SUR LA

REPRÉSENTATION CONFORME DE DEUX AIRES PLANES

A CONNEXION MULTIPLE,

D'APRÈS M. SCHOTTKY,

PAR M. R. LE VAVASSEUR,

à Toulouse.

Dans le Tome II de son *Traité d'Analyse,* page 285, M. Émile Picard écrit :

« Deux aires A et A_1, limitées chacune par un même nombre de contours, ne peuvent pas, en général, être représentées d'une manière conforme l'une sur l'autre. L'étude approfondie de ce problème a été faite par M. Schottky dans un beau et important Mémoire (1). »

Plus loin, même Tome, page 497, en note, M. Émile Picard écrit encore : « Nous avons déjà eu l'occasion de citer le beau travail de M. Schottky; c'est un Mémoire fondamental à plus d'un titre. »

C'est ce Mémoire que j'ai essayé d'exposer.

Dans la dernière Partie, j'ai traité avec quelque détail le cas de la connexion double.

I. — PROBLÈME DE LA REPRÉSENTATION CONFORME DANS LE CAS DE DEUX AIRES SIMPLEMENT CONNEXES.

1. Je considère une aire plane A, limitée par une ligne fermée simple L (c'est-à-dire une ligne fermée qui ne passe pas plus d'une fois par aucun de ses points). Je supposerai que cette ligne a en chacun de ses points une tangente déterminée, et variant d'une façon continue, sauf en certains points isolés, où cette tangente peut changer brusquement de direction. C'est ce qui arriverait, par exemple, si la ligne L était un polygone dont tous les côtés seraient des arcs de cercle.

(1) SCHOTTKY (F.), *Ueber die conforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Flächen* (*Journal für die reine und angewandte Mathematik,* t. LXXXIII, p. 300-351; 1877).

Plaçons cette aire sur le plan dont les points représentent les valeurs de la variable complexe $z = x + iy$.

Je regarde comme démontrée la proposition suivante : Il existe une fonction réelle, u, *et une seule,* des variables réelles x et y, qui à l'intérieur du domaine A est uniforme, finie et continue, admet des dérivées partielles des deux premiers ordres, également uniformes, finies et continues, satisfait à l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, enfin prend sur la limite du domaine des valeurs données à l'avance, ces valeurs formant une suite finie, continue et uniforme [1].

Soit $p(z)$ une fonction rationnelle quelconque de z, assujettie à la seule condition de rester finie tout le long de la limite L du domaine A.

Posons

$$p(z) = p_1(x, y) + ip_2(x, y);$$

$p_2(x, y)$ est une fonction de x et de y, à coefficients réels, dont les valeurs le long de L forment une suite finie, continue et uniforme.

Donc, d'après la proposition rappelée plus haut, il existe une fonction, $u = \psi(x, y)$, à coefficients réels, et une seule, uniforme, finie et continue à l'intérieur du domaine A, admettant des dérivées des deux premiers ordres, également uniformes, finies et continues, satisfaisant à l'équation

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0, \tag{1}$$

enfin prenant sur la limite L de A les valeurs de $p_2(x, y)$.

Dans le cas particulier où la fonction $p(z)$ n'aurait pas de pôles à l'intérieur du domaine A, la fonction $u = \psi(x, y)$ serait la fonction $p_2(x, y)$ elle-même. Cela tient à ce que le problème de Dirichlet n'admet qu'une solution.

Je dis qu'il existe une fonction $\varphi(x, y)$, à coefficients réels, telle que $\varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ soit une fonction de $x + iy$: si la fonction existe, elle doit satisfaire aux équations

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Je déduis de là

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = \frac{\partial \psi}{\partial y} dx - \frac{\partial \psi}{\partial x} dy.$$

D'après l'équation (1), le second membre est bien une différentielle exacte.

Considérons l'intégrale

$$\int \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} dx - \frac{\partial \psi}{\partial x} dy \right)$$

---

[1] *Voir* la Thèse de M. Jules Riemann, *Sur le problème de Dirichlet,* p. 5 et 6.

prise le long d'un chemin joignant un point (a, b) intérieur au domaine A, à un point (x, y), également intérieur au domaine A, ce chemin étant tout entier à l'intérieur du domaine A.

Cette intégrale a la même valeur, quel que soit le chemin choisi à l'intérieur du domaine A, pourvu que les extrémités de ce chemin soient toujours les mêmes points (a, b), (x, y).

Cela résulte de ce que cette intégrale, prise le long d'un chemin fermé, intérieur au domaine A, parcouru dans le sens direct, peut se remplacer par l'intégrale double

$$-\int\int\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)dx\,dy$$

étendue à l'aire incluse à l'intérieur du chemin.

Or cette intégrale double est nulle en vertu de l'équation (1).

Soit donc

$$\varphi(x, y)=\int_{(a,b)}^{(x,y)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}dx-\frac{\partial\psi}{\partial y}dx\right);$$

$\varphi(x,y)$ est une fonction uniforme, finie et continue à l'intérieur du domaine A, puisque, à l'intérieur du domaine A, $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ et $\frac{\partial\psi}{\partial y}$ sont, par hypothèse, finies et continues.

La fonction $\varphi(x, y)+i\psi(x, y)$ est une fonction de $x+iy$. Désignons-la par $f(z)$.

Elle est définie à une constante réelle près, et cela à cause du point (a, b) qui a été choisi arbitrairement dans le domaine A.

Cette fonction $f(z)$ a, dans l'intérieur du domaine A, le caractère d'une fonction entière.

Elle prend sur la limite L du domaine A des valeurs dont la partie imaginaire coïncide, en chaque point de L, avec la valeur de la partie imaginaire de la fonction rationnelle $p(z)$.

Enfin, formons la différence

$$K(z)=p(z)-f(z).$$

Nous obtenons ainsi une fonction $K(z)$ qui, à l'intérieur du domaine A, se comporte comme la fonction rationnelle $p(z)$, mais *qui prend sur* L *des valeurs réelles.*

Cette fonction est déterminée à une constante réelle près.

Dans le cas particulier où la fonction $p(z)$ n'aurait pas de pôles à l'intérieur de A, $p(z)$ serait une des fonctions $f(z)$ et $K(z)$ serait une simple constante réelle.

Nous aurons souvent à nous servir de cette remarque.

2. Nous parvenons ainsi à la notion de fonctions $K(z)$ se comportant à l'intérieur du domaine A comme des fonctions rationnelles, et prenant sur la limite L du domaine des valeurs *réelles* et *finies*.

Toutes les fonctions $K(z)$ ainsi trouvées sont de la forme $p(z) - f(z)$, $p(z)$ étant une fonction rationnelle de z, et $f(z)$ ayant le caractère d'une fonction entière à l'intérieur du domaine A.

Je dis qu'il n'en existe pas d'autres ayant les mêmes propriétés.

En effet, prenons une fonction $K(z)$ se comportant à l'intérieur du domaine A comme une fonction rationnelle, et prenant sur la limite L du domaine A des valeurs réelles et finies.

A chaque pôle a de $K(z)$ situé à l'intérieur du domaine A, on peut faire correspondre un polynome $G_a(z)$, entier en z, tel que la différence

$$K(z) - G_a\left(\frac{1}{z-a}\right)$$

reste finie dans le voisinage de $z = a$.

La fonction

$$K(z) - \sum G_a\left(\frac{1}{z-a}\right),$$

où le signe $\sum$ s'étend à tous les pôles de $K(z)$ situés à l'intérieur du domaine A, sera donc finie à l'intérieur de ce domaine. Désignons-la par $-f(z)$.

Alors

$$K(z) = \sum G_a\left(\frac{1}{z-a}\right) - f(z).$$

La fonction $K(z)$ a bien la forme indiquée.

Chaque fonction $K(z)$ est déterminée à une constante réelle près lorsqu'on se donne la fonction rationnelle $p(z)$ qui sert à la former.

Si, au contraire, on se donne une fonction $K(z)$, la fonction $p(z)$ qui correspond à $K(z)$ n'est pas déterminée : seule la partie de $p(z)$ correspondant aux pôles de $K(z)$ intérieurs au domaine A est complètement déterminée.

3. Considérons les fonctions $K(z)$ correspondant, l'une à la fraction rationnelle $p(z) = \frac{1}{z-a}$, l'autre à la fraction rationnelle $p(z) = \frac{i}{z-a}$, a désignant un nombre complexe dont l'affixe est un point intérieur au domaine A.

Soient u_1 la fonction $K(z)$ correspondant à $\frac{1}{z-a}$ et v_1 celle qui correspond à $\frac{i}{z-a}$.

Dans le voisinage du point a, u_1 et v_1 auront des développements de la forme

$$u_1 = \frac{1}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \ldots,$$

$$v_1 = \frac{i}{z-a} + b_0 + b_1(z-a) + b_2(z-a)^2 + \ldots,$$

où

$$a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \ldots, \qquad b_0 + b_1(z-a) + b_2(z-a)^2 + \ldots$$

représentent les premiers termes de deux séries entières convergentes à l'intérieur d'un cercle décrit de a comme centre et tout entier contenu dans le domaine A.

Les coefficients $a_0, a_1, a_2, \ldots; b_0, b_1, b_2, \ldots$ sont complexes.

Définissons deux nombres *réels* g et h par la condition

$$a_0 + ib_0 = g + ih,$$

et considérons la fonction

$$(u_1 - g)^2 + (v_1 - h)^2.$$

C'est une fonction $K(z)$: car elle se comporte à l'intérieur du domaine A comme une fonction rationnelle, et sur la limite du domaine elle prend des valeurs réelles et finies.

Elle ne peut avoir, à l'intérieur du domaine A, que le pôle a.

Or on a

$$(u_1 - g)^2 + (v_1 - h)^2 = [u_1 - g + i(v_1 - h)][u_1 - g - i(v_1 - h)].$$

Mais

$$u_1 - g + i(v_1 - h) = (a_1 + ib_1)(z-a) + (a_2 + ib_2)(z-a)^2 + \ldots,$$

$$u_1 - g - i(v_1 - h) = \frac{2}{z-a} + a_0 - g - i(b_0 - h) + (a_1 - ib_1)(z-a) + \ldots.$$

Le produit sera fini pour $z = a$.

Cette fonction $K(z)$ n'a donc pas de discontinuités à l'intérieur du domaine A. Par suite, c'est une constante réelle, nécessairement positive. Désignons-la par R^2.

On a

$$(u_1 - g)^2 + (v_1 - h)^2 = R^2.$$

On peut poser

$$u_1 - g = \frac{2Rt}{1+t^2}, \qquad -(v_1 - h) = R\,\frac{1-t^2}{1+t^2};$$

d'où

$$t^2(v_1 - h) + v_1 - h = -R + Rt^2,$$

$$t^2 = \frac{-R + h - v_1}{-R + v_1 - h}, \qquad t^2 + 1 = \frac{-2R}{-R + v_1 - h}.$$

Bref,

$$t = \frac{-u_1 + g}{-R + v_1 - h} = \frac{-R + (h - v_1)}{-u_1 + g},$$

en sorte que t est aussi une fonction rationnelle de u_1 et v_1.

4. Soit a un point intérieur au domaine A. Considérons la classe spéciale des fonctions $K(z)$ qui n'ont pas d'autres pôles que a, à l'intérieur du domaine A.

Désignons ces fonctions par $k(z)$.

u_1 et v_1 sont deux fonctions k particulières.

L'expression générale des fonctions k est

$$k(z) = p(z) - f(z),$$

où $f(z)$ a le caractère d'une fonction entière à l'intérieur du domaine A, et où $p(z)$ est de la forme

$$p(z) = \frac{A_1 + B_1 i}{z - a} + \frac{A_2 + B_2 i}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{A_m + B_m i}{(z-a)^m}.$$

Soient en général u_j la fonction $k(z)$ relative à $\frac{1}{(z-a)^j}$, et v_j la fonction $k(z)$ relative à $\frac{i}{(z-a)^j}$.

Il est clair que l'on aura

$$\begin{aligned} k(z) = \quad & A_1 u_1 + A_2 u_2 + \ldots + A_m u_m \\ & + B_1 v_1 + B_2 v_2 + \ldots + B_m v_m. \end{aligned}$$

En effet : 1° l'expression trouvée est bien de la forme $p(z) - f(z)$; 2° sur la limite L de A, elle est réelle et finie.

Je dis que u_j et v_j sont des fonctions rationnelles à coefficients réels de u_1 et de v_1 et, par conséquent, de t.

Pour u_j et v_j le point a est un pôle d'ordre j.

Il en est de même pour u_1^j et v_1^j.

Comparons ces fonctions :

1° u_1^j est une fonction $k(z)$. Elle est donc de la forme

$$\begin{aligned} u_1^j = \quad & \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_j u_j \\ & + \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_j v_j, \end{aligned}$$

les constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_j, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_j$ étant réelles.

D'ailleurs, on a

$$\lim_{z=a}(z-a)\,u_1 = 1,$$

donc

$$\lim_{z=a}(z-a)^j\,u_1^j = 1,$$

donc

$$\alpha_j = 1, \qquad \beta_j = 0.$$

On conclut alors de la formule précédente que, si

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_{j-1}; \qquad v_1, \quad v_2, \quad \ldots, \quad v_{j-1}$$

sont exprimables en fonction rationnelle à coefficients réels de t, il en sera de même de u_j.

2° Formons maintenant la combinaison

$$u_1 \cos\varphi + v_1 \sin\varphi,$$

φ étant réel.

$(u_1 \cos\varphi + v_1 \sin\varphi)^j$ est une fonction $k(z)$ admettant le pôle $z = a$ avec l'ordre de multiplicité j.

On peut donc poser

$$\begin{aligned}(u_1 \cos\varphi + v_1 \sin\varphi)^j = {} & \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \ldots + \gamma_j u_j \\ & + \delta_1 v_1 + \delta_2 v_2 + \ldots + \delta_j v_j,\end{aligned}$$

les constantes $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_j$, et $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_j$ étant toutes réelles.

Mais on a

$$\lim_{z=a}(z-a)(u_1 \cos\varphi + v_1 \sin\varphi) = \cos\varphi + i \sin\varphi,$$

donc

$$\lim_{z=a}(z-a)^j(u_1 \cos\varphi + v_1 \sin\varphi)^j = \cos(j\varphi) + i \sin(j\varphi),$$

donc

$$\gamma_j = \cos(j\varphi), \qquad \delta_j = \sin(j\varphi).$$

On pourra toujours choisir φ de manière que δ_j ne soit pas nul.

Alors de la formule précédente on déduit que, si $u_1, u_2, \ldots, u_j, v_1, v_2, \ldots, v_{j-1}$ sont exprimables en fonction rationnelle à coefficients réels de t, il en est de même de v_j.

En résumé, u_j et v_j s'expriment en fonction rationnelle de t à coefficients réels.

Donc toute fonction $k(z)$ s'exprime en fonction rationnelle de t à coefficients réels.

5. J'envisage maintenant une fonction $K(z)$ quelconque.

J'appelle $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ceux de ses pôles qui sont à l'intérieur du domaine A et dont les ordres sont respectivement $g_1, g_2, \ldots, g_n$.

J'appelle $U_1, U_2, \ldots, U_n$ les valeurs de u_1 en ces points, et $U'_1, U'_2, \ldots, U'_n$ les valeurs conjuguées.

Posons

$$P = (u_1 - U_1)^{g_1}(u_1 - U_2)^{g_2}\ldots(u_1 - U_n)^{g_n},$$
$$P' = (u_1 - U'_1)^{g_1}(u_1 - U'_2)^{g_2}\ldots(u_1 - U'_n)^{g_n}.$$

La fonction $PP'K(z)$ est une nouvelle fonction $K(z)$, car elle est réelle et finie sur la limite L du domaine A, puisque PP' est une fonction entière de u_1 à coefficients *réels*.

Voyons maintenant ses discontinuités.

En premier lieu, elle n'a aucune de celles de $K(z)$. En effet, soit z_j une discontinuité de $K(z)$.

$(z - z_j)^{g_j} K(z)$ a le caractère d'une fonction entière dans le voisinage de $z = z_j$.

D'ailleurs

$$u_1 = U_j + \left(\frac{du_1}{dz}\right)_j (z - z_j) + \left(\frac{d^2 u_1}{dz^2}\right)_j (z - z_j)^2 + \ldots.$$

L'expression $\dfrac{u_1 - U_j}{z - z_j}$ est donc finie dans le voisinage du point $z = z_j$. Ainsi la fonction $PP'K(z)$ n'a aucune des discontinuités de $K(z)$. Mais elle a la discontinuité $z = a$.

C'est d'ailleurs la seule.

C'est donc une fonction $k(z)$. Par suite, c'est une fonction rationnelle de t à coefficients réels.

Il suit de là que $K(z)$ est une fonction rationnelle de t à coefficients réels.

Ce raisonnement suppose que parmi les discontinuités de $K(z)$ ne figure pas a. Si a est un pôle de $K(z)$, on le mettra à part; on ne le comprendra pas dans la suite $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

Réciproquement, si l'on considère une fonction rationnelle de t, à coefficients réels, si cette fonction reste *finie* sur la limite L du domaine A, c'est une fonction $K(z)$. Mais il peut se faire que la fonction rationnelle de t (à coefficients réels) envisagée soit infinie en certains points isolés de la limite. Nous la désignerons dans la suite par la notation $[K(z)]$.

6. Si dans l'expression

$$t = \frac{v_1 - h + R}{u_1 - g} = \frac{u_1 - g}{h + R - v_1} \qquad (\text{n}^\circ\ 3)$$

on remplace u_1 et v_1 en fonction de z, on obtient une fonction t de z.

Je dis que cette fonction réalise la représentation conforme du domaine A sur le demi-plan nord; t a le caractère d'une fonction entière à l'intérieur du domaine A. Sur la limite L, t est réelle, finie et continue, sauf si l'on a

$$u_1 = g, \qquad v_1 = h + \mathrm{R}.$$

Je dis maintenant que, le point z décrivant le domaine A tout entier, sans répétition, le point t décrira le demi-plan nord, tout entier, sans répétition.

Il faut démontrer :

1° Qu'à tout point z intérieur au domaine A correspond un point t du demi-plan nord, et un seul;

2° Qu'à tout point t du demi-plan nord correspond un point z, et un seul, intérieur au domaine A.

1° Soit z_0 un point intérieur au domaine A.

Je considère la fonction rationnelle $p(z) = \frac{1}{z - z_0}$.

Je forme la fonction $\mathrm{K}(z)$ correspondante.

C'est une fonction rationnelle de t à coefficients réels,

$$\mathrm{K}(z) = \mathrm{R}(t).$$

Soit maintenant $p_1(z) = \frac{i}{z - z_0}$; soit $\mathrm{K}_1(z)$ la fonction K correspondant à $p_1(z)$.

On a

$$\mathrm{K}_1(z) = \mathrm{R}_1(t),$$

$\mathrm{R}_1(t)$ désignant une fonction rationnelle de t à coefficients réels.

A $z = z_0$ correspond la valeur

$$t_0 = t(z_0);$$

mais

$$\frac{\mathrm{K}_1(z)}{\mathrm{K}(z)} = \frac{\mathrm{R}_1(t)}{\mathrm{R}(t)}.$$

En y faisant $z = z_0$, il vient

$$i = \frac{\mathrm{R}_1(t_0)}{\mathrm{R}(t_0)},$$

et puisque $\mathrm{R}(t)$, $\mathrm{R}_1(t)$ sont des fonctions rationnelles à coefficients réels, t_0 est imaginaire.

Je dis de plus que le point t_0 est dans le demi-plan nord.

Tous les points t correspondant aux points z intérieurs au domaine A sont dans le même demi-plan, puisque, d'après ce que nous venons de voir, t ne peut devenir réel tant que le point z reste à l'intérieur du domaine A. Il suffit par conséquent de considérer un point z particulier, intérieur au domaine A. Prenons $z = a$.

Pour $z = a$,

$$t = +i.$$

La proposition est donc démontrée.

2° Soit $a_0 + ib_0$ un point du demi-plan nord ($b_0 > 0$).

Je dis qu'il existe un point z_0 du domaine A, et un seul, tel que

$$t(z_0) = a_0 + ib_0.$$

En effet, envisageons la fonction

$$\frac{1}{t - a_0 - ib_0} = \frac{t - a_0}{(t - a_0)^2 + b_0^2} + i \frac{b_0}{(t - a_0)^2 + b_0^2}.$$

$\dfrac{t - a_0}{(t - a_0)^2 + b_0^2}$ et $\dfrac{b_0}{(t - a_0)^2 + b_0^2}$ sont deux fonctions rationnelles de t à coefficients réels qui ne deviennent infinies que pour $t = a_0 + ib_0$ et $t = a_0 - ib_0$.

Remplaçons t en fonction de z. Nous avons alors deux fonctions K, car elles prennent des valeurs réelles et finies sur la limite L du domaine A. Comme ce sont de véritables fonctions de z, et non pas des constantes, chacune d'elles devient infinie, en un point au moins intérieur au domaine A.

Appelons z_0 un tel point.

Pour $z = z_0$, t sera égal soit à $a_0 + ib_0$, soit à $a_0 - ib_0$.

Mais nous avons déjà vu qu'à un point z intérieur au domaine A ne peut correspondre qu'un point t du demi-plan nord. Donc

$$t(z_0) = a_0 + ib_0,$$

puisque l'on suppose $b_0 > 0$.

Maintenant, il est impossible que $t(z)$ prenne la valeur $a_0 + ib_0$ en un autre point que z_0.

Car, soit

$$p(z) = \frac{1}{z - z_0}.$$

Formons la fonction $K(z)$ correspondante. C'est une fonction rationnelle de t à coefficients réels,

$$K(z) = R(t).$$

Elle est déjà infinie pour $z = z_0$, ou $t = t_0 = t(z_0)$.

S'il existait un autre point z_1, intérieur au domaine A, tel que $t(z_1) = a_0 + ib_0$, la fonction $K(z)$ serait infinie en ce point; or ceci est impossible; $K(z)$ n'admet qu'un pôle, $z = z_0$.

7. Voyons maintenant ce qui se passe sur la limite L.

Nous savons déjà que, si le point z est sur la limite L, $t(z)$ est réelle.

Réciproquement, soit a_0 une valeur réelle.

Je considère la fonction $\frac{1}{t(z) - a_0}$.

Si la fonction $\frac{1}{t(z) - a_0}$ ne devenait pas infinie sur la limite L du domaine A, ce serait une fonction $K(z)$.

D'ailleurs, elle n'est infinie pour aucune valeur de z intérieure à A, puisque, pour de telles valeurs, $t(z)$ est imaginaire.

Ce serait donc une constante : or cette conclusion est inexacte.

Il existe donc une valeur z_0 de z, le point z_0 étant sur la limite L de A, telle que $t(z_0) = a_0$.

Il ne peut y en avoir qu'une : en effet, décrivons dans le demi-plan nord, de a_0 pour centre, un demi-cercle. A chaque point t de ce demi-cercle correspond un point z intérieur à A, et *un seul*. Au demi-cercle correspond donc un domaine inclus dans A. Si le rayon du demi-cercle devient infiniment petit, ce domaine vient se confondre avec un point unique de la limite L, point unique z_0 tel que $t(z_0) = a_0$.

8. On peut, d'après ce qui précède, énoncer le théorème suivant :

Il existe une fonction analytique $t(z)$ qui a le caractère d'une fonction entière pour tous les points intérieurs au domaine A, *et telle que, si le point z décrit le domaine* A *en passant une fois, et une seule, par chacun de ses points, le point t décrit le demi-plan nord en passant une fois, et une seule, par chacun de ses points. Lorsque z décrira la limite du domaine* A, *le point t décrira l'axe réel.*

Ajoutons que la représentation ainsi obtenue du domaine A sur le demi-plan nord conserve les angles.

C'est une représentation conforme.

La solution n'est pas complètement déterminée, car, si la fonction $t(z)$ répond à la question, il en est de même de la fonction

$$\theta(z) = \frac{a\,t(z) + b}{c\,t(z) + d},$$

a, b, c, d étant quatre constantes réelles satisfaisant à l'inégalité $ad - bc > 0$.

Le problème dépend donc de trois constantes arbitraires qu'on peut déterminer en se donnant la correspondance sur le demi-plan nord, soit de trois points de la limite L du domaine A, soit d'un point pris sur la limite L du domaine A et d'un point intérieur au domaine A.

9. Donnons un exemple simple.

Prenons pour domaine A un cercle de rayon 1, ayant pour centre l'origine.

Je considère les fractions rationnelles $\frac{1}{z}$, $\frac{i}{z}$.

Les fonctions K(z) correspondantes sont

$$u_1 = \frac{1}{z} + z,$$

$$v_1 = \frac{i}{z} - iz.$$

On a

$$u_1^2 + v_1^2 = 4, \qquad u_1 + iv_1 = 2z, \qquad u_1 - iv_1 = \frac{2}{z}.$$

Posons

$$u_1 = \frac{4t}{t^2+1}, \qquad v_1 = 2\frac{t^2-1}{t^2+1}.$$

La fonction

$$t = \frac{z+i}{iz+1}$$

représente le cercle de rayon 1 ayant pour centre O sur le demi-plan nord.

Les fonctions

$$u_m = z_m + \frac{1}{z^m},$$

$$v_m = \frac{i}{z^m} - iz^m$$

sont les fonctions K(z) relatives à $\frac{1}{z^m}$ et à $\frac{i}{z^m}$.

On a

$$u_m + iv_m = 2z^m = \frac{(u_1 + iv_1)^m}{2^{m-1}},$$

$$u_m - iv_m = \frac{2}{z^m} = \frac{(u_1 - iv_1)^m}{2^{m-1}}.$$

Soit

$$p(z) = \frac{C_1}{z} + \frac{C_2}{z^2} + \ldots + \frac{C_m}{z^m}.$$

Désignons par C'_k la quantité imaginaire conjuguée de C_k.

La fonction $K(z)$ correspondant à $p(z)$ sera

$$K(z) = \sum_{k=1}^{k=m} \left(\frac{C_k}{z^k} + C'_k z^k\right).$$

Soit, d'une façon générale,

$$\begin{aligned} p(z) = &\ \frac{A_1}{z-a} + \frac{A_2}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(z-a)^\alpha} \\ &+ \frac{B_1}{z-b} + \frac{B_2}{(z-b)^2} + \ldots + \frac{B_\beta}{(z-b)^\beta} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \frac{L_1}{z-l} + \frac{L_2}{(z-l)^2} + \ldots + \frac{L_\lambda}{(z-l)^\lambda}; \end{aligned}$$

les points a, b, ..., l étant tous à l'intérieur du cercle A.

Remarquons que, si a est à l'intérieur du cercle A, le point imaginaire conjugué a' est aussi à l'intérieur du cercle A, et $\frac{1}{a'}$ est à l'extérieur du même cercle.

De cette remarque et de ce fait que sur la circonférence L de rayon 1, limite du domaine A, l'imaginaire conjuguée de $z = e^{i\varphi}$ est $\frac{1}{z}$, on conclut que, si $\bar{p}(z)$ désigne ce que devient $p(z)$ quand on y remplace chaque coefficient par son imaginaire conjuguée, la fonction $K(z)$ correspondant à $p(z)$ sera

$$K(z) = p(z) + \bar{p}\left(\frac{1}{z}\right).$$

10. Revenons au cas général.

Supposons que, par un moyen quelconque, on ait trouvé la fonction $K(z)$ qui correspond à une fonction rationnelle donnée $p(z)$.

On a

$$K(z) = p(z) - f(z),$$

$f(z)$ ayant à l'intérieur du domaine A le caractère d'une fonction entière.

On en conclut

$$K_1(x, y) + iK_2(x, y) = p_1(x, y) + ip_2(x, y) - f_1(x, y) - if_2(x, y),$$

et, par suite, sur la limite du domaine A, puisque $K_2(x, y) = 0$, on a toujours

$$f_2(x, y) = p_2(x, y).$$

Le problème de Dirichlet est donc résolu pour la limite L du domaine A et la fonction $p_2(x, y)$.

Ainsi, prenons l'exemple précédent.

On a

$$p_2(x, y) = \frac{1}{2i}\left[p(z) - \bar{p}(z')\right].$$

D'ailleurs

$$f(z) = -\bar{p}\left(\frac{1}{z}\right),$$

$$\bar{f}(z') = -p\left(\frac{1}{z'}\right).$$

Donc ici

$$f_2(x, y) = \frac{1}{2i}\left[p\left(\frac{1}{z'}\right) - \bar{p}\left(\frac{1}{z}\right)\right],$$

z' étant la quantité imaginaire conjuguée de z.

On voit directement : 1° que les points (x, y), où $f_2(x, y)$ devient infinie, sont tous extérieurs au cercle A ; 2° que $f_2(x, y)$ prend sur la circonférence L, limite de A, les mêmes valeurs que $p_2(x, y)$, puisque, dans ce cas, $z = \frac{1}{z'}$.

De même, si l'on considère la fonction

$$p_1(x, y) = \tfrac{1}{2}\left[p(z) + \bar{p}(z')\right],$$

la fonction $\frac{1}{2}\left[p\left(\frac{1}{z'}\right) + \bar{p}\left(\frac{1}{z}\right)\right]$, finie et continue à l'intérieur du cercle A, prend sur la limite L les mêmes valeurs que $p_1(x, y)$.

II. Problème de la représentation conforme pour le cas de deux aires a connexion multiple. — Définition des fonctions F(z), H(z), K(z).

11. J'aborde maintenant le problème suivant :

On se donne deux domaines A *et* A_1, *de même connexion.*

Chercher à quelles conditions ils peuvent se représenter l'un sur l'autre, et, dans le cas où le problème est possible, trouver la fonction qui réalise cette représentation.

Nous avons vu que le problème est toujours possible pour deux domaines de connexion 1, qu'il est même indéterminé. On le détermine en se donnant dans A_1 les correspondants soit de trois points de la limite L du domaine A, soit d'un point de la limite L du domaine A et d'un point intérieur au domaine A.

Quant à la fonction qui réalise la représentation, on la trouve en représentant successivement les deux domaines sur le demi-plan nord, et en éliminant la variable t relative à ce demi-plan.

Je suppose démontrée la proposition suivante :

Je considère un domaine A *limité extérieurement par une courbe* L_0, *intérieurement par p courbes* L_1, L_2, ..., L_p, *toutes extérieures les unes aux autres.*

Il existe une fonction u, à coefficients réels, et une seule, des variables x et y, finie, continue et uniforme à l'intérieur du domaine A, *ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres, telle que l'on ait*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

qui enfin, sur chacune des courbes limites, prennent des valeurs données à l'avance, ces valeurs formant sur chaque courbe en particulier une suite finie, continue et uniforme.

Si, comme dans le cas de la connexion simple, $p(z)$ est une fonction rationnelle quelconque de z, assujettie simplement à rester finie sur la limite de A, soit toujours

$$p(z) = p_1(x, y) + i p_2(x, y).$$

Supposons formée la fonction $\psi(x, y)$, qui prend sur la limite de A les valeurs de $p_2(x, y)$ et qui satisfait aux conditions que je viens de rappeler.

Ici, la valeur de l'intégrale

$$\int_{(a,\,b)}^{(x,y)} \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\,dx - \frac{\partial\psi}{\partial x}\,dy\right)$$

dépendra du chemin parcouru par le point (x, y) à l'intérieur du domaine A. Car on peut concevoir un contour fermé, tout entier à l'intérieur du domaine A, et contenant à son intérieur une ou plusieurs des courbes L_1, L_2, ..., L_p, à l'intérieur duquel, par conséquent, $\psi(x, y)$, ou ses dérivées, pourront ne plus être finies, continues et uniformes, ou bien à l'intérieur duquel $\psi(x, y)$ pourra ne plus satisfaire à l'équation

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0.$$

Nous n'avons donc plus d'intérêt à prendre pour $p(z)$ une fonction uniforme. Nous poserons

$$p(z) = R(z) + iC_1 \mathcal{L} R_1(z) + iC_2 \mathcal{L} R_2(z) + \ldots + iC_m \mathcal{L} R_m(z).$$

Dans le second membre, les R désignent des fonctions rationnelles, les C des constantes réelles.

Cette fonction $p(z)$ n'est pas uniforme.

Car, soit

$$R_j(z) = \rho_j e^{i\varphi_j},$$

$$\mathcal{L} R_j(z) = \mathcal{L} \rho_j + i(\varphi_j + 2h\pi).$$

Si le point z décrit, dans le sens direct, un contour contenant p_j zéros et q_j infinis de $R_j(z)$, φ_j augmente de $2(p_j - q_j)\pi$.

La fonction $p(z)$ augmentera donc d'une constante réelle

$$\omega = -\sum_{j=1}^{j=m} 2C_j(p_j - q_j)\pi.$$

Nous assujettirons cette fonction $p(z)$ à la seule condition de ne devenir infinie sur aucune des lignes $L_0, L_1, L_2, \ldots, L_p$.

Alors, si nous posons

$$p(z) = p_1(x, y) + ip_2(x, y),$$

la fonction $p_2(x, y)$, *qui est uniforme* [puisque les périodes de $p(z)$ sont réelles], est finie et continue sur chacune des lignes L.

Nous pouvons donc prendre pour valeurs données d'avance le long des lignes L les valeurs de cette fonction.

Au lieu de cela, et pour plus de généralité, prenons

Le long de L_0............. $p_2(x, y) + \omega_0$,
Le long de L_1............. $p_2(x, y) + \omega_1$,
....,
Le long de L_p............. $p_2(x, y) + \omega_p$,

les constantes $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$ étant réelles.

A ce système de valeurs correspond une fonction u, et une seule, satisfaisant aux conditions déjà énoncées.

Appelons-la $\psi(x, y)$.

Si, maintenant, nous cherchons à joindre à cette fonction une autre fonction $\varphi(x, y)$, de manière que $\varphi + i\psi$ soit une fonction de $x + iy$, nous avons comme précédemment à considérer l'intégrale

$$\int_{(a,b)}^{(x,y)} \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} dx - \frac{\partial\psi}{\partial x} dy\right),$$

prise le long d'un chemin reliant un point fixe (a, b), intérieur au domaine A, à un point mobile (x, y), intérieur lui aussi au domaine A, le chemin devant être lui-même tout entier à l'intérieur du domaine A.

La valeur de cette intégrale n'est plus, ici, indépendante du chemin, car l'intégrale prise le long d'un chemin fermé intérieur à A n'est plus égale à zéro, à moins que ce chemin ne renferme aucune des lignes $L_1, L_2, \ldots, L_p$, auquel cas le raisonnement déjà fait subsisterait.

Il est facile de donner la formule générale qui comprend toutes les valeurs possibles de l'intégrale.

Désignons par $2\omega'_\nu$ la valeur de l'intégrale prise le long d'une ligne fermée simple entourant seulement L_ν, tout entière à l'intérieur du domaine A, et parcourue une seule fois dans le sens direct.

$2\omega'_\nu$ est un nombre *réel,* indépendant du choix de la ligne fermée.

Dès lors, toutes les valeurs de l'intégrale sont comprises dans la formule

$$\mathrm{I} + 2m_1\omega'_1 + 2m_2\omega'_2 + \ldots + 2m_p\omega'_p,$$

I étant l'une quelconque de ses valeurs, et les m étant des nombres entiers positifs, négatifs ou nuls.

Appelons $\varphi(x, y)$ cette fonction réelle et multiforme; $\varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ est une fonction de $z = x + iy$.

Soit $f(z)$ cette fonction.

$f(z)$ est une fonction multiforme, mais sa dérivée est uniforme.

De plus, cette dérivée est finie et continue à l'intérieur du domaine A. Il suit de là que, dans le voisinage d'un point quelconque intérieur au domaine A, $f(z)$ est développable suivant la série de Taylor : les développements correspondant aux différentes déterminations ne différeront que par le premier terme.

Formons enfin la différence

$$p(z) - f(z) = \mathrm{F}(z).$$

La fonction $\mathrm{F}(z)$ ainsi obtenue n'est pas uniforme.

Mais sa dérivée est uniforme.

Ses périodes, toutes réelles, se divisent en deux catégories, celles qui proviennent de $p(z)$, à cause des logarithmes, puis celles qui proviennent de $f(z)$.

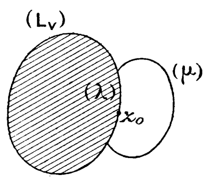
A l'intérieur du domaine A, $\mathrm{F}(z)$ se comporte comme une fonction logarithmico-rationnelle.

Enfin, sur la limite du domaine A, la fonction $\mathrm{F}(z)$ a une partie imaginaire constante le long de chaque ligne L.

12. Il nous reste à examiner de quelle manière $\mathrm{F}(z)$ peut se représenter dans le voisinage d'un point z_0 de la limite de A.

Soit λ une portion de la limite L_ν, sur laquelle est situé le point z_0 (*fig.* 1).

Fig. 1.



Joignons les extrémités de cet arc par une ligne (μ) tout entière à l'intérieur du domaine A.

Nous formons ainsi un domaine simplement connexe, α.

Nous savons représenter ce domaine α sur le demi-plan nord, au moyen de la fonction $t = t(z)$, $t(z)$ ayant à l'intérieur du domaine α le caractère d'une fonction entière, et ne devenant infinie qu'en un point de la limite. De plus, nous pouvons faire en sorte qu'au point z_0 corresponde l'origine dans le demi-plan nord.

Sur la ligne L_ν, $F(z)$ prend une valeur dont la partie imaginaire est constante et égale à $-i\omega_\nu$.

Donc $F(z) + i\omega_\nu$ prend sur L_ν des valeurs *réelles*.

Elle donnera par la transformation $t = t(z)$ une fonction $F_1(t)$ qui sera réelle pour les valeurs réelles de t situées à une distance de l'origine inférieure à une certaine limite, à savoir pour les valeurs réelles de t correspondant aux points z de la ligne λ.

Par hypothèse, $F(z) + i\omega_\nu$ ne devient infini en aucun point de la limite du domaine A. Donc, à l'intérieur du domaine α, dans le voisinage immédiat de z_0, la fonction $F(z) + i\omega_\nu$ a le caractère d'une fonction entière.

Donc $F_1(t)$ aura le caractère d'une fonction entière sur le demi-plan nord, dans le voisinage de l'origine.

Soit t' la valeur imaginaire conjuguée de t.

Nous conviendrons de prendre pour $F_1(t')$ la valeur imaginaire conjuguée de $F_1(t)$, t étant un point du demi-plan nord.

J'obtiens ainsi, dans le demi-plan sud, au voisinage de l'origine, la continuation analytique de la fonction $F_1(t)$.

La fonction $F_1(t)$ ainsi définie pourra être développée suivant les puissances entières et positives de t dans le voisinage de l'origine.

D'ailleurs, pour des valeurs réelles de t suffisamment petites, la fonction $F_1(t)$ a des valeurs réelles.

Donc les coefficients du développement seront réels.

Il résulte de là que, dans le voisinage de z_0, $F(z)$ pourra se représenter par le développement

$$F(z) = -i\omega_\nu + f_0 - f_1 t + f_2 t^2 + \ldots,$$

$f_0, f_1, f_2, \ldots$ étant des constantes réelles.

13. A une fonction $p(z)$ et à un système déterminé de constantes, ω_0, ω_1, ω_2, $\ldots$, ω_p correspond une fonction $F(z)$ bien déterminée, à une constante réelle près.

Réciproquement, à une fonction $F(z)$ donnée, outre un système bien déterminé de constantes ω_0, ω_1, ω_2, $\ldots$, ω_p, il correspond à cette fonction $F(z)$, d'une manière univoque, la partie de $p(z)$ correspondant aux pôles et aux points critiques logarithmiques de $F(z)$ intérieurs au domaine A.

Cette classe de fonctions $F(z)$ est très générale.

Elle comprend en particulier les fonctions que nous aurions obtenues en prenant pour $p(z)$ une fonction purement rationnelle, et en supposant nulles les constantes ω_0, ω_1, ω_2, $\ldots$, ω_p.

Ces fonctions, quoique non uniformes, seront utiles à considérer. Appelons-les *fonctions* $H(z)$.

Elles ont p périodes réelles, car, ici, $p(z)$ ne donne plus de périodes logarithmiques.

Si la fonction rationnelle $p(z)$ n'avait pas de pôles à l'intérieur du domaine A, la fonction $H(z)$ correspondante serait une constante *réelle* (plus des multiples de périodes).

14. On conçoit que, pour des fonctions $H(z)$ particulières, le nombre des périodes soit moindre que p.

En effet, considérons un certain nombre de fonctions H; H_1, H_2, $\ldots$, H_r.

La combinaison

$$\gamma_1 H_1 + \gamma_2 H_2 + \ldots + \gamma_r H_r,$$

où les γ sont des constantes réelles, est encore une fonction H.

Soient $2\omega_{\nu,1}$, $2\omega_{\nu,2}$, $\ldots$, $2\omega_{\nu,r}$ les périodes de H_1, H_2, $\ldots$, H_r le long de la ligne L_ν.

La période de la nouvelle fonction H le long de la même ligne sera

$$2\gamma_1\omega_{\nu,1} + 2\gamma_2\omega_{\nu,2} + \ldots + 2\gamma_r\omega_{\nu,r}.$$

Par un choix convenable des constantes γ, on pourra faire en sorte que cette période soit nulle.

Supposons que, ayant pris un nombre assez grand de fonctions H, on ait choisi les constantes γ de manière à annuler toutes les périodes. Nous avons, dès lors, une fonction $H(z)$ uniforme. Nous l'appellerons $K(z)$.

Ainsi les fonctions $K(z)$ sont des fonctions uniformes, ayant, à l'intérieur du domaine A, le caractère d'une fonction rationnelle et prenant sur la limite de ce domaine des valeurs réelles finies. Seulement, on ne peut plus dire, ici (comme dans le cas de la connexion simple), qu'à toute fonction rationnelle $p(z)$ correspond une fonction $K(z)$: ce n'est vrai que pour des fonctions $p(z)$ particulières.

Enfin, une fonction rationnelle, *à coefficients réels,* de plusieurs fonctions $K(z)$, qui ne devient pas infinie sur la limite du domaine A, est une nouvelle fonction $K(z)$.

Un raisonnement analogue nous permet de dire que l'on pourra former une fonction $H(z)$ ayant pour périodes réelles p nombres réels donnés à l'avance.

15. Parmi les fonctions $F(z)$, il en est de remarquables que nous allons maintenant définir :

Je suppose que la fonction $p(z)$, qui correspond à l'une de ces fonctions $F(z)$, ait le caractère d'une fonction entière à l'intérieur et sur la limite du domaine A.

Si les quantités $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$ étaient toutes nulles, $F(z)$ se réduirait à une simple constante réelle.

Mais, s'il n'en est pas ainsi, $F(z)$ est une véritable fonction qui, à l'intérieur du domaine A, a le caractère d'une fonction entière.

Cette fonction est déterminée par la seule connaissance des constantes $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$.

Il y a une infinité de telles fonctions, puisqu'il y a une infinité de systèmes de valeurs de $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$.

Mais elles peuvent toutes s'exprimer très simplement au moyen de quelques-unes d'entre elles.

Choisissons les systèmes de valeurs de $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$ qui suivent :

$\omega_0 = 0, \quad \omega_1 = 1, \quad \omega_2 = 0, \quad \ldots, \quad \omega_p = 0;$ soit J_1 la fonction correspondante;

$\omega_0 = 0, \quad \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 1, \quad \ldots, \quad \omega_p = 0;$ soit J_2 la fonction correspondante;

......, ..., ..., ..., ...; ....;

$\omega_0 = 0, \quad \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0, \quad \ldots, \quad \omega_p = 1;$ soit J_p la fonction correspondante.

Considérons la fonction générale $J(z)$ se comportant à l'intérieur du domaine A comme une fonction entière, et correspondant aux valeurs $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$.

Soit d'abord $\omega_0 = 0$.

Alors

$$J = \omega_1 J_1 + \omega_2 J_2 + \ldots + \omega_p J_p.$$

Supposons, au contraire, que ω_0 soit différent de zéro, tandis que l'on a

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_p = 0.$$

Alors

$$J = i\,\omega_0 - \omega_0 J_1 - \omega_0 J_2 - \ldots - \omega_0 J_p.$$

Donc, dans le cas général,

$$J = i\,\omega_0 + (\omega_1 - \omega_0) J_1 + (\omega_2 - \omega_0) J_2 + \ldots + (\omega_p - \omega_0) J_p.$$

III. — Les fonctions $M(z)$ et $N(z)$. Leur expression au moyen de fonctions types de même espèce.

16. Nous nous proposons maintenant de chercher l'expression générale des fonctions $F(z)$, $H(z)$, $K(z)$ au moyen de fonctions types.

A l'égard des fonctions $K(z)$, nous démontrerons que, comme dans le cas de la connexion simple, elles s'expriment toutes en fonction rationnelle à coefficients réels de deux d'entre elles, ces deux fonctions particulières étant, du reste, liées par une relation algébrique.

Un tel mode de représentation n'est évidemment plus applicable aux fonctions $F(z)$, qui sont multiformes.

A l'égard de ces dernières, nous montrerons qu'elles sont des intégrales abéliennes relatives à cette équation algébrique; de sorte que, dans les fonctions déjà citées, on voit apparaître les divers genres d'intégrales abéliennes :

1° Les fonctions $J(z)$ ont, dans tout le domaine A, le caractère de fonctions entières;

2° Les fonctions $H(z)$ se comportent dans le domaine A comme des fonctions rationnelles;

3° Les fonctions $F(z)$ ont le caractère de fonctions à la fois logarithmiques et rationnelles.

17. Soit a un point particulier, pris dans le domaine A.

Je réserverai la lettre h aux fonctions $H(z)$ qui n'ont pas d'autres pôles que le point a.

Elles correspondent à des fonctions $p(z)$ de la forme

$$\frac{C_1}{z-a} + \frac{C_2}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{C_m}{(z-a)^m},$$

où l'on a

$$C_1 = A_1 + B_1 i, \qquad C_2 = A_2 + B_2 i, \qquad \ldots, \qquad C_m = A_m + B_m i.$$

Soient $h(z)$ la fonction correspondant à $\frac{1}{2}p(z)$, $h'(z)$ la fonction correspondant à $-\frac{i}{2}p(z)$; $h+ih'$ se comportera comme $p(z)$ à l'intérieur du domaine A, tandis que $h-ih'$ aura, à l'intérieur du domaine A, le caractère d'une fonction entière.

Nous poserons

$$h(z)+ih'(z)=\text{M}(z),$$
$$h(z)-ih'(z)=\text{M}'(z).$$

A chaque fonction $p(z)$, de pôle a, correspondra ainsi une fonction $\text{M}(z)$, bien déterminée, à une constante près, réelle ou imaginaire.

La fonction générale $\text{M}(z)$ peut s'exprimer au moyen de fonctions $\text{M}(z)$ élémentaires.

J'appelle $\text{M}_\mu(z)$ celle qui correspond à $\frac{1}{(z-a)^\mu}$. Si $\text{M}(z)$ correspond à la fonction

$$\frac{\text{C}_1}{z-a}+\frac{\text{C}_2}{(z-a)^2}+\ldots+\frac{\text{C}_m}{(z-a)^m},$$

je dis que l'on a

$$\text{M}(z)=\text{C}_1\text{M}_1(z)+\text{C}_2\text{M}_2(z)+\ldots+\text{C}_m\text{M}_m(z).$$

En effet,

$$\text{M}_\mu(z)=h_\mu(z)+ih'_\mu(z),$$

$$h_\mu(z) \quad \text{correspond à} \quad \frac{1}{2}\frac{1}{(z-a)^\mu},$$

$$h'_\mu(z) \quad \text{»} \quad -\frac{i}{2}\frac{1}{(z-a)^\mu}.$$

D'ailleurs,

$$p(z)=\frac{\text{A}_1+i\text{B}_1}{z-a}+\frac{\text{A}_2+i\text{B}_2}{(z-a)^2}+\ldots+\frac{\text{A}_m+i\text{B}_m}{(z-a)^m},$$

$$-ip(z)=\frac{\text{B}_1-i\text{A}_1}{z-a}+\frac{\text{B}_2-i\text{A}_2}{(z-a)^2}+\ldots+\frac{\text{B}_m-i\text{A}_m}{(z-a)^m}.$$

Je dis que

$$h(z)=\text{A}_1h_1+\text{A}_2h_2+\ldots+\text{A}_mh_m-\text{B}_1h'_1-\text{B}_2h'_2-\ldots-\text{B}_mh'_m,$$
$$h'(z)=\text{B}_1h_1+\text{B}_2h_2+\ldots+\text{B}_mh_m+\text{A}_1h'_1+\text{A}_2h'_2+\ldots+\text{A}_mh'_m.$$

En effet : 1° les expressions ainsi obtenues ont des valeurs réelles et finies sur la limite de A; 2° la première correspond à $\frac{1}{2}p(z)$ et la seconde à $-\frac{i}{2}p(z)$. J'en déduis :

$$h(z) + i h'(z) = (A_1 + i B_1) h_1 + (A_2 + i B_2) h_2 + \ldots + (A_m + i B_m) h_m$$
$$+ i[(A_1 + i B_1) h'_1 + (A_2 + i B_2) h'_2 + \ldots + (A_m + i B_m) h'_m],$$

ou

$$M(z) = h(z) + i h'(z) = C_1 M_1(z) + C_2 M_2(z) + \ldots + C_m M_m(z).$$

La proposition est donc démontrée.

18. En général, les fonctions $M(z)$ ainsi obtenues sont multiformes. Elles ont p périodes comme les fonctions $H(z)$.

Ces périodes sont imaginaires.

Il peut arriver cependant, pour des fonctions $p(z)$ spéciales, qu'elles soient uniformes.

En général, cela aura lieu pour une fonction $p(z)$ dont le pôle unique a sera d'ordre m, pourvu qu'on puisse choisir convenablement les constantes C_1, C_2, ..., C_m de manière que la fonction

$$M(z) = C_1 M_1(z) + C_2 M_2(z) + \ldots + C_m M_m(z)$$

ait ses p périodes nulles, la constante C_m étant différente de zéro.

Mais, pour certaines valeurs de m, c'est impossible.

J'appelle ρ le nombre de ces valeurs de m.

Ce nombre ρ est appelé à jouer, dans la suite, un rôle important.

J'appelle α, β, γ, ... la suite indéfinie des valeurs de m, rangées par ordre de grandeur croissante, pour lesquelles il existe des fonctions $M(z)$ uniformes; $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, ..., $\varkappa_\rho$ la suite limitée des valeurs de m, rangées par ordre de grandeur croissante, pour lesquelles il n'en existe pas.

Je désignerai par la lettre N les fonctions $M(z)$ uniformes.

Il est à remarquer que les fonctions $h(z)$ et $h'(z)$ telles que $N(z) = h(z) + i h'(z)$ sont elles-mêmes uniformes. Autrement, chacune d'elles aurait des périodes *réelles,* de sorte que les périodes de $N(z)$ ne seraient pas toutes nulles.

Ainsi ces fonctions $h(z)$, $h'(z)$ sont des fonctions $K(z)$. Comme les fonctions $p(z)$ correspondantes n'ont que le pôle a, nous désignerons ces fonctions h par la lettre k, et nous poserons

$$N(z) = k(z) + i k'(z).$$

Toutes les fonctions $M(z)$ ou $N(z)$ s'expriment, comme nous l'avons vu, au moyen des fonctions $M_1(z)$, $M_2(z)$, ...

C'est une fonction linéaire et homogène de $M_1(z)$, $M_2(z)$, ...

Mais on peut imaginer un autre mode d'expression où ne figureront que les fonctions $M_{\varkappa_1}(z)$, $M_{\varkappa_2}$, ..., $M_{\varkappa_\rho}(z)$, et des fonctions $N(z)$.

En effet, si μ est l'un des nombres $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, il est possible de déterminer les constantes c de manière que $M_\mu + c_1 M_{\mu-1} + \ldots + c_{\mu-1} M_1$ soit une fonction uniforme N_μ.

S'il y a plusieurs solutions, nous prendrons arbitrairement l'une d'elles.

Dès lors, toutes les fonctions $M_\mu(z)$ qui ne figurent pas dans la série $M_{\varkappa_1}(z)$, $M_{\varkappa_2}(z)$, ..., $M_{\varkappa_\rho}(z)$ se trouvent remplacées par des fonctions N_μ, et l'expression générale de $M(z)$ est la suivante :

$$M(z) = C_1 M_{\varkappa_1}(z) + C_2 M_{\varkappa_2}(z) + \ldots + C_\rho M_{\varkappa_\rho}(z) + AN_\alpha + BN_\beta + \ldots + LN_\lambda.$$

Dans le cas où la fonction $M(z)$ serait uniforme, la première partie disparaîtra. On aura

$$N(z) = AN_\alpha + BN_\beta + \ldots + LN_\lambda.$$

19. J'ai besoin, avant de continuer, d'établir le théorème suivant :

Le produit de deux ou plusieurs fonctions $M(z)$ *est encore une fonction* $M(z)$.

En effet, soit

$$M(z) = h(z) + i\,h'(z),$$
$$M'(z) = h(z) - i\,h'(z),$$

puis

$$M_0(z) = h_0(z) + i\,h'_0(z)$$

et

$$M'_0(z) = h_0(z) - i\,h'_0(z);$$

$$\begin{array}{lcl} h(z) & \text{correspond à} & \frac{1}{2}p(z), \\ h'(z) & \text{»} & -\frac{i}{2}p(z), \\ h_0(z) & \text{»} & \frac{1}{2}p_0(z), \\ h'_0(z) & \text{»} & -\frac{i}{2}p_0(z); \end{array}$$

$$M(z)M_0(z) = hh_0 - h'h'_0 + i(hh'_0 + h_0h'),$$
$$M'(z)M'_0(z) = hh_0 - h'h'_0 - i(hh'_0 + h_0h');$$

$$\begin{array}{lcl} hh_0 - h'h'_0 & \text{correspond à} & \frac{1}{2}p(z)p_0(z), \\ hh'_0 + h_0h' & \text{»} & -\frac{i}{2}p(z)p_0(z). \end{array}$$

On a donc bien une fonction M en faisant le produit de deux fonctions M.

Le théorème s'étend sans peine au produit d'un nombre quelconque de fonctions M.

Il est clair aussi que le produit de deux ou plusieurs fonctions N étant uniforme, comme chaque facteur, donnera encore une fonction N.

20. Je vais maintenant démontrer que toutes les fonctions N sont exprimables en fonction de α d'entre elles convenablement choisies.

Considérons la suite α, β, γ, ...

Je pose d'abord

$$N_\alpha(z) = u.$$

Puis je fais correspondre, à chaque terme de la suite

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \ldots,$$

le reste de sa division par α.

J'obtiens ainsi les α premiers nombres entiers et zéro.

Je considère l'un de ces nombres entiers, autre que zéro.

Il ne fera pas partie de la suite, puisque α est le plus petit nombre de la suite.

J'ajoute au nombre considéré, α, autant de fois qu'il est nécessaire, pour que le nouveau nombre obtenu fasse partie de la suite.

J'ai ainsi $\alpha - 1$ nombres de la suite.

Je désigne les fonctions élémentaires N correspondantes par $u_1, u_2, \ldots, u_{\alpha-1}$.

Alors $u, u_1, u_2, \ldots, u_{\alpha-1}$ sont les α fonctions N au moyen desquelles on va exprimer toutes les autres.

En effet, considérons une fonction N_μ.

On peut trouver un entier n tel que l'on ait

$$\mu = n\alpha + \mu',$$

$N_{\mu'}$ étant l'une des fonctions $u, u_1, u_2, \ldots, u_{\alpha-1}$; $u^n N_{\mu'}$ est un produit de fonctions N.

C'est donc une fonction N, et elle est relative au nombre μ. On a donc

$$u^n N_{\mu'} = N_\mu + \ldots + BN_\beta + AN_\alpha.$$

Ceci nous permettra de remplacer N_μ en fonction linéaire de $u^n N_{\mu'}$ et de fonctions N_λ, avec $\lambda < \mu$.

On conçoit qu'on pourra, finalement, exprimer toute fonction linéaire N_μ par une fonction linéaire de fonctions telles que

$$u^n u_\theta \qquad \text{avec} \qquad \theta = 0, 1, 2, \ldots, \alpha - 1, \qquad u_0 = u.$$

Envisageons maintenant une fonction $N(z)$ quelconque. Nous avons vu qu'elle est de la forme

$$N(z) = A\,N_\alpha(z) + B\,N_\beta(z) + \ldots + L\,N_\lambda(z).$$

L'expression générale de $N(z)$ sera donc

$$N(z) = G_0(u) + u_1\,G_1(u) + \ldots + u_{\alpha-1}\,G_{\alpha-1}(u),$$

les fonctions G étant des polynomes entiers en u.

21. Mais, maintenant, chaque fonction u_h peut s'exprimer rationnellement au moyen de u, et d'une autre fonction élémentaire N, soit

$$N_{\alpha'}(z) = v.$$

En effet, v, v^2, $\ldots$, $v^{\alpha-1}$ sont des fonctions N. Elles sont donc exprimables comme il suit

$$(1)\qquad v^\theta = G_{0\theta}(u) + u_1\,G_{1\theta}(u) + \ldots + u_{\alpha-1}\,G_{\alpha-1,\theta}(u) \qquad (\theta = 1, 2, \ldots, \alpha-1).$$

Supposons qu'on puisse résoudre les équations (1). Alors on aura

$$u_j = R_{0j}(u) + v\,R_{1j}(u) + v^2\,R_{2j}(u) + \ldots + v^{\alpha-1}\,R_{\alpha-1,j}(u) \qquad (j = 1, 2, \ldots, \alpha-1),$$

les R étant des fonctions rationnelles de u.

Donc

$$N(z) = R_0(u) + v\,R_1(u) + v^2\,R_2(u) + \ldots + v^m\,R_m(u),$$

les fonctions R étant des fonctions rationnelles de u.

D'ailleurs v^α est aussi une fonction $N(z)$.

Il existe donc entre u et v une relation algébrique, $G(u, v) = 0$, *qui est de degré α par rapport à v.*

La base de ce raisonnement est que l'on peut résoudre le système d'équations (1), par rapport à u_1, u_2, $\ldots$, $u_{\alpha-1}$. Je dis que, sous la condition α' premier avec α (et alors il sera indiqué de prendre, dans la suite α, β, γ, $\ldots$, pour α' le plus petit nombre premier avec α), cette résolution est possible.

Car, s'il n'en était pas ainsi, les $\alpha - 1$ équations considérées ne seraient pas distinctes.

Il y aurait donc entre v, v^2, $\ldots$, $v^{\alpha-1}$ une relation linéaire dont les coefficients seraient des fonctions rationnelles de u.

u et v seraient donc liés par une équation algébrique, $G(u, v) = 0$, dont le degré en v serait au plus $\alpha - 1$.

Ceci n'est pas possible. En effet :

Dans le voisinage de $z = a$, u et v se mettent sous la forme

$$u = \frac{P(z-a)}{(z-a)^\alpha}, \qquad v = \frac{Q(z-a)}{(z-a)^{\alpha'}},$$

$P(z-a)$ et $Q(z-a)$ représentant des séries ordonnées suivant les puissances entières et positives de $(z-a)$, avec les conditions $P = Q = 1$, pour $z = a$, puisque $u = N_\alpha(z)$ correspond à $\frac{1}{(z-a)^\alpha}$ et $v = N_{\alpha'}(z)$ à $\frac{1}{(z-a)^{\alpha'}}$.

On déduit de là

$$\frac{v^\alpha}{u^{\alpha'}} = \frac{Q^\alpha(z-a)}{P^{\alpha'}(z-a)} = \frac{Q_1(z-a)}{P_1(z-a)},$$

$P_1(z-a)$ et $Q_1(z-a)$ étant des séries ordonnées suivant les puissances entières et positives de $z-a$, avec les conditions $P_1 = Q_1 = 1$ pour $z = a$.

Donc

$$\frac{Q_1(z-a)}{P_1(z-a)} = \mathfrak{P}(z-a),$$

$\mathfrak{P}(z-a)$ étant une série ordonnée suivant les puissances entières et positives de $z-a$, avec $\mathfrak{P} = 1$ pour $z = a$.

On a donc

$$v^\alpha = u^{\alpha'} \mathfrak{P}(z-a);$$

et, puisque α' est premier avec α, α est la plus petite valeur telle qu'il en soit ainsi.

Mais alors, lorsque u devient infini, il y a α valeurs de v qui deviennent infinies.

Donc, le degré de la relation $G(u, v) = 0$ est au moins α par rapport à v.

22. Considérons maintenant les fonctions $K(z)$.

Soient $z_1, z_2, \ldots, z_m$ les pôles d'une telle fonction, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ leurs ordres respectifs.

Supposons-les tous différents de a.

Soient $U_1, U_2, \ldots, U_m$ les valeurs de u en ces différents points.

La fonction $K(z)(u-U_1)^{\alpha_1}(u-U_2)^{\alpha_2}\ldots(u-U_m)^{\alpha_m}$ n'a plus, à l'intérieur du domaine A, que le pôle $z = a$.

Posons

$$P = (u-U_1)^{\alpha_1}(u-U_2)^{\alpha_2}\ldots(u-U_m)^{\alpha_m},$$

P est une fonction entière de u, à coefficients imaginaires.

Soit

$$u = k + ik',$$

k et k' étant les fonctions K correspondant à $\frac{1}{2}\frac{1}{(z-a)^\alpha}$ et à $-\frac{i}{2}\frac{1}{(z-a)^\alpha}$.

$P(u)$ pourra se mettre sous la forme

$$P(u) = P_1(k, k') + i P_2(k, k'),$$

P_1 et P_2 étant des fonctions entières, à coefficients réels de k et de k'.

Elles sont donc réelles et finies sur la limite du domaine A, et, à l'intérieur du domaine A, elles n'admettent que le pôle a.

Ce sont donc des fonctions $k(z)$, et l'on peut poser

$$K(z) P(u) = K(z)[k_1(z) + i k_2(z)],$$

puisque

$$P(u) = P_1(k, k') + i P_2(k, k'),$$

où P_1 et P_2 sont des fonctions entières à coefficients réels de k et de k'; comme $u' = k - ik'$, par définition, si nous désignons par U'_j la valeur imaginaire conjuguée de U_j, on a

$$K(z)(u' - U'_1)^{\alpha_1}(u' - U'_2)^{\alpha_2}\ldots(u' - U'_m)^{\alpha_m} = K(z)[k_1(z) - i k_2(z)].$$

Cette nouvelle fonction admet de nouveau les pôles $z_1, z_2, \ldots, z_m$.

Pour les faire disparaître, appelons $V'_1, V'_2, \ldots, V'_m$ les valeurs de u' en ces points. Le produit

$$K(z)[(u' - U'_1)^{\alpha_1}(u' - U'_2)^{\alpha_2}\ldots(u' - U'_m)^{\alpha_m}][(u' - V'_1)^{\alpha_1}(u' - V'_2)^{\alpha_2}\ldots(u' - V'_m)^{\alpha_m}]$$

reste fini en tous les points du domaine A, puisque $u' = k - ik'$ a, en tous les points de ce domaine, le caractère d'une fonction entière.

Soit V_j la quantité imaginaire conjuguée de V'_j et posons

$$Q = (u - V_1)^{\alpha_1}(u - V_2)^{\alpha_2}\ldots(u - V_m)^{\alpha_m}.$$

Considérons la fonction

$$PQ\,K(z).$$

$P(u)$ est de la forme

$$k_1(z) + i k_2(z).$$

$Q(u)$ est aussi de la forme

$$k_3(z) + i k_4(z);$$

donc

$$K(z)\,P(u)\,Q(u) = K(k_1 + ik_2)(k_3 + ik_4).$$

Le produit de plusieurs fonctions K est encore une fonction K.

Donc

$$K(z)P(u)Q(u) = k_5(z) + i\,k'_5(z).$$

D'ailleurs

$$k_5(z) - i\,k'_5(z) = K(z)[(u' - U'_1)^{\alpha_1} \ldots (u' - U'_m)^{\alpha_m}][(u' - V'_1)^{\alpha_1} \ldots (u' - V'_m)^{\alpha_m}],$$

puisque le deuxième membre a, dans le domaine A, le caractère d'une fonction entière.

Donc $K(z)P(u)Q(u)$ est une fonction $N(z)$. Elle est exprimable rationnellement en fonction de u et de v.

Donc toute fonction $K(z)$ peut s'exprimer elle-même rationnellement en fonction de u et de v.

u et v n'étant pas réelles sur la limite du domaine A, cette fonction rationnelle a des coefficients imaginaires.

Nous avons écarté le cas où la fonction $K(z)$ admettrait le pôle a. Supposons que $K(z)$ admette le pôle a, avec l'ordre α_0 de multiplicité.

Soient toujours $z_1, z_2, \ldots, z_m$ les autres pôles de $K(z)$, d'ordres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, respectivement.

Soit A' la valeur de u' au point a, valeur finie par hypothèse.

On prendra

$$Q(u) = (u - A)^{\alpha_0}(u - V_1)^{\alpha_1}(u - V_2)^{\alpha_2} \ldots (u - V_m)^{\alpha_m},$$

c'est la seule modification à faire subir au raisonnement précédent.

23. Ainsi, il est prouvé que toute fonction $K(z)$ est une fonction rationnelle de u et de v, u et v étant liés par une relation algébrique $G(u, v) = 0$.

Soit

$$u = u_1(z) + i\,u_2(z),$$
$$v = v_1(z) + i\,v_2(z),$$

u_1, u_2, v_1, v_2 étant des fonctions k.

Choisissons deux fonctions k particulières, par exemple

$$r = u_1(z),$$
$$s = l\,u_2(z) + m\,v_1(z) + n\,v_2(z),$$

l, m et n étant des constantes réelles.

On aura

$$r = \varphi(u, v),$$
$$s = \psi(u, v),$$

φ et ψ étant des fonctions rationnelles de u et de v, de sorte qu'à un système de valeurs de (u, v) ne correspond qu'un système de valeurs (r, s).

De plus, r et s satisfont à une équation algébrique

$$\mathcal{G}(r, s) = 0,$$

qu'on obtiendra en éliminant u et v entre les trois équations

$$r = \varphi(u, v),$$
$$s = \psi(u, v),$$
$$G(u, v) = 0.$$

D'ailleurs r et s sont des fonctions rationnelles du point analytique (u, v) qui ne deviennent infinies que pour le système de valeurs $z = a$, $u = \infty$, $v = \infty$. Donc, réciproquement à un système de valeurs (r, s) ne correspond qu'un système de valeurs (u, v). C'est-à-dire que la transformation

$$r = \varphi(u, v),$$
$$s = \psi(u, v)$$

est réversible, et que u et v sont des fonctions rationnelles de r et de s.

Il résulte de là que, $K(z)$ désignant la fonction K la plus générale, on aura

$$K(z) = R(r, s),$$

R désignant une fonction rationnelle à coefficients réels, puisque $K(z)$, $r(z)$, $s(z)$ sont réels simultanément sur la limite du domaine A.

La relation algébrique $\mathcal{G}(r, s) = 0$ est, elle aussi, à coefficients réels. Autrement, elle ne serait vérifiée que par un nombre fini de valeurs réelles de r et de s.

IV. — Domaine algébrique correspondant au domaine A. Genre de l'équation $\mathcal{G}(r, s) = 0$.

24. J'aborde maintenant un point très important.

A chaque point z du domaine A nous avons fait correspondre un couple de valeurs (r, s) liées toujours par la relation $\mathcal{G}(r, s) = 0$.

Lorsque le point z parcourt tout le domaine A, quelle portion de la surface de Riemann à α feuillets, qui répond à $\mathcal{G}(r, s) = 0$, parcourra le couple (r, s), et combien de fois passera-t-il par chaque point appartenant à cette portion de surface ?

Démontrons d'abord le théorème suivant :

$\mathcal{G}(r, s) = 0$ *étant une équation algébrique irréductible, et* (r_0, s_0) *une solution quelconque, on peut former une fonction rationnelle de* r *et de* s *ne* *devenant infinie que pour le seul système* (r_0, s_0) *de valeurs vérifiant l'équation* $\mathcal{G}(r, s) = 0$.

Soient n le degré, ρ le genre de l'équation $\mathcal{G}(r, s) = 0$.

On entend par courbe adjointe de la courbe $\mathcal{G}(r, s) = 0$ toute courbe algébrique passant $j - 1$ fois par tout point multiple d'ordre j de la courbe $\mathcal{G}(r, s) = 0$, sans qu'en un tel point les branches particulières des deux courbes se touchent (1).

Soient $\varphi(r, s) = 0$, $\psi(r, s) = 0$ les équations de deux courbes adjointes à la courbe $\mathcal{G}(r, s) = 0$.

Supposons-les toutes les deux de degré m.

Soit d'abord $m \geqq n - 2$.

Parmi les points d'intersection des courbes $\varphi = 0$, ou $\psi = 0$ avec la courbe $\mathcal{G} = 0$ non situés aux points singuliers, ρ sont déterminés par les $[n(m - n + 3) + \rho - 2]$ qui restent (2).

Cela posé, soit (r_0, s_0) un point de la courbe $\mathcal{G}(r, s) = 0$.

Déterminons $\psi(r, s)$ de façon que la courbe $\psi = 0$ ait un contact d'ordre $(\rho + h - 1)$ au point (r_0, s_0) avec la courbe $\mathcal{G} = 0$.

Cela fait $\rho + h$ conditions, linéaires par rapport aux paramètres variables de $\psi(r, s)$.

On pourra donc déterminer $\psi(r, s)$ si l'on a

$$n(m - n + 3) + \rho - 2 \geqq \rho + h$$

ou

$$m \geqq n - 3 + \frac{h + 2}{n}.$$

Soit k le nombre entier immédiatement supérieur à $\frac{h+2}{n}$.

Prenons $m = n - 3 + k$.

Il reste dans $\psi(r, s)$ un nombre de constantes arbitraires égal à

$$[n(m - n + 3) + \rho - 2] - (\rho + h) = nk - (h + 2) = n'.$$

Les zéros de $\psi(r, s)$ sont d'abord (r_0, s_0), d'ordre $\rho + h$, puis $\rho + n'$ autres zéros, (r_j, s_j), savoir les n' zéros qui servent à déterminer les n' dernières constantes arbitraires, et les ρ zéros déterminés par les $\rho + h + n'$ zéros qu'on s'est donnés.

---

(1) Clebsch, *Leçons sur la Géométrie*, t. II, p. 135 (traduction de M. Benoist).

(2) Clebsch, *loc. cit.*, t. II, p. 135 et 136.

Cela posé, $\varphi(r, s)$ dépend aussi de $nk + \rho - 2 = n(m - n + 3) + \rho - 2$ paramètres, c'est-à-dire, puisque $nk = n' + h + 2$, de $n' + h + \rho$ paramètres.

On peut donc, si l'on a $h > 0$, déterminer $\varphi(r, s)$ de manière que $\varphi(r, s)$ s'annule pour les $n' + \rho$ zéros (r_j, s_j) de $\psi(r, s)$.

Alors la fonction rationnelle de r et de s, $W = \frac{\varphi(r, s)}{\psi(r, s)}$, est infinie d'ordre $\rho + h$ au seul point (r_0, s_0) et reste finie pour tout autre point (r, s), tel que r et s vérifient l'équation $\mathcal{G}(r, s) = 0$.

Le théorème est démontré.

25. Ceci posé, nous savons déjà qu'à un point de la limite du domaine A correspond un système de valeurs réelles de r et de s.

Soient maintenant z_0 un point situé à l'intérieur du domaine A, et

$$[r_0 = r(z_0), \; s_0 = s(z_0)]$$

le couple correspondant.

Je dis que, de ces deux valeurs, l'une au moins est imaginaire : en effet, si nous répétons sur le point quelconque z_0 ce que nous avons fait pour le point a, nous voyons qu'il existe des fonctions rationnelles $p(z)$ n'ayant que le pôle z_0, telles que les fonctions $h(z)$ correspondant à $\frac{1}{2}p(z)$ et à $-\frac{i}{2}p(z)$ soient des fonctions $k(z)$.

Soient $k(z)$ et $k'(z)$ ces deux fonctions.

Le rapport $\frac{k(z)}{k'(z)}$ est une fonction rationnelle de r et de s, à coefficients *réels*, $R(r, s)$.

Mais on a

$$k(z) = \frac{A}{(z - z_0)^m} + \frac{B}{(z - z_0)^{m-1}} + \ldots,$$

$$k'(z) = -\frac{Ai}{(z - z_0)^m} - \frac{Bi}{(z - z_0)^{m-1}} - \ldots;$$

donc

$$\frac{k(z_0)}{k'(z_0)} = R(r_0, s_0) = +i.$$

Par suite, r_0 et s_0 ne peuvent être tous les deux réels.

Inversement, soit un couple (r_0, s_0) de valeurs qui ne soient pas toutes les deux réelles, et telles que l'on ait

$$\mathcal{G}(r_0, s_0) = 0.$$

Il s'agit de savoir s'il existe un point z_0 intérieur au domaine A, et tel qu'on ait

$$r(z_0) = r_0, \qquad s(z_0) = s_0,$$

A cet effet, je forme une fonction rationnelle de r et de s qui ne devienne infinie que pour le couple (r_0, s_0) (n° **24**). Soit $R(r, s)$ cette fonction.

Cette fonction n'a pas tous ses coefficients réels; autrement, elle deviendrait aussi infinie pour le couple (r'_0, s'_0) imaginaire conjugué du premier.

Posons

$$R(r, s) = R_1(r, s) + i R_2(r, s),$$

R_1 et R_2 étant des fonctions rationnelles à coefficients réels.

Si l'on remplace, dans R_1 et R_2, r et s en fonction de z, on a des fonctions de z qui prennent des valeurs réelles et finies sur la limite du domaine A [puisqu'elles ne peuvent devenir infinies que pour (r_0, s_0) ou (r'_0, s'_0)].

Ce sont donc des fonctions $K(z)$. Mais ce ne sont pas des constantes. Donc chacune d'elles devient infinie au moins en un point z_0 intérieur au domaine A, et au point symétrique z'_0 de l'aire A' (symétrique de A par rapport à l'axe réel).

A z_0 correspond, soit le couple (r_0, s_0), soit le couple (r'_0, s'_0).

Supposons que ce soit (r_0, s_0) qui corresponde à $z_0 \left\{ \begin{array}{l} r_0 = r(z_0) \\ s_0 = s(z_0) \end{array} \right.$.

Formons, comme précédemment, une fonction rationnelle $p(z)$ ayant z_0 pour seul pôle, et telle que la fonction $h(z)$ correspondante soit une fonction $k(z)$. C'est une fonction rationnelle de r et de s, à coefficients réels, qui devient infinie pour $r = r_0$, $s = s_0$, et aussi, par conséquent, pour $r = r'_0$, $s = s'_0$.

D'autre part, elle ne devient infinie à l'intérieur de l'aire A qu'au point z_0, auquel correspond par hypothèse le couple (r_0, s_0). Donc, en aucun autre point que z_0 de l'aire A on n'a $r(z) = r_0$, $s(z) = s_0$, et en aucun point de l'aire A on n'a $r(z) = r'_0$, $s(z) = s'_0$.

En résumé, si le point z parcourt le domaine A tout entier, sans omission et sans répétition, le couple (r, s) prendra une série de valeurs, mais aucune d'elles deux fois. De plus, il ne prendra que la moitié des valeurs définies par l'équation $\mathcal{G}(r, s) = 0$, et cette moitié constitue une portion de la surface de Riemann $\mathcal{R}$, telle qu'on puisse passer d'un point à un autre de cette région sans passer par un point correspondant à un couple (r, s) formé de valeurs réelles.

La surface $\mathcal{R}$ de Riemann se partage en deux régions, B et B'.

Au point z_0 du domaine A répond un point (r_0, s_0) de $\mathcal{R}$. Soit (r, s) un point analytique quelconque de $\mathcal{R}$.

Appelons *courbes de transition* les courbes C de $\mathcal{R}$ lieu des points analytiques (r, s) pour lesquels r et s sont réels. Si l'on peut passer de (r_0, s_0) à (r, s) avec continuité, par un chemin qui ne traverse aucune des courbes de transition, et si (r_0, s_0) est supposé situé dans la région B, le point (r, s) est aussi situé dans la région B, sinon il sera dans la région B'.

Deux points analytiques imaginaires conjugués font partie de deux régions différentes. Ces deux régions B et B′ sont donc complètement extérieures l'une à l'autre; leur réunion forme la surface $\mathcal{R}$ définie par l'équation $\mathcal{G}(r, s) = 0$, sans répétition. Leur limite commune est l'ensemble des courbes C.

La région B correspond au domaine A.

26. Il reste à voir comment se correspondent les points de la limite du domaine A et ceux des courbes C.

Soit (r_0, s_0) un couple réel, vérifiant l'équation $\mathcal{G}(r, s) = 0$.

Il existe une fonction rationnelle $R(r, s)$, *à coefficients réels,* qui ne devient infinie que pour $r = r_0$, $s = s_0$ (nº 24).

Si l'on y remplace r et s en fonction de z, on obtient une fonction de z qui, si elle ne devient infinie en aucun point de la limite de A, est une fonction $K(z)$.

D'ailleurs elle ne devient infinie en aucun point de l'aire A (ni de l'aire symétrique A′), puisque le couple (r, s) correspondant à un tel point ne peut être réel. Ce serait donc une constante, ce qui est absurde. Il existe donc un point z_0 de la limite de A tel qu'on ait

$$r = r_0, \qquad s = s_0.$$

Je dis qu'il n'en existe qu'un.

En effet, considérons l'ensemble des valeurs de r et de s satisfaisant aux inégalités

$$|r - r_0| < \delta, \qquad |s - s_0| < \varepsilon,$$

et tel que les points correspondants soient, sur la surface $\mathcal{R}$, dans la région B.

A chaque point de ce petit domaine inclus dans B correspond un point, et un seul, situé dans le domaine A. Donc, au domaine inclus dans B correspond ainsi point par point un domaine inclus dans A. Quand δ et ε tendent simultanément vers zéro, ce petit domaine inclus dans A s'évanouit en se réduisant à un seul point z_0 de la limite de A. Ce point z_0 est le seul, par suite, tel que

$$r(z_0) = r_0, \qquad s(z_0) = s_0.$$

27. Nous nous proposons à présent de chercher le genre de l'équation $\mathcal{G}(r, s) = 0$.

Nous allons nous appuyer sur la proposition suivante :

Si (r_0, s_0) *est un des couples vérifiant l'équation* $\mathcal{G}(r, s) = 0$, *il existe des fonctions rationnelles de* r *et de* s *qui ne deviennent infinies que pour ce couple* (r_0, s_0). *Il en existe de tous les ordres possibles, à l'exception d'un* nombre fini *d'ordres. Ce nombre fini, indépendant d'ailleurs du couple* (r_0, s_0) *choisi, est précisément égal au genre de la courbe* $\mathcal{G}(r, s) = 0$ [1].

---

[1] *Voir* le *Traité d'Analyse* de M. E. Picard, t. II, p. 429 et 430; en particulier la remarque de la page 430.

Dans le cas présent, il est naturel de choisir pour le couple (r_0, s_0) le couple correspondant au point a considéré au n° 17.

Soit (g, h) ce couple; $g = r(a)$, $h = s(a)$.

Considérons les deux suites

$$(1) \qquad \varkappa_1, \quad \varkappa_2, \quad \ldots, \quad \varkappa_\rho$$
$$(2) \qquad \alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \ldots \qquad (\textit{voir } \text{n}^\circ\ 18).$$

Je dis qu'à tout nombre μ de la suite (2) correspond une fonction rationnelle de r et de s qui ne devient infinie que pour le seul couple (g, h), et cela d'un ordre égal à μ.

Soit, en effet, la fonction

$$N_\mu = R_1(r, s) + i\,R_2(r, s),$$

où R_1 et R_2 sont des fonctions rationnelles à coefficients réels de r et de s.

Cette fonction est infinie pour le couple (g, h), et infinie de l'ordre μ. Elle est finie en tout autre point (r, s) de la région B de $\mathfrak{R}$.

Reste à examiner la région B'.

Rappelons-nous que la fonction

$$N'_\mu = R_1(r, s) - i\,R_2(r, s)$$

reste finie pour toute la région B.

Dès lors, soient (r'_0, s'_0) un point de B', (r_0, s_0) le point imaginaire conjugué; $R_1(r_0, s_0) - i\,R_2(r_0, s_0)$ a une valeur finie.

Donc aussi

$$R_1(r'_0, s'_0) + i\,R_2(r'_0, s'_0).$$

Le genre de la courbe $\mathcal{G}(r, s) = 0$ est donc *au plus* égal à ρ.

Je vais montrer qu'il est exactement égal à ρ, et cela en faisant voir que pour aucun des nombres de la suite (1) $(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\rho)$ on ne peut trouver une fonction rationnelle de r et de s ne devenant infinie que pour le couple (g, h).

Soit λ un des nombres de la suite (1).

S'il existait une telle fonction, $R_1(r, s) + i\,R_2(r, s)$ (R_1 et R_2 étant des fonctions rationnelles à coefficients réels), R_1 et R_2 seraient des fonctions K. D'ailleurs, de la condition que $R_1(r, s) + i\,R_2(r, s)$ doit rester finie à l'intérieur de B', il résulte que $R_1(r, s) - i\,R_2(r, s)$ a le caractère d'une fonction entière à l'intérieur de B. Il y aurait donc une fonction $N_\lambda(z)$, λ étant l'un des nombres de la suite $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\rho$. C'est contraire à l'hypothèse que nous avons faite (n° 18).

28. D'après cela, le genre de l'équation $\mathcal{G}(r, s) = 0$ est le nombre ρ lui-même.

Ce résultat acquis, nous sommes en mesure de donner une détermination plus précise du nombre ρ. Nous savons qu'à l'équation $\mathcal{G}(r, s) = 0$, de genre ρ, sont attachées ρ intégrales abéliennes de première espèce linéairement indépendantes.

D'ailleurs nous allons faire voir que nous avons p telles intégrales (p est le nombre des courbes $L_1, L_2, \ldots, L_p$). Il suivra de là que ρ est juste égal à p.

Des intégrales abéliennes relatives à l'équation $\mathcal{G}(r, s) = 0$ vont nous être fournies par les fonctions $F(z)$ définies au n° **11**.

Considérons, en effet, une telle fonction et envisageons le rapport $\frac{F'(z)}{r'(z)}$ [$r(z)$ étant l'une des deux fonctions r, s, au moyen desquelles toutes les fonctions $K(z)$ s'expriment par des fonctions rationnelles à coefficients réels]. Ce rapport $\frac{F'(z)}{r'(z)} = \frac{dF}{dr}$ a tous les caractères d'une fonction $K(z)$, à cela près qu'il peut devenir infini sur la limite du domaine A.

En effet, $\frac{F'(z)}{r'(z)}$ se comporte à l'intérieur du domaine A comme une fonction rationnelle. Sur la limite, il prend des valeurs réelles. Mais il peut devenir infini en un nombre fini de points situés sur la limite.

Si l'on veut se rendre compte de la manière dont se comporte ce quotient $\frac{F'(z)}{r'(z)}$ sur la limite du domaine A, en un point z_0 situé sur L_ν, par exemple, reportons-nous au n° **12**.

Soit $t = t(z)$ la fonction qui y a été définie.

Remplaçons z en fonction de t, $\frac{dF}{dr} = \frac{\frac{dF}{dt}}{\frac{dr}{dt}}$. Le numérateur aussi bien que le dénominateur peuvent se développer en séries à coefficients réels, ordonnées suivant les puissances entières et positives de t. Si l'on effectue la division, l'on a

$$\frac{dF}{dr} = C_\mu t^\mu + C_{\mu+1} t^{\mu+1} + C_{\mu+2} t^{\mu+2} + \ldots,$$

où μ peut représenter un nombre entier positif, ou négatif, ou nul.

On peut toujours former un polynome entier en r, *à coefficients réels*, $G(r)$, tel que $G(r)\frac{dF}{dr}$ reste fini tout le long de la limite du domaine A.

En effet, soient $z_1, z_2, \ldots, z_n$ les points de la limite de A pour lesquels $\frac{dF}{dr}$ devient infini, et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ leurs ordres de multiplicité.

En ces points, r prend des valeurs *réelles et finies;* soient $r_1, r_2, \ldots, r_n$ ces valeurs. La fonction

$$(r - r_1)^{\alpha_1}(r - r_2)^{\alpha_2}\ldots(r - r_n)^{\alpha_n}\frac{dF}{dr}$$

est réelle et finie sur toute la limite du domaine A.

C'est donc une fonction $K(z)$; par suite, c'est une fonction rationnelle, à coefficients réels, de r et de s.

Donc $\frac{dF}{dr}$ est aussi une fonction rationnelle à coefficients réels de r et de s. Donc F est une intégrale abélienne relative à l'équation $\mathcal{G}(r, s) = 0$.

Maintenant, parmi les fonctions F, il en est de particulières, que nous avons désignées par la lettre J (*voir* n° 15).

Elles restent finies pour toute la région B de $\mathfrak{R}$. Cela donne à penser que ce sont des intégrales abéliennes de première espèce. Mais, pour nous en assurer, il faut faire voir qu'elles restent finies aussi pour la région B'. Or ceci résulte immédiatement de ce que $\frac{dF}{dr}$ est une fonction rationnelle de r et de s, *à coefficients réels;* pour des couples imaginaires conjugués, (r, s), (r', s'), $\frac{dF}{dr} = \frac{dJ}{dr}$ prend des valeurs imaginaires conjuguées.

La question qui se pose est alors la suivante : les p intégrales de première espèce $J_1(z), J_2(z), \ldots, J_p(z)$ sont-elles linéairement indépendantes?

S'il n'en était pas ainsi, on aurait

$$(A_1 + B_1 i) J_1(z) + (A_2 + B_2 i) J_2(z) + \ldots + (A_p + B_p i) J_p(z) = P + Q i,$$

$A_1, A_2, \ldots, A_p$; $B_1, B_2, \ldots, B_p$; P, Q représentant des constantes réelles.

Prenons la dérivée des deux membres; on en déduirait

$$(A_1 + B_1 i) R_1(r, s) + (A_2 + B_2 i) R_2(r, s) + \ldots + (A_p + B_p i) R_p(r, s) = 0;$$

les R sont les fonctions rationnelles *à coefficients réels* qui fournissent les intégrales abéliennes considérées.

On aurait donc, en particulier,

$$A_1 R_1(r, s) + A_2 R_2(r, s) + \ldots + A_p R_p(r, s) = 0,$$

d'où, en intégrant,

$$A_1 J_1(z) + A_2 J_2(z) + \ldots + A_p J_p(z) = A + B i,$$

A et B étant des constantes réelles.

Or, le long de L_0, toutes les fonctions J sont réelles. Donc $B = 0$. Le long de L_1, le coefficient de i dans J_1 est 1, tandis que $J_2, J_3, \ldots, J_p$ sont réelles. Donc $A_1 = 0$. On démontre ainsi de proche en proche que tous les A sont nuls.

La même conclusion s'applique aux constantes $B_1, B_2, \ldots, B_p$.

V. — Équations caractéristiques du domaine A. Ensemble des domaines qui ont les mêmes équations caractéristiques. Conditions pour que deux domaines de même connexion puissent se représenter l'un sur l'autre d'une manière conforme.

29. Dans ce qui précède, nous avons vu qu'à tout domaine A de connexion égale à $p+1$ on pouvait faire correspondre deux fonctions $K(z)$ particulières, r et s, au moyen desquelles toutes les fonctions $K(z)$ peuvent s'exprimer par des fonctions rationnelles à coefficients réels. Entre r et s existe de plus une relation algébrique à coefficients réels $\mathcal{G}(r, s)=0$, et nous avons vu que le genre de cette équation est égal à p.

Toute fonction $K(z)$ est une fonction rationnelle, à coefficients réels, de r et de s. Mais la réciproque n'est pas exacte : car une fonction rationnelle à coefficients réels de r et de s peut devenir infinie en quelques points de la limite du domaine A, tandis qu'une fonction $K(z)$ reste réelle et finie en tous les points de cette limite.

Nous désignerons par $[K(z)]$ une fonction rationnelle quelconque, à coefficients réels, de r et de s.

Il y a une infinité de systèmes de deux fonctions $[K]$ au moyen desquelles toutes les autres peuvent s'exprimer par des fonctions rationnelles à coefficients réels. Je dis qu'on obtiendra tous ces systèmes en cherchant les transformations birationnelles à coefficients réels de $\mathcal{G}(r, s)=0$.

En effet :

1° Soit (r_1, s_1) un pareil système de fonctions $[K]$. Par définition, les fonctions $[K]$ sont des fonctions rationnelles à coefficients réels de r et de s.

Donc

$$r_1 = R(r, s),$$
$$s_1 = R'(r, s),$$

R et R' désignant des fonctions rationnelles à coefficients réels. Mais, d'après l'hypothèse, r et s sont aussi des fonctions rationnelles à coefficients réels de r_1 et de s_1.

La transformation $r_1 = R(r, s)$, $s_1 = R'(r, s)$ est donc birationnelle, ou réversible.

r_1 et s_1 sont liés par une relation algébrique à coefficients réels, $\mathcal{G}_1(r_1, s_1)=0$, également de genre p.

On sait en effet qu'une transformation rationnelle réversible conserve le genre de l'équation que l'on transforme.

2° Réciproquement, je considère l'équation $\mathcal{G}(r, s)=0$, et je suppose que la transformation

$$r_1 = \mathrm{R}\,(r, s),$$
$$s_1 = \mathrm{R}'(r, s)$$

soit birationnelle, c'est-à-dire que r et s sont aussi des fonctions rationnelles de r_1 et de s_1.

J'admets en outre que R et R' sont à coefficients réels, r_1 et s_1 sont alors des fonctions [K]; en outre, puisque r et s peuvent s'exprimer par des fonctions rationnelles, à coefficients réels de r_1 et de s_1, toute fonction [K] pourra s'exprimer en fonction rationnelle à coefficients réels de r_1 et de s_1.

En résumé, au domaine A correspondent non seulement l'équation $\mathcal{G}(r, s) = 0$, mais encore toutes celles qui appartiennent *à la même classe,* telles en outre que la transformation birationnelle qui permet de passer de l'une à l'autre soit à coefficients réels.

Cet ensemble d'équations $\mathcal{G}(r, s) = 0$, $\mathcal{G}_1(r_1, s_1) = 0$, ... forme ce qu'on appelle les *équations caractéristiques du domaine* A.

30. La question qui se pose est alors la suivante : *Nous avons trouvé un ensemble* (E) *d'équations caractéristiques pour le domaine* A. *Existe-t-il d'autres domaines pour lesquels cet ensemble soit le même?*

Je vais démontrer que le domaine A', symétrique de A par rapport à Ox, a les mêmes équations caractéristiques que le domaine A, et qu'il en est de même de tous les domaines représentables d'une manière conforme soit sur A, soit sur A'. Enfin, je montrerai qu'il n'y en a pas d'autres.

1° Envisageons une fonction $\mathrm{K}(z)$ relative au domaine A.

Soit

$$\mathrm{K}(z) = \varphi(x, y) + i\,\psi(x, y).$$

Les fonctions φ et ψ sont bien définies à l'intérieur du domaine A.

Soit maintenant

$$z' = x' + iy' = x' - i(-y');$$

$\varphi(x', -y') - i\,\psi(x', -y')$ est une fonction de z', $\mathrm{K}'(z')$.

Soit, en effet,

$$\varphi_1(x', y') = \varphi(x', -y'),$$
$$\psi_1(x', y') = -\psi(x', -y').$$

On a

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x'} = \frac{\partial\, \varphi(x', -y')}{\partial x'};$$

mais

$$\frac{\partial\, \varphi(x', -y')}{\partial x'} = -\frac{\partial\, \psi(x', -y')}{\partial y'} = \frac{\partial \psi_1}{\partial y'}.$$

Donc

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x'} = \frac{\partial \psi_1}{\partial y'}.$$

De même

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y'} = -\frac{\partial \psi_1}{\partial x'}.$$

Cette fonction

$$\mathrm{K}'(z') = \varphi(x', -y') - i\,\psi(x', -y')$$

est bien définie quand le point $(x', -y')$ parcourt le domaine A, c'est-à-dire quand le point $z' = x' + iy'$ parcourt le domaine A′.

Pour des points symétriques par rapport à Ox, les fonctions $\mathrm{K}(z)$ et $\mathrm{K}'(z)$ prennent des valeurs imaginaires conjuguées.

En effet

$$\text{pour} \quad z = x + iy, \qquad \mathrm{K}(z) = \varphi(x, y) + i\,\psi(x, y),$$
$$\text{pour} \quad z' = x - iy, \qquad \mathrm{K}'(z') = \varphi(x, y) - i\,\psi(x, y),$$

$\mathrm{K}'(z')$ est donc une fonction K relative au domaine A′.

Cela étant, aux fonctions r et s nous ferons ainsi correspondre des fonctions r' et s', qui sont des fonctions K relatives au domaine A′, et à l'aide desquelles toutes les autres fonctions K relatives au même domaine peuvent s'exprimer par des fonctions rationnelles à coefficients réels.

De plus r' et s' sont liées par la relation

$$\mathcal{G}(r', s') = 0,$$

puisque $\mathcal{G}$ est à coefficients réels, et que si z' est la valeur imaginaire conjuguée de z, $r'(z')$ et $s'(z')$ sont les valeurs imaginaires conjuguées de $r(z)$ et de $s(z)$.

Seulement, lorsque le point z' parcourra le domaine A′, le point analytique (r', s') parcourra non plus la région B, mais la région B′ de la surface $\mathcal{R}$ de Riemann.

31. Soit maintenant A_1 un domaine que l'on puisse représenter d'une manière conforme, soit sur le domaine A, soit sur le domaine A′.

Je dis que l'équation $\mathcal{G}(r, s) = 0$, qui est une équation caractéristique aussi bien pour A que pour A′, l'est aussi pour A_1.

Je considère encore une fonction $\mathrm{K}(z)$ relative au domaine A.

Soit $z = f(z_1)$ la fonction qui permet de représenter le domaine A_1 sur le domaine A. Envisageons la fonction

$$\mathrm{K}(z) = \mathrm{K}[f(z_1)] = \mathrm{K}_1(z_1).$$

Je dis que cette fonction $\mathrm{K}_1(z_1)$ est une fonction K relative au domaine A_1.

En effet, puisqu'on a $z = f(z_1)$, c'est que, à l'intérieur de A_1, $f(z_1)$ se comporte comme une fonction entière dont la dérivée n'est jamais nulle.

Il en résulte que $K_1(z_1)$ a, dans le domaine A_1, le caractère d'une fonction rationnelle; en effet, $K(z)$ est de la forme

$$\sum \frac{A}{(z-a)^\alpha} + \varphi(z),$$

$\varphi(z)$ étant une fonction entière.

Si l'on remplace z par $f(z_1)$, $\varphi[f(z_1)]$ a bien sur A_1 le caractère d'une fonction entière $\varphi_1(z_1)$.

Pour $z = a$, z_1 prend *une* valeur a_1 telle que $f(a_1) = a$. On a

$$z - a = (z_1 - a_1) f'(a_1) + \frac{(z_1 - a_1)^2}{1.2} f''(a_1) + \ldots.$$

Donc

$$\frac{1}{(z-a)^\alpha} = \frac{1}{(z_1 - a_1)^\alpha \mathrm{P}(z_1 - a_1)} = \frac{1}{(z_1 - a_1)^\alpha} \mathfrak{P}(z_1 - a_1),$$

P et $\mathfrak{P}$ désignant des séries ordonnées suivant les puissances entières et positives de $z_1 - a_1$, qui ne s'annulent pas pour $z_1 = a_1$.

Sur la limite de A_1, $K_1(z_1)$ prend des valeurs réelles, finies [les mêmes que $K(z)$ sur la limite de A].

Nous avons donc bien obtenu une fonction K relative au domaine A_1.

Cela posé, aux fonctions $r(z)$ et $s(z)$ correspondent des fonctions $r_1(z_1)$, $s_1(z_1)$ telles que

$$r_1(z_1) = r[f(z_1)],$$
$$s_1(z_1) = s[f(z_1)].$$

On a donc

$$\mathcal{G}(r_1, s_1) = 0.$$

De plus, toutes les fonctions K relatives au domaine A_1 s'expriment en fonctions rationnelles à coefficients réels de r_1 et de s_1.

Car on a

$$K(z) = R[r(z), s(z)],$$

R étant une fonction rationnelle à coefficients réels de r et de s.

Donc

$$K_1(z_1) = K[f(z_1)] = R\{r[f(z_1)], s[f(z_1)]\} = R(r_1, s_1).$$

L'équation $\mathcal{G}(r_1, s_1) = 0$ est donc une équation caractéristique pour le domaine A_1.

De plus, le point z_1 parcourant le domaine A_1, le couple (r_1, s_1) parcourt la région B de la surface $\mathcal{R}$.

Si $\overline{f}(z_1)$ représente la fonction $f(z_1)$, où l'on a remplacé chaque coefficient par le coefficient imaginaire conjugué, la fonction $z' = \overline{f}(z'_1)$ réalise la représentation conforme de A'_1 sur A'.

32. Nous avons trouvé que d'une part le domaine A', d'autre part tous les domaines représentables d'une façon conforme soit sur A, soit sur A', ont les mêmes équations caractéristiques que le domaine A.

Je dis que ce sont les seuls.

Pour le prouver, je vais montrer que tout domaine ayant les mêmes équations caractéristiques que le domaine A peut être représenté d'une manière conforme soit sur A, soit sur A'.

En effet, soit A_1 un tel domaine.

Soit $\mathcal{G}(r, s) = 0$ une des équations caractéristiques du domaine A, $\mathcal{G}_1(r_1, s_1) = 0$ une des équations caractéristiques du domaine A_1.

L'hypothèse est que ces deux équations appartiennent à la même classe, et que la transformation birationnelle permettant de passer de l'une à l'autre est à coefficients réels.

J'appelle B la région de la surface $\mathcal{R}$ de Riemann relative à l'équation $\mathcal{G}(r, s) = 0$, et correspondant à l'intérieur du domaine A, B_1 la région de la surface $\mathcal{R}_1$ de Riemann relative à l'équation $\mathcal{G}_1(r_1, s_1) = 0$, et correspondant à l'intérieur du domaine A_1.

Soient $r(z)$, $s(z)$ les deux fonctions [K] relatives à A et correspondant à $\mathcal{G}(r, s) = 0$, au moyen desquelles toute autre fonction [K] relative au domaine A peut s'exprimer par une fonction rationnelle, à coefficients réels.

Soient $r_1(z_1)$, $s_1(z_1)$ les deux fonctions analogues relatives au domaine A_1 et à l'équation $\mathcal{G}_1(r_1, s_1) = 0$.

On passe de l'équation $\mathcal{G}(r, s) = 0$ à l'équation $\mathcal{G}_1(r_1, s_1) = 0$ par la transformation

$$r = R_1(r_1, s_1),$$
$$s = R_2(r_1, s_1),$$

R_1 et R_2 étant des fonctions rationnelles, à coefficients réels, et cette transformation est réversible.

Par cette transformation, à la région B_1 correspond soit la région B, soit la région B'. Car si r_1 et s_1 sont réels, il en est de même des valeurs r et s qui leur correspondent.

Si le point (r_1, s_1) parcourt toute la région B_1 il va d'un point à un autre de cette région, sans passer par un point à coordonnées réelles, avec continuité. Il en est de même du point (r, s), et réciproquement.

Supposons que B corresponde à B_1. Alors nous allons faire voir que A_1 est représentable sur le domaine A.

[Dans le cas où ce serait B′ qui correspondrait à B_1, A_1 serait représentable sur A′.]

J'introduis deux nouvelles fonctions [K] relatives au domaine A_1, savoir :

$$\rho_1(z_1) = R_1[r_1(z_1), s_1(z_1)],$$
$$\sigma_1(z_1) = R_2[r_1(z_1), s_1(z_1)].$$

Soit z_1 un point quelconque du domaine A_1.

Il lui correspond un point (r_1, s_1) de la région B_1, donc un point (ρ_1, σ_1) de B.

Or, il existe un point z, et un seul, à l'intérieur de A tel que

$$r(z) = \rho_1(z_1), \qquad s(z) = \sigma_1(z_1).$$

C'est ce point z que nous ferons correspondre à z_1.

Les deux équations

$$r(z) = \rho_1(z_1),$$
$$s(z) = \sigma_1(z_1)$$

définissent une fonction z de z_1 telle que, lorsque z_1 parcourt tout le domaine A_1, sans omission ni répétition, z parcourt tout le domaine A sans omission ni répétition, et inversement.

Si à B_1 correspond B′, c'est sur A′ que le domaine A_1 peut être représenté.

Pour le voir, je considère $\bar{r}(z')$ et $\bar{s}(z')$.

Quand z' parcourt le domaine A′, le point $(\bar{r}, \bar{s})$ parcourt la région B′.

Cela étant, à chaque point z_1 de A_1 correspond un point (r_1, s_1) de B_1, donc un point (ρ_1, σ_1) de B′. On posera

$$\bar{r}(z') = \rho_1(z_1),$$
$$\bar{s}(z') = \sigma_1(z_1).$$

Ces équations, prises simultanément, réalisent la représentation conforme de A_1 sur A′.

VI. — Cas particuliers. Exemples.

33. Supposons que $p = 0$; soient A et A_1 deux domaines à connexion simple, et $\mathcal{G}(r, s) = 0$, $\mathcal{G}_1(r_1, s_1) = 0$ les deux équations algébriques qui leur correspondent, toutes deux de genre 0.

On a

$$\lambda = \mathrm{R}(r, s), \qquad r = \mathrm{R}'(\lambda), \qquad s = \mathrm{R}''(\lambda),$$

R, R′, R″ étant des fonctions rationnelles à coefficients réels. En effet, on sait d'abord que r et s peuvent s'exprimer en fonction rationnelle à coefficients réels d'un paramètre λ, $r = \mathrm{R}'(\lambda)$, $s = \mathrm{R}''(\lambda)$. On peut d'ailleurs choisir ces fonctions de telle sorte que, r et s étant donnés, les deux équations en λ n'aient qu'une racine commune, laquelle doit alors s'exprimer en fonction rationnelle à coefficients réels des coefficients des deux équations en λ, $r = \mathrm{R}'(\lambda)$, $s = \mathrm{R}''(\lambda)$.

Pareillement, l'équation $\mathcal{G}_1(r_1, s_1) = 0$ étant de genre o, on aura

$$\lambda_1 = \mathrm{R}_1(r_1, s_1), \qquad r_1 = \mathrm{R}'_1(\lambda_1), \qquad s_1 = \mathrm{R}''_1(\lambda_1),$$

R_1, R'_1, R''_1 désignant des fonctions rationnelles à coefficients réels.

Cela posé, on voit que nous obtiendrons des transformations birationnelles à coefficients réels, et que nous les obtiendrons toutes en posant

$$\lambda = \frac{\alpha\lambda_1 + \beta}{\gamma\lambda_1 + \delta} \qquad (\alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ étant réels}).$$

Le problème est donc indéterminé, et dépend de trois constantes arbitraires.

Maintenant, supposons que pour $\lambda = \lambda_1$ les domaines A et A_1 se correspondent : il en sera de même si $\lambda = \dfrac{\alpha\lambda_1 + \beta}{\gamma\lambda_1 + \delta}$, pour $\alpha\delta - \beta\gamma > 0$, car alors les parties imaginaires de λ et λ_1 seront toujours de même signe.

Si, au contraire, on a $\alpha\delta - \beta\gamma < 0$, A_1 correspond à A′.

De même, il y a une infinité de manières de faire correspondre le domaine (A, A′) à lui-même.

Au point

$$r = \mathrm{R}'(\lambda), \qquad s = \mathrm{R}''(\lambda)$$

on fera correspondre le point

$$r_0 = \mathrm{R}'\left(\frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta}\right), \qquad s_0 = \mathrm{R}''\left(\frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta}\right).$$

Si $\alpha\delta - \beta\gamma$ est positif, A correspond à A, A′ à A′.

Si $\alpha\delta - \beta\gamma$ est négatif, A correspond à A′, A′ à A.

34. J'aborde le cas où $p = 1$:

Si (r_0, s_0) est un couple quelconque de valeurs vérifiant l'équation $\mathcal{G}(r, s) = 0$, de genre 1 [nous prendrons le point (r_0, s_0) dans la région B de la surface $\mathfrak{R}$], il existe des fonctions rationnelles de r et de s ne devenant infinies que pour le couple (r_0, s_0), et infinies d'ordre μ; il y a exception pour une seule valeur de μ.

Cette valeur, pour laquelle il y a exception, est évidemment $\mu = 1$. Car, si $N_1(z)$ existait, $N_1^\mu(z)$ est une fonction $N_\mu(z)$, quel que soit l'entier μ.

Donc

$$\alpha = 2, \qquad \alpha' = 3.$$

Entre N_2 et N_3 existe (*voir* n° **21**) une équation entière, du second degré en N_3,

$$N_3^2 = N_3\, G_1(N_2) + G_3(N_2),$$

G_1 désigne un polynome entier de degré 1;
G_3 désigne un polynome entier de degré 3.

Cherchons à réduire autant que possible le nombre des constantes arbitraires.

L'expression générale des fonctions μ, qui deviennent infinies du deuxième ordre, est

$$u = \lambda\, N_2(z) + \mu,$$

λ et μ sont des constantes arbitraires.

De même, l'expression générale des fonctions v, qui deviennent infinies du troisième ordre, est

$$v = \lambda'\, N_3(z) + \mu'\, N_2(z) + \nu',$$

λ', μ', ν' étant des constantes arbitraires.

Soit

$$v = N_3(z) - \tfrac{1}{2} G_1[N_2(z)].$$

Alors

$$v^2 = N_3^2 - N_3 G_1(N_2) + \tfrac{1}{4} G_1^2(N_2)$$

ou

$$v^2 = G_3(N_2) + \tfrac{1}{4} G_1^2(N_2) = R_3(N_2),$$

R_3 désignant un polynome du troisième degré en N_2.

Enfin, on peut choisir u de manière à mettre cette équation sous la forme

$$v^2 = 4u^3 - g_2 u - g_3,$$

car l'identité

$$v^2 = aN_2^3 + bN_2^2 + cN_2 + d = 4(\lambda N_2 + \mu)^3 - g_2(\lambda N_2 + \mu) - g_3$$

donne

$$\begin{aligned} a &= 4\lambda^3, \\ b &= 12\lambda^2\mu, \\ c &= 12\lambda\mu^2 - g_2\lambda, \\ d &= 4\mu^3 - g_2\mu - g_3, \end{aligned}$$

équations d'où l'on peut tirer successivement λ, μ, g_2 et g_3. Il y a trois solutions.

Remarquons que si l'on pose

$$v = av', \qquad u = bu'$$

avec

$$a^2 = b^3,$$

on a

$$v'^2 a^2 = 4 b^3 u'^3 - g_2 b u' - g_3$$

ou

$$v'^2 = 4 u'^3 - \frac{g_2}{b^2} u' - \frac{g_3}{a^2}$$

ou enfin

$$v'^2 = 4 u'^3 - g'_2 u' - g'_3$$

avec

$$g'_2 = \frac{g_2}{b^2}, \qquad g'_3 = \frac{g_3}{a^2};$$

d'où je conclus

$$\frac{g'^3_2}{g'^2_3} = \frac{g^3_2}{g^2_3}.$$

Cela posé, soient deux domaines A et A_1 de connexion double. On aura

$$\text{pour A,} \qquad v^2 = 4 u^3 - g_2 u - g_3,$$
$$\text{pour } A_1, \qquad v_1^2 = 4 u_1^3 - \gamma_2 u - \gamma_3.$$

Si A_1 est représentable sur A ou sur A′, ces équations pourront se déduire l'une et l'autre de $\mathcal{G}(r, s) = 0$ par une transformation birationnelle. Donc on aura

$$\frac{g^3_2}{g^2_3} = \frac{\gamma^3_2}{\gamma^2_3}.$$

35. Nous avons vu, dans ce qui précède, que la condition nécessaire et suffisante pour que deux domaines A et A_1 soient représentables l'un sur l'autre est que l'ensemble des équations caractéristiques soit le même pour les deux domaines.

Supposons cette condition remplie; alors une question se pose. De combien de manières différentes cette représentation est-elle possible?

Nous allons ramener cette question à la suivante :

Trouver les transformations du domaine A en lui-même.

Soient T et T′ deux transformations du domaine A en le domaine A_1.

On a

$$T' = T'T^{-1}T = (T'T^{-1})T.$$

Or $T'T^{-1}$ est une transformation du domaine A en lui-même.

Il faut donc chercher à transformer $\mathcal{G}(r, s) = 0$ en elle-même par une transformation rationnelle à coefficients réels.

Prenons le cas où $p = 1$.

Alors r et s peuvent s'exprimer par des fonctions elliptiques d'un paramètre u [1], $r = \varphi(u)$, $s = \psi(u)$.

Posons

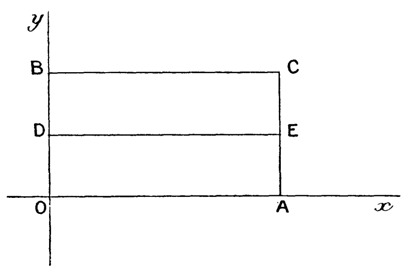
$$r_1 = \varphi(u_1), \qquad s_1 = \psi(u_1).$$

Les différentes transformations de la courbe en elle-même correspondent aux différentes relations entre u et u_1. Il faut trouver celles de ces relations pour lesquelles la transformation est birationnelle et à coefficients réels.

Appelons 2ω la période réelle, $2\omega'$ la période purement imaginaire de $\varphi(u)$ et de $\psi(u)$. A chaque système de valeurs de (r, s) correspond un point, et un seul, à l'intérieur du rectangle des périodes.

Ce rectangle OACB (*fig.* 2) est partagé en deux parties égales par la

Fig. 2.



droite DE, $(iy = \omega')$. Ces deux parties sont les champs des valeurs de u qui correspondent aux deux régions B et B′ de la surface $\mathfrak{R}$ de Riemann définie par l'équation $\mathcal{G}(r, s) = 0$.

La courbe réelle $\mathcal{G}(r, s) = 0$ est, comme on sait, composée de deux courbes séparées; l'une de ces branches correspond à la portion de droite $iy = \omega'$ comprise entre le point ω' et le point $\omega' + 2\omega$ (les points D, E); l'autre branche correspond à la portion de droite $y = 0$, comprise entre 0 et 2ω (le segment OA).

Cela posé, il est clair que la relation entre u et u_1 doit faire correspondre à un point u, intérieur au rectangle des périodes, un autre point u_1, et un seul, également intérieur au rectangle des périodes.

On a donc

$$u_1 = \frac{\alpha u + \beta}{\gamma u + \delta},$$

[1] *Voir* le *Traité d'Analyse* de M. E. Picard, t. II, p. 504.

α, β, γ et δ étant réels, et, de plus, $\alpha\delta - \beta\gamma$ sera positif, puisque cette transformation transforme en lui-même le demi-plan nord.

De plus, cette relation doit subsister quand on y remplace u par $u+2m\omega+2m'\omega'$ (quels que soient les entiers m et m').

Donc $\gamma = 0$, $\delta = 1$; α doit être un nombre entier :

$$u_1 = \alpha u + \beta.$$

Inversement, u doit être exprimable par u_1 sous la même forme. Ceci exige

$$\alpha = \pm 1;$$

bref,

$$u_1 = \pm u + \beta.$$

Sous ces conditions, la transformation sera birationnelle en vertu du théorème d'addition.

Reste la condition relative à la réalité.

Il faut choisir β de façon que $\varphi(\beta)$ et $\psi(\beta)$ soient réelles. Ceci exige $\beta = c$ ou $\beta = c + \omega'$, c étant réel.

1° Si $\beta = c$, $u_1 = u + c$, chaque moitié du rectangle des périodes se correspond à elle-même; B correspond à B.

Si $u_1 = -u + c$, chaque moitié du rectangle correspond à l'autre; B correspond à B', B' à B.

2° Si $\beta = c + \omega'$, $u_1 = u + c + \omega'$, chaque moitié du rectangle correspond à l'autre, B correspond à B', B' à B.

Si $u_1 = -u + c + \omega'$, chaque moitié du rectangle se correspond à elle-même, B correspond à B.

36. Soit à représenter une aire doublement connexe sur l'aire ayant pour limites deux cercles concentriques dont le centre commun soit l'origine et dont les rayons sont 1 et $r < 1$.

La fonction $J(z) = -i\mathfrak{L}z$ jouit des propriétés suivantes :

1° Sur le cercle extérieur L_0,

$$z = e^{i\varphi};$$

donc

$$J(z) = \varphi;$$

2° Sur le cercle intérieur L_1,

$$z = re^{i\varphi},$$

donc

$$J(z) = \varphi - i\mathfrak{L}r = \varphi + i\mathfrak{L}\left(\frac{1}{r}\right)$$

ou

$$J(z) = \varphi + \omega' \qquad \text{en posant} \qquad \omega' = i\,\mathcal{L}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Considérons la fonction $p(u)$ de Weierstrass, qui admet pour périodes

$$2\omega = 2\pi$$

et

$$2\omega' = 2i\,\mathcal{L}\left(\frac{1}{r}\right).$$

La fonction $p\left[\frac{1}{i}\mathcal{L}(z)\right]$ est une fonction uniforme de z. Car, si z décrit autour de l'origine un contour fermé, $\mathcal{L}z$ augmente de $2mi\pi$, m étant un nombre entier. $p\left[\frac{1}{i}\mathcal{L}(z)\right]$ reprend la même valeur puisque, par hypothèse,

$$p(u + 2m\pi) = p(u).$$

A l'intérieur du domaine A compris entre L_0 et L_1, $p\left[\frac{1}{i}\mathcal{L}(z)\right]$ a le caractère d'une fonction entière.

Au point $z = 1$, situé sur L_0, $p\left(\frac{1}{i}\mathcal{L}z\right)$ devient infinie comme $\frac{1}{(z-1)^2}$.

Sur L_0, $p\left(\frac{\mathcal{L}z}{i}\right)$ prend des valeurs *réelles* et finies, $p(\varphi)$, sauf en $z = 1$.

Sur L_1, $p\left(\frac{\mathcal{L}z}{i}\right)$ prend des valeurs *réelles* et finies, $p(\varphi + \omega')$.

C'est donc une fonction $[K(z)]$.

Il en est de même de $p'\left(\frac{1}{i}\mathcal{L}z\right)$.

C'est une fonction uniforme de z, qui a le caractère d'une fonction entière à l'intérieur de l'aire A, qui ne devient infinie qu'au point $z = 1$ $\left[\text{comme } -\frac{2}{(z-1)^3}\right]$.

Enfin, elle prend des valeurs réelles sur L_0 et sur L_1; c'est une autre fonction $[k(z)]$.

Toute fonction $[K(z)]$ est une fonction rationnelle *à coefficients réels* de $p\left(\frac{\mathcal{L}z}{i}\right)$ et de $p'\left(\frac{\mathcal{L}z}{i}\right)$.

Si elle a des valeurs réelles et *finies* sur L_0 et sur L_1, ce sera une fonction $K(z)$.

Considérons la fonction $p\left(\frac{1}{i}\mathcal{L}z - i\alpha\right)$.

Ses infinis sont donnés par la formule

$$\frac{1}{i}\mathcal{L}z = i\alpha + 2m\pi + 2m'\omega',$$

ou, en remplaçant ω' par sa valeur, $i\mathcal{L}\frac{1}{r}$, par la formule

$$z = r^{2m'} e^{-\alpha}.$$

Choisissons pour α une valeur réelle telle que l'on ait

$$r < e^{-\alpha} < 1.$$

On aura

$$r^2 e^{-\alpha} < r^2 < r,$$

puis

$$1 < \frac{1}{r} < \frac{1}{r^2} e^{-\alpha}.$$

Donc, à l'intérieur du domaine A, $\wp\left(\frac{\mathcal{L}z}{i} - i\alpha\right)$ n'a qu'un infini, $z = e^{-\alpha}$.

D'ailleurs

$$\wp\left(\frac{\mathcal{L}z}{i} - i\alpha\right) = \left\{ \frac{2\left[\wp\left(\frac{\mathcal{L}z}{i}\right)\wp(i\alpha) - \frac{1}{4}g_2\right]\left[\wp\left(\frac{\mathcal{L}z}{i}\right) + \wp(i\alpha)\right] - g_3}{2\left[\wp\left(\frac{\mathcal{L}z}{i}\right) - \wp(i\alpha)\right]^2} \right\}$$
$$+ i\left\{ \frac{\wp'\left(\frac{\mathcal{L}z}{i}\right)\frac{\wp'(i\alpha)}{i}}{2\left[\wp\left(\frac{\mathcal{L}z}{i}\right) - \wp(i\alpha)\right]^2} \right\}.$$

D'autre part, puisque l'on a $r < e^{-\alpha} < 1$, j'en conclus $e^{\alpha} > 1$, puis $r^2 e^{\alpha} < r$.

Donc, $\wp\left(\frac{\mathcal{L}z}{i} + i\alpha\right)$ a le caractère d'une fonction entière à l'intérieur du domaine A.

Il suit de là que $\wp\left(\frac{\mathcal{L}z}{i} - i\alpha\right)$ est une fonction $N_2(z)$.

$\wp'(u)$ ayant les mêmes infinis que $\wp(u)$, $\wp'\left(\frac{\mathcal{L}z}{i} - i\alpha\right)$ est une fonction $N_3(z)$.

$$\wp\left(\frac{1}{i}\mathcal{L}z - i\alpha\right)\wp\left(\frac{1}{i}\mathcal{L}z + i\alpha\right) \quad \text{et} \quad \wp'\left(\frac{1}{i}\mathcal{L}z - i\alpha\right)\wp'\left(\frac{1}{i}\mathcal{L}z + i\alpha\right)$$

sont des fonctions $k(z)$.

Il en est de même de

$$\frac{1}{2}\wp\left(\frac{\mathcal{L}z}{i} - i\alpha\right) + \frac{1}{2}\wp\left(\frac{\mathcal{L}z}{i} + i\alpha\right),$$

de

$$\frac{1}{2i}\wp\left(\frac{\mathcal{L}z}{i} - i\alpha\right) - \frac{1}{2i}\wp\left(\frac{\mathcal{L}z}{i} + i\alpha\right),$$

de

$$\frac{1}{2}\,\mathfrak{p}'\left(\frac{\mathcal{L}z}{i} - i\alpha\right) + \frac{1}{2}\,\mathfrak{p}'\left(\frac{\mathcal{L}z}{i} + i\alpha\right),$$

et de

$$\frac{1}{2i}\,\mathfrak{p}'\left(\frac{\mathcal{L}z}{i} - i\alpha\right) - \frac{1}{2i}\,\mathfrak{p}'\left(\frac{\mathcal{L}z}{i} + i\alpha\right).$$

D'une façon générale, envisageons la fonction

$$\Phi\left(\frac{\mathcal{L}z}{i}\right) = \frac{\sigma\left(\frac{\mathcal{L}z}{i} - a_1\right)\sigma\left(\frac{\mathcal{L}z}{i} - a_2\right)\cdots\sigma\left(\frac{\mathcal{L}z}{i} - a_n\right)}{\sigma\left(\frac{\mathcal{L}z}{i} - b_1\right)\sigma\left(\frac{\mathcal{L}z}{i} - b_2\right)\cdots\sigma\left(\frac{\mathcal{L}z}{i} - b_n\right)}$$

avec la condition

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n.$$

On sait qu'elle peut s'exprimer rationnellement en fonction de $\mathfrak{p}\left(\frac{\mathcal{L}z}{i}\right)$ et de $\mathfrak{p}'\left(\frac{\mathcal{L}z}{i}\right)$.

Donc, elle est *uniforme*.

Ses infinis sont donnés par la formule

$$\frac{1}{i}\mathcal{L}z = b_\lambda + 2m\pi + 2m'\omega' = b_\lambda + 2m\pi + 2m'i\mathcal{L}\frac{1}{r} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

ou

$$\mathcal{L}z = i(\beta_\lambda + i\beta'_\lambda) + 2mi\pi - 2m'\mathcal{L}\frac{1}{r} \qquad (\beta_\lambda \text{ et } \beta'_\lambda \text{ étant réels}),$$

ou, enfin, par

$$z_{m'} = r^{2m'}e^{-\beta'_\lambda}e^{i\beta_\lambda}.$$

Si, maintenant, nous définissons $\overline{\Phi}\left(\frac{\mathcal{L}z}{i}\right)$ par la formule

$$\overline{\Phi}\left(\frac{\mathcal{L}z}{i}\right) = \frac{\sigma\left(\frac{1}{i}\mathcal{L}z - a'_1\right)\sigma\left(\frac{1}{i}\mathcal{L}z - a'_2\right)\cdots\sigma\left(\frac{1}{i}\mathcal{L}z - a'_n\right)}{\sigma\left(\frac{1}{i}\mathcal{L}z - b'_1\right)\sigma\left(\frac{1}{i}\mathcal{L}z - b'_2\right)\cdots\sigma\left(\frac{1}{i}\mathcal{L}z - b'_n\right)},$$

a'_λ et b'_λ désignant les quantités imaginaires conjuguées de a_λ et de b_λ, on a

$$a'_1 + a'_2 + \ldots + a'_n = b'_1 + b'_2 + \ldots + b'_n,$$

et les infinis sont donnés par la formule

$$(z)_{m'} = r^{2m'}e^{\beta'_\lambda}e^{i\beta_\lambda}.$$

Supposons que β'_λ ait été choisi de manière que l'on ait

$$r < e^{-\beta'_\lambda} < 1.$$

On a vu plus haut que le seul infini $z_{m'}$ inclus dans le domaine A est

$$z_0 = e^{-\beta'_\lambda} e^{i\beta_\lambda},$$

et qu'il n'y a pas d'infinis $(z)_{m'}$ dans ce même domaine.

Faisons la même hypothèse, $r < e^{-\beta'_\lambda} < 1$, pour toutes les valeurs de λ, depuis 1 jusqu'à n.

On voit que $\Phi\left(\frac{\mathcal{L}z}{i}\right)$ se comporte à l'intérieur de A comme une fonction rationnelle, et $\overline{\Phi}\left(\frac{\mathcal{L}z}{i}\right)$ comme une fonction entière.

Donc $\Phi\left(\frac{\mathcal{L}z}{i}\right)$ est une fonction N(z).

Les fonctions

$$\Phi\left(\frac{1}{i}\mathcal{L}z\right)\overline{\Phi}\left(\frac{1}{i}\mathcal{L}z\right),$$

$$\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{\mathcal{L}z}{i}\right) + \frac{1}{2}\overline{\Phi}\left(\frac{\mathcal{L}z}{i}\right)$$

et

$$\frac{1}{2i}\Phi\left(\frac{\mathcal{L}z}{i}\right) - \frac{1}{2i}\overline{\Phi}\left(\frac{\mathcal{L}z}{i}\right)$$

sont des fonctions K(z).

Nous pouvons ainsi former la fonction K(z) qui correspond à telle fonction rationnelle que l'on voudra, pourvu que cette fonction K(z) existe.

Ajoutons que, $\mathfrak{p}(z)$ étant la fonction rationnelle donnée, le problème de Dirichlet est, par cela même, résolu pour le domaine A considéré relativement aux fonctions réelles de x et de y

$$\tfrac{1}{2}\mathfrak{p}(z) + \tfrac{1}{2}\overline{\mathfrak{p}}(z'), \qquad \frac{1}{2i}\mathfrak{p}(z) - \frac{1}{2i}\overline{\mathfrak{p}}(z').$$

37. Soit maintenant $\mathcal{A}$ un autre domaine doublement connexe.

Il existe une fonction J(z) ayant à l'intérieur de A le caractère d'une fonction entière, prenant sur la limite extérieure $\mathcal{L}_0$ des valeurs réelles, et sur la limite intérieure $\mathcal{L}_1$ des valeurs dont la partie imaginaire est i.

Soit 2α la période *réelle* dont augmente J(z) quand z décrit un contour fermé une seule fois dans le sens direct, ce contour fermé étant tout entier à l'intérieur de $\mathcal{A}$ et entourant la ligne $\mathcal{L}_1$.

Alors la fonction $\frac{\pi}{\alpha}J(z)$ admet la période 2π.

Sur $\mathcal{L}_0$, elle est réelle.

Sur $\mathcal{L}_1$, la partie imaginaire de $\frac{\pi}{\alpha}J(z)$ est constante et égale à $\frac{i\pi}{\alpha}$.

Déterminons le rayon r du cercle L_1 considéré dans le numéro précédent par la condition $\mathcal{L}\frac{1}{r}=\frac{\pi}{\alpha}$,

$$r=e^{-\frac{\pi}{\alpha}}$$

(nous supposons $\alpha>0$, de façon que l'on a $r<1$).

Ceci posé, considérons la fonction

$$z=e^{\frac{i\pi}{\alpha}J(z_1)}.$$

1° Quand $J(z_1)$ augmente de $2m\alpha$, z demeure invariable;

2° Si z_1 parcourt $\mathcal{L}_0$, le point z parcourt la circonférence L_0, puisque la valeur absolue de z est 1.

3° Si le point z_1 parcourt $\mathcal{L}_1$, la valeur absolue de z est constante et égale à $e^{-\frac{\pi}{\alpha}}=r$.

Le point z parcourt la circonférence L_1.

A un point z_1 du domaine $\mathcal{A}$ ne correspond qu'un point z du domaine A.

Réciproquement, si le point z est donné dans le domaine A, $J(z_1)$ sera connu (à un multiple de 2α près).

A la valeur $J(z_1)$ ainsi déterminée ne correspondra, dans $\mathcal{A}$, qu'un point z_1.

La formule $z=e^{\frac{i\pi}{\alpha}J(z_1)}$ réalise donc la représentation conforme du domaine $\mathcal{A}$ sur le domaine A où l'on a convenablement choisi la valeur de r.

Remarquons que la formule $\zeta=ze^{i\beta}$ (simple rotation autour de l'origine) nous permettra de faire se correspondre deux points quelconques choisis, soit sur les limites extérieures, L_0, $\mathcal{L}_0$, soit sur les limites intérieures, L_1, $\mathcal{L}_1$.

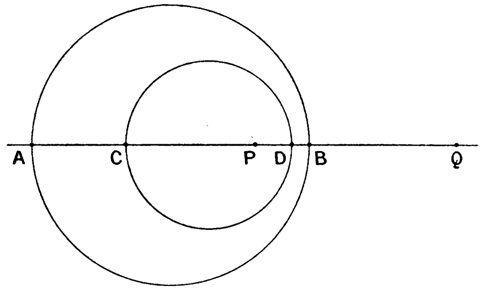
Au contraire, la formule $\zeta=\frac{r}{z}e^{i\beta}$ (β étant toujours réel) permettra de faire correspondre un point de $\mathcal{L}_0$ à un point de L_1, ou un point de $\mathcal{L}_1$ à un point de L_0.

En résumé, on pourra réaliser la représentation de manière à faire se correspondre deux points quelconques pris, l'un sur la limite de A, l'autre sur la limite de $\mathcal{A}$.

38. Voici un premier exemple :

Considérons un domaine $\mathcal{A}$ (*fig.* 3) limité par deux circonférences, une extérieure $\mathcal{L}_0$, l'autre intérieure $\mathcal{L}_1$. On sait qu'il existe sur la ligne des centres deux points P et Q tels que le rapport $\frac{RP}{RQ}$ reste constant aussi bien quand le point R

Fig. 3.



parcourt la première circonférence $\mathcal{L}_0$ que lorsqu'il parcourt $\mathcal{L}_1$. Ce sont les points doubles de l'involution déterminée par les deux couples (A, B), (C, D).

Soient g et h les deux rapports

$$g = \left|\frac{AP}{AQ}\right|, \qquad h = \left|\frac{CP}{CQ}\right|.$$

Soient $z = a$ la quantité imaginaire dont l'affixe est P; $z = b$ la quantité imaginaire dont l'affixe est Q.

Sur $\mathcal{L}_0$ on a

$$\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = g;$$

sur $\mathcal{L}_1$ on a

$$\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = h.$$

L'équation de $\mathcal{L}_0$ sera

$$\frac{z-a}{z-b} = ge^{i\varphi}$$

(φ étant une variable réelle); celle de $\mathcal{L}_1$

$$\frac{z-a}{z-b} = he^{i\varphi}.$$

Posons

$$\mathcal{L}\frac{z-a}{z-b} = i\,\mathrm{J}(z).$$

Sur $\mathcal{L}_0$,

$$i\,\mathrm{J}(z) = i\varphi + \mathcal{L}g, \qquad \mathrm{J}(z) = \varphi - i\,\mathcal{L}g;$$

sur $\mathcal{L}_1$,

$$iJ(z) = i\varphi + \mathcal{L}h, \qquad J(z) = \varphi - i\mathcal{L}h.$$

Les deux points P et Q étant extérieurs au domaine $\mathcal{A}$, la fonction $J(z)$ a bien le caractère d'une fonction entière à l'intérieur de $\mathcal{A}$. Elle a la période 2π.

Pour représenter le domaine $\mathcal{A}$ sur le domaine type A, posons

$$z = \frac{1}{g}\,\frac{z_1 - a}{z_1 - b}.$$

Il faudra choisir r par la formule

$$r = \frac{h}{g}.$$

39. Considérons maintenant deux ellipses homofocales.

Soient

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1,$$

$$\frac{\xi^2}{a_1^2} + \frac{\eta^2}{b_1^2} = 1$$

leurs équations, avec

$$a^2 - b^2 = a_1^2 - b_1^2.$$

Posons

$$\xi = a\cos\varphi, \qquad n = b\sin\varphi,$$

$$z = \xi + i\eta = a\cos\varphi + ib\sin\varphi.$$

Soient

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}, \qquad a = c\cos(i\alpha), \qquad b = -ic\sin(i\alpha) \qquad (\alpha \text{ réel}).$$

Alors

$$z = c\cos(\varphi - i\alpha),$$

d'où

$$\varphi = i\alpha + \operatorname{arc\,cos}\left(\frac{z}{c}\right).$$

Sur $\mathcal{L}_1$,

$$\xi = a_1\cos\varphi, \qquad \eta = b_1\sin\varphi.$$

Posons

$$a_1 = c\cos i\alpha_1, \qquad b_1 = -ic\sin(i\alpha_1) \qquad (\alpha_1 \text{ réel}).$$

Alors

$$z = c\cos(\varphi - i\alpha_1), \qquad \varphi = i\alpha_1 + \operatorname{arc\,cos}\left(\frac{z}{c}\right).$$

Ainsi, sur $\mathcal{L}_0$,

$$i\alpha + \operatorname{arc\,cos}\left(\frac{z}{c}\right) \qquad \text{est réel.}$$

Sur $\mathcal{L}_1$,

$$i\alpha_1 + \arc \cos \frac{z}{c} \qquad \text{est réel.}$$

Prenons

$$J(z) = \arc\cos \frac{z}{c} + i\alpha = i\alpha - i\mathcal{L}\,\frac{z+\sqrt{z^2-c^2}}{c}.$$

Sur $\mathcal{L}_0$, $J(z)$ prend des valeurs réelles.

Sur $\mathcal{L}_1$, la partie imaginaire de $J(z)$ est $i(\alpha_1 - \alpha)$.

Les points critiques $z = \pm c$, qui sont les foyers communs aux deux ellipses, sont extérieurs au domaine $\mathcal{A}$.

$J(z)$ a donc bien le caractère d'une fonction entière à l'intérieur du domaine $\mathcal{A}$. Sa période est 2π.

Pour représenter le domaine $\mathcal{A}$ sur le domaine type, on se servira de la fonction

$$z = e^{-\alpha}\,\frac{z_1+\sqrt{z_1^2-c}}{c}.$$

Ici,

$$r = e^{\alpha_1 - \alpha}.$$

Comme on a

$$e^{\alpha} = \frac{a+b}{c}, \qquad e^{\alpha_1} = \frac{a_1+b_1}{c},$$

$$r = e^{\alpha_1-\alpha} = \frac{a_1+b_1}{a+b}.$$

De la formule précédente, on tire

$$z_1 = \frac{c}{2}\left(z e^{\alpha} + \frac{1}{z e^{\alpha}}\right).$$