SUR LES

FONCTIONS ENTIÈRES ET QUASI-ENTIÈRES

A CROISSANCE RÉGULIÈRE

ET

LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

(DEUXIÈME NOTE),

PAR M. ÉDMOND MAILLET.

I.

M. Borel a introduit (¹), dans la théorie des fonctions entières d'ordre fini, la notion de fonctions à croissance régulière. Mais il n'a donné aucun critère pour reconnaître *a priori* si une fonction entière donnée par son développement taylorien est ou non à croissance régulière. De pareils critères semblent cependant indispensables au point de vue des applications. Nous nous proposons de donner ici un critère de régularité de la croissance et un d'irrégularité.

Ce critère s'étend de suite aux fonctions quasi-entières.

Il nous permet d'établir deux résultats importants dans la théorie des équations différentielles :

1° Les fonctions entières ou quasi-entières d'ordre fini, qui satisfont à une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels en x, sont à croissance régulière;

2° Les fonctions entières d'ordre fini augmentées ou non d'un polynome en $\frac{1}{x}$,

(¹) *Leçons sur les fonctions entières*, p. 107. La lecture de notre Mémoire exige seulement la connaissance du Cours d'Analyse de l'École Polytechnique, des *Leçons sur les fonctions entières* de M. Borel, et de notre Mémoire *Sur les fonctions entières et quasi-entières* (*J. de Math.*, 1902).

les fonctions quasi-entières d'ordre fini, ayant un point singulier essentiel unique à l'origine, ne peuvent être solutions des équations différentielles $F=0$ rationnelles d'ordre k, quand F ne renferme qu'un terme en $y, y', \ldots$, ou $y^{(k)}$, que si elles sont à croissance régulière.

Nous indiquons finalement une application de ce qui précède à certaines équations différentielles linéaires dont les intégrales sont régulières au sens de Fuchs.

II.

Soit une fonction entière

$$(\alpha) \qquad \varphi(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_mx^m+\ldots$$

d'ordre ρ fini. Nous savons que l'on a toujours

$$(\beta) \qquad \sqrt[m]{a_m}<\frac{1}{m^{\frac{1}{\rho}-\varepsilon}},$$

et, pour une infinité de valeurs de m,

$$(\gamma) \qquad \sqrt[m]{a_m}>\frac{1}{m^{\frac{1}{\rho}+\varepsilon}}$$

(ε aussi petit qu'on veut quand m est assez grand), les autres expressions $\sqrt[p]{a_p}$ ayant une valeur plus petite. Ceci a lieu pour toutes les fonctions entières d'ordre ρ, qu'elles soient ou non à croissance régulière. Il est intéressant de chercher à voir dans quelle limite la loi de répartition des coefficients a_m, qui satisfont à (γ), influe sur la régularité de la croissance de la fonction, par suite, d'après les définitions et les théorèmes de M. Borel, sur la régularité de la répartition des racines, de façon à savoir reconnaître à la seule inspection des coefficients, au moins dans des cas étendus, si la fonction est à croissance régulière ou non.

Considérons une fonction entière

$$(1) \qquad \varphi(x)=\sum a_mx^m.$$

Nous supposons que cette fonction soit d'ordre ρ, et, qu'à partir d'un certain terme on puisse toujours en trouver un au moins sur θ consécutifs (θ fonction de m) qui soit de la forme

$$(2) \qquad \frac{1}{a_m}=m^{pm},$$

$p=\frac{1}{\rho}+\varepsilon$, ε tendant vers o avec $\frac{1}{m}$.

Supposons encore que, pour les coefficients d'indice $m-1, \ldots, m-\theta_1+1$, $m+1, \ldots, m+\theta_2-1$ (θ_1, θ_2 positifs $\geqq 1$), les coefficients soient de la forme

$$(3) \qquad \frac{1}{a_{m_1}} = m_1^{q m_1}$$

avec

$$q = \frac{1}{\sigma} + \varepsilon,$$

$$\sigma = \rho - \eta,$$

$$q = p + \zeta,$$

η, ζ finis, limités inférieurement quel que soit m; au contraire, nous supposerons que les coefficients d'indice $m-\theta_1$, $m+\theta_2$ soient de la forme (2).

Nous savons qu'il y a une infinité de valeurs de x pour lesquelles

$$|\varphi(x)| \geqq e^{|x|^{\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)}},$$

ε tendant vers o quand x croît indéfiniment.

Nous considérerons d'abord tous les termes de $\varphi(x)$ pour lesquels (3) a lieu, c'est-à-dire les termes dont l'indice n'est pas

$$\ldots, \quad m-\theta_1, \quad m, \quad m+\theta_2, \quad \ldots.$$

La somme Ψ de ces termes constitue une fonction entière d'ordre χ avec

$$q \geqq \frac{1}{\chi} + \varepsilon' = p + \zeta_2 \ (\zeta_2 \text{ fini}),$$

ε' tendant vers o quand m croît indéfiniment. On aura donc

$$|\Psi| \leqq e^{|x|^{\left(\frac{1}{\chi}+\varepsilon\right)}}.$$

Pour que Φ soit à croissance irrégulière, il faudra que les termes de $\Phi - \Psi$ ne donnent pas toujours, quel que soit $|x|$, une somme d'ordre $e^{|x|^{\rho+\varepsilon_1}}$.

Posons, pour une valeur donnée de m, p étant, par suite, parfaitement déterminé,

$$x = y^p$$

et prenons

$$(4) \qquad y = e(m+\theta) = e(m_1+\theta') \qquad \text{avec} \qquad 0 < \theta < \theta_2, \qquad m_1 \leqq m.$$

On a

$$a_{m_1} x^{m_1} = a_{m_1} y^{p m_1} = \frac{1}{m_1^{p_1 m_1}} e^{p m_1} (m_1 + \theta')^{p m_1}.$$

Ce terme sera plus petit que $e^{(m_1+\theta')^{\sigma_1}}$ $(\sigma_1 < 1)$ dès que

$$(5) \qquad \frac{1}{m_1^{p_1 m_1}} e^{pm_1}(m_1+\theta')^{pm_1} < e^{(m_1+\theta')^{\sigma_1}},$$

$$\chi(\theta') = (m_1+\theta')^{\sigma_1} - pm_1 \log\left(1+\frac{\theta'}{m_1}\right) - pm_1 + (p_1-p)m_1 \log m_1 > 0.$$

Nous supposons $m+\theta = m_1+\theta' \geqq m_1^{1+\zeta_4}$ (ζ_4 fixe et aussi petit qu'on veut). D'abord

$$\chi'(\theta') = \sigma_1(m_1+\theta')^{\sigma_1-1} - pm_1 \frac{\frac{1}{m_1}}{1+\frac{\theta'}{m_1}} = \frac{1}{m_1+\theta'}[\sigma_1(m_1+\theta')^{\sigma_1} - pm_1].$$

Quand $m_1+\theta' \geqq m_1^{1+\zeta_4}$, on a

$$\chi'(\theta') \geqq \frac{1}{m_1+\theta'}[\sigma_1 m_1^{(1+\zeta_4)\sigma_1} - pm_1] > 0$$

pour des valeurs de σ_1 telles que $1-\sigma_1$ soit fixe et >0. Par conséquent (5) aura lieu pour les valeurs de $m_1+\theta' > m_1^{1+\zeta_4}$ s'il a lieu pour $m_1+\theta' = m_1^{1+\zeta_4}$; il suffira pour que (5) ait lieu

$$\chi(m_1^{1+\zeta_4} - m_1) = m_1^{(1+\zeta_4)\sigma_1} - \zeta_4 pm_1 \log m_1 - pm_1 + (p_1-p)m_1 \log m_1 > 0.$$

Il suffira de prendre $(1+\zeta_4)\sigma_1 = 1+\zeta_4'$ (ζ_4' fixe et positif, ainsi que $\zeta_4-\zeta_4'$) pour que (5) ait lieu, dès que m_1 est suffisamment grand, par exemple dès que $m_1 > \mu$.

Dès lors la somme des modules des termes de $\Phi - \Psi$ d'indice $\leqq m$ se compose de deux parties : celles des modules des termes d'indices $\leqq \mu$ qui est $\leqq$

$$\lambda \sum_1^{\mu} [e(m_1+\theta')]^{pm_1} \leqq (m_1+\theta')^{\mu_1} \qquad (\lambda,\ \mu_1 \text{ fini});$$

celle des modules des autres termes en nombre $\leqq m$ et dont la somme est $\leqq$

$$me^{(m_1+\theta')^{\sigma_1}} = me^{(m+\theta)^{\sigma_1}} = e^{(m+\theta)^{\sigma_1'}}$$

$\sigma_1' - \sigma_1$ aussi petit qu'on veut pourvu que m soit assez grand).

Voyons maintenant les termes de $\Phi - \Psi$ d'indice $> m$. Nous poserons

$$y = e(m+\theta) = e(m_1-\theta') \qquad \text{avec} \qquad 0 < \theta < \theta_2, \qquad m_1 > m.$$

$$a_{m_1} y^{pm_1} = \frac{1}{m_1^{p_1 m_1}} e^{pm_1}(m_1-\theta')^{pm_1}.$$

Nous voulons

$$(5\ bis)\qquad e^{pm_1}\left(1-\frac{\theta'}{m_1}\right)^{pm_1} m_1^{(p-p_1)m_1} < e^{(m_1-\theta')^{\sigma_1}-m_1},$$

$$\chi(\theta') = (m_1-\theta')^{\sigma_1} - m_1 - pm_1 - pm_1 \log\left(1-\frac{\theta'}{m_1}\right) - (p-p_1)m_1 \log m_1 > 0.$$

On a

$$\chi'(\theta') = -\sigma_1(m_1-\theta')^{\sigma_1-1} - pm_1 \frac{-\frac{1}{m_1}}{1-\frac{\theta'}{m_1}} = \frac{-\sigma_1(m_1-\theta')^{\sigma_1}+pm_1}{m_1-\theta'}.$$

Prenons $m_1 - \theta' \leqq m_1^{1-\zeta''_4}$

$$(1-\zeta''_4)\sigma_1 = 1-\zeta'''_4$$

(ζ''_4 fixe et positif, ainsi que $\zeta''_4 - \zeta'''_4$).

m et m_1 étant donnés, $\chi'(\theta')$ est alors positif si m_1 est assez grand; il suffira pour que (5 *bis*) ait lieu que $\chi(m_1 - m_1^{1-\zeta''_4})$ soit > 0, ou

$$m_1^{(1-\zeta''_4)\sigma_1} - m_1 - pm_1 - pm_1 \log m_1(-\zeta''_4) - (p-p_1)m_1 \log m_1 > 0,$$

ce qui a lieu, car ζ''_4 étant donné, on peut prendre m assez grand pour que $|p - p_1|$ soit aussi petit qu'on veut.

Les modules des termes de $\Phi - \Psi$ d'indices $> m$ sont alors tous plus petits que ceux de la série

$$e^{(m+\theta)^{\sigma_1}} \sum \frac{1}{e^{m_1}};$$

leur somme est $< e^{(m+\theta)^{\sigma_1}-m} \dfrac{1}{1-\frac{1}{e}}$.

Il en résulte que Φ est à croissance irrégulière si l'on a, dès que m est supérieur à une limite déterminée,

$$m + \theta \leqq m_1^{1-\zeta''_4},$$

$$m + \theta \geqq m^{1+\zeta_4},$$

$$m_1 \geqq m^{\frac{1+\zeta_4}{1-\zeta''_4}} = m^{1+\zeta_5}$$

(ζ_5 fixe, fini et positif).

Nous en concluons finalement le résultat suivant :

Soient $m_1, m_2, \ldots,$ les valeurs de m satisfaisant à (2), rangées par ordre de grandeur croissante; si parmi elles il y a une infinité de couples de valeurs m_1, m_2 consécutives, qui sont telles que la différence de ces deux valeurs *croisse plus vite que* $m_1^{1+\zeta_4} - m_1$ (ζ_4 *fini positif arbitraire*), *la fonction* $\varphi(x)$ *est à croissance irrégulière.*

Nous allons maintenant, par une méthode différente, indiquer un critère de régularité.

Soit $M(r)$ le module maximum de $\varphi(x)$ pour $r = |x|$ et

$$M(r) = e^{r^{\sigma_r}}.$$

On sait ou l'on voit facilement [1] que, le long d'un contour C entourant l'origine,

$$a_m = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F(z)\,dz}{z^{m+1}},$$

et, si C est un cercle de rayon r,

(6) $$|a_m| < \frac{M_r}{r^m} = \frac{e^{r^{\sigma_r}}}{r^m},$$

avec

(7) $$\sigma_r \leqq \rho + \varepsilon'_r$$

$\left(\varepsilon'_r \text{ tendant vers o avec } \frac{1}{r}\right)$.

Considérons, pour une des valeurs de m satisfaisant à (2), l'équation

(8) $$r^{\sigma_r}\sigma_r = m.$$

M_r étant fonction continue de r, $r^{\sigma_r}\sigma_r$ varie d'une manière continue ainsi que σ_r avec r, et il y a toujours une valeur de r qui satisfait à cette équation, quel que soit m, puisque

$$r^{\sigma_r}\sigma_r = \log M_r\,\sigma_r$$

prend des valeurs aussi grandes qu'on veut pour des valeurs de r assez grandes.

Soit r_1 une de ces racines :

$$r_1^{\sigma_{r_1}} = \frac{m}{\sigma_{r_1}},$$

$$|a_m| = \left(\frac{1}{m^{\frac{1}{\rho}+\varepsilon}}\right)^m < \frac{e^{\frac{m}{\sigma_{r_1}}}}{\left(\frac{m}{\sigma_{r_1}}\right)^{\frac{m}{\sigma_{r_1}}}};$$

d'où

$$m^{\frac{m}{\sigma_{r_1}}} < m^{\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)m}(e\sigma_{r_1})^{\frac{m}{\sigma_{r_1}}}.$$

---

(1) Borel, *Leçons sur les fonctions entières*, p. 62.

Prenons les logarithmes

$$\frac{m}{\sigma_{r_1}}\log m < m\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)\log m + \frac{m}{\sigma_{r_1}}\log(e\sigma_{r_1}),$$

d'où, σ_{r_1} étant positif, puisque m l'est,

$$\frac{1}{\sigma_{r_1}} < \frac{1}{\rho}+\varepsilon,$$

$$\sigma_{r_1} \geqq \rho + \varepsilon''_{r_1},$$

ε''_{r_1} étant aussi petit qu'on veut dès que m est assez grand. D'après (7) on aura

(9) $$\rho + \varepsilon''_{r_1} \leqq \sigma_{r_1} \leqq \rho + \varepsilon'_{r_1}.$$

Nous en concluons ce lemme :

LEMME. — *Si ρ est l'ordre d'une fonction entière d'ordre fini, on sait qu'il y a toujours une infinité de coefficients tels que, dès que m dépasse une limite finie*

$$\sqrt[m]{a_m} = \frac{1}{m^{\frac{1}{\rho}+\varepsilon}},$$

ε aussi petit qu'on veut, mais fini : il y a toujours pour chacune de ces valeurs de m un nombre ε_1 qui tend vers 0 avec $\frac{1}{m}$ et tel que pour

$$r = \left(\frac{m}{\rho+\varepsilon_1}\right)^{\frac{1}{\rho+\varepsilon_1}},$$

on ait

$$\mathrm{M}_r = e^{r^{\rho+\varepsilon_1}}.$$

Ceci posé, soient m et $m+\theta$ deux valeurs de l'indice de a_m satisfaisant à (2) : les valeurs correspondantes de σ_r dans (8) satisfont à (9).

Considérons l'équation analogue à (8)

(10) $$\sigma_r\, r^{\sigma_r} = \mu;$$

μ variant entre m et $m+\theta$, $r^{\sigma_r}\sigma_r$ varie dans les mêmes limites d'une manière continue et prend toutes les valeurs comprises entre m et $m+\theta$. Supposons que l'on puisse assigner un intervalle entre m et $m+\theta$ où $\rho - \sigma_r \geqq \zeta$ (ζ fini positif limité quels que soient μ et m dans cet intervalle), dès que m dépasse une certaine limite, c'est-à-dire que la fonction $\varphi(x)$ soit à croissance irrégulière. Supposons en particulier que ceci ait lieu pour $\mu = m+\lambda$. On devra avoir dans cet intervalle :

$$(11) \qquad |a_m| = \frac{1}{m^{\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)m}} < \frac{e^{\frac{\mu}{\sigma}}}{\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^{\frac{m}{\sigma}}},$$

pour une valeur de σ telle que

$$\rho - \sigma \geqq \zeta.$$

On en tire

$$(12) \qquad \mathrm{X} = \frac{m}{\sigma}(\log\mu - \log\sigma) - (m\log m)\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right) - \frac{\mu}{\sigma} < 0.$$

Pour $\mu = m$, $\rho - \sigma \geqq \zeta$, ceci n'a pas lieu dès que m est assez grand.

D'ailleurs la dérivée

$$\mathrm{X}'_\mu = \frac{m}{\sigma\mu} - \frac{1}{\sigma}$$

est toujours négative pour $\mu > m$. X est toujours décroissante quand μ croît : il suffira que X soit négatif pour une valeur de μ pour qu'il le soit pour les valeurs plus grandes : prenons $\mu = m(\log m)^{1+\alpha}$. On a

$$\frac{m}{\sigma}[\log m - \log\sigma + (1+\alpha)\log\log m] - (m\log m)\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right) - m(\log m)^{1+\alpha} < 0,$$

dès que α positif fini aussi petit qu'on veut; au contraire, cette égalité n'a plus lieu dès que α est négatif. Elle est donc impossible si

$$\mu < m(\log m)^{1-\alpha} \qquad (\alpha \text{ positif}),$$

ou, *a fortiori*, si

$$m + \theta < m(\log m)^{1-\alpha},$$

c'est-à-dire que (11) est impossible dès que

$$m + \theta < m(\log m)^{1-\alpha}.$$

La fonction est alors à croissance régulière.

Si les valeurs de m satisfaisant à (2) sont telles que la différence de deux d'entre elles consécutives m_2 et m_1 ($m_2 > m_1$) croisse moins vite que $m_1(\log m_1)^{1-\alpha} - m_1$ (α fini positif arbitraire) dès que m_1 dépasse une certaine limite, la fonction est à croissance régulière.

En résumé, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème I. — *Soit*

$$(1) \qquad \varphi(x) = \sum a_m x_m$$

une fonction entière d'ordre fini ρ. *On sait qu'il y a, pour* m *assez grand, une infinité de coefficients* a_m *tels que*

$$\sqrt[m]{a_m} = \frac{1}{m^{\frac{1}{\rho}+\varepsilon}}, \tag{2}$$

ε *inférieur à un nombre fini arbitraire aussi petit qu'on veut positif.*

PREMIER CRITÈRE. *Si* θ *est un nombre positif qui croît moins vite avec* m *que* $m(\log m)^{1-\alpha} - m$ (α *positif aussi petit qu'on veut, mais fini*), *et si, sur* θ *coefficients consécutifs à partir de* a_m, *il y en a toujours un tel que* (2), *dès que* m *dépasse une limite finie, la fonction* $\varphi(x)$ *est à croissance régulière.*

DEUXIÈME CRITÈRE. *Si* θ *croît plus vite avec* m *que* $m^{1+\zeta_1} - m$ (ζ_1 *fini positif aussi petit qu'on veut*), *pour une infinité de valeurs de* m *satisfaisant à* (2) *dès que* m *dépasse une limite finie, la fonction* $\varphi(x)$ *est à croissance irrégulière.*

Remarque I. — Ce théorème s'étend immédiatement aux fonctions quasi-entières : il suffira de remarquer que la fonction quasi-entière d'ordres finis $\rho, \rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_k$,

$$\varphi(z) + \varphi_0\left(\frac{1}{z}\right) + \varphi_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right) + \ldots + \varphi_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right), \tag{13}$$

où $\varphi(z), \varphi_0(z), \ldots, \varphi_k(z)$ sont des fonctions entières d'ordres finis, $\rho, \rho_0, \ldots, \rho_k$, avec $a_1 \neq a_2 \neq \ldots \neq a_k \neq 0$, a sa croissance régulière s'il en est de même de $\varphi(z), \varphi_0(z), \ldots, \varphi_k(z)$, irrégulière si l'une de ces fonctions a sa croissance irrégulière.

Si $\varphi(z)$ n'est d'ordre fini qu'aux environs d'une partie de ses points critiques essentiels, les critères sont encore applicables aux environs de ces points.

Remarque II. — Les dérivées d'ordre quelconque des fonctions entières ou quasi-entières d'ordre fini quelconque qui satisfont à l'un des critères du théorème I y satisfont également. Elles sont en même temps à croissance régulière ou irrégulière [1].

[1] La même propriété est évidente pour les fonctions entières ou quasi-entières d'ordre fini dont toutes les racines sont réelles (à part un nombre limité), car leurs dérivées ont toutes leurs racines réelles (à part un nombre limité), les ordres subsistent par la dérivation, et, entre deux racines réelles de la fonction, il y a, en général, une racine réelle de la dérivée.

III.

Le théorème I conduit à des applications importantes dans la théorie des équations différentielles.

THÉORÈME II. — *Les fonctions entières ou quasi-entières d'ordre fini qui satisfont à une équation différentielle linéaire rationnelle en x ont leur croissance régulière.*

Soit l'équation différentielle linéaire

$$\text{(14)} \qquad A_0 \frac{d^k y}{dx^k} + \ldots + A_k y + A_{k+1} = 0 = F(x, y, y', \ldots, y^{(k)})$$

avec

$$\text{(15)} \qquad A_i = a_0^{(i)} x^q + \ldots + a_q^{(i)} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, k+1),$$

un des $a_0^{(i)}$ étant $\neq 0$ ainsi qu'un des coefficients $a_0^{(0)}, \ldots, a_q^{(0)}$, q ayant même valeur pour tous les A_i.

Supposons que

$$\text{(16)} \qquad y = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_n x^n$$

soit solution de cette équation. Le terme général en x^n, par exemple, devient, pour n assez grand,

$$\text{(17)} \qquad \begin{aligned} & a_q^{(k)} \alpha_n + a_{q-1}^{(k)} \alpha_{n-1} + \ldots + a_0^{(k)} \alpha_{n-q} \\ & + (n+1) a_q^{(k-1)} \alpha_{n+1} + \ldots + a_0^{(k-1)} (n-q+1) \alpha_{n-q+1} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (n+k)(n+k-1)\ldots(n+1) a_q^{(0)} \alpha_{n+k} + \ldots \\ & + (n+k-q)(n+k-q-1)\ldots(n-q+1) a_0^{(0)} \alpha_{n+k-q} = 0. \end{aligned}$$

Le terme général en $\frac{1}{x^n}$ se déduit du précédent par le changement de n en $-n$.

Supposons que y soit une fonction quasi-entière

$$\varphi(z) + \varphi_0\left(\frac{1}{z}\right)$$

d'ordres ρ, ρ_1, avec

$$\text{(18)} \qquad \alpha_n = \frac{1}{n^{\left(\frac{1}{\rho} + \varepsilon\right) n}}, \qquad \alpha_{-n_1} = \frac{1}{n_1^{\left(\frac{1}{\rho_1} + \varepsilon_1\right) n_1}},$$

pour une infinité de valeurs de n, n_1, ε, ε_1 tendant vers o respectivement avec $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n_1}$.

Quand on fait varier $n(n_1)$, par exemple, il n'y a qu'un nombre limité de coefficients α qui figure dans chaque équation (17); à partir d'une valeur finie de n (ou n_1) ils doivent figurer tous dans l'ensemble des équations (17), sans quoi y contiendrait une infinité de coefficients arbitraires.

Les équations (17) contiennent $k+q+1$ coefficients consécutifs au plus, l'un des coefficients $a_q^0, \ldots, a_0^{(0)}$ n'étant pas nul. Le coefficient de α_j est d'ailleurs un polynome entier en n qui ne peut être nul dès que n dépasse une certaine limite pour toutes les valeurs de j, sans quoi tous les α_j seraient arbitraires. Nous aurons donc pour (17), en donnant à j une valeur n telle que $\alpha_n = \frac{1}{n^{\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)^n}}$, une équation de la forme

$$\alpha_n \varpi_n + \ldots = 0,$$

ϖ_n étant un polynome entier en n, de degré k au plus, et les autres coefficients en nombre limité étant de la forme $\frac{1}{n^{\left(\frac{1}{\sigma}+\varepsilon_1\right)^n}}$ avec $\sigma \leqq \rho$. On aura alors une relation impossible si un des autres coefficients n'est pas de la même forme avec $\rho - \sigma = \varepsilon_2$, ε_2 tendant vers o quand n croît indéfiniment. Par conséquent, on peut affirmer que, sur $k+q+1$ coefficients consécutifs de y, il y en a toujours au moins deux de l'ordre de $\frac{1}{n^{\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)^n}}$ si n est l'indice correspondant; de même pour les exposants négatifs. D'après un théorème précédent, la fonction y est donc une fonction entière ou quasi-entière dont la croissance est régulière.

Il n'y a pas de difficulté à étendre ce qui précède aux fonctions quasi-entières de la forme (13). La fonction

$$y = \varphi(z) + \varphi_0\left(\frac{1}{z}\right) + \varphi_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right) + \ldots + \varphi_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)$$

ne peut être identiquement nulle que si tous les coefficients le sont : en effet, si $\varphi_0\left(\frac{1}{z}\right)$, par exemple, n'est pas identiquement nul aux environs du point $z=0$, $\varphi_0\left(\frac{1}{z}\right)$ peut prendre des valeurs aussi grandes qu'on veut et aussi y. Posons alors

$$y = \mathrm{Y} + \mathrm{Y}_0 + \mathrm{Y}_1 + \ldots,$$

$$\mathrm{Y} = \varphi(z), \qquad \mathrm{Y}_0 = \varphi_0\left(\frac{1}{z}\right), \qquad \mathrm{Y}_1 = \varphi_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right), \qquad \ldots.$$

On aura

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(k)}) = F(x, Y, Y', \ldots, Y^{(k)}) + F(x, Y_0, Y'_0, \ldots) + \ldots.$$

On transformera $F(x, Y_1, Y'_1, \ldots)$, par exemple, en posant $x - a_1 = x_1$, de façon à le mettre sous la forme $f_1\left(\frac{1}{x_1}\right)$. Si

$$F(x, Y, Y', \ldots) = f(x),$$
$$F(x, Y_0, Y'_0, \ldots) = f_0\left(\frac{1}{x}\right),$$
$$F(x, Y_1, Y'_1, \ldots) = f_1\left(\frac{1}{x_1}\right),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

on devra avoir

$$f(x) + f_0\left(\frac{1}{x}\right) + f_1\left(\frac{1}{x_1}\right) + \ldots = 0.$$

Pour des valeurs des exposants de x, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x_1}$, $\ldots$, qui dépassent une limite finie, tous les coefficients de x^n, x^{-n_0}, $x_1^{-n_1}$, $\ldots$, doivent être nuls, et l'on est conduit évidemment à des équations tout à fait analogues à (17).

C. Q. F. D.

IV.

Ces propriétés subsistent en partie pour des catégories étendues d'équations différentielles rationnelles en $x, y, y' \ldots, y^{(k)}$. Nous allons établir à cet égard le théorème suivant :

Théorème III. — *Soit*

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(k)}) = 0 \tag{19}$$

une équation différentielle entière en $y, y', \ldots, y^{(k)}$ qui ne renferme qu'un seul terme en $y, y', \ldots,$ ou $y^{(k)}$.

Une des fonctions $P\left(\frac{1}{x}\right) + \sum_0^\infty \theta_n x^n$ *ou* $P(x) + \sum_0^\infty \frac{\theta_n}{x^n}$, *où $P(x)$ est un polynome entier,* $\sum_0^\infty \theta_n x^n$ *une fonction entière de genre fini, ne peut satisfaire à l'équation* (1) *que si* $\sum_0^\infty \theta_n x^n$ *est à croissance régulière.*

En effet, nous pourrons toujours supposer F mis sous la forme

$$F = \sum A y^{i_0} y'^{i_1} \dots y^{(k) i_k}, \tag{19}$$

les A étant des polynomes entiers en x.

Supposons que

$$f(x) = \sum_{-\lambda_1}^{\infty} \theta_n x^n = P\left(\frac{1}{x}\right) + \sum_{0}^{\infty} \theta_n x^n \tag{20}$$

soit solution de (19)

On a

$$\left\{ \begin{aligned} y' &= \dots + (-n)\theta_{-n} z^{-n-1} + \dots - \theta_{-1} z^{-2} + \theta_1 + 2\theta_2 x + \dots + n\theta_n z^{n-1} + \dots, \\ y'' &= \dots + (-n)(-n-1)\theta_{-n} z^{-n-2} + \dots \\ &\quad + \theta_{-1}(-1)(-2) z^{-3} + 2\theta_2 + \dots + n(n-1)\theta_n z^{n-2} + \dots, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ y^{(k)} &= \dots + (-n)(-n-1)\dots(-n-k+1)\theta_{-n} z^{-n-k} + \dots \\ &\quad + \theta_{-1}(-k)!\, z^{-k-1} + k!\,\theta_k + \dots + n(n-1)\dots(n-k+1)\theta_n z^{n-k} + \dots. \end{aligned} \right. \tag{21}$$

Quand on substitue $\sum_{-\lambda_1}^{\infty} \theta_n x^n$ dans $F = 0$, le résultat doit être identiquement nul. Nous allons chercher le coefficient de x^n dans le produit

$$y^{i_0} y'^{i_1} \dots y^{(k) i_k}.$$

D'abord le terme général d'exposant positif E a son exposant de la forme

$$E = m_1^0 \alpha + \dots + m_1^1(\alpha_1 - 1) + \dots + m_1^k(\alpha_k - k) + \dots + m_{j_k}^k(\delta_k - k), \tag{22}$$

$\alpha, \dots, \delta_k$ pouvant être positifs ou négatifs, mais étant limités en valeur absolue dans le deuxième cas; $\alpha_i - i$, par exemple, quand $\alpha_i \geqq 0$ est tel que $\alpha_i \geqq i$ (1).

Son coefficient est

$$\begin{aligned} B = {} & \frac{i_0!}{m_1^0! \dots m_{j_0}^0!} \cdots \frac{i_k!}{m_1^k! \dots m_{j_k}^k!} \theta_\alpha^{m_1^0} \dots \theta_{\alpha_k}^{m_1^k} \dots \theta_{\delta_k}^{m_{j_k}^k} . \alpha_1^{m_1^1} \dots \delta_1^{m_{j_1}^1} \dots \\ & \times [(\alpha_k - k + 1)\dots\alpha_k]^{m_1^k} \dots [(\delta_k - k + 1)\dots\delta_k]^{m_{j_k}^k}, \end{aligned} \tag{23}$$

---

(1) D'ailleurs, s'il en était différemment, le coefficient B correspondant serait nul.

avec

$$(24)\qquad \begin{cases} m_1^0+\ldots+m_{j_0}^0=i_0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ m_1^k+\ldots+m_{j_k}^k=i_k. \end{cases}$$

Le coefficient C de x^n dans F, après substitution à y de $\sum_{-\lambda_1}^{\infty}\theta_n x^n$, est

$$(25)\qquad \sum a\mathrm{B}=0,$$

et l'on a, pour chaque terme correspondant de $\sum \mathrm{A}y^{i_0}\ldots y^{(k)^{i_k}}$, un exposant de la forme

$$n=\mathrm{E}+r \qquad (r \text{ fini}),$$

chaque terme $\mathrm{A}y^{i_0}\ldots y^{(k)^{i_k}}$ correspondant à une ou plusieurs valeurs de E en nombre fini.

Considérons, dans chaque expression $\mathrm{A}y^{i_0}\ldots y^{(k)^{i_k}}$, les termes T de $\sum a\mathrm{B}$ qui sont $\neq 0$ et pour lesquels l'indice α' de $\theta_{\alpha'}$ est maximum parmi ceux qui ont un coefficient $\alpha'(\alpha'-1)\ldots(\alpha'-k'_1+1)$ d'ordre maximum en α'. On l'obtiendra en considérant tous les termes B pour lesquels tous les indices $\alpha, \ldots,$ sauf 1, par exemple $\alpha, \ldots, \delta, \ldots, \alpha_k, \ldots, \gamma_k$ ont les valeurs minima telles que $\theta_\alpha\ldots\theta_\delta\ldots\theta_{\gamma_k}$ soit $\neq 0$, prenant pour le dernier indice α' (ici δ_k) les valeurs qui résultent de $n=\mathrm{E}+r$, et parmi celles-là celle qui correspond à la valeur minima de r; on aura ici

$$\alpha=\ldots=\delta, \qquad \ldots, \qquad \alpha_k=\ldots=\gamma_k,$$

c'est-à-dire que les indices minima provenant de $y^{i_0}, y'^{i_1}, \ldots, y^{(k)^{i_k}}$, sauf l'indice α' (ici δ_k), seront respectivement égaux entre eux. Il n'y aura dans $\mathrm{A}y^{i_0}\ldots y^{(k)^{i_k}}$ qu'un T_1 de la nature T qui corresponde à $y^{(k'_1)^{i_{k'_1}}}$, c'est-à-dire pour lequel le coefficient α' soit un des indices $\alpha_{k'_1}, \ldots, \delta_{k'_1}$, pourvu que $i_{k'_1}$ soit $\neq 0$. Parmi les termes T analogues correspondant à $\mathrm{A}y^{i_0}\ldots y^{(k)^{i_k}}$, si $i_{k'}$ est l'exposant d'indice le plus élevé qui soit $\neq 0$ parmi les exposants $i_0, \ldots, i_k$, nous choisirons celui qui a pour coefficient $\alpha'(\alpha'-1)\ldots(\alpha'-k'+1)$. C'est évidemment le terme T cherché : il est unique.

Si $\mathrm{F}=\sum \mathrm{A}y^{i_0}\ldots y^{(k)^{i_k}}$ contient d termes $\mathrm{A}y^{i_0}\ldots y^{(k)^{i_k}}$, il y a d termes de $\sum a\mathrm{B}$ de la nature T.

Les coefficients B correspondants, en nombre fini, sont de la forme

$$\mathrm{B}'=\mathrm{B}_1\theta_{\alpha'}\alpha'(\alpha'-1)\ldots(\alpha'-k'+1),$$

B_1 étant une constante et $k'\leqq k$, α' différant de n d'un nombre fini [1].

---

[1] α' n'a pas forcément la même valeur pour tous les termes B'.

Par hypothèse, il y a au moins un terme en $y^{(k)}$: supposons qu'il n'y en ait qu'un : le terme B' correspondant sera de la forme

$$B'' = B_2 \theta_{\alpha''} \alpha''(\alpha''-1)\ldots(\alpha''-k+1) \quad \text{avec} \quad B_2 \neq 0. \tag{26}$$

Pour de grandes valeurs de α, il ne pourra se réduire avec aucun des termes B', au moins tant qu'on ne spécifie pas les valeurs des θ : il ne pourra donc être de module supérieur à la somme des modules des autres termes.

Supposons qu'il y ait plusieurs termes en $y^{(k)}$: il pourra y avoir plusieurs termes de la forme $aB'' \neq 0$ analogues à T contenant un même coefficient $\theta_{\alpha''}$ analogue à $\theta_{\alpha'}$ et donnant dans $\sum aB$ un total

$$T_1 = \left(\sum a' B_2\right) \theta_{\alpha''} \alpha''(\alpha''-1)\ldots(\alpha''-k+1). \tag{27}$$

Si $T_1 \neq 0$, les autres termes de $\sum aB$ qui contiennent $\theta_{\alpha''}$ étant en nombre limité et d'ordre $\leq \alpha''(\alpha''-1)\ldots(\alpha''-k+2)$ ne peuvent se réduire avec T_1 : T_1 devra donc se réduire avec l'ensemble des autres termes, et la somme de leurs modules devra alors être d'ordre de grandeur au moins égal à celui de T_1. Si $T_1 = 0$, on a

$$\sum a' B_2 = 0,$$

quel que soit α; les termes de T provenant de $y^{(k)}$ n'interviennent plus. On peut considérer les termes en $y^{(k-1)}$, et l'on raisonnera dessus de la même manière : le coefficient de $\theta_{\alpha'''} \alpha'''(\alpha'''-1)\ldots(\alpha'''-k+2)$, α''' étant aussi grand que possible, est nul ou non, celui de $\theta_{\alpha'''} \alpha'''(\alpha'''-1)\ldots(\alpha'''-k+1)$ l'étant : s'il ne l'est pas, il doit être d'ordre de grandeur $\leqq$ la somme des modules des autres termes; s'il l'est, on considérera les termes en $y^{(k-2)}$, etc.

S'il n'y a dans F *qu'un terme en $y^{(k')}$ pour une valeur $0 \leqq k' \leqq k$, l'ensemble des termes de $\sum aB$ qui contiennent $\theta_{\alpha''}$ doit être d'ordre de grandeur $\leqq$ la somme des modules des autres termes.*

Admettons qu'il en soit ainsi.

Supposons alors que $\sum_0^\infty \theta_m z^m$ soit une fonction entière à croissance irrégulière. On aura, pour une infinité de valeurs de m,

$$\theta_m = \frac{1}{m^{\frac{m}{\rho}(1+\varepsilon)}}, \tag{28}$$

ρ étant l'ordre de la fonction entière; pour les autres valeurs,

$$\theta_m = \frac{1}{m^{\frac{m}{\sigma}}}, \tag{29}$$

$\rho - \sigma$ étant fini, positif et limité inférieurement. De plus, si m_2 et m_1 ($m_2 > m_1$) sont deux nombres m consécutifs pour lesquels (28) a lieu, on a une infinité de valeurs de m_1, telles que

$$m_2 \geqq m_1 (\log m_1)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(théorème I).} \tag{30}$$

Supposons encore que α'' soit une de ces valeurs m_1. La chose est possible, quel que soit m_1 (pourvu que m_1 soit assez grand); car, les autres indices du terme $\theta_\alpha^{m_1^0} \ldots \theta_{\alpha_k}^{m_1^k} \ldots$ étant fixés comme il a été dit plus haut, pour la détermination de α'', n restant arbitraire, on en conclut une relation

$$n = \alpha'' + \varpi,$$

ϖ étant une constante parfaitement déterminée la même, quel que soit n : pour choisir $\alpha'' = m_1$, il suffit de prendre $n = m_1 + \varpi$.

Les autres termes, pour lesquels les indices sont $\neq \alpha''$ et $\leqq \alpha'' + r'$ (r' fini), sont tous de la forme

$$\mu \theta_\alpha^{m_1^0} \ldots \theta_{\alpha_k}^{m_1^k} \ldots,$$

les α, ..., α_k, ... étant en nombre limité et $\leqq$ P'' (P'' maximum des quantités $P = i_0 + i_1 + \ldots + i_k$), avec

$$m_1^0 \alpha + \ldots + m_{j_k}^k \alpha_k = n - r'', \tag{31}$$

où r'' est fini et peut avoir plusieurs valeurs.

Pour chacune de ces valeurs de r'', cherchons un maximum de $\mu \theta_\alpha^{m_1^0} \ldots \theta_{\alpha_k}^{m_1^k} \ldots$.

On a, β_1 étant positif,

$$\theta_{\pm \beta_1} = \frac{k_1}{\beta_1^{\frac{\beta_1}{\sigma_1}}} \qquad (\beta_1 \neq \alpha'' \quad \text{et} \quad \leqq \alpha'' + r'_n, \quad k_1 \text{ limité}). \tag{32}$$

Désignons, pour plus de commodité, par β_1, ..., β_l les modules des quantités α, ..., α_k, ... en nombre l, chacune étant comptée autant de fois que l'indique son coefficient m_1^0, ..., $m_{j_k}^k$ respectivement dans (31). On aura, d'après (32),

$$\left\{ \begin{array}{l} (\theta_\alpha^{m_1^0} \ldots \theta_{\alpha_k}^{m_1^k} \ldots)^{-1} = k_2 \beta_1^{\frac{\beta_1}{\sigma_1}} \ldots \beta_l^{\frac{\beta_l}{\sigma_l}} \qquad (k_2 \text{ fini}) \\ \text{avec} \\ \beta_1 + \ldots + \beta_l = n + r_1 \qquad (r_1 \text{ fini}). \end{array} \right. \tag{33}$$

Parmi les quantités toutes de même signe $\beta_1, \ldots, \beta_l$, il y en a alors une, β_l par exemple, qui est la plus grande en valeur absolue, et telle que

$$(34) \qquad |\beta_l| \geqq \frac{n+r_1}{l}.$$

Pour cette valeur $\sigma_l \leqq \rho - \zeta$ (ζ fini, positif, limité), car

$$\beta_l(\log\beta_l)^{\frac{1}{2}} \geqq \left(\frac{n+r_1}{l}\right)\log\left(\frac{n+r_1}{l}\right)^{\frac{1}{2}} > n + r_2,$$

quel que soit le nombre fini r_2 dès que n est assez grand. On pourra poser

$$(35) \qquad \sigma_l \leqq \sigma' = \rho - \zeta.$$

β_l étant supposé fixe, cherchons un minimum de

$$\beta_1^{\frac{\beta_1}{\sigma_1}} \cdots \beta_{l-1}^{\frac{\beta_{l-1}}{\sigma_{l-1}}} \geqq (\beta_1^{\beta_1} \cdots \beta_{l-1}^{\beta_{l-1}})^{\frac{1}{\rho_1}} \quad (^1)$$

avec

$$\beta_1 + \ldots + \beta_{l-1} = \text{const.} = n + r_1 - \beta_l.$$

On a, en prenant les logarithmes,

$$\frac{\beta_1}{\sigma_1}\log\beta_1 + \ldots + \frac{\beta_{l-1}}{\sigma_{l-1}}\log\beta_{l-1} \geqq \frac{\beta_1\log\beta_1 + \ldots + \beta_{l-1}\log\beta_{l-1}}{\rho_1},$$

et

$$d(\beta_1\log\beta_1 + \ldots + \beta_{l-1}\log\beta_{l-1}) = 0,$$
$$d\beta_1 + \ldots + d\beta_{l-1} = 0,$$
$$(1 + \log\beta_1)\,d\beta_1 + \ldots + (1 + \log\beta_{l-1})\,d\beta_{l-1} = 0,$$

ou enfin

$$0 = (\log\beta_1 - \log\beta_{l-1})\,d\beta_1 + \ldots + (\log\beta_{l-2} - \log\beta_{l-1})\,d\beta_{l-2}.$$

$d\beta_1, \ldots, d\beta_{l-2}$ sont ici indépendants. Donc il faut

$$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_{l-1} = \frac{n + r_1 - \beta_l}{l-1}.$$

La valeur correspondante de $(\beta_1^{\beta_1} \cdots \beta_{l-1}^{\beta_{l-1}})^{\frac{1}{\rho_1}}$ est

$$\left(\frac{n + r_1 - \beta_l}{l-1}\right)^{\frac{n+r_1-\beta_l}{\rho_1}}.$$

C'est un minimum, car, par exemple, elle est inférieure à la valeur obtenue en

(1) $\rho_1 = \rho + \varepsilon$, $|\varepsilon|$ aussi petit qu'on veut, mais fini.

faisant $\beta_1 = \ldots = \beta_{l-2} = 1$,

$$\beta_{l-1} = n + r_1 - \beta_l - l + 2,$$

qui est

$$(n + r_1 - \beta_l - l + 2)^{\frac{n+r_1-\beta_l-l+2}{\rho_1}}$$

dès que $l > 1$, ce que nous supposerons provisoirement. Dans cette hypothèse, on a donc

$$\beta_1^{\frac{\beta_1}{\sigma_1}} \ldots \beta_l^{\frac{\beta_l}{\sigma_l}} \geqq \beta_l^{\frac{\beta_l}{\sigma_l}} \left(\frac{n + r_1 - \beta_l}{l - 1}\right)^{\frac{n+r_1-\beta_l}{\rho_1}} \geqq \beta_l^{\frac{\beta_l}{\sigma'}} \left(\frac{n + r_1 - \beta_l}{l - 1}\right)^{\frac{n+r_1-\beta_l}{\rho_1}} = \mathrm{H}.$$

D'autre part,

$$\log \mathrm{H} = \mathrm{X}_1 = \frac{\beta_l}{\sigma'} \log \beta_l + \frac{n + r_1 - \beta_l}{\rho_1} \log \frac{n + r_1 - \beta_l}{l - 1}$$

a pour dérivée en β_l

$$\begin{aligned}
\mathrm{X}'_1 &= \frac{1}{\sigma'}(1 + \log \beta_l) - \frac{1}{\rho_1} \log \frac{n + r_1 - \beta_l}{l - 1} - \frac{1}{\rho_1} \\
&= \frac{1}{\sigma'} \log \beta_l - \frac{1}{\rho_1} \log(n + r_1 - \beta_l) + \frac{1}{\sigma'} + \frac{1}{\rho_1} \log(l - 1) - \frac{1}{\rho_1}.
\end{aligned}$$

De même

$$\mathrm{X}''_1 = \frac{1}{\sigma' \beta_l} + \frac{1}{\rho_1(n + r_1 - \beta_l)}$$

qui est toujours positif pour $\beta_l \geqq \frac{n + r_1}{l}$. X'_1 est une fonction croissante de β_l : sa valeur minima a donc lieu ici pour $\beta_l = \frac{n + r_1}{l}$; c'est

$$\frac{1}{\sigma'} + \frac{1}{\rho_1} \log(l - 1) - \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\sigma'} \log \frac{n + r_1}{l} - \frac{1}{\rho_1} \log(n + r_1) \frac{l - 1}{l}.$$

Pour n assez grand, cette valeur est toujours positive, et dès lors X'_1 est ici toujours positif. Par suite, X_1 croît avec β_l dès que $\beta_l \geqq \frac{n + r_1}{\beta_l}$, et

$$\begin{aligned}
\mathrm{H} = \beta_l^{\frac{\beta_l}{\sigma'}} \left(\frac{n + r_1 - \beta_l}{l - 1}\right)^{\frac{n+r_1-\beta_l}{\rho_1}} &\geqq \left(\frac{n + r_1}{l}\right)^{\frac{n+r_1}{l\sigma'}} \left(\frac{n + r_1 - \frac{n + r_1}{l}}{l - 1}\right)^{\frac{n+r_1-\frac{n+r_1}{l}}{\rho_1}} \\
&= \left(\frac{n + r_1}{l}\right)^{\frac{n+r_1}{l\sigma'}} \left(\frac{n + r_1}{l}\right)^{\frac{n+r_1}{l\rho_1}(l-1)} \\
&= \left(\frac{n + r_1}{l}\right)^{\frac{n+r_1}{\rho_1}} \left(\frac{n + r_1}{l}\right)^{\frac{n+r_1}{l}\left(\frac{1}{\sigma'} - \frac{1}{\rho_1}\right)}.
\end{aligned}$$

Finalement, d'après (33),

$$\mu_1 \theta_{\alpha}^{m_1^0} \dots \theta_{\alpha_k}^{m_1^k} \dots \leqq \left[\mu \left(\frac{n+r_1}{l} \right)^{\frac{n+r_1}{\rho_1}} \left(\frac{n+r_1}{l} \right)^{\frac{n+r_1}{l}\left(\frac{1}{\sigma'} - \frac{1}{\rho_1}\right)} \right]^{-1}.$$

Cette inégalité reste évidemment vraie quand $l = 1$.

Le nombre des termes de $\sum a\mathrm{B}$ est d'ailleurs $\leqq$ au produit d'un nombre limité par le nombre des solutions de

$$n + r_1 = m_1^0 \alpha + \dots + m_1^k \alpha_k + \dots,$$

$\alpha, \dots, \alpha_k$ ne pouvant être négatifs que si leur valeur absolue est limitée, et r_1 n'ayant qu'un nombre limité de valeurs. Ce nombre de termes est alors $\leqq n^{\zeta}$, ζ étant limité : la somme des modules des termes de $\sum a\mathrm{B}$ autres que ceux qui contiennent $\theta_{\alpha''}$ est d'ordre

$$\leqq \frac{n^{\zeta'}}{\left(\frac{n+r_1}{l_1} \right)^{\frac{n+r_1}{\rho_1}} \left(\frac{n+r_1}{l_1} \right)^{\frac{n+r_1}{l_1}\left(\frac{1}{\sigma'} - \frac{1}{\rho_1}\right)}} \qquad (\zeta' \text{ limité}),$$

l_1 étant la plus grande des quantités l, qui sont limitées. Cette somme est évidemment d'ordre

$$< \frac{1}{\alpha''^{\frac{\alpha''}{\rho}(1+\varepsilon)}}$$

qui est l'ordre des termes $\theta_{\alpha''}\alpha'' \dots (\alpha'' - k' + 1)$, et, par conséquent, $\sum a\mathrm{B}$ ne peut s'annuler contrairement à ce qui doit avoir lieu si $\sum_{-\lambda_1}^{\infty} \theta_n x^n$ est solution de $\mathrm{F} = 0$ (1).

La même démonstration s'applique aux fonctions quasi-entières d'ordre fini $\sum_{-\lambda_1}^{\infty} \frac{\theta_n}{x^n}$: il n'y a presque rien à y changer.

Nous concluons finalement ce théorème :

---

(1) Chaque fois que l'on pourra établir, pour une équation différentielle rationnelle $\mathrm{F} = 0$, l'existence d'un terme $\neq 0$ analogue à (26), on sera évidemment conduit aux mêmes conclusions et $\sum_{-\lambda_1}^{\infty} \theta_n x^n$ ne pourra être solution de $\mathrm{F} = 0$ que si elle est à croissance régulière.

THÉORÈME III. — *Soit*

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(k)}) = 0 \tag{19}$$

une équation différentielle entière en $y, y', \ldots, y^{(k)}$ qui ne renferme qu'un seul terme en $y, y', \ldots$ ou $y^{(k)}$.

Une des fonctions $P\left(\frac{1}{x}\right) + \sum_0^\infty \theta_n x^n$ ou $P(x) + \sum_0^\infty \frac{\theta_n}{x^n}$, $P(x)$ étant un polynome entier et $\sum_0^\infty \theta_n x^n$ une fonction entière d'ordre fini, ne peut satisfaire à l'équation (19) *que si $\sum_0^\infty \theta_n x^n$ a sa croissance régulière.*

Remarque I. — Nous croyons utile d'insister sur une conséquence des résultats qui précèdent : nous avons vu antérieurement qu'il y avait des catégories étendues de fonctions entières ne satisfaisant à aucune équation différentielle rationnelle [1], pourvu que la décroissance des coefficients fût suffisamment rapide. Il résulte de ce qui précède que, quelle que soit la rapidité de décroissance des coefficients pour les fonctions entières d'ordre fini, la généralité de ces fonctions ne comprend aucune solution des équations différentielles linéaires rationnelles, ni même de catégories étendues d'équations différentielles rationnelles non linéaires.

C'est un résultat plus précis, mais moins général jusqu'à nouvel ordre, que celui que nous avons obtenu par extension d'un théorème connu de M. Cantor, aux équations différentielles rationnelles.

V.

Le théorème II peut s'étendre aux solutions générales ou non de certaines équations différentielles linéaires dont les coefficients sont des polynomes entiers en x.

Soit l'équation différentielle

$$A_0 \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + A_n x = 0, \tag{1}$$

où $A_0, \ldots A_n$ sont des polynomes entiers en x, que l'on peut supposer premiers entre eux.

---

(1) *Journal de Mathématiques*, 1902, p. 37.

On sait, et l'on voit sans peine, par le changement de variables

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = y_1, \qquad \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = y_2, \qquad \ldots, \qquad \frac{dy}{dx} = y_{n-1},$$

et l'application d'un théorème de Cauchy [1], que les seuls points critiques à distance finie des solutions de (1) sont les zéros de A_0.

Si A_0 se réduit à une constante, (1) n'a aucun point critique à distance finie. L'intégrale générale est une fonction entière : le théorème II s'applique.

Sinon, soit

$$A_0 = (ax+b)^\mu \qquad (a \neq 0);$$

grâce à un changement de variables simples, on peut toujours supposer

$$a = 1, \qquad b = 0, \qquad A_0 = x^\mu \quad (\mu \text{ entier}).$$

Soit r une racine de l'équation déterminante : on a une intégrale

$$Y = x^r u_0.$$

Supposons encore que (1) ait ses intégrales régulières, au sens de Fuchs : l'on sait qu'alors $\mu \leqq n$, A_i étant divisible par $x^{\mu-i}$, si $\mu \geqq i$. En multipliant tout par $x^{n-\mu}$, on peut supposer $\mu = n$. Cherchons l'équation différentielle à laquelle satisfait u_0; on a

$$A_k \frac{d^{n-k}Y}{dx^{n-k}} = A_k \sum C_{n-k}^l \frac{d^{n-k-l}u_0}{dx^{n-k-l}} r(r-1)\ldots(r-l+1)x^{r-l},$$

avec

$$A_k = A'_k x^{n-k} \qquad \text{et} \qquad l \leqq n-k,$$

A'_k étant un polynome entier.

On aura ainsi le terme

$$A'_k C_{n-k}^l \frac{d^{n-k-l}u_0}{dx^{n-k-l}} r(r-1)\ldots(r-l+1)x^{n-k+r-l},$$

avec

$$n-k-l \geqq 0.$$

Donc x^r sera en facteur, et le coefficient de $\frac{d^{n-k-l}u_0}{dx^{n-k-l}}$ est divisible par x^{n-k-l}. Supprimons le facteur x^r.

L'équation en u_0 sera encore une équation différentielle linéaire de la forme (1), avec $\mu = n$, ayant ses intégrales régulières. Mais la racine de l'équation déterminante qui correspond à x^r sera nulle.

---

(1) *Voir*, par exemple, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*.

La solution u_0 correspondante n'a plus de point critique à distance finie, et est monodrome dans tout le plan : c'est donc un polynome ou une fonction entière.

Dans le second cas, l'équation différentielle en u_0 est de celles auxquelles notre théorème II est applicable. Si u_0 est de genre fini, elle est à croissance régulière.

A titre d'exemple d'application des considérations précédentes on peut citer l'équation de Bessel.

Les mêmes considérations sont applicables au cas où il y a plus d'un point critique, mais où tous les points critiques à distance finie autres que $x = x_0$ (l'on peut toujours supposer comme tout à l'heure $x_0 = 0$) sont des pôles pour l'intégrale générale. On a un système de n intégrales indépendantes [1]

$$y_0 = (x - x_0)^r u_0,$$
$$y_1 = (x - x_0)^r (\theta_1 u_0 + u_1),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

avec

$$\theta_1 = \frac{1}{2\pi i}\log(x - x_0), \qquad \ldots;$$

u_0, u_1, ... sont des fonctions quasi-entières n'ayant à distance finie que des pôles : si u_0 est d'ordre fini, u_0 est à croissance régulière.

Nous pourrons ainsi énoncer le théorème suivant :

Théorème IV. — *Soit une équation différentielle linéaire*

$$A_0 \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + A_n x = 0$$

dont les coefficients sont des polynomes et dont les intégrales sont régulières à distance finie au sens de Fuchs. Si tous les points critiques à distance finie autres que $x = x_0$ sont des pôles pour l'intégrale générale, il y a un certain nombre d'intégrales de la forme $(x - x_0)^r u_0$ où u_0 est une fraction rationnelle ou une fonction quasi-entière n'ayant d'autres points critiques à distance finie que des pôles (c'est-à-dire la somme d'une fraction rationnelle et d'une fonction entière) : u_0 ne peut être d'ordre fini que si sa croissance est régulière (au sens de M. Borel).

---

(1) Les considérations ci-dessus sont des généralisations de considérations dues à Halphen. — Voir Jordan, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, t. III, 1887, p. 211.

L'équation de Bessel est de celles auxquelles ceci s'applique.

Si $A_0 = \text{const.}$, *l'intégrale générale est un polynome ou une fonction entière qui ne peut être d'ordre fini que si sa croissance est régulière* [1].

---

[1] Ce théorème ne doit évidemment être considéré que comme un cas particulier : il appelle bien des extensions.