LES GROUPES D'ORDRE $16p$,

p ÉTANT UN NOMBRE PREMIER IMPAIR,

PAR M. R. LE VAVASSEUR,

à Toulouse.

J'ai divisé la discussion en trois Parties. Dans la première Partie (A), je suppose que le groupe cherché admet un sous-groupe d'ordre p, conjugué de lui-même; I étant ce sous-groupe, G le groupe cherché, je prends pour $\frac{G}{\Gamma}$ successivement les 14 groupes connus d'ordre 16 (n^os 2, 3, ..., 15). J'ai ainsi 25 groupes. Pour savoir s'ils sont distincts, j'énumère dans chacun d'eux le nombre d'opérations d'ordre donné (n^os 16, 17, ..., 40).

Dans la deuxième Partie (B), j'arrive au cas où il n'y a pas dans le groupe cherché de sous-groupe d'ordre p conjugué de lui-même, mais où il y a un sous-groupe d'ordre 16, conjugué de lui-même (n^os 41, 42, ..., 56).

Dans la troisième Partie (C), j'envisage le cas où le groupe cherché d'ordre $16p$ n'admet ni sous-groupe d'ordre p conjugué de lui-même, ni sous-groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même (n^os 57, 58, ..., 67).

A la fin est un Tableau résumant les résultats obtenus.

1. Le groupe cherché a au moins un sous-groupe d'ordre p.

L'égalité

$$16p = pm(1 + hp) \quad (^1)$$

donne

$$16 = m(hp + 1).$$

Donc, pour $p > 7$, le groupe admet un sous-groupe d'ordre p conjugué de lui-même.

Pour $p = 7$, on peut supposer $h = 1$, $m = 2$.

Pour $p = 5$, » $h = 3$, $m = 1$.

Pour $p = 3$, » $h = 1$; $m = 4$ ou $h = 5$, $m = 1$.

(1) *Voir* § 21, p. 18 de mon Mémoire sur l'*Énumération des groupes d'opérations*, édité chez Hermann, 8, rue de la Sorbonne, ou chez Privat (Toulouse).

2. (A). Nous supposerons d'abord que le groupe admet un sous-groupe d'ordre p conjugué de lui-même.

I. Ce sous-groupe Γ étant d'ordre p, $\frac{G}{\Gamma}$ est du type G_{16} (1). On a

$$a^{16} = b^p = 1, \qquad ba = ab^\alpha \qquad \text{avec} \qquad \alpha^{16} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Si $\alpha = 1$, on a

$$G_{16p} = G_{16} G_p.$$

Si α appartient à l'exposant 2, le groupe sera désigné par G^1_{16p},
» 4, » G^2_{16p},
» 8, » G^3_{16p},
» 16, » G^4_{16p}.

3. II. $\frac{G}{\Gamma}$ est du type $G_8 G_2$:

$$(a'^8 = b'^2 = 1,\ a'b' = b'a').$$

On a

$$a^8 = b^2 = 1, \qquad ab = ba, \qquad c^p = 1,$$

puis

$$ca = ac^\alpha, \qquad \alpha^8 \equiv 1 \pmod{p},$$
$$cb = bc^\beta, \qquad \beta^2 \equiv 1 \pmod{p}.$$

(1). $\alpha = \beta = 1$ donne

$$G_8 G_2 G_p = G_{8p} G_2 = G_{2p} G_8.$$

(2). Soit $\beta = 1$, $\alpha \neq 1$.

$$\left.\begin{array}{llll} \text{Si } \alpha \text{ appartient à l'exposant } 2 \pmod{p}, & & \text{on a} & G^1_{8p} G_2 \\ \quad » & 4 & » \quad » & G^2_{8p} G_2 \\ \quad » & 8 & » \quad » & G^3_{8p} G_2 \end{array}\right\} (2).$$

(3). Soit $\alpha = 1$, $\beta = -1$, on a $G^1_{2p} G_8$.

(4). Soit $\beta = -1$, $\alpha \neq 1$.

Si $\alpha = -1$, $ca = ac^{-1}$, $cb = bc^{-1}$, $cab = ac^{-1}b = abc$.

On peut poser $ab = a'$.

On retrouvera $G^1_{2p} G_8$.

Si α appartient à l'exposant 4 (mod p) on a le groupe G^5_{16p} :

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \qquad ab = ba, \qquad ca = ac^\alpha, \qquad cb = bc^{-1}$$

[α appartient à l'exposant 4 (mod p)].

(1) *Loc. cit.*, Chap. VI.

(2) *Loc. cit.*, Chap. VIII.

Si α appartient à l'exposant 8 (mod p), α^4 appartient à l'exposant 2 (mod p) :

$$ca^4 = a^4 c^{-1}, \qquad cb = bc^{-1}, \qquad ca^4 b = a^4 bc.$$

Posons $a^4 b = b'$, on retrouve $G^3_{8p} G_2$.

4. III. $\dfrac{G}{\Gamma}$ est du type $(G_4)^2$:

$$(a'^4 = b'^4 = 1,\ a'b' = b'a').$$

On a

$$a^4 = b^4 = c^p = 1, \qquad ab = ba, \qquad ca = ac^\alpha, \qquad cb = bc^\beta,$$

avec

$$\alpha^4 \equiv \beta^4 \equiv 1 \qquad (\mathrm{mod}\, p).$$

(1). $\alpha = \beta = 1$ donne

$$(G_4)^2 G_p = G_{4p} G_4.$$

(2). $\alpha = 1$, $\beta \neq 1$ donne

$$G^1_{4p} G_4 \quad \text{et} \quad G^2_{4p} G_4 \quad (^1).$$

(3). $\alpha = -1$, $\beta \neq 1$.

Soit $ca = ac^{-1}$, $cb = bc^{-1}$, alors $cab = abc$.

Posons $ab = b'$, on retrouve $G^1_{4p} G_4$.

Si β appartient à l'exposant 4 (mod p)

$$ca = ac^{-1}, \qquad cb^2 = b^2 c^{-1};$$

donc

$$cab^2 = ab^2 c.$$

Posons $ab^2 = a'$, on retrouve $G^2_{4p} G_4$.

(4). α et β appartiennent tous deux à l'exposant 4 (mod p).

Alors α et β sont racines de la congruence $x^2 + 1 \equiv 0$ (mod p).

Si l'on suppose $\alpha = \beta$, on a

$$ca^3 = a^3 c^{\alpha^3}, \qquad cb = bc^\alpha, \qquad ca^3 b = a^3 c^{\alpha^3} b = a^3 bc.$$

Posons $a^3 b = b'$, on retrouve $G^2_{4p} G_4$.

Si α est différent de β, on a

$$\alpha\beta \equiv 1 \qquad (\mathrm{mod}\, p),$$

$$ca = ac^\alpha, \qquad cb = bc^\beta, \qquad cab = ac^\alpha b = abc^{\alpha\beta} = abc.$$

On retrouve encore $G^2_{4p} G_4$.

---

(1) *Loc. cit.*, Chap. V.

5. IV. $\frac{G}{\Gamma} = G_4(G_2)^2$:

$$a^4 = b^2 = c^2 = d^p = 1, \qquad ab = ba, \qquad ac = ca, \qquad bc = cb,$$

$$\begin{array}{llll} da = ad^\alpha & \text{avec} & \alpha^4 \equiv 1 & (\operatorname{mod} p), \\ db = bd^\beta & \text{avec} & \beta^2 \equiv 1 & (\operatorname{mod} p), \\ dc = cd^\gamma & \text{avec} & \gamma^2 \equiv 1 & (\operatorname{mod} p). \end{array}$$

(1). $\alpha = \beta = \gamma = 1$, on a

$$G_4(G_2)^2 G_p = G_{4p}(G_2)^2 = G_{2p} G_4 G_2.$$

(2). $\beta = \gamma = 1$, $\alpha \not\equiv 1$, on a

$$G^1_{4p}(G_2)^2, \quad G^2_{4p}(G_2)^2.$$

(3). $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = -1$ donne

$$G^1_{2p} G_4 G_2.$$

(4). $\beta = \gamma = -1$, $db = bd^{-1}$, $dc = cd^{-1}$; donc

$$dbc = bcd.$$

On pourra donc toujours supposer $\beta = 1$.
(5). $\beta = 1$, $\gamma = -1$, $\alpha \not\equiv 1$.
Si $\alpha = -1$, $da = ad^{-1}$, $dc = cd^{-1}$, $dac = acd$.
Posant $ac = a'$, on retrouve $G^1_{2p} G_4 G_2$.
Si α appartient à l'exposant 4 $(\operatorname{mod} p)$, $a^2 c$ est permutable avec d.
On pourra prendre $a^2 c = c'$ à la place de c comme opération génératrice.
On trouve $G^2_{4p}(G_2)^2$.

6. V. $\frac{G}{\Gamma} = (G_2)^4$:

$$a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = e^p = 1,$$

$$\begin{array}{lll} ab = ba, & ac = ca, & ad = da, \\ bc = cb, & bd = db, & cd = dc, \end{array}$$

$$ea = ae^\alpha, \quad eb = be^\beta, \quad ec = ce^\gamma, \quad ed = de^\delta, \quad \alpha^2 \equiv \beta^2 \equiv \gamma^2 \equiv \delta^2 \equiv 1 \quad (\operatorname{mod} p).$$

En transformant e par toutes les opérations du groupe d'ordre 16, on trouve, comme exposants de l'opération transformée :

$$\alpha, \ \beta, \ \gamma, \ \delta, \ \alpha\beta, \ \alpha\gamma, \ \alpha\delta, \ \beta\gamma, \ \beta\delta, \ \gamma\delta, \ \beta\gamma\delta, \ \gamma\delta\alpha, \ \delta\alpha\beta, \ \alpha\beta\gamma, \ \alpha\beta\gamma\delta.$$

Si $\alpha=\beta=\gamma=\delta=1$, tous ces exposants sont égaux à 1.
Si $\delta=-1$, $\alpha=\beta=\gamma=1$, on trouve

$$1,\quad 1,\quad 1,\quad -1,\quad 1,\quad 1,\quad -1,\quad 1,\quad -1,\quad -1,\quad -1,\quad -1,\quad -1,\quad 1,\quad -1.$$

Si $\gamma=\delta=-1$, $\alpha=\beta=1$, on trouve

$$1,\quad 1,\quad -1,\quad -1,\quad 1,\quad -1,\quad -1,\quad -1,\quad -1,\quad 1,\quad 1,\quad 1,\quad -1,\quad -1,\quad 1.$$

Si $\alpha=1$, $\beta=\gamma=\delta=-1$, on trouve

$$1,\quad -1,\quad -1,\quad -1,\quad -1,\quad -1,\quad -1,\quad 1,\quad 1,\quad 1,\quad -1,\quad 1,\quad 1,\quad 1,\quad -1.$$

Si $\alpha=\beta=\gamma=\delta=-1$, on trouve

$$-1,\quad -1,\quad -1,\quad -1,\quad 1,\quad 1,\quad 1,\quad 1,\quad 1,\quad 1,\quad -1,\quad -1,\quad -1,\quad -1,\quad 1.$$

On n'obtient donc que les deux groupes suivants :

$$(G_2)^4 G_p = G_{2p}(G_2)^3 \qquad \text{et} \qquad G_{2p}^1 (G_2)^3.$$

7. VI. $\dfrac{G}{\Gamma}=G_8^1 G_2$ [1]. On a

$$a^4=b^2=c^2=d^p=1, \qquad ab=ba^3, \qquad ac=ca, \qquad bc=cb,$$

$$\begin{aligned} da &= ad^{\alpha} &&\text{avec} && \alpha^4\equiv 1 && (\text{mod}\, p),\\ db &= bd^{\beta} &&\text{avec} && \beta^2\equiv 1 && (\text{mod}\, p),\\ dc &= cd^{\gamma} &&\text{avec} && \gamma^2\equiv 1 && (\text{mod}\, p);\end{aligned}$$

mais

$$dab=abd^{\alpha\beta}, \qquad dba^3=ba^3d^{\alpha^3\beta}.$$

Donc, puisque $ab=ba^3$, on a

$$\alpha^2\equiv 1 \qquad (\text{mod}\, p).$$

(1). $\alpha=\beta=\gamma=1$ donne $G_8^1 G_2 G_p = G_8^1 G_{2p}$ [1].
(2). $\alpha=-1$, $\beta=\gamma=1$ donne $G_{8p}^4 G_2$ [2].
(3). $\alpha=1$, $\beta=-1$, $\gamma=1$ donne $G_{8p}^5 G_2$ [2].
(4). $\alpha=\beta=1$, $\gamma=-1$ donne $G_8^1 G_{2p}^1$.

---

[1] *Loc. cit.*, Chap. IV.
[2] *Loc. cit.*, Chap. VIII.

(5). $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = -1$, $dbc = bcd$. Posons $bc = b'$; on trouve

$$a^4 = b'^2 = c^2 = 1, \quad ab' = b'a^3, \quad ac = ca, \quad b'c = cb',$$
$$da = ad, \quad db' = b'd, \quad dc = cd^{-1}.$$

On retombe sur $G_8^1 G_{2p}^1$.

(6). $\beta = 1$, $\gamma = \alpha = -1$; $dac = acd$. Posons $ac = a'$; il vient

$$a'^4 = b^2 = c^2 = d^4 = 1, \quad a'b = ba'^3, \quad a'c = ca', \quad bc = cb,$$
$$da' = a'd, \quad db = bd, \quad dc = cd^{-1}.$$

On retrouve $G_8^1 G_{2p}^1$.

(7). $\gamma = 1$, $\alpha = \beta = -1$, $dab = abd$. Posons $ab = b'$; on a

$$a^4 = b'^2 = c^2 = d^4 = 1, \quad ab' = b'a^3, \quad ac = ca, \quad b'c = cb',$$
$$da = ad^{-1}, \quad db' = b'd, \quad dc = cd.$$

On retrouve $G_{8p}^4 G_2$ [*voir* (2), même numéro].

(8). $\alpha = \beta = \gamma = -1$. Posons $ab = b'$; on a

$$a^4 = b'^2 = c^2 = d^4 = 1, \quad ab' = b'a^3, \quad ac = ca, \quad b'c = cb',$$
$$da = ad^{-1}, \quad db' = b'd, \quad dc = cd^{-1}.$$

On retrouve $G_8^1 G_{2p}^1$ [*voir* (6)].

8. VII. $\dfrac{G}{\Gamma} = G_8^2 G_2$:

$$a^4 = b^4 = c^2 = d^p = 1, \quad a^2 = b^2, \quad ab = ba^3, \quad ac = ca, \quad bc = cb,$$
$$da = ad^\alpha \quad \text{avec} \quad \alpha^4 \equiv 1 \pmod{p},$$
$$db = bd^\beta \quad \text{avec} \quad \beta^4 \equiv 1 \pmod{p},$$
$$dc = cd^\gamma \quad \text{avec} \quad \gamma^2 \equiv 1 \pmod{p},$$

mais

$$dab = abd^{\alpha\beta}, \quad dba^3 = ba^3 = d^{\alpha^3\beta}.$$

Comme $ab = ba^3$, on a

$$\alpha^2 \equiv 1 \pmod{p},$$

a^2 est permutable avec d, donc aussi $b^2 = a^2$; et par suite on a

$$\beta^2 \equiv 1 \pmod{p}.$$

On peut toujours supposer $\alpha = 1$, car si l'on a $\alpha = -1$, $\beta = 1$, on peut permuter a et b (on a $ba = ab^3$).

Si $\alpha = -1$, $\beta = -1$, $dab = abd$; on peut poser $ab = a'$, car $a'b = ba'^3$.
(1). $\alpha = \beta = \gamma = 1$ donne $G_8^2 G_2 G_p = G_8^2 G_{2p}$.
(2). $\alpha = \gamma = 1$, $\beta = -1$ donne $G_{8p}^6 G_2$ (1).
(3). $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = -1$ donne $G_8^2 G_{2p}^1$.
(4). $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = -1$, $dbc = bcd$.
Posons $bc = b'$; on a

$$a^4 = b'^4 = c^2 = d^p = 1, \quad a^2 = b'^2, \quad ab' = b'a^3, \quad ac = ca, \quad b'c = cb',$$
$$ad = da, \quad db' = b'd, \quad dc = cd^{-1}.$$

On retrouve $G_8^2 G_{2p}^1$.

9. VIII. $\dfrac{G}{\Gamma} = G_{16}^1$:

On a

$$a^8 = b^2 = 1, \quad ab = ba^5 \quad (2).$$

puis

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \quad ab = ba^5;$$

$$ca = ac^\alpha \quad \text{avec} \quad \alpha^8 \equiv 1 \quad (\text{mod}\, p),$$
$$cb = bc^\beta \quad \text{avec} \quad \beta^2 \equiv 1 \quad (\text{mod}\, p).$$

Mais, d'une part

$$cab = abc^{\alpha\beta},$$

d'autre part

$$cba^5 = ba^5 c^{\alpha^5 \beta},$$

d'où l'on déduit

$$\alpha^4 \equiv 1 \quad (\text{mod}\, p).$$

(1). $\alpha = \beta = 1$ donne $G_{16}^1 G_p$.
(2). $\beta = 1$, $\alpha \neq 1$, on a

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \quad ab = ba^5, \quad ca = ac^\alpha, \quad cb = bc.$$

Si α appartient à l'exposant 2 (mod p), on aura le groupe G_{16p}^6.
» 4 » G_{16p}^7.
(3). $\alpha = +1$, $\beta = -1$.

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \quad ab = ba^5, \quad ca = ac, \quad cb = bc^{-1}$$

définissent G_{16p}^8.
(4). $\beta = -1$, $\alpha \neq 1$.

---

(1) *Loc. cit.*, Chap. VIII.
(2) *Loc. cit.*, Chap. VI.

Si $\alpha = -1$, on a

$$ca = ac^{-1}, \qquad cb = bc^{-1} \qquad \text{donc} \qquad cab = abc.$$

On pourra poser $ab = a'$; alors, comme $ab = ba^5$, $a'^2 = a^6$, $a'^8 = 1$,

$$a'b = ab^2 = ba^5 b, \qquad a'^4 = a^4, \qquad a'^5 = a^5 b \qquad \text{donc} \qquad a'b = ba'^5.$$

On retrouve G^8_{16p}.

Les formules

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \qquad ab = ba^5, \qquad ca = ac^\alpha, \qquad cb = bc^{-1},$$

où α appartient à l'exposant $4 \pmod p$, définissent G^9_{16p}.

Je rappelle, pour la clarté de ce qui précède, le Tableau suivant des opérations de G^1_{16} [1].

8	a	$a\alpha$		ab		$ab\alpha$
4	α	α^3		α^3	$b\alpha$	α
2	α^2	α^2	b	α^2	α^2	α^2

10. IX. $\dfrac{G}{\Gamma} = G^4_{16}$:

$$a^2 = b^2 = c^4 = 1, \qquad ab = bac^2, \qquad ac = ca, \qquad bc = cb,$$

4			α	$a\alpha$	$b\alpha$	ab	
2	a	b	α^2	α^2	α^2	α^2	$ab\alpha$

$(c = \alpha)$ [2]

On a :

$$a^2 = b^2 = c^4 = d^p = 1, \qquad ac = ca, \qquad bc = cb, \qquad ab = bac^2,$$

$$\begin{aligned} da &= ad^\alpha \quad &\text{avec} \quad \alpha^2 &\equiv 1 \pmod p \\ db &= bd^\beta \quad &\text{avec} \quad \beta^2 &\equiv 1 \pmod p \\ dc &= cd^\gamma \quad &\text{avec} \quad \gamma^4 &\equiv 1 \pmod p \end{aligned}$$

Mais

$$dab = abd^{\alpha\beta}, \qquad dbac^2 = bac^2 d^{\alpha\beta\gamma^2} \qquad \text{donc} \qquad \gamma = \pm 1.$$

(1). $\alpha = \beta = \gamma = 1$ donne $G^4_{16}\, G_p$.

---

[1] *Loc. cit.,* Chap. VI.

[2] *Loc. cit.,* Chap. VI.

(2). $\alpha=\beta=1, \gamma=-1$ donne G_{16p}^{10} :

$$a^2=b^2=c^4=d^p=1, \quad ac=ca, \quad bc=cb, \quad ab=bac^2,$$
$$da=ad, \quad db=bd, \quad dc=cd^{-1}.$$

(3). $\alpha=1,\ \beta=-1, \gamma=1$ donne G_{16p}^{11} :

$$a^2=b^2=c^4=d^p=1, \quad ac=ca, \quad bc=cb, \quad ab=bac^2,$$
$$da=ad, \quad db=bd^{-1}, \quad dc=cd.$$

(4). $\alpha=-1,\ \beta=\gamma=1$ redonne G_{16p}^{11}. Il suffit, pour le voir, de permuter a et b, dans les équations précédentes.

(5). $\alpha=1,\ \beta=\gamma=-1$; $da=ad,\ db=bd^{-1},\ dc=cd^{-1},\ dabc=abcd$. Soit $abc=b'$; on a

$$a^2=b'^2=c^4=1, \quad ac=ca, \quad b'c=cb',$$
$$ab'=a^2bc=bca.a=bac.a=abc.ac^2=b'ac^2,$$
$$da=ad, \quad db'=b'd, \quad dc=cd^{-1}.$$

On retrouve G_{16p}^{10}.

(6). $\alpha=-1,\ \beta=1, \gamma=-1$ redonne G_{16p}^{10}.

(7). $\alpha=\beta=-1, \gamma=1$: $abc=a'$ est d'ordre 2. On a

$$a'^2=b^2=c^4=1, \quad a'b=abcb=ab^2c=bac^2bc=babc^3=ba'c^2,$$
$$a'c=ca', \quad bc=cb.$$

D'ailleurs, si $da=ad^{-1},\ db=bd^{-1},\ dc=cd$, on en conclut

$$da'=a'd.$$

On retrouve G_{16p}^{11}.

(8). $\alpha=\beta=\gamma=-1$; alors

$$dabc=abcd^{-1}.$$

Le groupe G_{16p}^{12} a, pour équations de définition,

$$a^2=b^2=c^4=d^p=1, \quad ac=ca, \quad bc=cb, \quad ab=bac^2,$$
$$da=ad^{-1}, \quad db=bd^{-1}, \quad dc=cd^{-1}.$$

11. X. $\dfrac{G}{\Gamma}=G_{16}^{2}$ [1] :

$a^4=b^4=1, \quad ab=ba^3$ ou bien $a^2=\alpha, \quad b^2=\beta, \quad \alpha^2=\beta^2=1, \quad ab=ba\alpha.$

---

[1] *Loc. cit.*, Chap. VI.

Rappelons le Tableau des opérations de G_{16}^{2} :

4	a	b	ab	
2	α	β	β	$\alpha\beta$

On a

$$a^4 = b^4 = c^p = 1, \qquad ab = ba^3, \qquad ca = ac^\alpha, \qquad cb = bc^\beta,$$

avec

$$\alpha^4 \equiv \beta^4 \equiv 1 \qquad (\mathrm{mod}\, p).$$

Mais $ab = ba^3$, or

$$cab = abc^{\alpha\beta}, \qquad cba^3 = ba^3c^{\alpha^3\beta};$$

Donc on a

$$\alpha^2 \equiv 1 \qquad (\mathrm{mod}\, p).$$

(1). $\alpha = \beta = 1$ donne $G_{16}^{2} G_p$.

(2). $\beta = 1$, $\alpha = -1$:

$$a^4 = b^4 = c^p = 1, \qquad ab = ba^3, \qquad ca = ac^{-1}, \qquad cb = bc$$

définissent le groupe G_{16p}^{13}.

(3). Soit $\alpha = 1$, $\beta \neq 1$:

$$a^4 = b^4 = c^p = 1, \qquad ab = ba^3, \qquad cb = bc^\beta.$$

Si $\beta = -1$, on a le groupe G_{16p}^{14}.

Si β appartient à l'exposant 4 $(\mathrm{mod}\, p)$, on a le groupe G_{16p}^{15}.

(4). Soit enfin $\alpha = -1$, $\beta \neq 1$.

Si $\beta = -1$, $ca = ac^{-1}$, $cb = bc^{-1}$, donc

$$cab = abc.$$

Posons $ab = b'$, d'où $b'^2 = b^2$, donc

$$a^4 = b'^4 = c^p = 1, \qquad ab' = b'a^3, \qquad ca = ac^{-1}, \qquad cb' = b'c.$$

On retrouve G_{16p}^{13}.

Si β appartient à l'exposant 4 $(\mathrm{mod}\, p)$, on a

$$ca = ac^{-1}, \qquad cb^2 = b^2c^{-1}, \qquad \text{donc} \qquad cab^2 = ab^2c.$$

Posons $ab^2 = a'$, $a'^2 = a^2$.

Donc

$$a'^4 = b^4 = 1 = c^p, \qquad a'b = ab^3 = b^3a^3 = b(ab^2)^3 = ba'^3, \qquad ca' = a'c, \qquad cb = bc^\beta.$$

On retrouve G_{16p}^{15}.

12. XI. $\frac{G}{\Gamma} = G^3_{16}$ (1) :

$$a^4 = b^2 = c^2 = 1, \qquad ac = ca, \qquad bc = cb, \qquad ab = bac.$$

Rappelons le Tableau des opérations :

$$(a^2 = \alpha, \qquad b^2 = \alpha^2 = \beta^2 = 1, \qquad ab = ba\beta),$$

Ordre 4	a		ab	
Ordre 2	α	b	$\alpha\beta$	β

On a

$$a^4 = b^2 = c^2 = d^p = 1, \qquad ac = ca, \qquad bc = cb, \qquad ab = bac,$$

$$da = ad^\alpha \quad \text{avec} \quad \alpha^4 \equiv 1 \pmod p,$$
$$db = bd^\beta \quad \text{avec} \quad \beta^2 \equiv 1 \pmod p,$$
$$dc = cd^\gamma \quad \text{avec} \quad \gamma^2 \equiv 1 \pmod p.$$

Mais, tout d'abord,

$$dab = abd^{\alpha\beta}, \qquad dbac = bacd^{\alpha\beta\gamma}.$$

Comme $ab = bac$, j'en conclus

$$\gamma \equiv 1 \pmod p.$$

(1). $\alpha = \beta = 1$ donne $G^3_{16}\, G_p$.
(2). $\beta = 1$, $\alpha \not\equiv 1$. On a, comme équations de définition,

$$a^4 = b^2 = c^2 = d^p = 1, \qquad ac = ca, \qquad bc = cb, \qquad ab = bac,$$
$$da = ad^\alpha, \qquad db = bd, \qquad dc = cd.$$

Si $\alpha = -1$, ces équations définissent G^{16}_{16p}.
Si α appartient à l'exposant 4 $(\bmod p)$, ces équations définissent G^{17}_{16p}.
(3). Soit $\beta = -1$, $\alpha = 1$, on a le groupe G^{18}_{16p}, défini par les équations

$$a^4 = b^2 = c^2 = d^p = 1, \qquad ac = ca, \qquad bc = cb, \qquad ab = bac,$$
$$da = ad, \qquad db = bd^{-1}, \qquad cd = dc.$$

(4). Soit $\alpha \not\equiv 1$, $\beta = -1$.
Si $\alpha = -1$, $da = ad^{-1}$, $db = bd^{-1}$, donc

$$dab = abd.$$

(1) *Loc. cit.*, Chap. VI.

Posons $ab = a'$, on a

$$a'^4 = b^2 = c^2 = 1, \qquad a'c = ca', \qquad bc = cb, \qquad a'b = ab^2 = bacb = babc = ba'c.$$

On retrouve G_{16p}^{18}.

Si α appartient à l'exposant 4 :

$$da^2 = a^2 d^{-1}, \qquad db = bd^{-1}, \qquad da^2 b = a^2 bd.$$

Posant $a^2 b = b'$, on retrouve G_{16p}^{18}.

13. XII. $\frac{G}{\Gamma} = G_{16}^5$ (1):

$$a^4 = \alpha, \qquad b^2 = \alpha, \qquad \alpha^2 = 1, \qquad ab = ba^3\alpha.$$

Tableau des opérations.

8	a	a^3				
4	a^2	$a^2\alpha$	b	ab	a^2b	a^3b
2	α	α	α	α	α	α

On a

$$a^8 = b^4 = c^p = 1, \qquad a^4 = b^2, \qquad ab = ba^7,$$

$$ca = ac^\alpha \quad \text{avec} \quad \alpha^8 \equiv 1 \pmod{p},$$

$$cb = bc^\beta \quad \text{avec} \quad \beta^4 \equiv 1 \pmod{p}.$$

Mais

$$cab = abc^{\alpha\beta}, \qquad cba^7 = ba^7 c^{\alpha^7\beta}.$$

Donc on a

$$\alpha^6 \equiv 1 \pmod{p}, \qquad \alpha = \pm 1.$$

J'en conclus

$$ca^4 = a^4 c,$$

donc

$$cb^2 = b^2 c,$$

donc

$$\beta = \pm 1.$$

(1). Si $\alpha = \beta = 1$, on a le groupe $G_{16}^5\, G_p$.

(2). Si $\alpha = 1$, $\beta = -1$, on trouve G_{16p}^{19}, dont les équations de définition sont

$$a^8 = b^4 = c^p = 1, \qquad a^4 = b^2, \qquad ab = ba^7, \qquad ac = ca, \qquad cb = bc^{-1}.$$

---

(1) *Loc. cit.*, Chap. VI.

(3). Si $\alpha = -1$, $\beta = +1$, on trouve G_{16p}^{20}.

$$a^8 = b^4 = c^p = 1, \quad a^4 = b^2, \quad ab = ba^7, \quad ca = ac^{-1}, \quad bc = cb.$$

(4). Si $\alpha = \beta = -1$, $ca = ac^{-1}$, $cb = bc^{-1}$, donc

$$cab = abc.$$

Posons $ab = b'$; on a

$$a^8 = b'^4 = c^p = 1, \quad a^4 = b'^2, \quad ab' = b'a^7, \quad ca = ac^{-1}, \quad b'c = cb'.$$

Donc on retrouve G_{16p}^{20}.

14. XIII. $\frac{G}{\Gamma} = G_{16}^6$ (1):

$$a^4 = \alpha, \quad b^2 = \alpha^2 = 1, \quad ab = ba^3.$$

Tableau des opérations.

8	a	a^3					
4	a^2	$a^2\alpha$		ab		a^3b	
2	α	α	b	α	a^2b	α	

On a

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \quad ab = ba^3,$$

$$ca = ac^\alpha \quad \text{avec} \quad \alpha^8 \equiv 1 \pmod{p},$$
$$cb = bc^\beta \quad \text{avec} \quad \beta^2 \equiv 1 \pmod{p}.$$

Mais

$$cab = abc^{\alpha\beta}, \quad cba^3 = ba^3c^{\alpha^3\beta};$$

donc

$$\alpha^2 \equiv 1 \pmod{p}.$$

(1). $\alpha = \beta = 1$ donne $G_{16}^6 G_p$.

(2). $\alpha = 1$, $\beta = -1$. Les équations

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \quad ab = ba^3, \quad ac = ca, \quad cb = bc^{-1}$$

définissent G_{16p}^{21}.

(3). $\alpha = -1$, $\beta = 1$. Le groupe G_{16p}^{22} est défini par les équations

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \quad ab = ba^3, \quad ca = ac^{-1}, \quad cb = bc.$$

(1) *Loc. cit.*, Chap. VI.

(4). $\alpha = \beta = -1$, G^{23}_{16p} est défini par les équations

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \qquad ab = ba^3, \qquad ca = ac^{-1}, \qquad cb = bc^{-1}.$$

15. XIV. $\dfrac{G}{\Gamma} = G^7_{16}$ (¹) :

$$a^4 = \alpha, \qquad b^2 = \alpha^2 = 1, \qquad ab = ba^3\alpha.$$

Voici le Tableau des opérations

8	a	a^3				
4	a^2	$a^2\alpha$				
2	α	α	b	ab	a^2b	a^3b

On a

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \qquad ab = ba^7,$$

$$ca = ac^\alpha \quad \text{avec} \quad \alpha^8 \equiv 1 \pmod p,$$
$$cb = bc^\beta \quad \text{avec} \quad \beta^2 \equiv 1 \pmod p.$$

Mais

$$cab = abc^{\alpha\beta}, \qquad cba^7 = ba^7c^{\alpha^7\beta},$$

d'où, puisque $ab = ba^7$,

$$\alpha^6 \equiv 1 \pmod p, \qquad \text{donc} \qquad \alpha = \pm 1.$$

(1). $\alpha = \beta = 1$ donne $G^7_{16}G_p$.
(2). $\alpha = 1$, $\beta = -1$ donne le groupe G^{24}_{16p}, défini par les équations

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \qquad ab = ba^{-1}, \qquad ca = ac, \qquad cb = bc^{-1}.$$

(3). $\alpha = -1$, $\beta = 1$ donne le groupe G^{25}_{16p}, défini par les équations

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \qquad ab = ba^{-1}, \qquad ca = ac^{-1}, \qquad cb = bc.$$

(4). $\alpha = \beta = -1$, $ca = ac^{-1}$, $cb = bc^{-1}$, $cab = abc$.
Or posons $ab = b'$.
On a

$$a^8 = b'^2 = 1, \qquad ab' = b'a^7.$$

On retrouve G^{25}_{16p}.

16. Il reste maintenant à chercher si les 25 groupes G^λ_{16p} trouvés ($\lambda = 1, 2, \ldots, 25$)

(¹) *Loc. cit.*, Chap. VI.

sont bien distincts. Pour cela, énumérons dans chacun d'eux le nombre d'opérations d'ordre donné.

Soit d'abord G^1_{16p} :

$$a^{16} = b^p = 1, \qquad ab^{-1} = ba,$$

a^2 est une opération d'ordre 8, conjuguée d'elle-même dans le groupe total.

On a

$$b^{-\mu}a = ab^{\mu}, \qquad \text{donc} \qquad (ab^{\mu})^2 = a^2,$$

pour toute valeur de μ.

$a^{2\lambda+1}b^{\mu}$, quel que soit μ, est d'ordre 16.

On a donc $8p$ opérations d'ordre 16.

a^2b^{μ}, a^6b^{μ}, $a^{10}b^{\mu}$, $a^{14}b^{\mu}$ (μ premier avec p) sont d'ordre $8p$.

Cela fait $4(p-1)$ opérations d'ordre $8p$.

a^4b^{μ}, $a^{12}b^{\mu}$ (μ premier avec p) sont d'ordre $4p$, d'où $2(p-1)$ opérations d'ordre $4p$.

a^8b^{μ} (μ premier avec p) est d'ordre $2p$, d'où $(p-1)$ opérations d'ordre $2p$.

b^{μ} (μ premier avec p) est d'ordre p, d'où $(p-1)$ opérations d'ordre p.

a^2, a^6, a^{10}, a^{14} donnent 4 opérations d'ordre 8.

a^4, a^{12} donnent 2 opérations d'ordre 4.

a^8 est d'ordre 2.

Ainsi, G^1_{16p} a :

$8p$	opérations d'ordre	16,
$4(p-1)$	»	$8p$,
$2(p-1)$	»	$4p$,
$p-1$	»	$2p$,
$p-1$	»	p,
4	»	8,
2	»	4,
1	opération d'ordre	2.

17. G^2_{16p} est défini par les équations

$$a^{16} = b^p = 1, \qquad ba = ab^{\alpha},$$

où α appartient à l'exposant $4 \pmod{p}$; $p-1$ doit être divisible par 4; *exemples :* $p = 5, 13, 17, \ldots$.

On a

$$b^{\alpha'}a = ab \qquad \text{avec} \qquad \alpha'\alpha \equiv 1 \pmod{p}.$$

α' est différent de 1

$$ab^{\mu} = b^{\alpha'\mu}a,$$
$$(ab^{\mu})^2 = b^{\alpha'\mu}a^2b^{\mu} = a^2b^{\mu(1-\alpha')},$$
$$(ab^{\mu})^4 = a^2b^{\mu(1-\alpha')}a^2b^{\mu(1-\alpha')} = a^4.$$

Donc ab^{μ} est d'ordre 16, quel que soit μ.

De même

$$(a^2b^{\mu})^2 = a^4.$$

a^2b^{μ} est d'ordre 8, quel que soit μ.

Ainsi, $a^{2\lambda+1}b^{\mu}$, quel que soit μ, est d'ordre 16;

$a^{2(2\lambda+1)}b^{\mu}$, quel que soit μ, est d'ordre 8.

$a^{4(2\lambda+1)}b^{\mu}$ (μ premier avec p) est d'ordre $4p$.

a^8b^{μ} (μ premier avec p) est d'ordre $2p$.

b^{μ} (μ premier avec p) est d'ordre p.

$a^{4(2\lambda+1)}$ est d'ordre 4, a^8 d'ordre 2.

G^2_{16p} a :

$8p$	opérations d'ordre	16,
$4p$	»	8,
$2(p-1)$	»	$4p$,
$p-1$	»	$2p$,
$p-1$	»	p,
2	»	4,
1	opération d'ordre	2.

18. G^3_{16p} est défini par les équations

$$a^{16} = b^p = 1, \qquad ba = ab^{\alpha},$$

où α appartient à l'exposant $8 \pmod p$; $p-1$ est divisible par 8; *exemples :* $p = 17, 41, \ldots$.

Alors on a

$$b^{\alpha'}a = ab, \qquad \alpha'\alpha \equiv 1 \pmod p, \qquad b^{\alpha'\mu}a = ab^{\mu}, \qquad (ab^{\mu})^2 = b^{\alpha'\mu}a^2b^{\mu}.$$

Mais

$$b^{\alpha'^2\mu}a^2 = a^2b^{\mu}.$$

Donc

$$(ab^{\mu})^2 = b^{(\alpha'+\alpha'^2)\mu}a^2 = a^2b^{\alpha^2\mu(\alpha'+\alpha'^2)} = a^2b^{\mu(\alpha+1)}$$
$$(ab^{\mu})^4 = b^{(\alpha'+\alpha'^2)\mu}a^4b^{\mu(\alpha+1)} = b^{(\alpha'+\alpha'^2)\mu-(\alpha+1)\mu}a^4 = a^4b^{-(\alpha'+\alpha'^2)\mu+(\alpha+1)\mu}.$$

Enfin

$$(ab^{\mu})^8 = a^8.$$

Donc, $a^{2\lambda+1}b^{\mu}$, quel que soit μ, est d'ordre 16;
$a^{2(2\lambda+1)}b^{\mu}$, quel que soit μ, est d'ordre 8;
$a^{4(2\lambda+1)}b^{\mu}$, quel que soit μ, est d'ordre 4.
$a^{8}b^{\mu}$ (μ premier avec p) est d'ordre $2p$.
b^{μ} (μ premier avec p) est d'ordre p, et a^8 d'ordre 2.
G^3_{16p} a :

$8p$	opérations d'ordre	16,
$4p$	»	8,
$2p$	»	4,
$p-1$	»	$2p$,
$p-1$	»	p,
1	opération d'ordre	2.

19. G^4_{16p}, $a^{16}=b^p=1$, $ba=ab^{\alpha}$, α appartient à l'exposant 16 (mod p), $p-1$ sera divisible par 16; *exemples :* $p=17, 97, \ldots$.

$$b^{\lambda}a^{\mu} \;=a^{\mu}b^{\lambda\alpha^{\mu}},$$
$$(b^{\lambda}a^{\mu})^2=b^{\lambda}a^{2\mu}b^{\lambda\alpha^{\mu}}=a^{2\mu}b^{\lambda(\alpha^{\mu}+\alpha^{2\mu})},$$
$$(b^{\lambda}a^{\mu})^{\rho}=a^{\rho\mu}b^{\lambda(\alpha^{\mu}+\alpha^{2\mu}+\ldots+\alpha^{\rho\mu})}=a^{\rho\mu}b^{\lambda\alpha^{\mu}\frac{\alpha^{\rho\mu}-1}{\alpha^{\mu}-1}}.$$

Si α appartient à l'exposant 16 (mod p), pourvu que μ ne soit pas égal à 16, $\alpha^{\mu}-1$ sera différent de zéro.

Donc, on aura
$$(b^{\lambda}a^{\mu})^{16}=1.$$

Donc, $a^{2\lambda+1}b^{\mu}$, quel que soit μ, est d'ordre 16;
$a^{2(2\lambda+1)}b^{\mu}$, quel que soit μ, est d'ordre 8;
$a^{4(2\lambda+1)}b^{\mu}$, quel que soit μ, est d'ordre 4;
$a^{8}b^{\mu}$, quel que soit μ, est d'ordre 2.
b^{μ} (μ premier avec p) est d'ordre p.
G^4_{16p} a :

$8p$	opérations d'ordre	16,
$4p$	»	8,
$2p$	»	4,
p	»	2,
$p-1$	»	p.

20. G^5_{16p} est défini par les équations

$$a^8=b^2=c^p=1, \qquad ab=ba, \qquad ca=ac^{\alpha}, \qquad cb=bc^{-1},$$

où α appartient à l'exposant $4 \pmod p$)

$$c^\lambda a^\mu b^\nu = a^\mu c^{\lambda\alpha^\mu} b^\nu = a^\mu b^\nu c^{(-1)^\nu \lambda\alpha^\mu},$$

$$(c^\lambda a^\mu b^\nu)^2 = c^\lambda a^{2\mu} b^{2\nu} c^{(-1)^\nu \lambda\alpha^\mu} = a^{2\mu} b^{2\nu} c^{(-1)^\nu \lambda\alpha^\mu + (-1)^{2\nu}\lambda\alpha^{2\mu}},$$

$$(c^\lambda a^\mu b^\nu)^\rho = a^{\rho\mu} b^{\rho\nu} c^{(-1)^\nu \lambda\alpha^\mu + (-1)^{2\nu}\lambda\alpha^{2\mu} + \ldots + (-1)^{\rho\nu}\lambda\alpha^{\rho\mu}}.$$

ν ne peut prendre que deux valeurs.

1° Soit $\nu = 0$:

$$(c^\lambda a^\mu)^\rho = a^{\rho\mu} c^{\lambda\alpha^\mu \frac{\alpha^{\rho\mu}-1}{\alpha^\mu - 1}}.$$

Si μ n'est pas multiple de 4, $\alpha^\mu - 1$ est différent de zéro.

Donc, on a

$$(c^\lambda a^\mu)^4 = a^{4\mu}, \qquad \mu \not\equiv 0 \pmod 4.$$

2° Soit $\nu = 1$:

$$(c^\lambda a^\mu b)^\rho = a^{\rho\mu} b^\rho c^{-\lambda[\alpha^\mu - \alpha^{2\mu} + \ldots + (-1)^\rho \alpha^{\rho\mu}]} = a^{\rho\mu} b^\rho c^{\lambda\alpha^\mu \frac{(-1)^{\rho+1}\alpha^{\rho\mu} - 1}{\alpha^\mu + 1}}.$$

Soit $\rho = 2\rho'$:

$$(c^\lambda a^\mu b)^{2\rho'} = a^{2\rho'\mu} c^{-\lambda\alpha^\mu \frac{1+\alpha^{2\mu}}{1+\alpha^\mu}},$$

α appartient à l'exposant $4 \pmod p$. Donc, si μ est impair, $1 + \alpha^\mu$ est différent de zéro, $1 + \alpha^{2\mu}$ est nul, puisque $\alpha^2 = -1$.

Donc,

$$(c^\lambda a^{2\mu+1} b)^{2\rho} = a^{2\rho(2\mu+1)},$$

a^4 est une opération conjuguée d'elle-même.

Revenons à la formule

$$(c^\lambda a^{2\mu} b)^\rho = a^{2\mu\rho} b^\rho c^{-\lambda\alpha^{2\mu} + \lambda\alpha^{\mu 4} - \ldots + (-1)^\rho \lambda\alpha^{2\mu\rho}}.$$

Soit $\rho = 2\rho'$:

$$(c^\lambda a^{2\mu} b)^{2\rho'} = a^{4\mu\rho'} c^{-\lambda[(-1)^\mu - (-1)^{2\mu} + \ldots - (-1)^{2\mu\rho'}]}.$$

Si $\mu = 2\mu' + 1$, l'exposant de c sera

$$-\lambda(-1 - 1 - \ldots - 1) = +2\lambda\rho',$$

donc

$$(c^\lambda a^{2(2\mu+1)} b)^{2\rho} = a^{4\rho(2\mu+1)} c^{2\lambda\rho}$$

et, par suite,

$$(c^\lambda a^{2(2\mu+1)} b)^4 = c^{4\lambda}.$$

Si donc λ est premier avec p, $c^\lambda a^{2(2\mu+1)} b$ est d'ordre $4p$.

Si μ est pair,

$$\mu = 2\mu', \qquad (c^\lambda a^{4\mu'} b)^{2p} = 1,$$

$c^\lambda a^{4\mu'} b$ est d'ordre 2.

En résumé :

				Cela donne
$c^\lambda a^{2\mu+1} b$	(λ premier avec p)	est d'ordre	8	$4(p-1)$ opérations.
$c^\lambda a^{2(2\mu+1)} b$	»	»	$4p$	$2(p-1)$ »
$c^\lambda a^{4\mu} b$	»	»	2	$2(p-1)$ »
$c^\lambda a^{2\mu+1}$	»	»	8	$4(p-1)$ »
$c^\lambda a^{2(2\mu+1)}$	»	»	4	$2(p-1)$ »
$c^\lambda a^4$	»	»	$2p$	$(p-1)$ »
c^λ	»	»	p	$(p-1)$ »
$a^{2\mu+1} b^\nu$, $\nu = 1, 2$		»	8	8 »
$a^{2(2\mu+1)} b^\nu$, $\nu = 1, 2$		»	4	4 »
$a^{4\mu} b^\nu$, $\mu, \nu = 1, 2$ (sauf $\mu = \nu = 2$)		»	2	3 »

Donc G_{16p}^5 contient

$2(p-1)$	opérations d'ordre	$4p$,
$p-1$	»	$2p$,
$p-1$	»	p,
$8p$	»	8,
$2p+2$	»	4,
$2p+1$	»	2.

21. G_{16p}^6 est défini par les équations

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \qquad ab = ba^5, \qquad ca = ac^{-1}, \qquad cb = bc.$$

Rappelons le Tableau des opérations de G_{16}^1 :

8	a	$a\alpha$		ab		$ab\alpha$
4	α	α^3		α^3	$b\alpha$	α
2	α^2	α^2	b	α^2	α^2	α^2

Le groupe $\{a, b\}$ contient donc

8	opérations d'ordre	8,
4	»	4,
3	»	2.

Puisque $cb = bc$, $bc^\lambda = c^\lambda b$.

bc^λ (λ premier avec p) sera d'ordre $2p$; cela donne $(p-1)$ opérations d'ordre $2p$.

c^λ (λ premier avec p) sera d'ordre p; d'où $p-1$ opérations d'ordre p.

$$ca = ac^{-1}, \qquad \text{donc} \qquad c^{-1}a = ac, \qquad (ac)^2 = a^2.$$

Donc $a^{2\lambda+1}c^\mu$ (μ premier avec p) sera d'ordre 8.

Cela donne $4(p-1)$ opérations d'ordre 8.

$$cab = abc^{-1}, \qquad (cab)^2 = c\alpha^3c^{-1} = \alpha^3.$$

Donc $a^{2\lambda+1}bc^\mu$ (μ premier avec p) est d'ordre 8; d'où $4(p-1)$ opérations d'ordre 8.

α est une opération conjuguée d'elle-même.

Donc $\alpha^{2\lambda+1}b^\mu c^\lambda$ (λ premier avec p) est d'ordre $4p$; de là $4(p-1)$ opérations d'ordre $4p$.

$\alpha^2 b^\mu c^\lambda$ (λ premier avec p) est d'ordre $2p$; de là $2(p-1)$ opérations d'ordre $2p$.

G^6_{16p} a donc :

$4(p-1)$	opérations d'ordre	$4p$,
$3(p-1)$	»	$2p$,
$p-1$	»	p,
$8p$	»	8,
4	»	4,
3	»	2,

22. G^7_{16p} est défini par les équations

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \qquad ab = ba^5, \qquad ca = ac^\alpha, \qquad cb = bc,$$

où α appartient à l'exposant 4 (mod p).

On a toujours, pour le groupe $\{a, b\}$,

8	opérations d'ordre	8,
4	»	4,
3	»	2.

bc^λ (λ premier avec p) sera d'ordre $2p$, d'où $p-1$ opérations d'ordre $2p$,

c^λ (λ premier avec p) sera d'ordre p, d'où $p-1$ opérations d'ordre p.

$$c^\lambda a^\mu = a^\mu c^{\lambda\alpha^\mu}, \qquad (c^\lambda a^\mu)^2 = c^\lambda a^{2\mu} c^{\lambda\alpha^\mu} = a^{2\mu} c^{\lambda(\alpha^\mu+\alpha^{2\mu})},$$

$$(c^\lambda a^\mu)^p = a^{p\mu} c^{\lambda(\alpha^\mu+\alpha^{2\mu}+\ldots+\alpha^{p\mu})} = a^{p\mu} c^{\lambda\alpha^\mu \frac{\alpha^{p\mu}-1}{\alpha^\mu-1}}.$$

Si μ est incongru à zéro (mod 4), $\alpha^\mu - 1$ sera différent de zéro.
Donc

$$(c^\lambda a^{2\mu+1})^4 = a^4;$$

$a^{2\mu+1} c^\lambda$ est d'ordre 8; d'où $4(p-1)$ opérations d'ordre 8.

$$(c^\lambda a^{2(2\mu+1)})^2 = a^4;$$

$a^{2(2\mu+1)} c^\lambda$ est d'ordre 4; d'où $2(p-1)$ opérations d'ordre 4.
$a^4 c^\lambda$ est d'ordre $2p$; d'où $(p-1)$ opérations d'ordre $2p$.

$$c^\lambda a^\mu b = a^\mu c^{\lambda\alpha^\mu} b = a^\mu b c^{\lambda\alpha^\mu},$$

$$(c^\lambda a^\mu b)^2 = c^\lambda a^{6\mu} c^{\lambda\alpha^\mu} = a^{6\mu} c^{\lambda(\alpha^\mu+\alpha^{6\mu})} = c^{-\lambda(\alpha^\mu+\alpha^{6\mu})} a^{6\mu},$$

$$(c^\lambda a^\mu b)^4 = a^{4\mu}.$$

$c^\lambda a^{2\mu+1} b$ est donc d'ordre 8, ce qui donne $4(p-1)$ opérations d'ordre 8,
$c^\lambda a^{2(2\mu+1)} b$ est donc d'ordre 4, ce qui donne $2(p-1)$ opérations d'ordre 4,
$c^\lambda a^4 b$ est donc d'ordre $2p$, ce qui donne $p-1$ opérations d'ordre $2p$.
G_{16p}^7 a donc :

$3(p-1)$	opérations d'ordre	$2p$,
$p-1$	»	p,
$8p$	»	8,
$4p$	»	4,
3	»	2.

23. G_{16p}^8 a pour équations de définition

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \qquad ab = ba^5, \qquad ca = ac, \qquad cb = bc^{-1}.$$

On a toujours, pour le groupe $\{a, b\}$,

8	opérations d'ordre	8,
4	»	4,
3	»	2.

$c^{-\lambda} b = bc^\lambda$, $(bc^\lambda)^2 = 1$; d'où $p-1$ opérations d'ordre 2.

c^λ donne $(p-1)$ opérations d'ordre p.

$a^\mu bc^\lambda = c^{-\lambda}a^\mu b$, $(a^\mu bc^\lambda)^2 = (a^\mu b)^2$, quel que soit λ.

Donc

$a^{2\mu+1}bc^\lambda$	est d'ordre	8;	d'où	$4(p-1)$	opérations d'ordre	8,
$a^{2(2\mu+1)}bc^\lambda$	»	4;	»	$2(p-1)$	»	4,
a^4bc^λ	»	2;	»	$(p-1)$	»	2,
$a^{2\mu+1}c^\lambda$	»	$8p$;	»	$4(p-1)$	»	$8p$,
$a^{2(2\mu+1)}c^\lambda$	»	$4p$;	»	$2(p-1)$	»	$4p$,
a^4c^λ	»	$2p$;	»	$(p-1)$	»	$2p$.

G_{16p}^8 possède :

$4(p-1)$	opérations d'ordre	$8p$,
$2(p-1)$	»	$4p$,
$p-1$	»	$2p$,
$p-1$	»	p,
$4p+4$	»	8,
$2p+2$	»	4,
$2p+1$	»	2.

24. G_{16p}^9 est défini par les équations

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \qquad ab = ba^5, \qquad ca = ac^\alpha, \qquad cb = bc^{-1},$$

α appartient à l'exposant $4 \pmod{p}$.

On a toujours, pour le groupe $\{a, b\}$,

8	opérations d'ordre	8,
4	»	4,
3	»	2.

$c^{-\lambda}b = bc^\lambda$, $(bc^\lambda)^2 = 1$; d'où $p-1$ opérations d'ordre 2.

c^λ donne $p-1$ opérations d'ordre p.

$a^{2\mu+1}c^\lambda$	est d'ordre	8 (*voir* n° 22),	d'où	$4(p-1)$	opérations d'ordre	8,
$a^{2(2\mu+1)}c^\lambda$	»	4	»	$2(p-1)$	»	4,
a^4c^λ	»	$2p$,	»	$(p-1)$	»	$2p$,

$$a^\mu bc^\lambda = a^\mu c^{-\lambda}b, \qquad c^{-\alpha}a = ac, \qquad c^{\alpha\lambda}a = ac^{-\lambda}, \qquad c^{\alpha^\mu\lambda}a^\mu = a^\mu c^{-\lambda},$$

$$a^\mu bc^\lambda = c^{\alpha^\mu\lambda}a^\mu b, \qquad (a^\mu bc^\lambda)^2 = c^{\alpha^\mu\lambda}(a^\mu b)^2c^\lambda = c^{\alpha^\mu\lambda}a^{6\mu}c^\lambda = c^{\lambda(\alpha^\mu-1)}a^{6\mu} = a^{6\mu}c^{\lambda(1-\alpha^\mu)}$$

et

$$(a^{\mu} bc^{\lambda})^4 = a^{4\mu}.$$

$(a^{2\mu+1} bc^{\lambda})^4 = a^4$; c'est une opération d'ordre 8; d'où $4(p-1)$ opérations d'ordre 8.

$(a^{2(2\mu+1)} bc^{\lambda})^4 = 1$; d'où $2(p-1)$ opérations d'ordre 4.

$a^4 bc^{\lambda}$ est d'ordre 2; d'où $p-1$ opérations d'ordre 2.

G^9_{16p} a :

$p-1$	opérations d'ordre	$2p$,
$p-1$	»	p,
$8p$	»	8,
$4p$	»	4,
$2p+1$	»	2.

25. G^{10}_{16p} est défini par les équations

$$a^2 = b^2 = c^4 = d^p = 1, \quad ac = ca, \quad bc = cb, \quad ab = bac^2,$$
$$da = ad, \quad db = bd, \quad dc = cd^{-1}.$$

Le groupe des opérations $\{a, b, c\}$ a pour Tableau :

$\frac{4}{2}$	$\frac{}{a}$	$\frac{}{b}$	$\frac{c}{c^2}$	$\frac{ac}{c^2}$	$\frac{ab}{c^2}$	$\frac{}{abc}$

$\{a, b, c\}$ donne donc

		8	opérations d'ordre	4,
		7	»	2,
d^{λ}	donne	$(p-1)$	»	p,
ad^{λ}	donne	$(p-1)$	»	$2p$,
bd^{λ}	donne	$(p-1)$	»	$2p$.

$dc)^2 = c^2$, dc est d'ordre 4.

$c^3 d^{\lambda}$, cd^{λ}	donnent	$2(p-1)$	opérations d'ordre	4,
$c^2 d^{\lambda}$	donne	$(p-1)$	»	$2p$,
bcd^{λ}, $bc^3 d^{\lambda}$	donnent	$2(p-1)$	»	4,
acd^{λ}, $ac^3 d^{\lambda}$	donnent	$2(p-1)$	»	4,
$bc^2 d^{\lambda}$, $ac^2 d^{\lambda}$	donnent	$2(p-1)$	»	$2p$,
abd^{λ}	donne	$p-1$	»	$4p$.

$abcd^\lambda = d^{-\lambda} abc$, donc $(abcd^\lambda)^2 = 1$.

$abcd^\lambda$, abc^3d^λ	donnent	$2(p-1)$	opérations d'ordre	2,
abc^2d^λ	donne	$(p-1)$	»	$2p$.

G_{16p}^{10} admet :

$2(p-1)$	opérations d'ordre	$4p$,
$5(p-1)$	»	$2p$,
$p-1$	»	p,
$6p+2$	»	4,
$2p+5$	»	2.

26. G_{16p}^{11} a pour équations de définition

$$a^2 = b^2 = c^4 = d^p = 1, \quad ac = ca, \quad bc = cb, \quad ab = bac^2,$$
$$da = ad, \quad db = bd^{-1}, \quad dc = cd.$$

$\{a, b, c\}$ donne

		8	opérations d'ordre	4,
		7	»	2,
d^λ	donne	$(p-1)$	»	p,
ad^λ	donne	$(p-1)$	»	$2p$,
bd^λ	donne	$(p-1)$	»	2,
cd^λ, c^3d^λ	donnent	$2(p-1)$	»	$4p$,
c^2d^λ	donne	$(p-1)$	»	$2p$,
bcd^λ, bc^3d^λ	donnent	$2(p-1)$	»	4,
acd^λ, ac^3d^λ	donnent	$2(p-1)$	»	$4p$,
bc^2d^λ	donne	$p-1$	»	2,
ac^2d^λ	donne	$p-1$	»	$2p$,

$$abd^\lambda = ad^{-\lambda}b = d^{-\lambda}ab, \qquad (abd^\lambda)^2 = c^2.$$

$abc^\mu d^\lambda$ donne

$4(p-1)$ opérations d'ordre 4.

Bref G_{16p}^{11} a

$4(p-1)$	opérations d'ordre	$4p$,
$3(p-1)$	»	$2p$,
$p-1$	»	p,
$6p+2$	»	4,
$2p+5$	»	2.

27. G_{16p}^{12} a pour équations de définition

$$a^2 = b^2 = c^4 = d^p = 1, \quad ac = ca, \quad bc = cb, \quad ab = bac^2,$$
$$da = ad^{-1}, \quad db = bd^{-1}, \quad dc = cd^{-1}.$$

$\{a, b, c\}$ donne

		8	opérations d'ordre	4,
		7	»	2,
d^λ	donne	$p-1$	»	p,
ad^λ, bd^λ, cd^λ, c^3d^λ	donnent	$4(p-1)$	»	2,
c^2d^λ	donne	$p-1$	»	$2p$,
bcd^λ, bc^3d^λ	donnent	$2(p-1)$	»	$4p$,
acd^λ, ac^3d^λ	donnent	$2(p-1)$	»	$4p$,
bc^2d^λ, ac^2d^λ	donnent	$2(p-1)$	»	2,
abd^λ, abc^2d^λ	donnent	$2(p-1)$	»	$4p$,
$abcd^\lambda$, abc^3d^λ	donnent	$2(p-1)$	»	2.

G_{16p}^{12} possède :

$6(p-1)$	opérations d'ordre	$4p$,
$p-1$	»	$2p$,
$p-1$	»	p,
8	»	4,
$8p-1$	»	2.

28. G_{16p}^{13} est défini par les équations

$$a^4 = b^4 = c^p = 1, \quad ab = ba^3, \quad ca = ac^{-1}, \quad cb = bc.$$

Le Tableau des opérations de $\{a, b\}$ est

4	a	b	ab	
2	α	β	β	$\alpha\beta$

$\{a, b\}$ contient :

		12	opérations d'ordre	4,
		3	»	2,
c^λ	donne	$p-1$	»	p,
ac^λ, a^3c^λ	donnent	$2(p-1)$	»	4,
bc^λ, b^3c^λ	donnent	$2(p-1)$	»	$4p$,
a^2c^λ, b^2c^λ	donnent	$2(p-1)$	»	$2p$,
abc^λ, ab^3c^λ, a^3bc^λ, $a^3b^3c^\lambda$, ab^2c^λ, $a^3b^2c^\lambda$	donnent	$6(p-1)$	»	4,
a^2bc^λ, $a^2b^3c^\lambda$	donnent	$2(p-1)$	»	$4p$,
$a^2b^2c^\lambda$	donne	$p-1$	»	$2p$.

Bref G_{16p}^{13} a

$4(p-1)$	opérations d'ordre	$4p$,
$3(p-1)$	»	$2p$,
$p-1)$	»	p,
$8p+4$	»	4,
3	»	2.

Remarque : $4p$ opérations, savoir : a, a^3, ab^2, a^3b^2, ac^λ, a^3c^λ, ab^2c^λ, $a^3b^2c^\lambda$ ont pour carré α.

$4p+4$ opérations, savoir : b, b^3, ab, ab^3, a^2b, a^3b, a^2b^3, a^3b^3, abc^λ, ab^3c^λ, a^3bc^λ, $a^3b^3c^\lambda$ ont pour carré β.

29. G_{16p}^{14} est défini par les équations

$$a^4=b^4=c^p=1,\qquad ab=ba^3,\qquad ca=ac,\qquad cb=bc^{-1}.$$

$\{a, b\}$ contient

		12	opérations d'ordre	4,
		3	»	2,
c^λ	donne	$(p-1)$	»	p,
ac^λ, a^3c^λ, ab^2c^λ, $a^3b^2c^\lambda$	donnent	$4(p-1)$	»	$4p$,
bc^λ, b^3c^λ, $a^\mu bc^\lambda$, $a^\mu b^3c^\lambda$	donnent	$8(p-1)$	»	4 (carré β),
a^2c^λ, b^2c^λ, $a^2b^2c^\lambda$	donnent	$3(p-1)$	»	$2p$.

On remarquera qu'il y a $8p$ opérations d'ordre 4 ayant pour carré β et 4 seulement ayant pour carré α.

Donc G_{16p}^{14} diffère de G_{16p}^{13}, bien qu'ayant le même nombre d'opérations d'ordre donné que ce dernier groupe, savoir :

$4(p-1)$	opérations d'ordre	$4p$,
$3(p-1)$	»	$2p$,
$p-1$	»	p,
$8p+4$	»	4,
3	»	2.

30. G_{16p}^{15} est défini par les équations

$$a^4=b^4=c^p=1,\qquad ab=ba^3,\qquad ca=ac,\qquad cb=bc^\beta,$$

où β appartient à l'exposant $4 \pmod p$.

$\{a, b\}$ contient

		12	opérations d'ordre	4,
		3	»	2,
c^λ	donne	$p-1$	»	p,
ac^λ, a^3c^λ	donnent	$2(p-1)$	»	$4p$,

$$(cb)^2 = cb^2c^\beta = c^{1-\beta}b^2 = b^2c^{\beta-1} \quad \text{donc} \quad (cb)^4 = 1,$$

bc^λ, b^3c^λ	donnent	$2(p-1)$	opérations d'ordre	4,
a^2c^λ	donne	$p-1$	»	$2p$,
b^2c^λ	donne	$p-1$	»	2,
a^2bc^λ, $a^2b^3c^\lambda$, abc^λ, a^3bc^λ, ab^3c^λ, $a^3b^3c^\lambda$, ab^2c^λ, $a^3b^2c^\lambda$	donnent	$8(p-1)$	»	4,
$a^2b^2c^\lambda$	donne	$p-1$	»	2.

Donc G_{16p}^{15} a

$2(p-1)$	opérations d'ordre	$4p$,
$p-1$	»	$2p$,
$p-1$	»	p,
$10p+2$	»	4,
$2p+1$	»	2.

31. G_{16p}^{16} a pour équations de définition

$$a^4 = b^2 = c^2 = d^p = 1, \quad ac = ca, \quad bc = cb, \quad ab = bac,$$
$$da = ad^{-1}, \quad db = bd, \quad dc = cd.$$

Le Tableau des opérations de $\{a, b, c\}$ est

4	a		ab	
2	$a^2 = \alpha$	b	$\alpha c = \alpha\beta$	$c = \beta$

D'où

		8	opérations d'ordre	4,
		7	»	2,
d^λ	donne	$(p-1)$	»	p,
ad^λ, a^3d^λ	donnent	$2(p-1)$	»	4,
a^2d^λ, bd^λ, cd^λ	donnent	$3(p-1)$	»	$2p$,
$a^{2\mu+1}bd^\lambda$, $a^{2\mu+1}cd^\lambda$, $a^{2\mu+1}bcd^\lambda$	donnent	$6(p-1)$	»	4,
a^2bd^λ, a^2cd^λ, a^2bcd^λ, bcd^λ	donnent	$4(p-1)$	»	$2p$.

G_{16p}^{16} possède

$7(p-1)$	opérations d'ordre	$2p$,
$p-1$	»	p,
$8p$	»	4,
7	»	2.

32. G_{16p}^{17} est défini par les équations

$$a^4 = b^2 = c^2 = d^p = 1, \quad ac = ca, \quad cb = cb, \quad ab = abc,$$
$$da = ad^\alpha, \quad db = bd, \quad dc = cd,$$

où α appartient à l'exposant 4 (mod p).

Le groupe $\{a, b, c\}$ donne

		8	opérations d'ordre	4,
		7	»	2,
d^λ	donne	$(p-1)$	»	p,
ad^λ, a^3d^λ	donnent	$2(p-1)$	»	4,
a^2d^λ	donne	$(p-1)$	»	2,
bd^λ, cd^λ, bcd^λ	donnent	$3(p-1)$	»	$2p$,
abd^λ, a^3bd^λ, $abcd^\lambda$ acd^λ, a^3cd^λ, a^3bcd^λ	donnent	$6(p-1)$	»	4,
a^2bd^λ, a^2cd^λ, a^2bcd^λ	donnent	$3(p-1)$	»	2.

G_{16p}^{17} a

$3(p-1)$	opérations d'ordre	$2p$,
$8p$	»	4,
$p-1$	»	p,
$4p+3$	»	2.

33. G_{16p}^{18} a pour équation de définition

$$a^4 = b^2 = c^2 = d^p = 1, \quad ac = ca, \quad bc = cb, \quad ab = bac,$$
$$da = ad, \quad db = bd^{-1}, \quad dc = cd,$$

$\{a, b, c\}$ donne

		8	opérations d'ordre	4,
		7	»	2,
d^λ	donne	$p-1$	»	p,
ad^λ, a^3d^λ	donnent	$2(p-1)$	»	$4p$,
a^2d^λ, cd^λ, a^2cd^λ	donnent	$3(p-1)$	»	$2p$,
bd^λ, bcd^λ, a^2bd^λ, a^2bcd^λ	donnent	$4(p-1)$	»	2,
abd^λ, a^3bd^λ, $abcd^\lambda$, a^3bcd^λ	donnent	$4(p-1)$	»	4,
acd^λ, a^3cd^λ	donnent	$2(p-1)$	»	$4p$.

G_{16p}^{18} possède

$4(p-1)$	opérations d'ordre	$4p$,
$3(p-1)$	»	$2p$,
$p-1$	»	p,
$4p+4$	»	4,
$4p+3$	»	2.

34. G_{16p}^{19} est défini par les équations

$$a^8=b^4=c^p=1,\qquad a^4=b^2,\qquad ab=ba^7,\qquad ca=ac,\qquad cb=bc^{-1},$$

$\{a, b\}$ a pour Tableau d'opérations

8	a	a^3				
4	a^2	$a^2\alpha$	b	ab	a^2b	a^3b
2	α	α	α	α	α	α

donc $\{a, b\}$ donne

		4	opérations d'ordre	8,
		10	»	4,
		1	opération d'ordre	2,
c^λ	donne	$p-1$	opérations d'ordre	p,
$a^{2\mu+1}c^\lambda$	donne	$4(p-1)$	»	$8p$,
$a^{2(2\mu+1)}c^\lambda$	donne	$2(p-1)$	»	$4p$,
a^4c^λ	donne	$p-1$	»	$2p$,
$a^\mu bc^\lambda$	donne	$8(p-1)$	»	4.

Donc G_{16p}^{19} a

$4(p-1)$	opérations d'ordre	$8p$.
$2(p-1)$	»	$4p$,
$p-1$	»	$2p$,
$p-1$	»	p,
4	»	8,
$8p+2$	»	4,
1	opération d'ordre	2.

35. G_{16p}^{20} est défini par les équations

$$a^8=b^4=c^p=1,\qquad a^3=b^2,\qquad ab=ba^7,\qquad ca=ac^{-1},\qquad cb=bc,$$

$\{a, b\}$ donne

		4	opérations d'ordre	8,
		10	»	2,
		1	opération d'ordre	2,
c^λ	donne	$(p-1)$	opérations d'ordre	p,
$a^{2\mu+1}c^\lambda$	donne	$4(p-1)$	»	8,
$a^{2(2\mu+1)}c^\lambda,\quad a^{2(2\mu+1)}bc^\lambda,\quad a^4bc^\lambda$	donnent	$5(p-1)$	»	$4p$,
$a^4c^\lambda,\quad bc^\lambda$	donnent	$2(p-1)$	»	$2p$,
$a^{2\mu+1}bc^\lambda$	donne	$4(p-1)$	»	4.

Donc G_{16p}^{20} a

$5(p-1)$	opérations d'ordre	$4p$,
$2(p-1)$	»	$2p$,
$p-1$	»	p,
$4p$	»	8,
$4p+6$	»	4,
1	opération d'ordre	2.

36. Le groupe G_{16p}^{21} est défini par les équations

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \qquad ab = ba^3, \qquad ac = ca, \qquad cb = bc^{-1}.$$

Le Tableau des opérations de $\{a, b\}$ est

8	a	a^3					
4	a^2	$a^2\alpha$		ab		a^3b	
2	α	α	b	α	a^2b	α	

Par suite, $\{a, b\}$ donne

		4	opérations d'ordre	8,
		6	»	4,
		5	»	2,
c^λ	donne	$p-1$	»	p,
$a^{2\mu+1}c^\lambda$	donne	$4(p-1)$	»	$8p$,
$a^{2(2\mu+1)}c^\lambda$	donne	$2(p-1)$	»	$4p$,
a^4c^λ	donne	$p-1$	»	$2p$,
$bc^\lambda,\quad a^{2(2\mu+1)}bc^\lambda,\quad a^4bc^\lambda$	donnent	$4(p-1)$	»	2,
$a^{2\mu+1}bc^\lambda$	donne	$4(p-1)$	»	4.

Bref G_{16p}^{21} a

$4(p-1)$	opérations d'ordre	$8p$,
$2(p-1)$	»	$4p$,
$p-1$	»	$2p$,
$p-1$	»	p,
4	»	8,
$4p+2$	»	4,
$4p+1$	»	2.

37. Le groupe G_{16p}^{22} a pour équations de définitions

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \qquad ab = ba^3, \qquad ca = ac^{-1}, \qquad cb = bc.$$

$\{a, b\}$ donne

		4	opérations d'ordre	8,
		6	»	4,
		5	»	2,
c^λ	donne	$p-1$	»	p,
$a^{2\mu+1}c^\lambda$	donne	$4(p-1)$	»	8,
$a^{2(2\mu+1)}c^\lambda$	donne	$2(p-1)$	»	$4p$,
a^4c^λ, bc^λ, $a^{2(\mu+1)}bc^\lambda$, a^4bc^λ	donnent	$5(p-1)$	»	$2p$,
$a^{2\mu+1}bc^\lambda$	donne	$4(p-1)$	»	4.

Bref, on a, pour le groupe G_{16p}^{22},

$2(p-1)$	opérations d'ordre	$4p$,
$5(p-1)$	»	$2p$,
$p-1$	»	p,
$4p$	»	8,
$4p+2$	»	4,
5	»	2.

38. G_{16p}^{23} est défini par les équations

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \qquad ab = ba^3, \qquad ca = ac^{-1}, \qquad cb = bc^{-1}$$

$\{a, b\}$ donne

		4	opérations d'ordre	8,
		6	»	4,
		5	»	2,
c^λ	donne	$p-1$	»	p,
$a^{2\mu+1}c^\lambda$	donne	$4(p-1)$	»	8,
$a^{2(2\mu+1)}c^\lambda$, $a^{2\mu+1}bc^\lambda$	donnent	$6(p-1)$	»	$4p$,
a^4c^λ	donne	$p-1$	»	$2p$,
bc^λ, $a^{2(2\mu+1)}bc^\lambda$, a^4bc^λ	donnent	$4(p-1)$	»	2.

Donc G_{16p}^{23} a

$6(p-1)$	opérations d'ordre	$4p$,
$p-1$	»	$2p$,
$p-1$	»	p,
$4p$	»	8,
6	»	4,
$4p+1$	»	2.

39. G_{16p}^{24} a pour équations de définition

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \qquad ab = ba^7, \qquad ca = ac, \qquad cb = bc^{-1}.$$

Le Tableau des opérations de $\{a, b\}$ est

8	a	a^3				
4	a^2	$a^2\alpha$				
2	α	α	b	ab	a^2b	a^3b

Donc $\{a, b\}$ donne

		4	opérations d'ordre	8,
		2	»	4,
		9	»	2,
c^λ	donne	$p-1$	»	p,
$a^{2\mu+1}c^\lambda$	donne	$4(p-1)$	»	$8p$,
$a^{2(2\mu+1)}c^\lambda$	donne	$2(p-1)$	»	$4p$,
a^4c^λ	donne	$p-1$	»	$2p$,
$a^\mu bc^\lambda$	donne	$8(p-1)$	»	2.

G_{16p}^{24} possède

$4(p-1)$	opérations d'ordre	$8p$,
$2(p-1)$	»	$4p$,
$p-1$	»	$2p$,
$p-1$	»	p,
4	»	8,
2	»	4,
$8p+1$	»	2.

40. Enfin G_{16p}^{25} est défini par les équations

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \qquad ab = ba^7, \qquad ca = ac^{-1}, \qquad bc = cb.$$

Le groupe $\{a, b\}$ donne

		4	opérations d'ordre	8,
		2	»	4,
		9	»	2,
c^λ	donne	$(p-1)$	»	p,
$a^{2\mu+1}c^\lambda$	donne	$4(p-1)$	»	8,
$a^{2(2\mu+1)}c^\lambda$	donne	$2(p-1)$	»	$4p$,
a^4c^λ, $a^{2\mu}bc^\lambda$	donnent	$5(p-1)$	»	$2p$,
$a^{2\mu+1}bc^\lambda$	donne	$4(p-1)$	»	2.

G_{16p}^{25} a

$2(p-1)$	opérations d'ordre	$4p$,
$5(p-1)$	»	$2p$,
$p-1$	»	p,
$4p$	»	8,
2	»	4,
$4p+5$	»	2.

41. B. J'arrive au cas où il n'y a pas dans le groupe cherché de sous-groupe d'ordre p conjugué de lui-même; alors supposons qu'il y ait un sous-groupe d'ordre 16, conjugué de lui-même.

Supposons que le sous-groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même est G_{16}.

Soit a une opération d'ordre 16. Elle engendre G_{16}.

Pour engendrer G_{16}, on peut remplacer a par

$$a, \text{ ou } a^3, \quad \text{ou } a^5,\ a^7,\ a^9,\ a^{11},\ a^{13},\ a^{15}.$$

Le groupe des isomorphismes de G_{16} est d'ordre 8.

Ces isomorphismes sont, l'isomorphisme identique, 1, puis

$$\begin{aligned}
s &= (a, a^3, a^9, a^{11})(a^2, a^6)(a^4, a^{12})(a^5, a^{15}, a^{13}, a^7)(a^{10}, a^{14}),\\
s^2 &= (a, a^9)(a^3, a^{11})(a^5, a^{13})(a^7, a^{15}),\\
s^3 &= (a, a^{11}, a^9, a^3)(a^2, a^6)(a^4, a^{12})(a^5, a^7, a^{13}, a^{15})(a^{10}, a^{14}),\\
t &= (a, a^5, a^9, a^{13})(a^2, a^{10})(a^3, a^{15}, a^{11}, a^7)(a^6, a^{14}),\\
st &= (a, a^{15})(a^2, a^{14})(a^3, a^{13})(a^4, a^{12})(a^5, a^{11})(a^6, a^{10})(a^7, a^9),\\
s^2 t &= (a, a^{13}, a^9, a^5)(a^2, a^{10})(a^3, a^7, a^{11}, a^{15})(a^6, a^{14}),\\
s^3 t &= (a, a^7)(a^2, a^{14})(a^3, a^5)(a^4, a^{12})(a^6, a^{10})(a^9, a^{15})(a^{11}, a^{13}).
\end{aligned}$$

On a

$$s^4 = t^4 = 1, \qquad s^2 = t^2, \qquad st = ts.$$

De là résulte que si b est une opération d'ordre p, permutable avec le groupe G_{16}, elle est nécessairement permutable avec toutes les opérations de G_{16}.

On retombe sur le groupe $G_{16} G_p$.

42. Soit $G_8 G_2$ le sous-groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même

$$\alpha^8 = \beta^2 = 1.$$

On pourra remplacer (pour engendrer le sous-groupe)

$$\begin{array}{lll}
\alpha & \text{par} & \alpha,\ \alpha^3,\ \alpha^5,\ \alpha^7,\ \alpha\beta,\ \alpha^3\beta,\ \alpha^5\beta,\ \alpha^7\beta,\\
\beta & \text{par} & \beta,\ \alpha^4\beta.
\end{array}$$

Le groupe des isomorphismes de $G_8 G_2$ est donc d'ordre 16.

Il n'y a donc aucun isomorphisme d'ordre impair.

Donc, si une opération d'ordre p est permutable avec $G_8 G_2$, elle sera permutable avec toutes les opérations de ce groupe.

On retrouve $G_8 G_2 G_p$.

43. Soit $(G_4)^2$ le sous-groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même.

Soient $a^4 = b^4 = 1$, $ab = ba$.

Voici le Tableau des opérations :

4	a	a^3	b	ab	$a^2 b$	$a^3 b$	ab^2	$a^3 b^2$	b^3	ab^3	$a^2 b^3$	$a^3 b^3$
2	a^2	a^2	b^2	$a^2 b^2$	b^2	$a^2 b^2$	a^2	a^2	b^2	$a^2 b^2$	b^2	$a^2 b^2$

Il y a 12 opérations d'ordre 4 :

4	ont pour carré	a^2,
4	»	b^2,
4	»	$a^2 b^2$,

On pourra prendre pour opération génératrice a' l'une des 12 opérations d'ordre 4, puis ensuite, pour b', l'une des 8 opérations d'ordre 4 n'ayant pas même carré que a'.

En tout, cela donne

$$12.8 = 96 \text{ isomorphes.}$$

Or,

$$96 = 3.32.$$

Puisque 3^1 est la plus grande puissance de 3 qui divise 96, les isomorphismes d'ordre 3 se partagent en groupes cycliques d'ordre 3 formant une suite complète de sous-groupes conjugués dans le groupe total des isomorphismes.

Soient $c^3 = 1$.

Posons

$$ac = cb, \qquad bc = ca^\alpha b^\beta;$$

d'où

$$a^\alpha b^\beta c = a^\alpha c a^{\alpha\beta} b^{\beta^2} = c a^{\alpha\beta} b^{\alpha+\beta^2}.$$

On devra donc avoir

$$\beta^2 + \alpha \equiv 0, \qquad \alpha\beta \equiv 1 \qquad (\text{mod} 4).$$

Donc

$$\beta^3 \equiv -1 \qquad (\text{mod} 4),$$

d'où

$$\beta = 3, \qquad \alpha = 3.$$

Le groupe G_{48}^{26} sera défini par les équations

$$a^4 = b^4 = c^3 = 1, \qquad ab = ba,$$
$$\bar{c} = (a, b, a^3 b^3).$$

44. Le sous-groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même est $G_4(G_2)^2$. On a

$$a^4 = b^2 = c^2 = 1, \qquad ab = ba, \qquad ac = ca, \qquad bc = cb.$$

4	a	a^3		ab		$a^3 b$		ac		$a^3 c$		abc		$a^3 bc$
2	a^2	a^2	b	a^2	$a^2 b$	a^2	c	a^2	$a^2 c$	a^2	bc	a^2	$a^2 bc$	a^2

Pour avoir le groupe des isomorphismes, on peut remplacer a par l'une des

8 opérations d'ordre 4, soit a'; puis b par l'une des 6 opérations b, a^2b, c, a^2c, bc, a^2bc, soit b'; ensuite c par l'une des 4 opérations d'ordre 2 qui restent après que l'on a exclu b' et a'^2b'.

Le groupe des isomorphismes est donc d'ordre

$$8.6.4 = 3.64 = 192.$$

Les isomorphismes d'ordre 3 se partagent en groupes d'ordre 3 formant une suite complète unique de sous-groupes conjugués.

Si l'on se reporte aux considérations faites dans un Mémoire antérieur [1], on a ici, $m_1 = 1$, $ad = da$, par exemple (en supposant $d^3 = 1$),

$$\overline{d} = (a^\alpha b, a^\alpha c, a^\alpha bc).$$

On trouve ainsi le groupe décomposable $G_{12}^3 G_4$ [2].

45. Le sous-groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même est $(G_2)^4$. L'ordre du groupe des isomorphismes est

$$(16-1)(16-2)(16-4)(16-8) = 15.14.12.8 = 2^6.3^2.5.7 = 20\,160.$$

On a

$$m_2 \equiv 15 \pmod p \quad [3].$$

Si $p = 7$, peut-on avoir $m_2 = 8$?

Soit

$$a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = e^7 = 1,$$

a, b, c, d étant deux à deux permutables.

Les opérations avec lesquelles e est permutable forment un groupe, car si l'on a

$$ae = ea, \qquad be = eb,$$

on aura

$$abe = aeb = eab.$$

Or il faudrait, en prenant les 8 opérations d'ordre 2 et en y ajoutant l'opération identique, ce qui fait 9 opérations, que ces 9 opérations constituent un sous-groupe de $(G_2)^4$.

Mais 9 ne divise pas 2^4. Donc c'est impossible.

On peut avoir $m_2 = 1$,

$$ae = ea;$$

---

(1) *Loc. cit.* au commencement du Chapitre VIII.

(2) *Loc. cit.*, Chap. V.

(3) *Loc. cit.* au commencement du Chapitre VIII.

puis

$$\bar{e} = (b, c, d, bc, cd, bcd, bd)(ab, ac, ad, abc, acd, abcd, abd).$$

On trouve ainsi $G^{8}_{56} G_2$ (¹).

D'ailleurs, dans le groupe des isomorphismes de $(G_2)^4$, il y a une suite complète unique de sous-groupes conjugués d'ordre 7.

46. Faisons $p = 5$.

On peut supposer $m_2 = 10$, ou $m_2 = 5$, ou $m_2 = 0$.

Mais les opérations de $(G_2)^4$ permutables avec e forment un groupe. On en déduit qu'on a nécessairement $m_2 = 0$; autrement l'ordre du groupe des opérations de $(G_2)^4$ permutables avec e serait 6, ou 11, ce qui est impossible puisque ces nombres ne divisent pas 2^4.

On peut supposer, par exemple, qu'on a

$$\bar{e} = (a, b, c, d, abcd)(ab, bc, cd, abc, bcd)(ac, bd, abd, ad, acd).$$

Introduisons les exposants imaginaires de Galois.

Prenons comme congruence fondamentale

$$x^4 \equiv x^3 + x^2 + x + 1 \quad (\text{mod } 2).$$

Voyons à quel exposant appartient x :

$$x^1 = x, \qquad x^2 = x^2, \qquad x^3 = x^3, \qquad x^4 \equiv x^3 + x^2 + x + 1,$$
$$x^5 \equiv x^4 + x^3 + x^2 + x \equiv 1.$$

Donc x appartient à l'exposant 5 et G^{27}_{80} est défini par les équations

$$a^{(2,\, x^4+x^3+x^2+x+1)} = b^5 = 1, \qquad ab = ba^x.$$

On remarquera d'ailleurs que les sous-groupes d'ordre 5 du groupe des isomorphismes de $(G_2)^4$ font partie d'une suite complète unique de sous-groupes conjugués.

47. Soit $p = 3$. On aura

$$m_2 = 15,\ 12,\ 9,\ 6,\ 3,\ 0.$$

Pour $m_2 = 15$, on aurait un sous-groupe d'ordre 3 conjugué de lui-même.

Les opérations de $(G_2)^4$ permutables avec e devant former un groupe, les hypothèses $m_2 = 12, 9, 6$ sont exclues.

(¹) *Loc. cit.*, fin du Chapitre VIII.

Soit $m_2 = 3$.

On aurait, par exemple,

$$e^3 = 1, \qquad ce = ec, \qquad de = ed,$$
$$\overline{c} = (a, b, ab).$$

On trouve ainsi $G_{12}^3 (G_2)^2$.

Soit enfin $m_2 = 0$.

Appelons b la transformée de a par l'opération e :

$$ae = eb.$$

Soit ensuite $be = ec'$, et par suite $c'e = ea$.

On a

$$abc'e = eabc'; \qquad \text{donc} \qquad abc' = 1, \qquad c' = ab.$$

Bref, on pourra prendre pour $\overline{e}$ l'isomorphisme suivant :

$$\overline{e} = (a, b, ab)(c, d, cd)(ac, bd, abcd)(ad, bcd, abc)(bc, abd, acd).$$

Introduisons les exposants imaginaires de Galois.

Prenons la congruence fondamentale

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod 2.$$

On a vu que x, x^2, x^3, $x^3 + x^2 + x + 1$ appartiennent à l'exposant 5, $1 + x$ appartient à l'exposant 15.

Il en est de même de $1 + x^2 \equiv (1 + x)^2$, de $x + x^2 + x^3 \equiv (1 + x)^4$, de $(1 + x + x^2) \equiv (1 + x)^7$, de $1 + x^3 \equiv (1 + x)^8$, de $1 + x + x^3 \equiv (1 + x)^{11}$, de $x + x^2 \equiv (1 + x)^{13}$ et de $x + x^3 \equiv (1 + x)^{14}$.

Les deux seuls nombres appartenant à l'exposant 3 sont

$$1 + x^2 + x^3 \quad \text{et} \quad x^2 + x^3 \qquad [1 + x^2 + x^3 \equiv (1 + x)^5; \quad x^2 + x^3 \equiv (1 + x)^{10}].$$

Si l'on envisage le groupe des isomorphismes de $(G_2)^4$, ou plutôt le groupe des substitutions linéaires simplement isomorphe, j'observe que, puisqu'on a $m_2 = 0$, les substitutions d'ordre 3 correspondront à des congruences caractéristiques ayant toutes leurs racines imaginaires.

Cette congruence caractéristique sera donc

$$\sigma^4 + \sigma^3 + \sigma^2 + \sigma + 1 \equiv 0 \pmod 2$$

ou

$$\sigma^4 + \sigma^3 + 1 \equiv 0$$

ou

$$\sigma^4 + \sigma^2 + 1 \equiv 0$$

ou

$$\sigma^4 + \sigma + 1 \equiv 0.$$

Cette congruence caractéristique est d'ailleurs donnée par la formule

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\sigma & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22}+\sigma & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+\sigma & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}+\sigma \end{vmatrix} \equiv 0 \quad (^1).$$

G_{48}^{28} sera défini par les équations

$$a^{(2,\, x^4+x^3+x^2+x+1)} = b^3 = 1, \qquad ab = ba^{x^3+x^2}.$$

48. Le groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même est $G_8^1 G_2$

$$a^4 = b^2 = c^2 = 1, \qquad ab = ba^3, \qquad ac = ca, \qquad bc = cb.$$

4	a	a^3						ac	a^3c					
2	a^2	a^2	b	ab	a^2b	a^3b	c	a^2	a^2	a^2c	bc	abc	a^2bc	a^3bc

L'ordre du groupe des isomorphismes est 64.

En effet, on peut remplacer a par l'une des 4 opérations a, a^3, ac, a^3c; puis b par l'une des 8 opérations b, ab, a^2b, a^3b, bc, abc, a^2bc, a^3bc; enfin c par l'une des 2 opérations c, a^2c.

Cela fait en tout 64 isomorphismes.

Donc, il n'y a pas d'isomorphisme d'ordre premier impair.

Autrement : on a

$$m_4 \equiv 2 \pmod p, \qquad \text{donc} \qquad m_4 = 2;$$

donc l'opération d, d'ordre p, est permutable avec a et c.

Ensuite il y a 11 opérations d'ordre 2.

Si $p = 7$, m_2 est au moins égal à 4 (puisque d est permutable avec a^2, c, a^2c).

D'ailleurs m_2 ne peut pas être égal à 4 : il n'y a pas dans le groupe $G_8^1 G_2$ de sous-groupe d'ordre 5.

Si $p = 5$, l'hypothèse $m_2 = 6$ est inacceptable : il n'y a pas dans le groupe $G_8^1 G_2$ de sous-groupe d'ordre 7.

---

(1) *Loc. cit.*, Chap. VII. — *Voir* aussi Chap. VIII.

Si $p = 3$, $m_2 = 8$, 5. C'est impossible : il n'y a pas dans $G_8^1 G_2$ de sous-groupe d'ordre 6, ou 9.

49. Le sous-groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même est $G_8^2 G_2$:

$$a^2 = b^2 = \alpha, \qquad \alpha^2 = c^2 = 1, \qquad ab = ba\alpha, \qquad ac = ca, \qquad bc = cb,$$

4	a	b	ab	$a\alpha$	$b\alpha$	$ab\alpha$		ac	bc	abc		$ac\alpha$	$bc\alpha$	$abc\alpha$
2	α	α	α	α	α	α	c	α	α	α	$c\alpha$	α	α	α

On peut remplacer a par l'une des douze opérations a, b, ab, $a\alpha$, $b\alpha$, $ab\alpha$, ac, bc, abc, $ac\alpha$, $bc\alpha$, $abc\alpha$; soit a' ; puis b par l'une des 8 opérations d'ordre 4 qui restent, après qu'on a effacé a', $a'c$, $a'\alpha$, $a'c\alpha$; enfin c peut être remplacé par l'une des deux opérations c, $c\alpha$.

Le groupe des isomorphismes est donc d'ordre

$$12.16 = 192.$$

D'après cela, il y a, dans le groupe des isomorphismes, une suite complète unique de sous-groupes conjugués d'ordre 3.

Soit d une opération d'ordre 3. Je dis que d est nécessairement permutable avec α.

En effet, si d n'est pas permutable avec α, il n'est permutable avec aucune des opérations d'ordre 4, qui toutes ont pour carré α. On aurait, par exemple, $ad = da'$, a' étant d'ordre 4.

Mais on en déduit $a^2\, d = da'^2$, donc $\alpha\, d = d\alpha$. Il y a contradiction. Donc d est permutable avec α, et, par suite, avec c et $c\alpha$.

Il y a six groupes d'ordre 4, donc on a

$$m_4 \equiv 6 \qquad (\text{mod}\, 3) \quad (^1).$$

L'hypothèse $m_4 = 6$ doit être écartée (7 ne divise pas 16).

Donc $m_4 = 3$ ou $m_4 = 0$.

Soit $m_4 = 3$; si d est permutable avec a, b, ab, il est aussi permutable avec ac, bc, abc, donc on aurait $m_4 = 6$.

Mais, s'il est permutable avec ac, il est permutable avec a, puisqu'il est déjà permutable avec c.

Donc l'hypothèse $m_4 = 3$ doit être écartée.

---

(1) *Loc. cit.*, le commencement du Chapitre VIII.

Reste $m_4 = 0$, qui donne $G_{24}^7 G_2$ (¹),

$$a^2 = b^2 = \alpha, \qquad \alpha^2 = c^2 = d^3 = 1,$$
$$ab = ba\alpha, \qquad ac = ca, \qquad bc = cb, \qquad dc = cd, \qquad \bar{d} = (a, ab, b).$$

50. Le sous-groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même est G_{16}^1 :

$$(a^8 = b^2 = 1, \; ab = ba^5).$$

Le Tableau des opérations est le suivant :

8	a	a^3	a^5	a^7		ab		a^3b		a^5b		a^7b
4	a^2	a^6	a^2	a^6		a^6	a^2b	a^2		a^6	a^6b	a^2
2	a^4	a^4	α^4	a^4	b	a^4	a^4	a^4	a^4b	a^4	a^4	a^4

On peut remplacer a par l'une des 8 opérations a, a^3, a^5, a^7, ab, a^3b, a^5b, a^7b, et b par l'une des 2 opérations b, a^4b, ce qui donne 16 pour l'ordre du groupe des isomorphismes; donc, il n'y a pas d'isomorphisme de degré impair.

51. Le sous-groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même est G_{16}^4 (²) :

$$a^2 = b^2 = c^4 = 1, \qquad ab = bac^2, \qquad ac = ca, \qquad bc = cb;$$

il a, pour Tableau de ses opérations,

4			ab			abc^2	c	c^3	ac	bc		ac^3	bc^3	
2	a	b	c^2	ac^2	bc^2	c^2	e^2	c^2	c^2	c^2	abc	c^2	c^2	abc^3

On peut remplacer a par l'une des 6 opérations a, b, ac^2, bc^2, abc, abc^2.

a étant ainsi remplacé par a', on peut choisir pour b l'une des 4 opérations qui restent quand on a supprimé a' et $a'c^2$. On peut enfin remplacer l'opération c par c ou c^3.

Cela fait en tout $48 = 3.2^4$ isomorphismes.

Il y aura donc, en particulier, une suite complète unique de sous-groupes conjugués d'ordre 3.

On pourra, par exemple, prendre

$$\bar{d} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & abc & c \end{pmatrix}$$

(¹) *Loc. cit.*, fin du Chapitre VIII.

(²) *Loc. cit*, Chap. VI.

ou

$$\overline{d} = (a, b, abc)(ab, ac^3, bc^3)(ac^2, bc^2, abc^3)(ac, bc, abc^2).$$

Le groupe G_{48}^{29} est alors défini par les équations

$$a^2 = b^2 = c^2 = d^3 = 1, \qquad ab = bac^2, \qquad ac = ca, \qquad bc = cb, \qquad cd = dc,$$
$$\overline{d} = (a, b, abc).$$

52. Le sous-groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même est G_{16}^2 :

$$a^4 = b^4 = 1, \qquad ab = ba^3.$$

Le Tableau des opérations est ici, en posant $a^2 = \alpha$, $b^2 = \beta$, $ab = ba\alpha$:

4	a	$a\alpha$	b	ab	$b\alpha$	$ab\alpha$	$a\beta$		$a\alpha\beta$	$b\beta$	$ab\beta$	$b\alpha\beta$	$ab\alpha\beta$
2	α	α	β	β	β	β	α	$\alpha\beta$	α	β	β	β	β

a pourra être remplacé par l'une des 4 opérations a, $a\alpha$, $a\beta$, $a\alpha\beta$.
b » 8 b, ab, $b\alpha$, $ab\alpha$, $b\beta$, $ab\beta$, $b\alpha\beta$, $ab\alpha\beta$.

L'ordre du groupe des isomorphismes est 32.

Il n'y a pas d'isomorphisme d'ordre impair.

53. Le sous-groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même est G_{16}^3 :

$$a^2 = \alpha, \qquad b^2 = \alpha^2 = \beta^2 = 1, \qquad ab = ba\beta,$$

4	a	$a\alpha$		ab		$ab\alpha$		$a\beta$	$a\alpha\beta$		$ab\beta$		$ab\alpha\beta$	
2	α	α	b	$\alpha\beta$	$\alpha\beta$	$\alpha\beta$	β	α	α	$b\beta$	$\alpha\beta$	$b\alpha\beta$	$\alpha\beta$	$b\alpha$

a pourra être remplacé par l'une des 8 opérations a, $a\alpha$, ab, $ab\alpha$, $a\beta$, $a\alpha\beta$, $ab\beta$, $ab\alpha\beta$; b, par l'une des 4 opérations b, $b\beta$, $b\alpha$, $b\alpha\beta$.

Cela donne 32 pour l'ordre du groupe des isomorphismes.

Il n'y a pas d'isomorphisme d'ordre impair.

54. Le sous-groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même est G_{16}^5 :

$$a^4 = b^2 = \alpha, \qquad \alpha^3 = 1, \qquad ab = ba^3\alpha.$$

8	a	a^3	$a\alpha$	$a^3\alpha$								
4	a^2	$a^2\alpha$	a^2	$a^2\alpha$	b	ab	a^2b	a^3b	$b\alpha$	$ab\alpha$	$a^2b\alpha$	$a^3b\alpha$
2	α	α	α	α	α	α	α	α	α	α	α	α

a peut être remplacé par l'une des 4 opérations a, a^3, $a\alpha$, $a^3\alpha$, et b par l'une des 8 opérations $a^\lambda b$, $\lambda = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

On a donc un groupe d'isomorphismes d'ordre 32.

Donc, pas d'isomorphisme d'ordre premier impair.

55. Le sous-groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même est G_{16}^6 :

$$a^4 = \alpha, \qquad b^2 = \alpha^2 = 1, \qquad ab = ba^3.$$

8	a	a^3	$a\alpha$	$a^3\alpha$								
4	a^2	$a^2\alpha$	a^2	$a^2\alpha$		ab		a^3b		$ab\alpha$		$a^3b\alpha$
2	α	α	α	α	b	α	a^2b	α	$b\alpha$	α	$a^2b\alpha$	α

On pourra remplacer a par l'une des 4 opérations $a^{2\lambda+1}$, $\lambda = 0, 1, 2, 3$, et b, par l'une des 4 opérations $a^{2\lambda}b$, $\lambda = 0, 1, 2, 3$.

Le groupe des isomorphismes est donc d'ordre 16.

Il n'y a pas d'isomorphismes d'ordre premier impair.

56. Enfin, le sous-groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même est G_{16}^7 :

$$a^4 = \alpha, \qquad b^2 = \alpha^2 = 1, \qquad ab = ba^3\alpha.$$

8	a	a^3	$a\alpha$	$a^3\alpha$								
4	a^2	$a^2\alpha$	a^2	$a^2\alpha$								
2	α	α	α	α	b	ab	a^2b	a^3b	$b\alpha$	$ab\alpha$	$a^2b\alpha$	$a^3b\alpha$

On pourra remplacer a par l'une des 4 opérations $a^{2\lambda+1}$, $\lambda = 0, 1, 2, 3$, et b par l'une des 8 opérations $a^\lambda b$, $\lambda = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Le groupe des isomorphismes est d'ordre 32.

Il n'y a donc pas d'isomorphisme d'ordre premier impair.

57. (C). Soit maintenant à considérer le cas où le groupe cherché d'ordre $16p$ n'admet ni sous-groupe d'ordre p conjugué de lui-même, ni sous-groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même.

Alors $p = 7, 5$, ou 3 (*voir* n° 1).

Si $p = 5$, on a

$$16 = m(5h + 1); \qquad \text{d'où} \qquad h = 3, \qquad m = 1,$$

il y a alors 16 sous-groupes conjugués d'ordre 5, d'où 64 opérations d'ordre 5.

Reste $80 - 64 = 16$ opérations; il y a donc nécessairement un sous-groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même.

Le cas $p = 5$ peut donc être écarté.

58. Envisageons le cas $p = 7$.

L'ordre du groupe est

$$7 . 16 = 112.$$

Il y a 8 groupes conjugués d'ordre 7 (n° 1), donc 48 opérations d'ordre 7.

Ensuite on a

$$16 . 7 = 16 m (2h + 1) \quad (^1).$$

Donc

$$7 = m(2h + 1) \qquad \text{avec} \qquad h \neq 0.$$

Donc

$$h = 3.$$

Cela donne 7 groupes conjugués d'ordre 16.

Appelons n le nombre des opérations communes à tous ces groupes transformés d'ordre 16. On a

$$48 + 7(16 - n) + n \leqq 112$$

ou

$$48 - 6n \leqq 0,$$

$$n \geqq 8.$$

Or, d'autre part, n ne peut être supérieur à 8.

Donc

$$n = 8.$$

Ainsi, il y a un sous-groupe d'ordre 8, conjugué de lui-même.

Le sous-groupe conjugué de lui-même, d'ordre maximum, aura donc pour son ordre un multiple de 8.

Ce sera un groupe d'ordre 56.

Ce sous-groupe d'ordre 56 doit contenir un sous-groupe d'ordre 8 conjugué de lui-même, mais ne doit contenir aucun sous-groupe d'ordre 7 conjugué de lui-même.

Seul le groupe G_{56}^{8} (²) répond aux conditions imposées.

Remarquons, à cause de l'égalité

$$48 + 7 . 8 + 8 = 112,$$

que le groupe pourra contenir des opérations d'ordre 7, ou 16, ou 8, ou 4, ou 2, mais aucune opération d'un autre ordre (sauf l'opération identique).

(¹) *Loc. cit.*, n° **21**, p. 18.

(²) *Loc. cit.*, Chap. VIII.

On a

$$a^{(2,x^3+x+1)} = b^7 = 1, \qquad ab = ba^x,$$

$$a^x = b, \qquad a^{x^2} = c, \qquad a^{x^3} = a^{x+1} = ab, \qquad a^{x^4} = a^{x^2+x} = bc,$$

$$a^{x^5} \equiv a^{x^3+x^2} = a^{x^2+x+1} = abc,$$

$$a^{x^6} = a^{x^3+x^2+x} = a^{x^2+1} = ac, \qquad a^{x^7} = a^{x^3+x} = a,$$

donc

$$a^2 = b^2 = c^2 = d^7 = 1, \qquad ab = ba, \qquad ac = ca, \qquad bc = cb,$$

$$\overline{d} = (a, b, c, ab, bc, abc, ac).$$

A ce groupe d'ordre 56, il faut adjoindre une opération e, d'ordre 2 ou 4 (puisque e^2 doit faire partie du groupe d'ordre 56).

De plus, e ne sera permutable avec aucune des opérations d'ordre 7, puisque autrement on aurait une opération d'ordre 14. D'après la remarque faite plus haut, cela est impossible.

Soit

$$de = ea^{\lambda} b^{\mu} c^{\nu} d^{\rho},$$

$$(de)^2 = de^2 a^{\lambda} b^{\mu} c^{\nu} d^{\rho}.$$

Mais

$$e^2 = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma},$$

donc

$$(de)^2 = d\alpha^{\lambda+\alpha} b^{\mu+\beta} c^{\nu+\gamma} d^{\rho} = d^{1+\rho} a^{\lambda'} b^{\mu'} c^{\nu'}.$$

Comme de doit être d'ordre 2 ou 4 (car on a vu que le groupe d'ordre 112 envisagé contient, comme opérations d'ordre 7, les 48 opérations d'ordre 7 du groupe G_{56}^{8})

$$1 + \rho = 0, \qquad \rho = -1.$$

Donc

$$de = ea^{\lambda} b^{\mu} c^{\nu} d^{-1}.$$

Je dis que e ne peut être permutable à deux opérations d'ordre 2 que d transforme l'une dans l'autre.

En effet, soient m et m_1 deux opérations d'ordre 2, telles que l'on ait

$$me = em, \qquad m_1 e = em_1, \qquad md = dm_1.$$

On a, d'une part,

$$m\, de = ema^{\lambda} b^{\mu} c^{\nu} d^{-1},$$

et d'autre part

$$dm_1 e = ea^{\lambda} b^{\mu} c^{\nu} d^{-1} m_1.$$

Donc

$$m\, d^{-1} = d^{-1} m_1$$

ou

$$dm = m_1 d,$$

d'où

$$m d^2 = d m_1 d = d^2 m_1,$$

ce qui est inexact.

Considérons les 21 isomorphismes d'ordre 2 du groupe $\{a, b, c\}$ (1).

Ces 21 isomorphismes forment une suite complète unique de sous-groupes conjugués d'ordre 2.

Ils sont de la forme $(a, b)(c, abc)$.

Les 3 opérations d'ordre 2 qu'ils transforment chacune en elle-même forment un groupe avec l'opération identique.

Soit $[1, a_1, a_2, a_3]$ ce groupe.

On a

$$[1, a_1, a_2, a_3]\, d = d[1, a'_1, a'_2, a'_3],$$

d n'étant permutable à aucune opération d'ordre 2.

Donc a'_1 n'est pas égale à a_1, ni a'_2 à a_2, ni a'_3 à a_3.

D'ailleurs, il est impossible que a'_1, a'_2, a'_3 soient les opérations a_1, a_2, a_3 rangées dans un autre ordre, car, si l'on avait, par exemple, $a_1 d = d a_2$, e, d'après la remarque faite plus haut, ne serait permutable ni à a_1, ni à a_2.

Donc, il faut que les trois opérations a'_1, a'_2, a'_3 soient distinctes de a_1, a_2, a_3. Or ceci est impossible, car si l'on prend deux sous-groupes d'ordre 4 quelconques du groupe $\{a, b, c\}$, ils auront toujours deux opérations communes.

Bref, le groupe cherché n'existe pas.

59. Soit maintenant $p = 3$.

Il peut y avoir 16 ou 4 groupes transformés d'ordre 3 (n° 1). D'autre part

$$3 = m(2h + 1).$$

Comme on a $h \neq 0$, il y aura 3 groupes transformés d'ordre 16.

16 groupes transformés d'ordre 3 donnent 32 opérations d'ordre 3 ; il y aurait donc un sous-groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même. L'hypothèse est à rejeter.

Ainsi, prenons le cas de 4 groupes transformés d'ordre 3.

Appelons d le nombre des opérations communes aux groupes transformés d'ordre 16.

On a

$$8 + 3(16 - d) + d \leqq 48$$

ou

$$8 - 2d \leqq 0, \qquad d \geqq 4.$$

Il y aura donc un sous-groupe d'ordre 4, ou d'ordre 8, conjugué de lui-même,

---

(1) *Loc. cit.,* Chap. VIII.

ce qui entraîne pour le groupe cherché un sous-groupe conjugué de lui-même maximum d'ordre 24.

Ce sous-groupe d'ordre 24 ne doit pas avoir de sous-groupe d'ordre 3 conjugué de lui-même.

Tels sont les groupes G_{24}^{7}, G_{24}^{9}, $G_{12}^{3}\,G_2$ [1].

Prenons d'abord G_{24}^{7} :

$$a^2 = b^2 = \alpha, \qquad c^3 = \alpha^2 = 1, \qquad ab = ba\alpha, \qquad \bar{c} = (a, ab, b).$$

Voici le Tableau des opérations :

4	a	$a\alpha$	b	$b\alpha$	ab	$ab\alpha$
2	α	α	α	α	α	α

6	c	$c\alpha$	bc	abc
3	abc^2	c^2	ac^2	bc^2
2	α	α	α	α
3	$ac\alpha$	c	$bc\alpha$	$abc\alpha$
6	$abc^2\alpha$	$c^2\alpha$	$ac^2\alpha$	$bc^2\alpha$

Le groupe des isomorphismes cogrédients sera ici d'ordre 12; cela tient à la présence de l'opération α, qui est conjuguée d'elle-même dans le groupe considéré.

D'une façon générale, si G est un groupe, Γ le sous-groupe formé des opérations de G conjuguées d'elles-mêmes, le groupe des isomorphismes cogrédients sera simplement isomorphe à $\frac{G}{\Gamma}$.

Pour trouver le groupe total des isomorphismes, nous pourrons procéder comme il suit :

1° On choisit pour a l'une des six opérations a, $a\alpha$, b, $b\alpha$, ab, $ab\alpha$.

2° Soit a' l'opération choisie, on prendra pour b l'une des 6 opérations précédentes, à l'exception de a' et de $a'\alpha$; soit b'.

3° Parmi les 6 opérations d'ordre 3, c, c^2, ac^2, bc^2, abc^2, $ac\alpha$, $bc\alpha$, $abc\alpha$, il faudra choisir une opération c' telle que

$$c' = (a', a'b', b').$$

---

[1] *Loc. cit.*, fin du Chapitre VIII.

Or, écrivons d'abord le groupe des isomorphismes cogrédients :

$$\begin{aligned}
\overline{a} &= (c,\, abc\alpha)(b,\, b\alpha)(c\alpha,\, abc)(c^2,\, bc^2)(c^2\alpha,\, bc^2\alpha)(ac,\, bc)\\
&\qquad (ac\alpha,\, bc\alpha)(ac^2,\, abc^2)(ac^2\alpha,\, abc^2\alpha)(ab,\, ab\alpha),\\
\overline{b} &= (c,\, ac\alpha)(a,\, a\alpha)(c\alpha,\, ac)(c^2,\, abc^2)(c^2\alpha,\, abc^2\alpha)(bc,\, abc)\\
&\qquad (bc\alpha,\, abc\alpha)(bc^2,\, ac^2)(bc^2\alpha,\, ac^2\alpha)(ab,\, ab\alpha),\\
\overline{ab} &= (c,\, bc\alpha)(b,\, b\alpha)(a,\, a\alpha)(c\alpha,\, bc)(abc,\, ac)(c^2,\, ac^2)(bc^2,\, abc^2)\\
&\qquad (c^2\alpha,\, ac^2\alpha)(bc^2\alpha,\, abc^2\alpha)(abc\alpha,\, ac\alpha),\\
\overline{c} &= (a,\, ab,\, b)(a\alpha,\, ab\alpha,\, b\alpha)(ac,\, abc,\, bc)(ac\alpha,\, abc\alpha,\, bc\alpha)\\
&\qquad (ac^2,\, abc^2,\, bc^2)(ac^2\alpha,\, abc^2\alpha,\, bc^2\alpha),\\
\overline{ac} &= (a,\, ab,\, b\alpha)(a\alpha,\, ab\alpha,\, b)(c,\, bc\alpha,\, abc\alpha)(c\alpha,\, bc,\, abc)\\
&\qquad (c^2,\, ac^2,\, bc^2)(c^2\alpha,\, ac^2\alpha,\, bc^2\alpha),\\
\overline{bc} &= (a,\, ab\alpha,\, b)(a\alpha,\, ab,\, b\alpha)(c,\, abc\alpha,\, ac\alpha)(c\alpha,\, abc,\, ac)\\
&\qquad (c^2,\, bc^2,\, abc^2)(c^2\alpha,\, bc^2\alpha,\, abc^2\alpha),\\
\overline{abc} &= (a,\, ab\alpha,\, b\alpha)(a\alpha,\, ab,\, b)(c,\, ac\alpha,\, bc\alpha)(c\alpha,\, ac,\, bc),\\
&\qquad (c^2,\, abc^2,\, ac^2)(c^2\alpha,\, abc^2\alpha,\, ac^2\alpha),\\
\overline{c^2} &= (a,\, b,\, ab)(a\alpha,\, b\alpha,\, ab\alpha)(ac,\, bc,\, abc)(ac\alpha,\, bc\alpha,\, abc\alpha)\\
&\qquad (ac^2,\, bc^2,\, abc^2)(ac^2\alpha,\, bc^2\alpha,\, abc^2\alpha),\\
\overline{ac^2} &= (a,\, b,\, ab\alpha)(a\alpha,\, b\alpha,\, ab)(c,\, ac\alpha,\, abc\alpha)(c\alpha,\, ac,\, abc)\\
&\qquad (c^2,\, abc^2,\, bc^2)(c^2\alpha,\, abc^2\alpha,\, bc^2\alpha).\\
\overline{bc^2} &= (a,\, b\alpha,\, ab\alpha)(a\alpha,\, b,\, ab)(c,\, bc\alpha,\, ac\alpha)(c\alpha,\, bc,\, ac)\\
&\qquad (c^2,\, ac^2,\, abc^2)(c^2\alpha,\, ac^2\alpha,\, abc^2\alpha),\\
\overline{abc^2} &= (a,\, b\alpha,\, ab)(a\alpha,\, b,\, ab\alpha)(c,\, abc\alpha,\, bc\alpha)(c\alpha,\, abc,\, bc)\\
&\qquad (c^2,\, bc^2,\, ac^2)(c^2\alpha,\, bc^2\alpha,\, ac^2\alpha).
\end{aligned}$$

D'après la manière indiquée plus haut pour former les isomorphismes, si l'on fait $a' = a$, $b' = b$, on a

$$c' = c.$$

Si $a' = a$, $b' = b\alpha$, alors

$$c' = (a,\, ab\alpha,\, b\alpha), \qquad \text{donc} \qquad c' = abc\alpha.$$

On retrouve ainsi l'isomorphisme cogrédient $\overline{a}$.

Soit $a' = a$, $b' = ab$, alors

$$c' = (a,\, b\alpha,\, ab),$$

donc

$$c' = abc^2.$$

On a alors

$$\overline{d} = (b, ab, b\alpha, ab\alpha)(c, abc^2, abc\alpha, ac^2)$$
$$(ac, bc^2\alpha, bc, c^2\alpha)(c\alpha, abc^2\alpha, abc, ac^2\alpha)(ac\alpha, bc^2, bc\alpha, c^2).$$

$\left[\text{En effet, } \overline{d} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & ab & abc^2 \end{pmatrix}.\right]$

On voit maintenant que l'on a

$$\overline{d}^2 = \overline{a}.$$

Vient ensuite

$$\overline{ad} = \overline{d^3} = (b, ab\alpha, b\alpha, ab)(c, ac^2, abc\alpha, abc^2)(ac, c^2\alpha, bc, bc^2\alpha)$$
$$(c\alpha, ac^2\alpha, abc, abc^2\alpha)(ac\alpha, c^2, bc\alpha, bc^2)\ldots,$$

Le groupe des isomorphismes est d'ordre $24 = 3.2^3$.

Il en résulte que les sous-groupes d'ordre 3 formeront une suite complète unique de sous-groupes conjugués.

Cela posé, il s'agit d'obtenir un groupe d'ordre 48, dans lequel le sous-groupe G_{24}^7 envisagé soit un sous-groupe conjugué de lui-même.

On a d'abord le groupe $G_{24}^7 G_2$ déjà trouvé.

Si l'on veut prendre une opération d, d'ordre 4, permutable avec toutes les opérations de G_{24}^7, il faudra que l'on ait

$$d^2 = \alpha.$$

Mais alors, on aura

$$ad = da, \qquad a^2 = d^2 = \alpha.$$

Donc $ad = d'$ sera d'ordre 2.

On retrouve $G_{24}^7 G_2$.

Si l'opération d donne le même isomorphisme que a, par exemple, alors on aurait $ad = da$.

Ensuite ad serait permutable avec toutes les opérations de G_{24}^7, et serait d'ordre 2 ou 4.

C'est un cas déjà examiné.

L'isomorphisme fourni par d sera donc un isomorphisme contragrédient.

60. Étudions de plus près le groupe des isomorphismes de G_{24}^7.

C'est un groupe d'ordre 24 qui ne contient pas de sous-groupe d'ordre 3 conjugué de lui-même.

Il y a donc une suite complète de 4 sous-groupes conjugués d'ordre 3.

Or continuons l'énumération des isomorphismes; on a encore

$$\overline{bd} = (a, a\alpha)(b, ab)(ac, abc^2\alpha)(c\alpha, bc^2\alpha)(c^2\alpha, abc)(bc, ac^2\alpha)$$
$$(ac\alpha, abc^2)(c, bc^2)(c^2, abc\alpha)(ac^2, bc\alpha)(ab\alpha, b\alpha),$$

$$\overline{abd} = (a, a\alpha)(b, ab\alpha)(b\alpha, ab)(c\alpha, c^2\alpha)(bc, abc^2\alpha)(abc, bc^2\alpha)$$
$$(ac, ac^2\alpha)(c, c^2)(bc\alpha, abc^2)(abc\alpha, bc^2)(ac\alpha, ac^2),$$

$$\overline{cd} = (a, b\alpha, a\alpha, b)(c, abc^2, bc\alpha, bc^2)(c\alpha, abc^2\alpha, bc, bc^2\alpha)$$
$$(c^2, ac\alpha, ac^2, abc\alpha)(c^2\alpha, ac, ac^2\alpha, abc),$$

$$\overline{acd} = (a, b\alpha)(ab, ab\alpha)(a\alpha, b)(c, c^2)(c\alpha, c^2\alpha)(bc\alpha, ac^2)(bc, ac^2\alpha)$$
$$(abc\alpha, abc^2)(abc, abc^2\alpha)(bc^2ac\alpha)(bc^2\alpha, ac),$$

$$\overline{bcd} = (a, b)(a\alpha, b\alpha)(ab, ab\alpha)(c, ac^2)(c\alpha, ac^2\alpha)(abc, bc^2\alpha)(abc\alpha, bc^2)$$
$$(ac, abc^2\alpha)(ac\alpha, abc^2)(c^2, bc\alpha)(c^2\alpha, bc),$$

$$\overline{abcd} = (a, b, a\alpha, ba)(c, bc^2, bc\alpha, abc^2)(c\alpha, bc^2\alpha, bc, abc^2\alpha)$$
$$(c^2, abc\alpha, ac^2, ac^2\alpha)(c^2\alpha, abc, ac^2\alpha, ac),$$

$$\overline{c^2d} = (a, ab)(a\alpha, ab\alpha)(b, b\alpha)(c, abc^2)(c\alpha, abc^2\alpha)(ac, c^2\alpha)(ac\alpha, c^2)$$
$$(bc, ac^2\alpha)(bc\alpha, ac^2)(abc, bc^2\alpha)(abc\alpha, bc^2),$$

$$\overline{ac^2d} = (a, ab, a\alpha, ab\alpha)(c, bc^2, ac\alpha, ac^2)(c\alpha, bc^2\alpha, ac, ac^2\alpha)$$
$$(abc, abc^2\alpha, bc, c^2\alpha)(abc\alpha, abc^2, bc\alpha, c^2),$$

$$\overline{bc^2d} = (a, ab\alpha)(a\alpha, ab)(b, b\alpha)(c, c^2)(c\alpha^2, c^2\alpha)(bc, bc^2\alpha)$$
$$(ac, abc^2\alpha)(ac\alpha, abc^2)(ac^2, abc\alpha)(ac^2\alpha, abc),$$

$$\overline{abc^2d} = (a, ab\alpha, a\alpha, ab)(c, ac^2, ac\alpha, bc^2)(c\alpha, ac^2\alpha, ac, bc^2\alpha)$$
$$(abc, c^2\alpha, bc, abc^2\alpha)(abc\alpha, c^2, bc\alpha, abc^2).$$

Soit

$$\overline{bd} = a', \qquad \bar{c} = b'.$$

On a

$$a'^2 = 1, \qquad b'^3 = 1,$$

$$a'b' = (a, ab\alpha, a\alpha, ab)(c, ac^2, ac\alpha, bc^2)(ac, bc^2\alpha, c\alpha, ac^2\alpha)$$
$$(abc^2\alpha, abc, c^2\alpha, bc)(abc^2, abc\alpha, c^2, bc\alpha).$$

Donc

$$a'^2 = b'^3 = 1, \qquad (a'b')^4 = 1.$$

Donc, le groupe des isomorphismes de G_{24}^7 est isomorphe avec le groupe G_{24}^9, ou le groupe symétrique de 4 lettres.

61. Le groupe G_{24}^9 est bien connu : on voit donc, par cette remarque qui termine le n° 60, que les isomorphismes contragrédients d'ordre 4 du groupe G_{24}^7 forment une suite complète de 3 groupes conjugués d'ordre 4.

Les isomorphismes contragrédients d'ordre 2 forment une suite complète de 6 groupes conjugués d'ordre 2.

Prenons d'abord un isomorphisme contragrédient d'ordre 4.

(Puisque $\overline{d^2} = \overline{a}$, on aura $d^2 = a$, $d^4 = a^2 = \alpha$.)

Posons

$$a^4 = b^2 = \alpha, \qquad c^3 = \alpha^2 = 1.$$

$$\overline{a} = (b,\ a^2 b,\ b\alpha,\ a^2 b\alpha)(c,\ a^2 bc^2,\ a^2 bc\alpha,\ a^2 c^2)(a^2 c,\ bc^2\alpha,\ bc,\ c^2\alpha),$$
$$(c\alpha,\ a^2 bc^2\alpha,\ a^2 bc,\ a^2 c^2\alpha,)(a^2 c\alpha,\ bc^2,\ bc\alpha,\ c^2);$$

$$\overline{c} = (a^2,\ a^2 b,\ b)(a^2\alpha,\ a^2 b\alpha,\ b\alpha)(a^2 c,\ a^2 bc,\ bc)(a^2 c\alpha,\ a^2 bc\alpha,\ bc\alpha),$$
$$(a^2 c^2,\ a^2 bc^2,\ bc^2)(a^2 c^2\alpha,\ a^2 bc^2\alpha,\ bc^2\alpha).$$

D'ailleurs on a

$$ac = a^2 c^2 a = a^2 c.ca = ca^2 bca = ca^3 c^2\alpha,$$

$$a^3 c^2\alpha.c = a^3\alpha = c.c^2 a^3\alpha = c.a^3 bc,$$

$$a^3 bc.c = a^3 bc^2 = a^3 ca^2 c = aca^2 ba^2 c = acbc = ca^3 c^2\alpha bc = ca^3 c^2\alpha ca^2 = ca.$$

On a donc

$$\overline{c} = (a,\ a^3 c^2\alpha,\ a^3 bc).$$

Posons $ab = b'$, d'où

$$a^8 = 1, \qquad b'^2 = 1,$$

car

$$ab = a^2 ba\alpha, \qquad b = aba^5, \qquad ab = ba^3,$$
$$(ab)^2 = ab^2 a^3 = a^4 b^2 = \alpha^2 = 1.$$

On a donc

$$a^8 = b'^2 = 1, \qquad ab' = b'a^3,$$

puis

$$\overline{c} = (a,\ a^7 c^2,\ a^2 b'c)(b',\ b'c^2,\ b'c),$$

car

$$abc = aca^2 = ca^7 c^2 a^2 = ca^7.a^2 bc^2 = c.abc^2 = cb'c^2,$$

$$b'c^2.c = b' = c.c^2 b' = c.c^2 ab = c.a^7 c^2.c^2 b = c.a^7 cb = c.a^7 a^2 bc = c.abc = cb'c,$$

enfin

$$b'c.c = b'c^2 = abc^2 = abc.c = aca^2 c = ca^7 c^2 a^2 c = ca^7.a^2 bc^3 = cb'.$$

Le groupe G_{48}^{30} sera donc défini par les équations

$$a^8 = b^2 = c^3 = 1, \qquad ab = ba^3,$$

$$\overline{c} = (a,\ a^7 c^2,\ a^2 bc)(b,\ bc^2,\ bc).$$

62. Prenons maintenant un isomorphisme contragrédient, d'ordre 2.

Soient $a^2 = b^2 = \alpha$, $c^3 = \alpha^2 = 1$, $ab = ba\alpha$, $\bar{c} = (a, ab, b)$, $d^2 = \alpha^m$,

$$\bar{d} = (a, a\alpha)(b, ab)(ac, abc^2\alpha)(c\alpha, abc^2\alpha)(c\alpha, bc^2\alpha)(c^2\alpha, abc)$$
$$(bc, ac^2\alpha)(ac\alpha, abc^2)(c, bc^2)(c^2, abc\alpha)(ac^2, bc\alpha)(ab\alpha, b\alpha).$$

Considérons l'opération $bd = d'$.

On a

$$bd = dab,$$
$$(bd)^2 = bd^2ab = bab\alpha^m = ab^2\alpha^{m+1} = a\alpha^m.$$

Donc

$$d'^2 = a\alpha^m, \qquad a = d'^2\alpha^m,$$
$$d'^4 = a^2 = \alpha.$$

D'autre part,

$$\bar{d'} = (b, ab, b\alpha, ab\alpha)(c, abc^2, abc\alpha, ac^2)$$
$$(c\alpha, abc^2\alpha, abc, ac^2\alpha)(c^2, ac\alpha, bc^2, bc\alpha)$$
$$(c^2\alpha, ac, bc^2\alpha, bc).$$

On retrouve, par conséquent, le groupe G_{48}^{30}.

63. Je me propose, avant de terminer la discussion, d'énumérer les opérations de ce groupe G_{48}^{30} (1).

G_{48}^{30} est défini par les équations

$$a^8 = b^2 = c^3 = 1, \qquad ab = ba^3,$$
$$\bar{c} = (a, a^7c^2, a^2bc)(b, bc^2, bc).$$

On a d'abord le Tableau I :

8	a	a^3				
4	a^2	$a^2\alpha$		ab		a^3b
2	α	α	b	α	a^2b	α

ce qui donne

4 opérations d'ordre 8,
6 » 4,
5 » 2.

Maintenant $(ac)^2 = acac$, mais

$$a^2bc.c = ca, \qquad ca = a^2bc^2;$$

(1) Le lecteur désireux de suivre simplement la discussion pourra passer ce numéro.

donc

$$(ac)^2 = a.a^2bc^2.c = a^3b,$$
$$(ac)^3 = a^3bac = a^6bc = a^2bc\alpha,$$
$$(ac)^4 = \alpha, \qquad (ac)^5 = ac\alpha, \qquad (ac)^6 = a^3b\alpha.$$

On a

$$\begin{aligned}\bar{c} = {} & (a^2, ab, a^3b\alpha)(a^2c, abc, a^3bc\alpha)(a^2c^2, abc^2, a^3bc^2\alpha)(a, a^3c^2\alpha, a^2bc)\\ & (a^2\alpha, ab\alpha, a^3b)(a^2c\alpha, abc\alpha, a^3bc)(a^2c^2\alpha, abc^2\alpha, a^3bc^2)(a\alpha, a^3c^2, a^2bc\alpha)\\ & (b, bc^2, bc)(a^3, a^2bc^2\alpha, ac\alpha)(ac^2, a^3c\alpha, a^2b)\\ & (b\alpha, bc^2\alpha, bc\alpha)(a^3\alpha, a^2bc^2, ac)(ac^2\alpha, a^3c, a^2b\alpha).\end{aligned}$$

En effet, puisque

$$ac = ca^3c^2\alpha, \qquad a^2c = cab,$$

on a

$$(a^3c^2\alpha)^2 = ab;$$

donc

$$(a^3c^2\alpha)^3 = aba^3c^2\alpha = a^2bc^2\alpha.$$

De même

$$(a^2bc)^2 = a^3b\alpha, \qquad (a^2bc)^3 = a^3ba^2bc\alpha = a^9b^2c\alpha = ac\alpha.$$

On peut écrire le Tableau II :

8	ac	$a^2bc\alpha$	a^3c^2	a^2bc^2
4	a^3b	$a^3b\alpha$	ab	$ab\alpha$
2	α	α	α	α

ce qui donne

8 opérations d'ordre 8.

Maintenant

$$(a^2c)^2 = a^2ca^2c = a^2.a^3b\alpha.c^2 = abc^2,$$
$$(a^2c)^3 = a^2cabc^2 = a^2.a^2c.c^2 = \alpha.$$

De là le Tableau III :

6	a^2c	abc	$c\alpha$	$a^3bc\alpha$
3	abc^2	$a^3bc^2\alpha$	c^2	a^2c^2
2	α	α	α	α
3	$a^2c\alpha$	$abc\alpha$	c	a^3bc
6	$abc^2\alpha$	a^3bc^2	$c^2\alpha$	$a^2c^2\alpha$

qui donne

8 opérations d'ordre 6

et

8 opérations d'ordre 3.

Puis enfin le Tableau IV :

$$2 \parallel a^3c \mid bc \mid bc^2 \mid ac^2 \parallel$$

qui donne

8 opérations d'ordre 2.

Ces deux Tableaux sont justifiés par les égalités suivantes :

$$(a^3c)^2 = a^3ca^3c = a^3.ac\alpha.c^2 = 1,$$
$$(bc)^2 = bcbc = b.bc^2.c = 1,$$

$$\begin{cases} (abc)^2 = abcabc = ab.a^2c^2 = a^7bc^2 = a^3bc^2\alpha, \\ (abc)^3 = abca^3bc^2\alpha = ab.abc\alpha.c^2\alpha = \alpha; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a^3bc)^2 = a^3bca^3bc = a^3b.abc\alpha.c = a^2c^2, \\ (a^3bc)^3 = a^3bca^2c^2 = a^3b.a^3b\alpha = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a^3c^2)^2 = a^3c^2a^3c^2 = a^3.a^2bc\alpha.c^2 = ab, \\ (a^3c^2)^3 = aba^3c^2 = a^2bc^2; \end{cases}$$

$$(bc^2)^2 = bc^2bc^2 = b.bc.c^2 = 1,$$
$$(ac^2)^2 = ac^2ac^2 = a.a^3c\alpha.c^2 = 1.$$

Le groupe G_{18}^{30} a donc

12	opérations d'ordre	8,
6	»	4,
13	»	2,
8	»	6,
8	»	3.

64. Passons au groupe $G_{12}^3G_2$, défini par les équations

$$a^2 = b^2 = c^3 = d^2 = 1, \quad ab = ba, \quad ad = da, \quad bd = db, \quad cd = cd,$$
$$\overline{c} = (a, b, ab), \quad \overline{c^2} = (a, ab, b).$$

Voici d'abord le Tableau des opérations :

$$2 \parallel a,\quad b,\quad d,\quad ab,\quad ad,\quad bd,\quad abd$$

6	cd	acd	bcd	$abcd$
3	c^2	bc^2	abc^2	ac^2
2	d	d	d	d
3	c	ac	bc	abc
6	c^2d	bc^2d	abc^2d	ac^2d

car

$$\begin{cases} (ac)^2 = acac = a.abc^2 = bc^2, \\ acbc^2 = a.ac.c^2 = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} bc.bc = b.ac.c = abc^2, \\ bc.abc^2 = b.bc.c^2 = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} abc.abc = ab.bc.c = ac^2, \\ abc.ac^2 = ab.abc^3 = 1. \end{cases}$$

65. Cherchons tous les isomorphismes de $G_{12}^3 G_2$.

Écrivons d'abord les isomorphismes cogrédients.

Soit l'opération a; elle est permutable avec b et d :

$$ca = abc, \qquad bca = babc = ac,$$
$$c^2a = bc^2 = a.abc^2, \qquad abc^2a = ab.bc^2 = ac^2.$$

Donc on a

$$\bar{a} = (c, bc)(c^2, abc^2)(ac, abc)(ac^2, bc^2)(cd, bcd)(c^2d, abc^2d)(acd, abcd)(ac^2d, bc^2d),$$

$$cb = ac = b.abc, \qquad c^2b = abc^2 = b.ac^2.$$

Donc

$$\bar{b} = (c, abc)(c^2, ac^2)(bc, ac)(bc^2, abc^2), (cd, abcd)(c^2d, ac^2d)(bcd, acd)(bc^2d, abc^2d),$$
$$\overline{ab} = (c, ac)(c^2, bc^2)(abc, bc)(abc^2, ac^2)(cd, acd)(c^2d, bc^2d)(abcd, bcd)(abc^2d, ac^2d),$$
$$\bar{c} = (a, b, ab)(ac, bc, abc)(ac^2, bc^2, abc^2)(ad, bd, abd)(acd, bcd, abcd)(ac^2d, bc^2d, abc^2d),$$
$$\overline{c^2} = (a, ab, b)(ac, abc, bc)(ac^2, abc^2, bc^2)(ad, abd, bd)(acd, abcd, bcd)(ac^2d, abc^2d, bc^2d),$$
$$\overline{ac} = (a, b, ab)(c, abc, bc)(c^2, ac^2, abc^2)(ad, bd, abd)(cd, abcd, bcd)(c^2d, ac^2d, abc^2d),$$
$$\overline{bc} = (a, b, ab)(c, ac, abc)(c^2, bc^2, ac^2)(ad, bd, abd)(cd, acd, abcd)(c^2d, bc^2d, ac^2d),$$
$$\overline{abc} = (a, b, ab)(c, bc, ac)(c^2, abc^2, bc^2)(ad, bd, abd)(cd, bcd, acd)(c^2d, abc^2d, bc^2d),$$
$$\overline{ac^2} = (a, ab, b)(c, ac, bc)(c^2, bc^2, abc^2)(ad, abd, bd)(cd, acd, bcd)(c^2d, bc^2d, abc^2d),$$
$$\overline{bc^2} = (a, ab, b)(c, bc, abc)(c^2, abc^2, ac^2)(ad, abd, bd)(cd, bcd, abcd)(c^2d, abc^2d, ac^2d),$$
$$\overline{abc^2} = (a, ab, b)(c, abc, ac)(c^2, ac^2, bc^2)(ad, abd, bd)(cd, abcd, acd)(c^2d, ac^2d, bc^2d).$$

Nous pouvons maintenant énumérer les suites complètes d'opérations conjuguées du groupe.

(1). L'opération identique. (2). L'opération d.

(3). $a, \ b, \ ab.$ (4). $ad, \ bd, \ abd.$

(5). $c, \ bc, \ abc, \ ac.$ (6). $c^2, \ abc^2, \ ac^2, \ bc^2.$

(7). $cd, \ bcd, \ abcd, \ acd.$ (8). $c^2d, \ abc^2d, \ ac^2d, \ bc^2d.$

Dans chaque isomorphisme l'opération d joue un rôle à part et ne pourra être remplacée que par elle-même.

a pourra être remplacé par a, b, ab (3 combinaisons possibles).

Soit a' l'opération choisie pour a.

b pourra être prise parmi les 3 opérations a, b, ab, à l'exclusion de l'opération a' (2 combinaisons possibles).

Appelons b' l'opération choisie pour b.

Reste à choisir c' par la condition

$$\overline{c'} = (a', b', a'b') \qquad \text{(4 combinaisons possibles).}$$

En tout, il y a 24 isomorphismes.

Nous venons de dire que a ne peut être remplacé que par a, b, ou ab.

On peut se demander pourquoi il est impossible de remplacer a par ad, par exemple.

Soit, je suppose, $a' = ad$, $b' = bd$, alors

$$a'b' = ab.$$

Mais il n'existe pas d'opération c' telle que

$$\overline{c'} = (ad, bd, ab),$$

et il est clair que, sur trois opérations d'ordre 2 telles que l'une soit le produit des deux autres, il y en aura deux (ou il n'y en aura aucune) contenant d, jamais trois.

Cela posé, on a

$$\overline{f} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & ab & c^2 \end{pmatrix} = (b, ab)(c, c^2)(bd, abd)(cd, c^2d)(ac, ac^2)$$
$$(acd, ac^2d)(bc^2, abc)(bc^2d, abcd)(bc, abc^2)(bcd, abc^2d).$$

Puis

$$\overline{acf} = (a, ab)(c, bc^2, abc, abc^2)(c^2, ac, ac^2, bc)$$
$$(ad, abd)(cd, bc^2d, abcd, abc^2d)(c^2d, acd, ac^2d, bcd).$$

Posons $\overline{f} = \alpha$, $\overline{ac} = \beta$.

On a

$$\alpha^2 = \beta^3 = 1, \qquad (\alpha\beta)^4 = 1.$$

Le groupe des isomorphismes est donc du type G_{24}^9.

66. Revenons au groupe cherché, d'ordre 48.

Une opération d'ordre 2 ou 4, permutable avec toutes les opérations a, b, c, d, donnerait un groupe d'ordre 48 dans lequel il y aurait un sous-groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même.

Nous retrouverions un groupe déjà obtenu.

Si nous prenons une opération e donnant les mêmes isomorphismes que a, b, ou ab, par exemple que a, alors ae serait une opération permutable avec toutes les opérations de $G_{12}^3 G_2$. ae serait d'ailleurs d'ordre 2 ou 4, et, par suite, il y aurait encore un sous-groupe d'ordre 16, conjugué de lui-même.

Une seule combinaison est donc possible. C'est la suivante :

$$a^2 = b^2 = c^3 = d^2 = e^2 = 1, \quad ab = ba, \quad ad = da, \quad bd = db, \quad cd = dc, \quad ed = de,$$
$$\overline{c} = (a, b, ab), \qquad \overline{e} = (b, ab)(c, c^2).$$

L'opération d se sépare, le groupe est décomposable.

D'ailleurs

$$bebe = babe^2 = a,$$
$$\overline{be} = (b, ab)(c, bc^2, bc, ac^2)(ac, abc^2, abc, c^2).$$

Donc (¹) on trouve $G_{24}^9 G_2$.

67. Reste à examiner le groupe G_{24}^9 lui-même.

C'est le groupe symétrique de 4 lettres.

G_{24}^9 est défini par les équations

$$a^2 = b^2 = c^3 = d^2 = 1, \qquad \overline{c} = (a, b, ab), \qquad \overline{d} = (b, ab)(c, c^2) \quad (^2),$$

Voici d'abord le Tableau de ses opérations :

2	a	b	ab	d	ad	cd	c^2d	bcd	abc^2d

4	bd	abd	acd	$abcd$	bc^2d	ac^2d
2	a	a	b	b	ab	ab

3	c	ac	bc	abc
3	c^2	bc^2	abc^2	ac^2

(¹) *Loc. cit.*, fin du Chapitre VIII.

(²) *Loc. cit.*, fin du Chapitre VIII.

Pour écrire le groupe de ses isomorphismes cogrédients, soit

$$1=1,\quad a=2,\quad b=3,\quad ab=4;\quad c=5,\quad bc=6,\quad ac=7,\quad abc=8,$$
$$c^2=9,\quad bc^2=10,\quad ac^2=11,\quad abc^2=12;\quad d=13,\quad ad=14,$$
$$cd=15,\quad c^2d=16,\quad bcd=17,\quad abc^2d=18;\quad bd=19,$$
$$abd=20,\quad acd=21,\quad abcd=22,\quad ac^2d=23,\quad bc^2d=24.$$

Voici les isomorphismes cogrédients :

$\overline{2}=(5,6)(9,12)(7,8)(10,11)(15,17)(16,18)(21,22)(23,24)=\overline{a}$,

$\overline{3}=(5,8)(9,11)(6,7)(10,12)(13,14)(16,18)(19,20)(23,24)=\overline{b}$,

$\overline{4}=(5,7)(6,8)(9,10)(11,12)(13,14)(15,17)(19,20)(21,22)=\overline{ab}$,

$\overline{5}=(2,3,4)(7,6,8)(11,10,12)(13,15,16)(14,17,18)(19,22,23)(20,21,24)=\overline{c}$,

$\overline{7}=(2,3,4)(5,8,6)(9,11,12)(13,15,18)(14,17,16)(19,22,24)(20,21,23)=\overline{ac}$,

$\overline{6}=(2,3,4)(5,7,8)(9,10,11)(13,17,18)(14,15,16)(19,21,24)(20,22,23)=\overline{bc}$,

$\overline{8}=(2,3,4)(5,6,7)(9,12,10)(13,17,16)(14,15,18)(19,21,23)(20,22,24)=\overline{abc}$,

$\overline{9}=(2,4,3)(7,8,6)(11,12,10)(13,16,15)(14,18,17),(19,23,22)(20,24,21)=\overline{c^2}$,

$\overline{11}=(2,4,3)(5,7,6)(9,10,12)(13,16,17)(14,18,15)(19,23,21)(20,24,22)=\overline{ac^2}$,

$\overline{10}=(2,4,3)(5,6,8)(9,12,11)(13,18,15)(14,16,17)(19,24,22)(20,23,21)=\overline{bc^2}$,

$\overline{12}=(2,4,3)(5,8,7)(9,11,10)(13,18,17)(14,16,15)(19,24,21)(20,23,22)=\overline{abc^2}$,

$\overline{13}=(3,4)(5,9)(7,11)(6,12)(10,8)(19,20)(15,16)(21,23)(17,18)(22,24)=\overline{d}$,

$\overline{14}=(3,4)(5,12)(6,9)(7,10)(8,11)(15,18)(16,17)(19,20)(21,24)(22,23)=\overline{ad}$,

$\overline{19}=(3,4)(5,10,6,11)(7,12,8,9)(13,14)(15,16,17,18)(21,23,22,24)=\overline{bd}$,

$\overline{20}=(3,4)(5,11,16,10)(7,9,8,12)(13,14)(15,18,17,16)(21,24,22,23)=\overline{abd}$,

$\overline{15}=(2,4)(5,9)(6,10)(7,12)(8,11)(13,16)(14,18)(19,24)(20,23)(21,22)=\overline{cd}$,

$\overline{21}=(2,4)(5,10,8,12)(6,9,7,11)(13,16,14,18)(15,17)(19,24,20,23)=\overline{acd}$,

$\overline{17}=(2,4)(5,11)(6,12)(7,10)(8,9)(13,18)(14,16)(19,23)(20,24)(21,22)=\overline{bcd}$,

$\overline{22}=(2,4)(5,12,8,10)(6,11,7,9)(13,18,14,16)(15,17)(19,23,20,24)=\overline{abcd}$.

$\overline{16}=(2,3)(5,9)(6,11)(7,10)(8,12)(13,15)(14,17)(19,21)(20,22)(23,24)=\overline{c^2d}$.

$\overline{23}=(2,3)(5,11,7,12)(6,9,8,10)(13,15,14,17)(16,18)(19,21,20,22)=\overline{ac^2d}$,

$\overline{24}=(2,3)(5,12,7,11)(6,10,8,9)(13,17,14,15)(16,18)(19,22,20,21)=\overline{bc^2d}$,

$\overline{18}=(2,3)(5,10)(6,12)(7,9)(8,11)(13,17)(14,15)(19,22)(20,21))(23,24)=\overline{abc^2d}$.

Voici, d'après cela, les suites complètes d'opérations conjuguées :

(1). L'opération identique,

(2). $a, \quad b, \quad ab,$

(3). $c, \quad bc, \quad ac, \quad abc, \quad c^2, \quad bc^2, \quad ac^2, \quad abc^2,$

(4). $d, \quad ad, \quad cd, \quad c^2d, \quad bcd, \quad abc^2d,$

(5). $bd, \quad abd; \quad acd, \quad abcd; \quad ac^2d, \quad bc^2d.$

Y a-t-il des isomorphismes contragrédients?

Cherchons l'ordre total du groupe des isomorphismes.

On pourra prendre pour a l'une des trois opérations a, b, ab (3 combinaisons possibles).

Soit a' l'opération choisie pour a.

On pourra prendre ensuite pour b l'une des deux opérations qui restent, après qu'on a supprimé a' (2 combinaisons possibles).

Soit b' l'opération choisie pour b.

Il faudra ensuite choisir c parmi les 8 opérations

$$c, \quad bc, \quad ac, \quad abc, \quad c^2, \quad bc^2, \quad ac^2, \quad abc^2,$$

de façon que, en appelant c' l'opération choisie pour c, on ait

$$c' = (a', b', a'b') \qquad \text{(4 combinaisons possibles).}$$

Enfin d devra être choisi parmi les 6 opérations

$$d, \quad ad, \quad cd, \quad c^2d, \quad bcd, \quad abc^2d,$$

de façon que, en appelant d' l'opération choisie, on ait

$$d' = (a', a'b')(c', c'^2),$$

d' sera ainsi complètement déterminé.

L'ordre du groupe des isomorphismes est donc 24.

Autrement : partons des équations de définition

$$a'^2 = b'^3 = 1, \qquad (a'b')^4 = 1.$$

Prenons pour b' l'une des huit opérations d'ordre 3.

Parmi les opérations de la suite (4) il y en a trois qui, avec l'une des opérations de la suite (3), donnent comme produit une opération d'ordre 4.

Par exemple, avec c, il faut prendre ad, ou bcd, ou abc^2d, car

$$cad = abcd, \qquad cbcd = ac^2d, \qquad cabc^2d = bd.$$

Donc l'ordre du groupe des isomorphismes est bien 24.

Il n'y a pas d'isomorphismes contragrédients.

On appelle *groupe complet* un groupe qui n'admet pas d'opération conjuguée d'elle-même, à l'exception de l'opération identique, et qui n'a pas d'isomorphismes contragrédients.

Le groupe G_{24}^9 est donc un groupe complet [1].

Le théorème suivant a d'ailleurs été démontré [2] :

Un groupe qui contient un groupe complet comme sous-groupe conjugué de lui-même est le produit direct du groupe complet et d'un autre groupe.

Il en résulte que le seul groupe possible d'ordre 48 admettant G_{24}^9 comme sous-groupe conjugué de lui-même est $G_{24}^9 G_2$.

Résumé des groupes d'ordre 16p (*p premier impair*).

$$G_{16p} = G_{16} G_p, \qquad G_8 G_2 G_p = G_{8p} G_2 = G_{2p} G_8,$$

$$G_{8p}^1 G_2, \quad G_{8p}^2 G_2, \quad G_{8p}^3 G_2, \quad G_{2p}^1 G_8,$$

$$(G_4)^2 G_p = G_{4p} G_4, \qquad G_{4p}^1 G_4, \qquad G_{4p}^2 G_4,$$

$$G_4 (G_2)^2 G_p = G_{4p} (G_2)^2 = G_{2p} G_4 G_2,$$

$$G_{4p}^1 (G_2)^2, \quad G_{4p}^2 (G_2)^2, \quad G_{2p}^1 G_4 G_2,$$

$$G_p (G_2)^4 = G_{2p} (G_2)^3, \qquad G_{2p}^1 (G_2)^3,$$

$$G_8^1 G_2 G_p = G_8^1 G_{2p}, \qquad G_{8p}^4 G_2, \qquad G_{8p}^5 G_2, \qquad G_8^1 G_{2p}^1,$$

$$G_8^2 G_2 G_p = G_8^2 G_{2p}, \qquad G_{8p}^6 G_2, \qquad G_8^2 G_{2p}^1,$$

$$G_{16}^1 G_p, \quad G_{16}^2 G_p, \quad G_{16}^3 G_p, \quad G_{16}^4 G_p, \quad G_{16}^5 G_p, \quad G_{16}^6 G_p, \quad G_{16}^7 G_p,$$

$$G_{12}^3 G_4, \quad G_{12}^3 (G_2)^2, \quad G_{56}^8 G_2, \quad G_{24}^7 G_2, \quad G_{24}^9 G_2.$$

G_{16p}^1 $[a^{16} = b^p = 1,\ ba = ab^\alpha,\ \alpha$ appartient à l'exposant 2 (mod p)],

G_{16p}^2 $[a^{16} = b^p = 1,\ ba = ab^\alpha,\ \alpha$ appartient à l'exposant 4 (mod p)],

G_{16p}^3 $[a^{16} = b^p = 1,\ ba = ab^\alpha,\ \alpha$ appartient à l'exposant 8 (mod p)],

G_{16p}^4 $[a^{16} = b^p = 1,\ ba = ab^\alpha,\ \alpha$ appartient à l'exposant 16 (mod p)],

G_{16p}^5 $[a^8 = b^2 = c^p = 1,\ ab = ba,\ ca = ac^\alpha,\ cb = bc^{-1},$
α appartient à l'exposant 4 (mod p)],

---

(1) *Voir* O. Hölder, *Bildungzusammengesetzter Gruppen* (*Math. Ann.*, Vol. XLVI, 1895, p. 325).

(2) *Voir* Burnside, *Theory of Groups of finite order*, théorème V, § 165.

G_{16p}^{6} $(a^8 = b^2 = c^p = 1,\ ab = ba^5,\ ca = ac^{-1},\ cb = bc)$,

G_{16p}^{7} $[a^8 = b^2 = c^p = 1,\ ab = ba^5,\ ca = ac^{\alpha},\ cb = bc$,
α appartient à l'exposant $4 \pmod{p}]$,

G_{16p}^{8} $(a^8 = b^2 = c^p = 1,\ ab = ba^5,\ ca = ac,\ cb = bc^{-1})$,

G_{16p}^{9} $[a^8 = b^2 = c^p = 1,\ ab = ba^5,\ ca = ac^{\alpha},\ cb = bc^{-1}$
α appartient à l'exposant $4 \pmod{p}]$,

G_{16p}^{10} $(a^2=b^2=c^4=d^p=1,\ ac=ca,\ bc=cb,\ ab=bac^2,\ da=ad,\ db=bd,\ dc=cd^{-1})$,

G_{16p}^{11} $(a^2=b^2=c^4=d^p=1,\ ac=ca,\ bc=cb,\ ab=bac^2,\ da=ad,\ db=bd^{-1},\ dc=cd)$,

G_{16p}^{12} $(a^2=b^2=c^4=d^p=1,\ ac=ca,\ bc=cb,\ ab=bac^2,\ da=ad^{-1},\ db=bd^{-1},\ dc=cd)$,

G_{16p}^{13} $(a^4 = b^4 = c^p = 1,\ ab = ba^3,\ ca = ac^{-1},\ cb = bc)$,

G_{16p}^{14} $(a^4 = b^4 = c^p = 1,\ ab = ba^3,\ ca = ac,\ cb = bc^{-1})$,

G_{16p}^{15} $[a^4 = b^4 = c^p = 1,\ ab = ba^3,\ ca = ac,\ cb = bc^{\alpha}$,
α appartient à l'exposant $4 \pmod{p}]$,

G_{16p}^{16} $(a^4=b^2=c^2=d^p=1,\ ac=ca,\ bc=cb,\ ab=bac,\ da=ad^{-1},\ db=bd,\ dc=cd)$,

G_{16p}^{17} $[a^4=b^2=c^2=d^p=1,\ ac=ca,\ bc=cb,\ ab=bac,\ da=ad^{\alpha},\ db=bd,\ dc=cd$,
α appartient à l'exposant $4 \pmod{p}]$,

G_{16p}^{18} $(a^4=b^2=c^2=d^p=1,\ ac=ca,\ bc=cb,\ ad=bac,\ da=ad,\ db=bd^{-1},\ dc=cd)$,

G_{16p}^{19} $(a^8 = b^4 = c^p = 1,\ a^4 = b^2,\ ab = ba^7,\ ca = ac,\ cb = bc^{-1})$,

G_{16p}^{20} $(a^8 = b^4 = c^p = 1,\ a^4 = b^2,\ ab = ba^7,\ ca = ac^{-1},\ cb = bc)$,

G_{16p}^{21} $(a^8 = b^2 = c^p = 1,\ ab = ba^3,\ ac = ca,\ cb = bc^{-1})$,

G_{16p}^{22} $(a^8 = b^2 = c^p = 1,\ ab = ba^3,\ ca = ac^{-1},\ cb = bc)$,

G_{16p}^{23} $(a^8 = b^2 = c^p = 1,\ ab = ba^3,\ ca = ac^{-1},\ cb = bc^{-1})$,

G_{16p}^{24} $(a^8 = b^2 = c^p = 1,\ ab = ba^7,\ ca = ac,\ cb = bc^{-1})$,

G_{16p}^{25} $(a^8 = b^2 = c^p = 1,\ ab = ba^7,\ ca = ac^{-1},\ cb = bc)$,

G_{48}^{26} $[a^4 = b^4 = c^3 = 1,\ ab = ba,\ \bar{c} = (a,\ b,\ a^3 b^3)]$,

G_{80}^{27} $(a^{(2,x^4+x^3+x^2+x+1)} = b^5 = 1,\ ab = ba^x)$,

G_{48}^{28} $(a^{(2,x^4+x^3+x^2+x+1)} = b^3 = 1,\ ab = ba^{x^3+x^2})$,

G_{48}^{29} $[a^2 = b^2 = c^4 = d^3 = 1,\ ab = bac^2,\ ac = ca,\ bc = cb,\ cd = dc,\ \bar{d} = (a,\ b,\ abc)]$,

G_{48}^{30} $[a^8 = b^2 = c^3 = 1,\ ab = ba^3,\ \bar{c} = (a,\ a^7 c^2,\ a^2 bc)(b,\ bc^2,\ bc)]$.