$$\left\{\begin{aligned} &\mathrm{F}(x, x) + \varphi(x) + \psi(x) = 0, \\ &\mathrm{F}(x, \alpha x) + \varphi(x) + \psi(\alpha x) = 0, \end{aligned}\right. \tag{10}$$

d'où l'on tire

$$\psi(\alpha x) - \psi(x) = \mathrm{F}(x, x) - \mathrm{F}(x, \alpha x) = \pi(x). \tag{11}$$

La fonction $\pi(x)$ qui est au second membre est définie dans l'intervalle $(0, a)$. On en déduira donc pour $\psi(x)$ une fonction continue définie dans l'intervalle $(0, a\alpha)$. Nous avons ensuite

$$\varphi(x) = -\psi(x) - \mathrm{F}(x, x),$$

égalité qui détermine la seconde fonction $\varphi(x)$; cette fonction $\varphi(x)$ est continue dans l'intervalle $(0, a)$. Les fonctions φ et ψ étant ainsi obtenues, l'intégrale

$$z = \mathrm{F}(x, y) + \varphi(x) + \psi(y)$$

est continue dans le rectangle R, et satisfait à l'énoncé.

Il est facile d'avoir une limite supérieure de la valeur absolue de cette intégrale. Supposons que dans le rectangle R la valeur absolue de $f(x, y)$ reste inférieure à un nombre positif M; la valeur absolue de $\mathrm{F}(x, y)$ est inférieure à $\mathrm{M}xy$, et les dérivées partielles

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x} = \int_0^y f(x, v)\, dv, \qquad \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y} = \int_0^x f(u, y)\, du$$

sont respectivement inférieures en valeur absolue à My et à Mx,

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right| < My, \quad \left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| < Mx.$$

D'ailleurs on peut écrire

$$\pi(x) = (1 - \alpha)x F'_y(x, \zeta x),$$

ζ étant compris entre 1 et α; on a donc

$$|\pi(x)| < M(\alpha - 1)x^2.$$

Si nous supposons $\psi(0) = 0$, nous avons

$$\psi(x) = \pi\left(\frac{x}{\alpha}\right) + \pi\left(\frac{x}{\alpha^2}\right) + \ldots + \pi\left(\frac{x}{\alpha^n}\right) + \ldots,$$

et, par suite,

$$|\psi(x)| < M(\alpha - 1)x^2 \left\{\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^4} + \ldots + \frac{1}{\alpha^{2n}} + \ldots\right\}$$

ou

$$(12) \qquad |\psi(x)| < \frac{Mx^2}{\alpha + 1}.$$

Pour trouver une limite supérieure de $|\varphi(x)|$, remarquons que l'on déduit des relations (10), en changeant dans la première de ces relations x en αx, et en retranchant membre à membre,

$$\varphi(\alpha x) - \varphi(x) = F(x, \alpha x) - F(\alpha x, \alpha x) = \pi_1(x),$$

relation qui permet de définir la fonction $\varphi(x)$ dans l'intervalle $(0, a)$, car le second membre $\pi_1(x)$ est défini dans l'intervalle $\left(0, \frac{a}{\alpha}\right)$. On a, dans cet intervalle,

$$\pi_1(x) = (1 - \alpha)x F'_x(\xi x, \alpha x),$$

ξ étant compris entre 1 et α, et, par suite,

$$|\pi_1(x)| < M\alpha(\alpha - 1)x^2.$$

La fonction $\varphi(x)$ est elle-même représentée par la série convergente

$$\varphi(x) = \pi_1\left(\frac{x}{\alpha}\right) + \pi_1\left(\frac{x}{\alpha^2}\right) + \ldots + \pi_1\left(\frac{x}{\alpha^n}\right) + \ldots$$

et l'on en conclut comme tout à l'heure que, dans l'intervalle $(0, a)$, on a

$$(12') \qquad |\varphi(x)| < \frac{M\alpha x^2}{\alpha+1}.$$

Dans le rectangle R, on a donc

$$(13) \qquad |z| < Mxy + \frac{M\alpha x^2}{\alpha+1} + \frac{M y^2}{\alpha+1}.$$

Cette fonction z admet elle-même des dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, continues dans le même domaine. On a, en effet,

$$\pi'(x) = F_1(x, x) + F_2(x, x) - F_1(x, \alpha x) - \alpha F_2(x, \alpha x),$$

en posant

$$\frac{\partial F}{\partial x} = F_1(x, y), \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = F_2(x, y),$$

ce que l'on peut encore écrire

$$\begin{aligned} \pi'(x) &= F_1(x, x) - F_1(x, \alpha x) + F_2(x, x) - \alpha F_2(x, \alpha x) \\ &= (1-\alpha)x f(x, \eta x) + F_2(x, x) - \alpha F_2(x, \alpha x), \end{aligned}$$

η étant un nombre compris entre 1 et α. On aura donc, dans l'intervalle $(0, a)$,

$$|\pi'(x)| < M(\alpha-1)x + M(1+\alpha)x = 2M\alpha x;$$

on en conclut que la série des dérivées

$$\frac{1}{\alpha}\pi'\left(\frac{x}{\alpha}\right) + \frac{1}{\alpha^2}\pi'\left(\frac{x}{\alpha^2}\right) + \ldots + \frac{1}{\alpha^n}\pi'\left(\frac{x}{\alpha^n}\right) + \ldots$$

est uniformément convergente dans l'intervalle $(0, a\alpha)$ et que la somme de cette série est plus petite en valeur absolue que la somme de la série

$$2M\alpha x\left\{\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^4} + \ldots + \frac{1}{\alpha^{2n}} + \ldots\right\} = \frac{2M\alpha x}{\alpha^2-1}.$$

La fonction $\psi(y)$ admet donc une dérivée continue dans l'intervalle $(0, a\alpha)$ dont la valeur absolue vérifie la condition

$$(14) \qquad |\psi'(y)| < \frac{2M\alpha y}{\alpha^2-1}.$$

On a de même

$$\begin{aligned} \pi_1'(x) &= F_1(x, \alpha x) + \alpha F_2(x, \alpha x) - \alpha F_1(\alpha x, \alpha x) - \alpha F_2(\alpha x, \alpha x) \\ &= \alpha[F_2(x, \alpha x) - F_2(\alpha x, \alpha x)] + F_1(x, \alpha x) - \alpha F_1(\alpha x, \alpha x), \end{aligned}$$

et l'on voit comme tout à l'heure que la valeur absolue de $\pi'_1(x)$ dans l'intervalle $\left(0, \frac{a}{\alpha}\right)$ est inférieure à

$$\alpha(\alpha - 1)\mathrm{M}x + \mathrm{M}\alpha x + \mathrm{M}\alpha^2 x = 2\mathrm{M}\alpha^2 x.$$

On en déduit ensuite que la fonction $\varphi(x)$ admet une dérivée $\varphi'(x)$ continue dans l'intervalle $(0, a)$ dont la valeur absolue satisfait à la condition

$$(14') \qquad |\varphi'(x)| < \frac{2\mathrm{M}\alpha^2 x}{\alpha^2 - 1}.$$

Il résulte de toutes ces inégalités que, dans le rectangle R, les valeurs absolues des dérivées $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ ont les limites suivantes :

$$(15) \qquad \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| < \mathrm{M}y + \frac{2\mathrm{M}\alpha^2 x}{\alpha^2 - 1}, \qquad \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| < \mathrm{M}x + \frac{2\mathrm{M}\alpha y}{\alpha^2 - 1}.$$

Dans un rectangle R', homothétique au premier par rapport à l'origine et de dimensions r et $r\alpha\,(0 < r \leqq a)$, on aura les inégalités

$$(16) \qquad |z| < \mathrm{AM}r^2, \qquad |p| < \mathrm{BM}r, \qquad |q| < \mathrm{CM}r,$$

A, B, C étant trois nombres positifs qui ne dépendent que de α,

$$(17) \qquad \mathrm{A} = 2\alpha, \qquad \mathrm{B} = \alpha + \frac{2\alpha^2}{\alpha^2 - 1}, \qquad \mathrm{C} = 1 + \frac{2\alpha^2}{\alpha^2 - 1}.$$

5. Lorsque la fonction $f(x, y)$ satisfait à la condition de Lipschitz, on peut trouver des expressions différentes pour les limites supérieures de $|\varphi'(x)|$ et de $|\psi'(y)|$, ne contenant pas $\alpha - 1$ en dénominateur. Supposons, en effet, qu'il existe deux nombres positifs H et K tels que l'on ait

$$|f(x', y') - f(x, y)| < \mathrm{H}|x' - x| + \mathrm{K}|y' - y|,$$

(x, y) et (x', y') étant les coordonnées de deux points quelconques du rectangle R. Nous pouvons écrire comme il suit la dérivée $\pi'(x)$

$$\pi'(x) = \mathrm{F}_1(x, x) - \mathrm{F}_1(x, \alpha x) + \mathrm{F}_2(x, x) - \mathrm{F}_2(x, \alpha x) + (1 - \alpha)\,\mathrm{F}_2(x, \alpha x)$$

on a, comme plus haut,

$$|\mathrm{F}_1(x, x) - \mathrm{F}_1(x, \alpha x)| < \mathrm{M}(\alpha - 1)x$$

et

$$|\mathrm{F}_2(x, \alpha x)| < \mathrm{M}x.$$

La différence $F_2(x, \alpha x) - F_2(x, x)$ est égale à

$$\int_0^x [f(u, x + \alpha x) - f(u, x)]\, du,$$

et la fonction sous le signe $\int$ est, d'après l'hypothèse faite, inférieure en valeur absolue en $K(\alpha - 1)x$; la valeur absolue de l'intégrale est donc elle-même inférieure à $K(\alpha - 1)x^2$, et, par suite, l'on a

$$|\pi'(x)| < 2M(\alpha - 1)x + K(\alpha - 1)x^2.$$

On en conclut, en reprenant les calculs du paragraphe précédent, les inégalités

$$|\psi'(y)| < \frac{2My}{\alpha + 1} + \frac{Ky^2}{\alpha^2 + \alpha + 1}, \qquad \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| < Mx + \frac{2My}{\alpha + 1} + \frac{Ky^2}{\alpha^2 + \alpha + 1}.$$

En partant de l'expression de $\pi'_1(x)$, on établira par une marche toute pareille les inégalités

$$|\pi'_1(x)| < 2M\alpha(\alpha - 1)x + H(\alpha - 1)\alpha x^2,$$

$$|\varphi'(x)| < \frac{2M\alpha x}{\alpha + 1} + \frac{H\alpha x^2}{\alpha^2 + \alpha + 1},$$

$$\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| < My + \frac{2M\alpha x}{\alpha + 1} + \frac{H\alpha x^2}{\alpha^2 + \alpha + 1}.$$

6. Nous arrivons maintenant à l'objet essentiel de ce travail, qui est la résolution du problème suivant :

La fonction $f(x, y, z, p, q)$ étant continue dans le voisinage des valeurs $x = y = z = p = q = 0$, trouver une intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right), \tag{18}$$

continue dans le voisinage de l'origine, et qui soit nulle sur deux segments de droites issues de l'origine.

Pour préciser entièrement les conditions du problème, nous supposerons que la fonction $f(x, y, z, p, q)$ est continue pour tous les systèmes de valeurs des variables satisfaisant aux conditions

$$0 \leqq x \leqq a, \qquad 0 \leqq y \leqq a\alpha, \qquad |z| \leqq Z, \qquad |p| \leqq P, \qquad |q| \leqq Q, \tag{19}$$

et que sa valeur absolue reste inférieure à un nombre positif déterminé M, dans ce domaine. Nous supposons de plus qu'il existe trois nombres positifs H, K, L, tels que l'on ait

$$(20)\qquad |f(x, y, z', p', q') - f(x, y, z, p, q)| < \mathrm{H}|z' - z| + \mathrm{K}|p' - p| + \mathrm{L}|q' - q|,$$

x, y, z, p, q et x, y, z', p', q' étant deux systèmes quelconques de valeurs des variables satisfaisant aux inégalités (19). On se propose de déterminer une intégrale continue, ainsi que ses dérivées $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, dans un rectangle situé dans l'angle $x\mathrm{O}y$ et défini par les inégalités

$$0 \leqq x \leqq r, \qquad 0 \leqq y \leqq r\alpha,$$

r étant un nombre positif inconnu; cette intégrale doit être nulle le long des deux segments de droite situés dans ce rectangle, appartenant aux droites $y = x$, $y = \alpha x$ (α désignant toujours un nombre positif supérieur à un).

La méthode des approximations successives conduit à former une suite de fonctions

$$(21)\qquad z_0, \quad z_1, \quad \ldots, \quad z_{n-1}, \quad z_n, \quad \ldots$$

se déduisant l'une de l'autre par le procédé suivant : on pose $z_0 = 0$, et l'on prend pour z_n l'intégrale (que nous avons appris à former aux paragraphes précédents), de l'équation

$$\frac{\partial^2 z_n}{\partial x\, \partial y} = f\left(x, y, z_{n-1}, \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x}, \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y}\right),$$

qui est nulle le long des deux segments de droite considérés. Montrons d'abord que, si le nombre positif r est assez petit, toutes ces fonctions $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ sont continues dans le rectangle R' de dimensions r et αr. Supposons, en effet, que dans ce rectangle on ait

$$|z_{n-1}| < \mathrm{Z}, \qquad |p_{n-1}| < \mathrm{P}, \qquad |q_{n-1}| < \mathrm{Q};$$

alors la valeur absolue de

$$f(x, y, z_{n-1}, p_{n-1}, q_{n-1})$$

est inférieure à M dans R'. La fonction z_n est donc continue ainsi que ses dérivées $\frac{\partial z_n}{\partial x}$, $\frac{\partial z_n}{\partial y}$ dans le même rectangle, et l'on a dans ce domaine

$$|z_n| < \mathrm{MA}r^2, \qquad |p_n| < \mathrm{MB}r, \qquad |q_n| < \mathrm{MC}r,$$

A, B, C étant trois nombres positifs *qui ne dépendent que de* α. Si l'on choisit r assez petit pour que l'on ait

$$(22)\qquad \mathrm{MA}r^2 \leqq \mathrm{Z}, \qquad \mathrm{MB}r \leqq \mathrm{P}, \qquad \mathrm{MC}r \leqq \mathrm{Q},$$

la fonction z_n satisfera aux mêmes conditions que z_{n-1} dans le rectangle R'. Comme la première fonction z_0 est nulle, on voit que toutes les fonctions z_i de la suite (21) sont continues ainsi que leurs dérivées partielles $\frac{\partial z_i}{\partial x}$, $\frac{\partial z_i}{\partial y}$, dans le rectangle R', si le nombre r satisfait aux inégalités (22).

Pour savoir si la fonction z_n tend vers une limite lorsque le nombre n augmente indéfiniment, il suffit de rechercher si la série

$$z_1 + (z_2 - z_1) + \ldots + (z_n - z_{n-1}) + \ldots \tag{23}$$

est convergente. Or, nous avons, d'après la façon dont les fonctions z_n ont été définies,

$$\frac{\partial^2(z_n - z_{n-1})}{\partial x\, \partial y} = f(x, y, z_{n-1}, p_{n-1}, q_{n-1}) - f(x, y, z_{n-2}, p_{n-2}, q_{n-2}), \tag{24}$$

et la différence $z_n - z_{n-1}$ est nulle le long des deux portions de droites $y = x$, $y = \alpha x$, situées dans le rectangle R'. Nous avons, d'après l'inégalité (20),

$$\begin{gathered} |f(x, y, z_{n-1}, p_{n-1}, q_{n-1}) - f(x, y, z_{n-2}, p_{n-2}, q_{n-2})| \\ < \mathrm{H}|z_{n-1} - z_{n-2}| + \mathrm{K}|p_{n-1} - p_{n-2}| + \mathrm{L}|q_{n-1} - q_{n-2}|; \end{gathered}$$

si dans le rectangle R' on a constamment

$$|z_{n-1} - z_{n-2}| < \mathrm{T}, \qquad |p_{n-1} - p_{n-2}| < \mathrm{T}, \qquad |q_{n-1} - q_{n-2}| < \mathrm{T}, \tag{25}$$

le second membre de l'équation (24) reste inférieur à $(\mathrm{H}+\mathrm{K}+\mathrm{L})\mathrm{T}$ et, d'après les résultats établis plus haut, on aura aussi, dans le même rectangle R',

$$\left\{ \begin{aligned} |z_n \quad - z_{n-1}| &< \mathrm{A}(\mathrm{H}+\mathrm{K}+\mathrm{L})\mathrm{T}r^2, \\ |p_{n-1} - p_{n-2}| &< \mathrm{B}(\mathrm{H}+\mathrm{K}+\mathrm{L})\mathrm{T}r, \\ |q_{n-1} - q_{n-2}| &< \mathrm{C}(\mathrm{H}+\mathrm{K}+\mathrm{L})\mathrm{T}r, \end{aligned} \right. \tag{26}$$

A, B, C étant les nombres positifs donnés par les formules (17), qui ne dépendent que de α.

Supposons que l'on ait choisi r assez petit pour vérifier, en même temps que les inégalités (22), les conditions nouvelles

$$\mathrm{A}(\mathrm{H}+\mathrm{K}+\mathrm{L})r^2 < \lambda, \qquad \mathrm{B}(\mathrm{H}+\mathrm{K}+\mathrm{L})r < \lambda, \qquad \mathrm{C}(\mathrm{H}+\mathrm{K}+\mathrm{L})r < \lambda, \tag{27}$$

λ étant un nombre positif inférieur à l'unité; le nombre r étant ainsi choisi, nous aurons dans le rectangle R', de côtés r et $r\alpha$, les nouvelles inégalités

$$|z_n - z_{n-1}| < \lambda\mathrm{T}, \qquad |p_n - p_{n-1}| < \lambda\mathrm{T}, \qquad |q_n - q_{n-1}| < \lambda\mathrm{T}, \tag{28}$$

de même forme que les inégalités (25) où T est remplacé par λT.

Cela étant, soit $\mathfrak{M}$ le plus grand des trois nombres Z, P, Q. On a d'abord, dans le domaine considéré,

$$|z_1 - z_0| < \mathfrak{M}, \qquad |p_1 - p_0| < \mathfrak{M}, \qquad |q_1 - q_0| < \mathfrak{M},$$

puis

$$|z_2 - z_1| < \mathfrak{M}\lambda, \qquad |p_2 - p_1| < \mathfrak{M}\lambda, \qquad |q_2 - q_1| < \mathfrak{M}\lambda,$$

et d'une manière générale

$$|z_n - z_{n-1}| < \mathfrak{M}\lambda^{n-1}, \qquad |p_n - p_{n-1}| < \mathfrak{M}\lambda^{n-1}, \qquad |q_n - q_{n-1}| < \mathfrak{M}\lambda^{n-1}.$$

Les trois séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(z_n - z_{n-1}), \quad \sum_{n=1}^{+\infty}(p_n - p_{n-1}), \quad \sum_{n=1}^{+\infty}(q_n - q_{n-1})$$

sont donc uniformément convergentes dans le rectangle R'; $\omega(x, y)$ étant la somme de la première, les sommes des deux autres sont respectivement $\frac{\partial\omega}{\partial x}$ et $\frac{\partial\omega}{\partial y}$. En d'autres termes, lorsque le nombre n augmente indéfiniment, les trois fonctions z_n, $\frac{\partial z_n}{\partial x}$, $\frac{\partial z_n}{\partial y}$ tendent respectivement vers $\omega(x, y)$, $\frac{\partial\omega}{\partial x}$, $\frac{\partial\omega}{\partial y}$. La démonstration prouve aussi que les dérivées $\frac{\partial\omega}{\partial x}$, $\frac{\partial\omega}{\partial y}$ sont continues dans le rectangle R'.

La série

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\partial^2(z_n - z_{n-1})}{\partial x\,\partial y}$$

est aussi uniformément convergente. Nous avons, en effet, d'après la façon dont on a choisi r,

$$\left|\frac{\partial^2(z_n - z_{n-1})}{\partial x\,\partial y}\right| < (\mathrm{H} + \mathrm{K} + \mathrm{L})\mathfrak{M}\lambda^{n-2};$$

il s'ensuit que $\frac{\partial^2 z_n}{\partial x\,\partial y}$ a aussi pour limite la dérivée $\frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial y}$ lorsque n croît indéfiniment. Cela étant, imaginons que dans la relation

$$\frac{\partial^2 z_n}{\partial x\,\partial y} = f\left(x, y, z_{n-1}, \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x}, \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y}\right)$$

le nombre n augmente indéfiniment; la fonction f étant continue, il vient à la limite

(29) $$\frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial y} = f\left(x, y, \omega, \frac{\partial\omega}{\partial x}, \frac{\partial\omega}{\partial y}\right).$$

D'ailleurs, il est clair que la fonction $\omega(x, y)$ est nulle le long des droites $y = x$ et $y = \alpha x$, dans le rectangle R'. Cette fonction $\omega(x, y)$ est donc une intégrale de l'équation proposée, continue dans le rectangle R', et satisfaisant à toutes les conditions de l'énoncé.

7. Il n'existe pas d'autre intégrale que celle-là satisfaisant aux mêmes conditions. Soit, en effet, $u(x, y)$ une intégrale de l'équation (18), continue ainsi que ses dérivées partielles dans une portion de l'angle xOy, voisine de l'origine, limitée par les axes eux-mêmes, et nulle le long des droites $y = x$ et $y = \alpha x$. Choisissons un nombre $r' \leqq r$ assez petit pour que les fonctions $u(x, y)$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ soient continues dans le rectangle R'' de dimensions r', $\alpha r'$, et que l'on ait dans ce rectangle

$$|u| < \mathrm{Z}, \qquad \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| < \mathrm{P}, \qquad \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| < \mathrm{Q},$$

ce qui est toujours possible, puisque les trois fonctions $u(x, y)$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ doivent être nulles à l'origine. En partant de la relation

$$\frac{\partial^2(u - z_n)}{\partial x\, \partial y} = f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) - f(x, y, z_{n-1}, p_{n-1}, q_{n-1}),$$

et en raisonnant comme au paragraphe précédent, on en conclut de proche en proche les inégalités

$$|u - z_n| < \mathfrak{M}\lambda^n, \qquad \left|\frac{\partial u}{\partial x} - p_n\right| < \mathfrak{M}\lambda^n, \qquad \left|\frac{\partial u}{\partial y} - q_n\right| \mathfrak{M}\lambda^n;$$

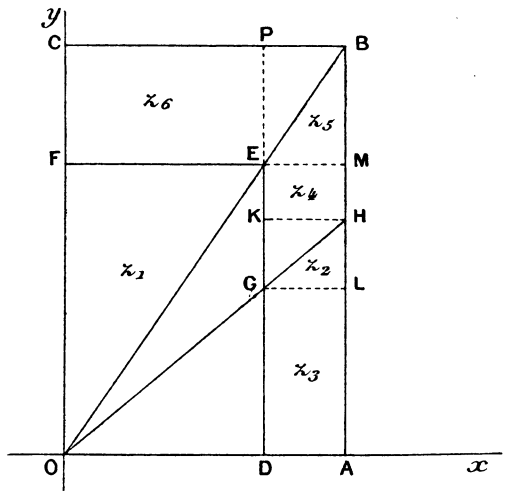
la différence $u - z_n$ tend donc vers zéro lorsque n augmente indéfiniment, et la fonction $u(x, y)$ est identique à $\omega(x, y)$ dans le rectangle R''.

La limite que nous avons obtenue pour le nombre r est, en général, beaucoup trop faible, et l'intégrale cherchée existe dans un domaine plus étendu. Un cas particulier intéressant est celui où la fonction $f(x, y, z, p, q)$ est continue pour tous les systèmes de valeurs de z, p, q, pourvu que x et y restent compris respectivement entre o et a et o et $a\alpha$; on n'a pas alors à se préoccuper des conditions (22), et le nombre r doit vérifier seulement les inégalités (27). C'est ce qui arrive en particulier lorsque la fonction f est linéaire en z, p, q. On peut même, dans ce cas, démontrer l'existence de la fonction intégrale dans un champ beaucoup plus étendu. Considérons l'équation

$$s = ap + bq + cz + g, \tag{30}$$

a, b, c, g étant des fonctions des variables x, y, continues dans le rectangle OABC, ayant pour diagonale OB la droite $y = \alpha x$, et soient $OA = l$, $OC = l\alpha$ les deux côtés (*fig.* 1). La méthode générale prouve que l'équation (30) admet une inté-

Fig. 1.



grale $z_1 = \varphi(x, y)$, continue dans le rectangle ODEF, homothétique au premier, et s'annulant le long de la diagonale OE et le long du segment OG de la bissectrice de l'angle xOy. On peut prolonger cette intégrale dans la portion du rectangle OABC qui est extérieure au rectangle ODEF. Il suffit, pour cela, de s'appuyer sur les remarques suivantes.

Soit $z = F(x, y)$ une intégrale d'une équation de la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = f(x, y, z, p, q),$$

continue, ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre, le long d'une portion de caractéristique. Supposons, par exemple, pour fixer les idées, que, pour $x = x_0$, et y compris entre deux limites y_0, y_1, la fonction $F(x_0, y)$ coïncide avec une fonction déterminée de y, soit $\psi(y)$. La dérivée partielle

$$q = \frac{\partial F}{\partial y}$$

est connue par là même lorsque y varie de y_0 à y_1. Quant à la dérivée partielle

$$p = \frac{\partial F}{\partial x},$$

elle satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{\partial p}{\partial y} = f(x_0, y, F(x_0, y), p, F'_y(x_0, y));$$

il suffira donc de connaître la valeur de p en un point de la caractéristique pour qu'elle soit déterminée en tous les points de cette caractéristique. Nous voyons par là que, *si deux surfaces intégrales, représentées par les équations*

$$z = F(x, y), \qquad z' = \Phi(x, y),$$

ont une portion de caractéristique commune, et si elles se raccordent en un point de cette caractéristique, elles se raccordent tout le long de la portion de caractéristique commune.

Cela posé, soit H le point où la bissectrice de l'angle xOy rencontre le côté AB du rectangle extérieur; soit KH la parallèle à l'axe Ox. Nous supposerons, comme c'est le cas de la figure, que cette parallèle rencontre le côté DE du rectangle intérieur en un point K compris entre G et E. Les fonctions a, b, c, g étant continues dans le rectangle GLHK, il existe une intégrale de l'équation linéaire (30), continue ainsi que ses dérivées partielles dans ce rectangle, s'annulant le long de GH, et prenant le long de GK la même valeur que l'intégrale $z_1 = \varphi(x, y)$ qui est supposée définie dans le rectangle intérieur ODEF et sur son contour. Soit z_2 la nouvelle intégrale ainsi définie dans le rectangle GLHK; les deux intégrales z_1 et z_2 se raccordent au point G, puisqu'elles sont nulles l'une et l'autre quand on se déplace suivant la bissectrice OGH. Donc elles se raccordent tout le long de GK et en particulier au point K.

Dans le rectangle ALGD il existe de même une intégrale z_3, continue ainsi que ses dérivées, coïncidant avec z_1 le long de DG et avec z_2 le long de GL. Les trois intégrales z_1, z_2, z_3 se raccordent au point G; donc z_1 et z_3 se raccordent le long de GD, et z_2 et z_3 se raccordent le long de GL. Dans le rectangle EKHM, on a de même une intégrale z_4, continue ainsi que ses dérivées, se raccordant avec z_1 le long de EK et avec z_2 le long de KH.

Dans le rectangle EMBP il existe aussi une intégrale z_5, continue ainsi que ses dérivées, nulle le long de la diagonale EB et prenant la même suite de valeurs que z_4 le long de EM. Les deux intégrales z_1 et z_4 se raccordant au point E, leur plan tangent commun renferme la bissectrice OB; il s'ensuit que les intégrales z_4 et z_5 se raccordent aussi au point E et, par suite, tout le long de EM. Enfin, dans le dernier rectangle EPCF, nous avons de même une intégrale z_6, continue ainsi que ses dérivées, se raccordant avec z_1 le long de EF et avec z_5 le long de PE. Nous avons ainsi, dans chacun des six rectangles partiels que forme le rectangle complet OABC, une intégrale $z_i (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$, qui est continue, ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre, et en un point commun au contour de deux de ces rectangles les intégrales se raccordent toujours. L'ensemble de ces six intégrales z_i forme donc une intégrale, qui est continue, ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre, dans tout le rectangle OABC. D'après la façon dont elle a été obtenue, cette intégrale est nulle le long des droites OH et OB.

On raisonnerait d'une façon analogue si la parallèle menée par H à l'axe Ox coupait la droite DE au-dessus du point E. Il suffirait d'employer un ou plusieurs rectangles intermédiaires, homothétiques au rectangle OABC et compris entre OABC et ODEF.

Le même procédé de prolongement par raccordements successifs s'appliquerait aussi à l'intégrale de l'équation non linéaire $s = f(x, y, z, p, q)$, qui s'annule pour $y = x$ et pour $y = \alpha x$, mais on ne peut assigner à l'avance l'étendue du domaine où cette intégrale est continue, sauf dans des cas particuliers analogues à celui que nous venons de traiter.

8. Le résultat obtenu paraît très particulier, mais il est facile de le généraliser. On a d'abord une généralisation immédiate en se proposant de déterminer une intégrale continue dans un rectangle ayant un de ses sommets à l'origine, un second sommet A sur Ox, un troisième sommet B sur Oy, et se réduisant pour $y = mx$ à une fonction donnée $\varphi(x)$, et pour $y = m_1 x$ à une autre fonction donnée $\varphi_1(x)$, en supposant, bien entendu, $\varphi(0) = \varphi_1(0)$. Les coefficients m et m_1 sont supposés positifs, et les fonctions $\varphi(x)$ et $\varphi_1(x)$ sont supposées continues, ainsi que $\varphi'(x)$ et $\varphi'_1(x)$ lorsque x varie de 0 à un nombre positif a. Il suffit (en supposant $m_1 > m$) de poser $mx = x'$, puis

$$z = Z + \varphi\left(\frac{y - \frac{m_1}{m} x'}{m - m_1}\right) + \varphi_1\left(\frac{y - x'}{m_1 - m}\right) - \varphi(0)$$

pour être ramené au problème déjà traité. La fonction Z doit satisfaire à une équation de même forme, et s'annuler le long des droites $y = x'$, et $y = \frac{m_1}{m} x'$ dans le voisinage de l'origine.

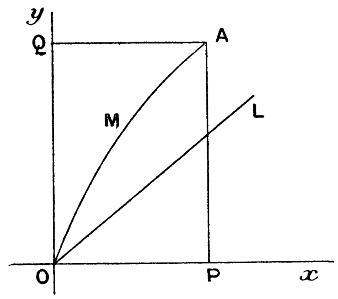
Nous allons maintenant passer à un problème plus général, en supposant que l'on se donne les valeurs de la fonction intégrale le long de deux courbes issues de l'origine. Nous examinerons d'abord le cas où l'une des courbes est la bissectrice elle-même de l'angle xOy, l'autre courbe OMA étant située tout entière au-dessus d'une droite $y = \alpha x$, α étant un coefficient supérieur à un. Cette condition exige que l'arc OMA ne soit pas tangent à l'origine à la bissectrice OL et ne rencontre pas cette bissectrice, sauf à l'origine. Soit

$$y = \varpi(x) \tag{31}$$

l'équation de l'arc OMA; la fonction $\varpi(x)$ est supposée continue et croissante lorsque x croît de 0 à a (*fig.* 2).

Nous supposerons de même que la dérivée $\varpi'(x)$ est continue dans l'intervalle $(0, a)$, sauf peut-être à l'origine (ce qui arrivera si l'arc de courbe OMA

Fig. 2.



est tangent à l'axe Oy), et que cette dérivée $\varpi'(x)$ ne s'annule pas dans l'intervalle $(0, a)$, ce qui aurait lieu s'il y avait sur OMA un point d'inflexion avec une tangente parallèle à Ox. Dans ces conditions, la fonction inverse

$$x = \varpi^{-1}(y)$$

est une fonction continue de la variable y dans l'intervalle $(0, b)$, b étant l'ordonnée du point A. En désignant toujours la variable indépendante par la lettre x, nous voyons que la fonction $\varpi^{-1}(x)$ est continue et positive dans l'intervalle $(0, b)$; elle croît de 0 à a lorsque x croît de 0 à b. La dérivée

$$\frac{d}{dx}\{\varpi^{-1}(x)\} = \xi(x)$$

est elle-même continue dans l'intervalle $(0, b)$. On a, en outre, les inégalités

$$\varpi(x) > \alpha x, \qquad \varpi^{-1}(x) < \frac{x}{\alpha},$$

dont la première s'applique à toutes les valeurs de x dans l'intervalle $(0, a)$, et la seconde à toutes les valeurs positives de x inférieures à b.

Nous poserons encore

$$\varpi^{-2}(x) = \varpi^{-1}\big(\varpi^{-1}(x)\big),$$

$$\varpi^{-3}(x) = \varpi^{-1}\big(\varpi^{-2}(x)\big),$$

et, d'une manière générale,

$$\varpi^{-n}(x) = \varpi^{-1}\big(\varpi^{-(n-1)}(x)\big);$$

en raisonnant de proche en proche, on voit aisément que toutes ces fonctions $\varpi^{-n}(x)$ sont continues et admettent une dérivée première continue dans l'intervalle (o, b). On a, de plus,

$$\varpi^{-2}(x) < \frac{\varpi^{-1}(x)}{\alpha} < \frac{x}{\alpha^2}$$

et, en général,

$$\varpi^{-n}(x) < \frac{x}{\alpha^n}. \tag{32}$$

Il est facile d'avoir une limite supérieure de la valeur absolue de la dérivée

$$\frac{d\,\varpi^{-n}(x)}{dx}.$$

Nous avons, en effet,

$$\frac{d}{dx}[\varpi^{-n}(x)] = \frac{d}{dx}[\varpi^{-1}\{\varpi^{-(n-1)}(x)\}] = \xi\big(\varpi^{-(n-1)}(x)\big)\frac{d}{dx}\big(\varpi^{-(n-1)}(x)\big)$$

et par suite

$$\frac{d}{dx}[\varpi^{-n}(x)] = \xi\big(\varpi^{-(n-1)}(x)\big)\,\xi\big(\varpi^{-(n-2)}(x)\big)\ldots\xi\big(\varpi^{-1}(x)\big)\,\xi(x).$$

La dérivée $\xi(x)$ a un certain maximum N lorsque x varie de o à b, et, d'autre part, cette dérivée tend vers une limite que nous pouvons supposer inférieure ou au plus égale à $\frac{1}{\alpha}$, en choisissant convenablement le nombre α, qui n'a pas été complètement précisé jusqu'ici, puisqu'on peut le remplacer par tout autre nombre plus petit supérieur à un. Nous choisirons ce nombre α de telle façon que, pour toute valeur de x inférieure à un nombre $c < b$, on ait

$$\xi(x) \leqq \frac{1}{\alpha}.$$

D'autre part, il ne peut y avoir dans la suite

$$\varpi^{-1}(b),\quad \varpi^{-2}(b),\quad \ldots,\quad \varpi^{-n}(b),\quad \ldots$$

qu'au nombre limité de termes supérieurs à c, puisque l'on a $\varpi^{-n}(b) < \frac{b}{\alpha^n}$. Supposons qu'il y en ait p; il y aura *a fortiori* p termes au plus de la suite

$$\varpi^{-1}(x),\quad \varpi^{-2}(x),\quad \ldots,\quad \varpi^{-n}(x),\quad \ldots$$

supérieurs à c. Cela étant, si $n \leqq p$, on a évidemment

$$\left|\frac{d}{dx}\{\varpi^{-n}(x)\}\right| < N^n < N^p;$$

si $n > p$, on a

$$\left|\frac{d}{dx}\{\varpi^{-n}(x)\}\right| < \mathrm{N}^p\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n-p}.$$

Dans les deux cas, on peut écrire

$$(33) \qquad \left|\frac{d}{dx}\{\varpi^{-n}(x)\}\right| < \frac{(\mathrm{N}\alpha)^p}{\alpha^n} < \frac{\mu}{\alpha^n},$$

μ étant un nombre positif déterminé qui ne dépend que de la fonction $\varpi(x)$.

9. Cela posé, nous n'avons qu'à suivre absolument la même méthode que dans le cas particulier déjà traité où la fonction $\varpi(x)$ se réduit à αx. Les modifications qu'il faut apporter sont peu importantes, et nous les indiquerons rapidement.

Problème I *bis*. — *Soit* $\pi(x)$ *une fonction définie dans l'intervalle* $(0, a)$. *Déterminer une fonction* $\varphi(x)$ *satisfaisant dans cet intervalle à la relation*

$$(34) \qquad \varphi(\varpi(x)) - \varphi(x) = \pi(x),$$

où $\varpi(x)$ *est la fonction qui a été définie au paragraphe précédent.*

Si l'on admet encore que la fonction $\varphi(x)$ tend vers zéro avec x, cette fonction doit être la limite, pour n infini, de l'expression

$$\pi(\varpi^{-1}(x)) + \pi(\varpi^{-2}(x)) + \ldots + \pi(\varpi^{-n}(x));$$

il faut donc, pour que le problème soit possible, que la série

$$(35) \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \pi(\varpi^{-n}(x))$$

soit convergente. Il en est ainsi toutes les fois que la fonction $\pi(x)$ satisfait à une condition de la forme

$$|\pi(x)| < \mathrm{K}x,$$

K étant un nombre positif déterminé. On en déduit, en effet, d'après l'inégalité (32),

$$|\pi(\varpi^{-n}(x))| < \frac{\mathrm{K}x}{\alpha^n},$$

et les différents termes de la série (35) sont inférieurs en valeur absolue aux termes d'une progression géométrique décroissante. Si, de plus, la fonction $\pi(x)$ est continue, il en est de même de la fonction $\varphi(x)$, et l'on trouve pour limite supérieure de $|\varphi(x)|$ l'expression suivante :

$$|\varphi(x)| < \mathrm{K}\frac{x}{\alpha} + \mathrm{K}\frac{x}{\alpha^2} + \ldots + \mathrm{K}\frac{x}{\alpha^n} + \ldots$$

ou

$$|\varphi(x)| < \frac{\mathrm{K}x}{\alpha - 1},$$

formule toute pareille à la formule (7) du n° 3.

Si la fonction $\pi(x)$ admet elle-même une dérivée $\pi'(x)$ continue dans l'intervalle $(0, a)$ et satisfaisant à la condition de Lipschitz, on a encore, pour toute valeur de x dans cet intervalle,

$$(36) \qquad |\pi'(x)| < \mathrm{K}_1 x,$$

K_1 étant un nombre positif convenablement choisi. La dérivée du terme général de la série (35)

$$\frac{d}{dx}\left[\pi\left(\varpi^{-n}(x)\right)\right] = \pi'\left(\varpi^{-n}(x)\right)\frac{d}{dx}\left\{\varpi^{-n}(x)\right\}$$

est elle-même continue entre 0 et a, et sa valeur absolue est inférieure, d'après les conditions (32), (33) et (36), à

$$\mathrm{K}_1\varpi^{-n}(x)\frac{\mu}{\alpha^n} = \mathrm{K}_1\mu\frac{x}{\alpha^{2n}}.$$

La fonction $\varphi(x)$ admet donc elle-même une dérivée continue $\varphi'(x)$ dans l'intervalle $(0, a)$ et l'on a

$$|\varphi'(x)| < \mathrm{K}_1\mu x\left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^4} + \ldots + \frac{1}{\alpha^{2n}} + \ldots\right) = \frac{\mathrm{K}_1\mu x}{\alpha^{2n}},$$

formule qui ne diffère de la formule (8) que par la présence d'un facteur μ, ne dépendant que de la fonction $\varpi(x)$.

Problème II *bis*. — *Soit $f(x, y)$ une fonction continue dans le rectangle* R *défini par les inégalités*

$$0 \leqq x \leqq a, \qquad 0 \leqq y \leqq b,$$

déterminer une intégrale de l'équation

$$(37) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = f(x, y),$$

continue dans ce rectangle et s'annulant le long de la bissectrice $y = x$, et le long de l'arc OMA *représenté par l'équation $y = \varpi(x)$.*

Posons, comme plus haut,

$$F(x, y) = \int_0^x du \int_0^y f(u, v)\, dv$$

l'intégrale générale de l'équation (37) est

$$z = F(x, y) + \varphi(x) + \psi(y),$$

$\varphi(x)$ et $\psi(y)$ désignant deux fonctions arbitraires que l'on déterminera par les deux conditions

$$F(x, x) + \varphi(x) + \psi(x) = 0,$$

$$F\big(x, \varpi(x)\big) + \varphi(x) + \psi\big(\varpi(x)\big) = 0.$$

On en déduit, par exemple,

$$\psi\big(\varpi(x)\big) - \psi(x) = F(x, x) - F\big(x, \varpi(x)\big) = \pi(x),$$

et la fonction $\psi(x)$ est égale, en supposant $\psi(0) = 0$, à la somme de la série

$$\psi(x) = \pi\big(\varpi^{-1}(x)\big) + \pi\big(\varpi^{-2}(x)\big) + \ldots + \pi\big(\varpi^{-n}(x)\big) + \ldots.$$

Si la valeur absolue de $f(x, y)$ dans le rectangle R reste inférieure à M, on a encore

$$|\pi(x)| < Mx\,|\varpi(x) - x| < M(\alpha - 1)x^2$$

et, par suite,

$$|\psi(x)| < M(\alpha - 1)\Big\{\big[\varpi^{-1}(x)\big]^2 + \big[\varpi^{-2}(x)\big]^2 + \ldots + \big[\varpi^{-n}(x)\big]^2 + \ldots\Big\},$$

ou enfin, d'après les inégalités (32),

$$(38) \qquad |\psi(x)| < \frac{Mx^2}{\alpha + 1},$$

formule identique à la formule (12) du n° 4.

Pour avoir une limite supérieure de $|\psi'(x)|$, remarquons qu'on peut encore écrire la série qui donne $\psi(x)$

$$(39) \qquad \psi(x) = \zeta(x) + \zeta\big(\varpi^{-1}(x)\big) + \ldots + \zeta\big(\varpi^{-n}(x)\big) + \ldots$$

en posant

$$\zeta(x) = \pi\big(\varpi^{-1}(x)\big) = F\big(\varpi^{-1}(x), \varpi^{-1}(x)\big) - F\big(\varpi^{-1}(x), x\big).$$

On en déduit

$$\zeta'(x) = \left[\mathrm{F}_1\big(\varpi^{-1}(x), \varpi^{-1}(x)\big) + \mathrm{F}_2\big(\varpi^{-1}(x), \varpi^{-1}(x)\big) - \mathrm{F}_1\big(\varpi^{-1}(x), x\big)\right] \frac{d\varpi^{-1}(x)}{dx},$$
$$- \mathrm{F}_2\big(\varpi^{-1}(x), x\big),$$

$\mathrm{F}_1(x, y)$ et $\mathrm{F}_2(x, y)$ désignant les dérivées partielles du premier ordre de la fonction $\mathrm{F}(x, y)$. Mais on a

$$\left|\mathrm{F}_1\big(\varpi^{-1}(x), \varpi^{-1}(x)\big) - \mathrm{F}_1\big(\varpi^{-1}(x), x\big)\right| < \mathrm{M}\,|\varpi^{-1}(x) - x| < \mathrm{M}\left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}\right) x$$

et, par suite,

$$|\zeta'(x)| < \frac{\mu}{\alpha}\left\{\mathrm{M}\frac{(\alpha - 1)}{\alpha} x + \mathrm{M}\frac{x}{\alpha}\right\} + \mathrm{M}x = \mathrm{M}x\frac{\mu + \alpha}{\alpha}.$$

La dérivée du terme général de la série $\psi(x)$, ou

$$\zeta'\left[\varpi^{-n}(x)\right] \frac{d}{dx}\big(\varpi^{-n}(x)\big)$$

est moindre en valeur absolue, d'après cela, que le produit

$$\mathrm{M}\frac{\mu + \alpha}{\alpha}\,\frac{x}{\alpha^n}\,\frac{\mu}{\alpha^n} = \mathrm{M}\frac{\mu(\mu + \alpha)}{\alpha^{2n+1}} x.$$

On en déduit que la série des dérivées est uniformément convergente et que l'on a

$$(40) \qquad |\psi'(x)| < \mathrm{M}\,\frac{\mu + \alpha}{\alpha}\left\{1 + \frac{\mu}{\alpha^2 - 1}\right\} x.$$

On trouverait de même des limites pour $|\varphi(x)|$ et $|\varphi'(x)|$, et par suite pour $|z|$, $\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|$, $\left|\frac{\partial z}{\partial y}\right|$. D'une façon générale, dans un rectangle homothétique au rectangle **R** relativement à l'origine et de dimensions r et $r\alpha$ (r étant un nombre positif inférieur à a), on a des inégalités de la forme (16)

$$|z| < \mathrm{AM}r^2, \qquad \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| < \mathrm{BM}r, \qquad \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| < \mathrm{CM}r,$$

A, B, C étant des constantes positives dont il est inutile de donner l'expression, et qui ne dépendent que de la fonction $\varpi(x)$.

La démonstration du n° 6 s'applique maintenant sans modification, et l'on en conclut que l'équation (18) admet une intégrale continue, ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre dans un rectangle homothétique au rectangle donné R par rapport à l'origine (le rapport d'homothétie étant suffisamment petit) et s'annulant sur la bissectrice et sur l'arc de courbe OMA.

Plus généralement, on peut se proposer de déterminer une intégrale, connaissant les valeurs qu'elle prend le long de la bissectrice et le long de l'arc de courbe OMA. Pour fixer les idées, supposons que l'intégrale cherchée doive se réduire à une fonction donnée $F(x)$ quand on y remplace y par x, et à une autre fonction donnée $\Phi(x)$ quand on y remplace y par $\varpi(x)$. Il est clair que l'on doit avoir $F(0) = \Phi(0)$, et il est permis, sans restreindre la généralité, de supposer $F(0) = \Phi(0) = 0$. Nous supposerons de plus que les fonctions $F(x)$ et $\Phi(x)$ admettent des dérivées du premier ordre continues lorsque x varie de 0 à a. Pour ramener ce problème au précédent, on peut procéder de la façon suivante. Formons d'abord une intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = 0,$$

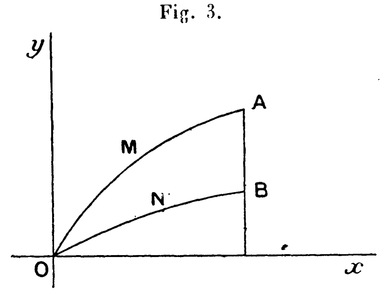
satisfaisant à ces conditions; il suffit, comme on vient de le voir, de déterminer deux fonctions φ et ψ satisfaisant aux deux relations

$$\begin{aligned} \varphi(x) + \psi(x) \qquad &= F(x), \\ \varphi(x) + \psi\big(\varpi(x)\big) &= \Phi(x). \end{aligned}$$

Soit $Z = \varphi(x) + \psi(y)$ la fonction ainsi obtenue. Il suffira de poser $z = Z + u$ pour être ramené au problème précédent.

10. Arrivons enfin au cas où l'on se donne les valeurs de l'intégrale le long de deux arcs de courbe OMA, ONB partant de l'origine (*fig.* 3), et situés dans

Fig. 3.



l'angle xOy. Soient $y = \varpi(x)$ l'équation de OMA, $y = \varpi_1(x)$ l'équation de ONB. Nous supposerons que ces deux fonctions $\varpi(x)$, $\varpi_1(x)$ satisfont aux mêmes conditions que la fonction $\varpi(x)$ considérée dans les derniers paragraphes, et de plus qu'il existe un nombre $\alpha > 1$, tel que l'on ait $\varpi(x) \geqq \alpha\varpi_1(x)$ pour toute valeur de x comprise dans un intervalle $(0, a)$, où $a > 0$; ce qui exige que les deux arcs de courbe OMA et ONB ne soient pas tangents en O et n'aient pas d'autres points communs que l'origine. Enfin nous supposerons que l'arc ONB n'est pas tangent à l'origine à l'axe Ox. La dérivée $\varpi_1'(x)$, qui est supposée continue entre 0 et a, ne s'annule pas dans cet intervalle. Il en résulte que si l'on pose

$$\varpi_1(x) = X, \tag{41}$$

x sera inversement une fonction continue, admettant une dérivée continue, de la variable X, dans l'intervalle $\big(0, \varpi_1(a)\big)$. Soit

$$x = \varpi_1^{-1}(X)$$

cette fonction inverse. La fonction

$$\chi(X) = \varpi\big(\varpi_1^{-1}(X)\big)$$

obtenue par la substitution dans $\varpi(x)$ est une fonction de la nouvelle variable X satisfaisant aux mêmes conditions dans l'intervalle $\big(0, \varpi_1(a)\big)$ que la fonction $\varpi(x)$ de x; en particulier, on aura

$$\chi(X) > \alpha X.$$

Si donc l'on prend X pour nouvelle variable indépendante à la place de x, toute équation de la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = f(x, y, z, p, q)$$

conserve la même forme et les deux courbes OMA, ONB sont remplacées respectivement d'une part par la ligne droite $y = X$, d'autre part par un arc de courbe $y = \chi(X)$. Nous retrouvons encore le cas qui vient d'être traité.

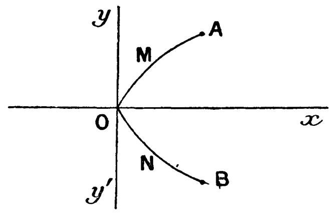
L'intégrale dont on vient ainsi de démontrer l'existence dans un petit rectangle ayant un sommet à l'origine peut, en général, être prolongée dans un domaine plus étendu par des raccordements successifs, comme on l'a déjà expliqué en détail lorsque les courbes sont des lignes droites.

11. Nous avons supposé jusqu'ici que les deux arcs de courbe OMA et ONB étaient situés dans le même des quatre angles formés par les caractéristiques issues du point O. Lorsque ces deux arcs sont situés dans des angles différents, il ne suffit pas de se donner les valeurs d'une intégrale le long de OMA et le long de ONB pour que cette intégrale soit déterminée.

Supposons d'abord que les arcs OMA et ONB sont situés dans deux angles adjacents (*fig.* 4).

Une intégrale de l'équation $s = f(x, y, z, p, q)$ est déterminée dans l'angle xOy (ou du moins dans un rectangle de dimensions suffisamment petites ayant un sommet en O et les côtés issus de O dirigés suivant Ox et Oy), si l'on se donne

Fig. 4.



les valeurs de l'intégrale le long de l'arc OMA, et si on l'assujettit en outre à se réduire à une fonction donnée $\pi(x)$ le long de Ox; soit z_1 l'intégrale ainsi obtenue, qui n'est définie par les conditions précédentes que dans l'angle xOy.

Il existe de même une intégrale z_2, qui est définie dans un rectangle placé dans xOy', prenant les valeurs données le long de ONB et se réduisant pour $y = 0$ à la fonction $\pi(x)$. Si l'on choisit la fonction arbitraire $\pi(x)$ de façon que ces deux intégrales z_1 et z_2 se raccordent à l'origine, ce que l'on peut faire d'une infinité de façons, elles se raccordent tout le long de Ox, et leur ensemble constitue une intégrale répondant à la question.

Pour achever de déterminer le problème, on peut compléter les conditions aux limites, en se donnant les données de Cauchy sur l'un des arcs, OMA par exemple, et les valeurs de l'intégrale le long de ONB. On est ainsi conduit à un *problème mixte,* qui a été étudié récemment par M. Hadamard dans le cas des équations linéaires (*Bulletin de la Société mathématique,* t. XXXI). Enfin, lorsque les deux courbes OMA, ONB sont dans deux angles opposés par le sommet, il est clair que l'on peut prendre arbitrairement les données de Cauchy sur chacun des arcs, pourvu que les intégrales obtenues se raccordent à l'origine.

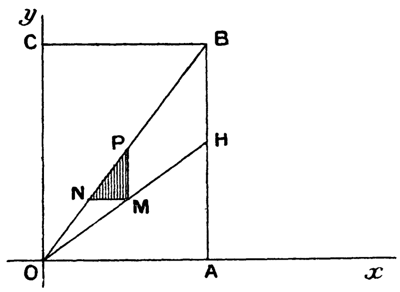
12. Dans le cas particulier de l'équation linéaire

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0, \tag{42}$$

le problème auquel ce travail est consacré peut se ramener au problème de Cauchy en résolvant d'abord un problème d'inversion d'intégrales définies. Pour fixer les idées, reprenons l'hypothèse primitive, et supposons que l'on veuille obtenir une intégrale se réduisant à $f(x)$ le long de la droite $y = x$ et à $\varphi(x)$ le long de la droite $y = \alpha x\,(\alpha > 1)$. Les coefficients a, b, c sont supposés réguliers dans le rectangle OABC (*fig.* 5) de dimensions $OA = R$, $AB = R\alpha$, et les fonctions $f(x)$,

$\varphi(x)$ sont continues et admettent des dérivées continues $f'(x)$, $\varphi'(x)$ dans l'intervalle (o, R). Soit M un point de la bissectrice OH de coordonnées (x_0, x_0); la parallèle MP à l'axe Oy rencontre la droite OB en un point P de coordonnées

Fig. 5.



$(x_0, \alpha x_0)$, et la parallèle MN à l'axe Ox rencontre de même la droite OB en un point P de coordonnées $\frac{x_0}{\alpha}$ et x_0. Désignons par $u(x, y; x_0, y_0)$ l'intégrale de l'équation adjointe qui intervient dans la méthode de Riemann (¹). L'application de la relation fondamentale

$$\int_{(S)} (\mathrm{M}\, dy - \mathrm{N}\, dx) = 0,$$

où

$$\mathrm{M} = auz + \frac{1}{2}\left(u\frac{\partial z}{\partial y} - z\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

$$\mathrm{N} = buz + \frac{1}{2}\left(u\frac{\partial z}{\partial x} - z\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

et où z désigne l'intégrale cherchée, au contour du triangle MNP donne

$$(uz)_{\mathrm{M}} = \frac{(uz)_{\mathrm{N}} + (uz)_{\mathrm{P}}}{2} + \int_{(\mathrm{NP})} \mathrm{N}\, dx - \mathrm{M}\, dy. \tag{43}$$

Dans cette égalité on doit remplacer y_0 par x_0 dans la fonction $u(x, y; x_0, y_0)$, et tous les termes en dehors du signe $\int$ sont connus d'après les conditions auxquelles doit satisfaire la fonction z. Il en est de même des intégrales définies qui ne renferment ni $\frac{\partial z}{\partial x}$, ni $\frac{\partial z}{\partial y}$, et le seul terme qui ne soit pas connu d'après les données est

$$\frac{1}{2}\int_{(\mathrm{NP})} u\left(\frac{\partial z}{\partial y}dx - \frac{\partial z}{\partial x}dy\right).$$

(¹) DARBOUX, *Leçons sur la Théorie générale des surfaces*, t. II, p. 70-80.

Si l'on parvenait à déterminer les valeurs de $\frac{\partial z}{\partial x}$ et de $\frac{\partial z}{\partial y}$ le long de la droite OB, on serait ramené au problème de Cauchy. Entre ces deux dérivées on a d'abord la relation

$$\varphi'(x) = \frac{\partial z}{\partial x} + \alpha \frac{\partial z}{\partial y};$$

la relation (43) nous fournit une autre relation de la forme

$$\int_{\frac{x_0}{\alpha}}^{x_0} u(x, \alpha x; x_0, x_0) \left\{ \frac{\partial z}{\partial y} - \alpha \frac{\partial z}{\partial x} \right\} dx = \mathrm{F}(x_0),$$

le second membre étant une fonction de x_0 dont la connaissance résulte de celle des données. On déduit de ces deux conditions

$$\begin{aligned}(1 + \alpha^2) \int_{\frac{x_0}{\alpha}}^{x_0} u(x, \alpha x; x_0, x_0) \frac{\partial z}{\partial y} dx \\ = \mathrm{F}(x_0) + \alpha \int_{\frac{x_0}{\alpha}}^{x_0} u(x, \alpha x; x_0, x_0)\, \varphi'(x)\, dx = \Phi(x_0).\end{aligned}$$

On obtiendra donc $\frac{\partial z}{\partial y}$ le long de OB en effectuant l'inversion de l'intégrale définie

$$\int_{\frac{x_0}{\alpha}}^{x_0} u(x, \alpha x; x_0, x_0)\, \psi(x)\, dx,$$

c'est-à-dire en déterminant la fonction $\psi(x)$, de façon que cette intégrale définie soit égale à une fonction connue de x_0. Nous renverrons pour ce problème aux travaux de M. Volterra [1].

---

(1) *Atti della R. Accademia di Torino,* 1896. — *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei,* 1896. — *Voir* aussi deux Notes de M. Burgatti, dans les *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei,* 1903.