

**ANNALES**  
DE LA  
**FACULTÉ DES SCIENCES**  
DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE.

---

**CONTRIBUTION**  
A LA  
**THÉORIE DE L'ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES**

$$\Delta v + \xi v = 0,$$

PAR S. ZAREMBA,

Professeur extraordinaire à l'Université de Cracovie.

---

1. Soit  $v$  une fonction des variables  $x, y, z$  vérifiant dans toute l'étendue d'un domaine (D), limité par une surface fermée (S), l'équation aux dérivées partielles

$$(1) \quad \Delta v + \xi v = 0,$$

où l'on a posé

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

et où  $\xi$  représente un paramètre pouvant avoir une valeur quelconque réelle ou complexe.

On sait que la fonction  $v$  pourra être déterminée de façon à se réduire sur la surface (S) à une fonction continue donnée  $\varpi$ , pourvu que la surface (S) soit dépourvue de certaines singularités et que le paramètre  $\xi$  ait une valeur ne faisant

pas partie d'une certaine suite croissante

$$(2) \quad k_1, k_2, k_3, \dots$$

de nombres réels et positifs, suite qui ne dépend que de la nature de la surface (S).

Cela posé, certaines recherches relatives à la méthode des approximations successives, imaginée par M. Picard, conduisent à la question suivante :

Soient un point P choisi arbitrairement sur la surface (S) et un point variable M situé à l'intérieur de cette surface ; dans quels cas les dérivées de tous les ordres de la fonction  $\nu$  tendront-elles vers des limites déterminées lorsque le point M tendra vers le point P suivant un arc situé tout entier dans le domaine (D) ?

Je me propose d'établir l'existence de ces limites, pourvu que certaines conditions très générales et qui seront énoncées au n° 6 soient remplies.

Les considérations qui vont suivre reposent sur la méthode que j'ai donnée récemment (1) pour calculer la fonction  $\nu$ , étant données la surface (S) et la fonction  $\omega$ . J'aurai, à cause de cela, à étudier certaines propriétés de deux intégrales qui peuvent être regardées comme des généralisations des potentiels d'une simple couche et d'une double couche.

2. Je consacre ce numéro à la définition de notations et à l'énoncé d'hypothèses qui seront conservées dans toute l'étendue du présent article.

Nous supposerons que la surface (S), pouvant d'ailleurs se composer d'un nombre quelconque de nappes entièrement séparées, admet en chacun de ses points un plan tangent déterminé et qu'elle jouit en outre d'une propriété que l'on peut énoncer ainsi : Prenons pour origine d'un système d'axes de coordonnées rectangulaires un point quelconque O situé sur la surface (S) et dirigeons l'axe des Z suivant la normale ; il existera une longueur R, indépendante du choix du point O, telle que la portion (S') de la surface (S) située à l'intérieur du cylindre de révolution (C) ayant le point O pour centre, l'axe des  $z$  pour axe, R pour rayon et  $2R$  pour hauteur, ait pour équation

$$(1) \quad z = \mathfrak{P}(x, y),$$

où  $\mathfrak{P}(x, y)$  représente une série ordonnée suivant les puissances entières et positives des variables  $x$  et  $y$ , convergente pour toutes les valeurs de  $x$  et  $y$  vérifiant l'inégalité

$$(2) \quad x^2 + y^2 \leq R_1^2,$$

---

(1) Sur le développement d'une fonction arbitraire en une série procédant suivant les fonctions harmoniques (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1900).

où  $R_1$  représente une longueur plus grande que  $R$  et indépendante de la position du point  $O$  sur la surface  $(S)$ . Nous désignerons par  $(S')$  la courbe commune au cylindre et à la surface  $(S)$  et nous supposerons que le rayon du cylindre est assez petit pour que cette courbe se projette sur le plan des  $(x, y)$  suivant le cercle

$$(3) \quad x^2 + y^2 - R^2 = 0, \quad z = 0.$$

Nous désignerons enfin par  $(S'')$  la portion de la surface  $(S)$  extérieure au cylindre  $(C)$ .

Soit  $h$  une fonction uniforme donnée de la position d'un point variable  $P$  assujéti à rester sur la surface  $(S)$ . Disposons les axes comme tout à l'heure et astreignons le point  $P$  à ne pas sortir de la portion  $(S')$  de la surface  $(S)$ . La fonction  $h$  pourra alors être considérée comme une fonction uniforme des variables  $x$  et  $y$ . Supposons que cette fonction de  $x$  et  $y$  admette des dérivées partielles déterminées jusqu'à l'ordre  $j$  inclusivement, quelle que soit la position de l'origine  $O$  des coordonnées sur la surface  $(S)$ . Nous dirons que la fonction  $h$  admet des dérivées déterminées jusqu'à l'ordre  $j$  inclusivement. Nous représenterons par le symbole

$$(4) \quad \mathbf{D}_0^{(j)} h$$

la valeur de l'une quelconque des expressions

$$\left( \frac{\partial^j h}{\partial x^{j-j'} \partial y^{j'}} \right)_{\substack{x=0 \\ y=0}}$$

et si l'on a

$$|\mathbf{D}_0^{(j)} h| \leq \mathbf{H}^{(j)},$$

quelle que soit la position du point  $O$  sur la surface  $(S)$  et quelle que soit la direction de l'axe des  $x$  dans le plan tangent en  $O$  à cette surface, nous dirons que  $\mathbf{H}^{(j)}$  est une limite supérieure des modules des dérivées d'ordre  $j$  de la fonction  $h$ .

Considérons maintenant une fonction  $F$  de la position d'un point variable  $M$  dans l'espace et disposons les axes comme tout à l'heure en ayant soin, en outre, de diriger l'axe des  $z$  suivant la normale *intérieure* à la surface  $(S)$ . La fonction  $F$  pourra être considérée comme une fonction  $F(x, y, z)$  des coordonnées  $x, y, z$  du point  $M$ . Il pourra arriver que l'expression  $F(0, 0, z)$  tende vers une limite déterminée lorsque  $z$  tend vers zéro en conservant un signe invariable, mais que cette limite soit différente suivant que ce signe est positif ou négatif. Nous représenterons la limite en question par  $(F)_i$  lorsque  $z$  reste positif et par  $(F)_e$  lorsque  $z$  reste négatif. Enfin, pour simplifier l'écriture, nous remplacerons le symbole

$$\left( \frac{\partial F}{\partial z} \right)_i$$

par le symbole

$$\frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{N}}.$$

Nous désignerons constamment par  $\mu$  celle des déterminations de l'expression  $\sqrt{-\xi}$  dont la partie réelle est positive, et nous poserons, en mettant en évidence les parties réelle et imaginaire de  $\mu$ ,

$$\mu = a + bi.$$

Enfin nous désignerons par  $m$  le module de  $\mu$ . Nous aurons donc

$$\mu^2 = (a + bi)^2 = -\xi,$$

$$m^2 = a^2 + b^2,$$

$$a > 0.$$

3. Désignons par  $r$  la distance des points  $(x, y, z)$  et  $(x', y', z')$  et envisageons la fonction

$$\frac{e^{-\mu r}}{r}.$$

Cette expression, considérée comme fonction des variables  $x, y, z$ , vérifie, on le sait, l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta \frac{e^{-\mu r}}{r} + \xi \frac{e^{-\mu r}}{r} = 0$$

en chaque point de l'espace autre que le point  $(x', y', z')$ . Si donc le point  $(x', y', z')$  est situé sur la surface (S), si  $ds$  représente l'élément de cette surface relatif à ce point et si l'on pose

$$(1) \quad \varphi = \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} h \frac{e^{-\mu r}}{r} ds,$$

$$(2) \quad \psi = \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} h \frac{d}{d\mathbf{N}} \frac{e^{-\mu r}}{r} ds,$$

où  $h$  représente une fonction donnée de la position du point  $(x', y', z')$  sur la surface (S) et où l'indice (S) indique que les intégrations doivent être étendues à toute la surface (S), les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  joueront, par rapport à l'équation

$$\Delta v + \xi v = 0,$$

le rôle que jouent les potentiels des couches simples et doubles par rapport à l'équation de Laplace.

Supposons que la fonction  $h$  admette des dérivées finies de tous les ordres,

soit  $H^{(0)}$  une limite supérieure du module de cette fonction elle-même et soit  $H^{(j)}$  une limite supérieure des modules de ses dérivées d'ordre  $j$  (se reporter au n° 2). Plaçons l'origine des coordonnées en un point quelconque  $O$  situé sur la surface  $(S)$  et dirigeons l'axe des  $z$  suivant la normale intérieure. Je vais prouver que les quantités

$$(3) \quad \left( \frac{\partial^{j+j'} \varphi}{\partial x^j \partial y^{j'}} \right)_i \left( \frac{\partial^{j+j'} \varphi}{\partial x^j \partial y^{j'}} \right)_e,$$

$$(4) \quad \left( \frac{\partial^{j+j'+1} \varphi}{\partial x^j \partial y^{j'} \partial z} \right)_i \left( \frac{\partial^{j+j'+1} \varphi}{\partial x^j \partial y^{j'} \partial z} \right)_e,$$

$$(5) \quad \left( \frac{\partial^{j+j'} \psi}{\partial x^j \partial y^{j'}} \right)_i \left( \frac{\partial^{j+j'} \psi}{\partial x^j \partial y^{j'}} \right)_e,$$

$$(6) \quad \left( \frac{\partial^{j+j'+1} \psi}{\partial x^j \partial y^{j'} \partial z} \right)_i \left( \frac{\partial^{j+j'+1} \psi}{\partial x^j \partial y^{j'} \partial z} \right)_e$$

existeront et que l'on aura les inégalités suivantes

$$(7) \quad \left| \left( \frac{\partial^{j+j'} \varphi}{\partial x^j \partial y^{j'}} \right)_i \right| < \mathbf{A} H^{(j+j')} + \mathbf{B}_{j+j'} \sum_{k=0}^{j+j'-1} H^{(k)},$$

$$(8) \quad \left| \left( \frac{\partial^{j+j'} \varphi}{\partial x^j \partial y^{j'}} \right)_e \right| < \mathbf{A} H^{(j+j')} + \mathbf{B}_{j+j'} \sum_{k=0}^{j+j'-1} H^{(k)},$$

$$(9) \quad \left| \left( \frac{\partial^{j+j'+1} \varphi}{\partial x^j \partial y^{j'} \partial z} \right)_i + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^{j+j'} h}{\partial x^j \partial y^{j'}} \right)_{x=0, y=0} \right| < \mathbf{A} H^{(j+j')} + \mathbf{B}_{j+j'} \sum_{k=0}^{j+j'-1} H^{(k)},$$

$$(10) \quad \left| \left( \frac{\partial^{j+j'+1} \varphi}{\partial x^j \partial x^j \partial z} \right)_e - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^{j+j'} h}{\partial x^j \partial y^{j'}} \right)_{x=0, y=0} \right| < \mathbf{A} H^{(j+j')} + \mathbf{B}_{j+j'} \sum_{k=0}^{j+j'-1} H^{(k)},$$

$$(11) \quad \left| \left( \frac{\partial^{j+j'} \psi}{\partial x^j \partial y^{j'}} \right)_i - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^{j+j'} h}{\partial x^j \partial y^{j'}} \right)_{x=0, y=0} \right| < \mathbf{A} H^{(j+j')} + \mathbf{B}_{j+j'} \sum_{k=0}^{j+j'-1} H^{(k)},$$

$$(12) \quad \left| \left( \frac{\partial^{j+j'} \psi}{\partial x^j \partial y^{j'}} \right)_e + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^{j+j'} h}{\partial x^j \partial y^{j'}} \right)_{x=0, y=0} \right| < \mathbf{A} H^{(j+j')} + \mathbf{B}_{j+j'} \sum_{k=0}^{j+j'-1} H^{(k)},$$

$$(13) \quad \left| \left( \frac{\partial^{j+j'+1} \psi}{\partial x^j \partial y^{j'} \partial z} \right)_i \right| < \mathbf{A} H^{(j+j'+2)} + \mathbf{B}_{j+j'} \sum_{k=0}^{j+j'+1} H^{(k)},$$

$$(14) \quad \left| \left( \frac{\partial^{j+j'+1} \psi}{\partial x^j \partial y^{j'} \partial z} \right)_e \right| < \mathbf{A} H^{(j+j'+2)} + \mathbf{B}_{j+j'} \sum_{k=0}^{j+j'+1} H^{(k)},$$

où  $\mathbf{A}$  est un nombre positif que l'on peut se donner à l'avance en le choisissant aussi petit que l'on voudra,  $\mathbf{B}_{j+j'}$  étant un nombre positif dépendant de la valeur

choisie pour  $A$  et de la nature de la surface (S) mais ne dépendant pas de la position du point  $O$  sur cette surface et de la direction de l'axe des  $x$  dans le plan tangent en  $O$  à la surface.

Avant de démontrer les propositions précédentes, notons de suite certaines conséquences qu'il est très aisé d'en tirer. Il résulte tout d'abord de ces propositions et des équations

$$\Delta\varphi + \check{\xi}\varphi = 0,$$

$$\Delta\psi + \check{\xi}\psi = 0,$$

que les quantités

$$\left(\frac{\partial^{j+j'+j''}\varphi}{\partial x^j \partial y^{j'} \partial z^{j''}}\right)_i, \quad \left(\frac{\partial^{j+j'+j''}\varphi}{\partial x^j \partial y^{j'} \partial z^{j''}}\right)_e,$$

$$\left(\frac{\partial^{j+j'+j''}\psi}{\partial x^j \partial y^{j'} \partial z^{j''}}\right)_i \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial^{j+j'+j''}\psi}{\partial x^j \partial y^{j'} \partial z^{j''}}\right)_e$$

existeront et qu'il est aisé de calculer des limites supérieures de leurs modules. On s'assurera ensuite que les expressions

$$\frac{d\varphi}{dN}, \quad (\psi)_i \quad \text{et} \quad (\psi)_e$$

qui sont des fonctions déterminées de la position d'un point variable assujéti à rester sur la surface (S) admettront des dérivées de tous les ordres, l'on n'éprouvera aucune difficulté à calculer des limites supérieures des modules de ces dérivées et l'on verra enfin, en se reportant à la définition du symbole (4) du n° 2 que les résultats de ces calculs pourront être exprimés au moyen des inégalités suivantes :

$$(15) \quad \left| D_0^{(j)} \left[ \frac{d\varphi}{dN} + \frac{1}{2} h \right] \right| < A H^{(j)} + E_j \sum_{k=0}^{j-1} H^{(k)},$$

$$(16) \quad | D_0^{(j)} [(\psi)_i - \frac{1}{2} h] | < A H^{(j)} + E_j \sum_{k=0}^{j-1} H^{(k)},$$

$$(17) \quad | D_0^{(j)} [(\psi)_e + \frac{1}{2} h] | < A H^{(j)} + E_j \sum_{k=0}^{j-1} H^{(k)}$$

où  $A$  représente le même nombre que dans les inégalités de (7) à (14) et où  $E_j$  est un nombre positif analogue au nombre  $B_{j+j}$ , figurant dans les inégalités de (7) à (14).

4. J'indique rapidement la démonstration des inégalités (7), (8), (9) et (10). A cet effet je place l'origine des coordonnées en un point quelconque de la surface (S) et je dirige l'axe des  $z$  suivant la normale intérieure. Cela posé, décomposons

l'intégrale (1) du numéro précédent en deux autres se rapportant respectivement aux portions (S') et (S'') de la surface (S) (voir le n° 2). Il est évident que l'intégrale  $\varphi'$  peut seule être une source de difficultés dans la démonstration des inégalités (7) et (8) qui vont nous occuper d'abord. Il suffira donc de considérer cette intégrale seule de plus près. Désignons par  $x', y', z'$  les coordonnées de l'élément de surface  $ds$  et soit  $\gamma'$  le cosinus de l'angle que fait la normale intérieure à la surface (S) au point  $(x', y', z')$  avec l'axe des  $z$ . Nous aurons

$$(1) \quad \varphi' = \frac{1}{4\pi} \int_{(T)} \frac{h}{\gamma'} \frac{e^{-\mu r}}{r} dx' dy'$$

où l'indice (T) indique que l'intégration doit être étendue à l'aire limitée par le cercle

$$(2) \quad x^2 + y^2 - R^2 = 0, \quad z = 0.$$

La formule (1) donne

$$(3) \quad \frac{\partial \varphi'}{\partial x} = \frac{1}{4\pi} \int_{(T)} \frac{h}{\gamma'} \frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{-\mu r}}{r} dx' dy'.$$

D'ailleurs,

$$\frac{\partial}{\partial x'} \frac{e^{-\mu r}}{r} = - \frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{-\mu r}}{r} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{-\mu r}}{r} \frac{\partial z'}{\partial x'},$$

par conséquent,

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial x} = - \frac{1}{4\pi} \int_{(T)} \frac{h}{\gamma'} \frac{\partial}{\partial x'} \frac{e^{-\mu r}}{r} dx' dy' - \frac{1}{4\pi} \int_{(T)} \frac{h}{\gamma'} \frac{\partial z'}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{-\mu r}}{r} dx' dy';$$

d'où, en intégrant par parties,

$$(4) \quad \frac{\partial \varphi'}{\partial x} = - \frac{1}{4\pi} \int_{(\Sigma)} \frac{h}{\gamma'} \frac{e^{-\mu r}}{r} dy' \\ + \frac{1}{4\pi} \int_{(T)} \frac{\partial}{\partial x'} \frac{h}{\gamma'} \frac{e^{-\mu r}}{r} dx' dy' - \frac{1}{4\pi} \int_{(T)} \frac{h}{\gamma'} \frac{\partial z'}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{-\mu r}}{r} dx' dy'$$

où l'intégrale simple est une intégrale curviligne, prise dans un sens convenable suivant la circonférence du cercle ( $\Sigma$ ).

On conclura immédiatement de l'équation précédente l'existence de la quantité

$$\left( \frac{\partial \varphi'}{\partial x} \right)_i,$$

et, par suite, aussi celle de

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_e.$$

On calculera ensuite aisément une limite supérieure du module de cette expression en fonction de la limite supérieure  $H^{(0)}$  du module de la fonction  $h$  et de la limite supérieure du module de la dérivée

$$\frac{\partial h}{\partial x^i} \bar{\gamma}^i.$$

Or, il est possible de mettre cette limite supérieure sous la forme d'une fonction linéaire et homogène des quantités  $H^{(0)}$  et  $H^{(1)}$ . On arrivera donc finalement à un résultat de la forme suivante :

$$\left| \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_i \right| < A H^{(1)} + B_1 H^{(0)}.$$

Cela posé, la formule (4) nous montre qu'en prenant le rayon  $R$  du cercle (2) assez petit on trouvera pour le nombre  $A$  une valeur aussi petite qu'on le jugera utile. Il va sans dire qu'en diminuant le rayon  $R$  on fera croître le nombre  $B_1$ , mais cela ne présentera aucun inconvénient.

En résumé, l'inégalité (7) du numéro précédent est démontrée pour  $j + j' = 1$ .

On établira l'inégalité (7) pour  $j + j' = 2$  en prenant la dérivée des deux membres de l'équation (4) et en transformant les dérivées des deux dernières intégrales du second membre de l'équation (4) d'une façon tout à fait analogue à celle dont nous avons transformé le second membre de l'équation (3).

Il est évident que la méthode est générale, et que, de proche en proche, l'on pourra établir l'inégalité (7) pour toute valeur de la somme  $j + j'$ . Bien entendu on pourra, si cela est nécessaire, prendre le rayon du cercle (2) d'autant plus petit que l'ordre des dérivées considérées sera plus élevé.

Il est évident que l'inégalité (8) se démontrerait d'une façon tout à fait analogue.

L'existence des quantités (4) du numéro précédent et les inégalités (9) et (10) du même numéro peuvent se démontrer ainsi : les nombres  $j$  et  $j'$  ayant des valeurs données, on commencera par établir l'équation de laquelle se déduisent les inégalités (7) et (8); cela fait, on prendra les dérivées par rapport à  $z$  des deux membres de l'équation obtenue et l'on fera tendre  $z$  vers zéro, une première fois en conservant à cette variable le signe  $+$  et la seconde fois en lui conservant le signe  $-$ .

5. Pour établir les inégalités (11), (12), (13) et (14) du n° 3 disposons les axes comme dans le numéro précédent et décomposons l'intégrale (2) du n° 3 en deux autres  $\psi'$  et  $\psi''$  se rapportant respectivement aux portions ( $S'$ ) et ( $S''$ ) de la surface ( $S$ ). Il est évident que l'intégrale  $\psi'$  seule a besoin d'être considérée de plus



près. Cette intégrale peut s'écrire, en désignant par  $p'$  et  $q'$  les dérivées,

$$\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x'} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial y'},$$

de la fonction  $\mathfrak{P}(x', y')$  qui figure au second membre de l'équation (1) du n° 2, ainsi

$$(1) \quad \psi' = \frac{1}{4\pi} \int_{(T)} h \left( p' \frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{-\mu r}}{r} + q' \frac{\partial}{\partial y} \frac{e^{-\mu r}}{r} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{-\mu r}}{r} \right) dx' dy'.$$

On déduira aisément de cette formule, au moyen de calculs analogues à ceux qui ont été indiqués dans le numéro précédent, en tenant compte de ce que les quantités  $p'$  et  $q'$  sont de l'ordre de grandeur de l'expression  $\sqrt{x'^2 + y'^2}$ , les inégalités (11) et (12) du n° 3.

Il ne nous reste donc plus qu'à établir les inégalités (13) et (14).

L'équation (1) nous donne

$$\frac{\partial \psi'}{\partial z} = \frac{1}{4\pi} \int_{(T)} \left( p' \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \frac{e^{-\mu r}}{r} + q' \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \frac{e^{-\mu r}}{r} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{e^{-\mu r}}{r} \right) dx' dy';$$

d'ailleurs

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{e^{-\mu r}}{r} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{e^{-\mu r}}{r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{e^{-\mu r}}{r} + \xi \frac{e^{-\mu r}}{r} = 0;$$

il viendra donc, en portant dans l'expression de  $\frac{\partial \psi'}{\partial z}$  la valeur de  $\frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{e^{-\mu r}}{r}$  tirée de l'équation précédente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi'}{\partial z} &= \frac{1}{4\pi} \int_{(T)} h \left( p' \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \frac{e^{-\mu r}}{r} + q' \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \frac{e^{-\mu r}}{r} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{e^{-\mu r}}{r} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{e^{-\mu r}}{r} \right) dx' dy' \\ &\quad + \frac{\xi}{4\pi} \int_{(T)} h \frac{e^{-\mu r}}{r} dx' dy' \end{aligned}$$

ou bien

$$\frac{\partial \psi'}{\partial z} = -\frac{1}{4\pi} \int_{(T)} h \left[ \frac{\partial}{\partial x'} \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{-\mu r}}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial y'} \left( \frac{\partial}{\partial y} \frac{e^{-\mu r}}{r} \right) \right] dx' dy' + \frac{\xi}{4\pi} \int_{(T)} h \frac{e^{-\mu r}}{r} dx' dy';$$

d'où, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi'}{\partial z} &= -\frac{1}{4\pi} \int_{(\Sigma)} h \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{-\mu r}}{r} dy' - \frac{\partial}{\partial y} \frac{e^{-\mu r}}{r} dx \right) \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int_{(T)} \left( \frac{\partial h}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{-\mu r}}{r} + \frac{\partial h}{\partial y'} \frac{\partial}{\partial y} \frac{e^{-\mu r}}{r} \right) dx' dy' + \frac{\xi}{4\pi} \int_{(T)} h \frac{e^{-\mu r}}{r} dx' dy', \end{aligned}$$

où l'intégrale simple est une intégrale curviligne prise dans un sens convenable suivant le contour du cercle  $(\Sigma)$ .

La formule que nous venons d'établir et les résultats obtenus au n° 4 conduisent aisément aux inégalités (13) et (14) du n° 3, inégalités qu'il s'agissait précisément de démontrer.

6. Je rappelle rapidement certains résultats que j'ai établis dans le Mémoire cité au n° 1. Les lettres  $m$  et  $a$  ayant la signification qui leur a été attribuée au n° 2, j'ai montré que, lorsque l'inégalité

$$(1) \quad \frac{m^2}{a^3} < \theta,$$

où  $\theta$  est un nombre positif assez petit, est satisfaite, la fonction  $v$  considérée au n° 1 peut être obtenue de la façon suivante :

Posons

$$(2) \quad \begin{cases} v_1 = \frac{1}{4\pi} \int_{(\Sigma)} \varpi \frac{d}{dN} \frac{e^{-\mu r}}{r} ds, \\ v_k = -\frac{1}{4\pi} \int_{(\Sigma)} (v_{k-1})_e \frac{d}{dN} \frac{e^{-\mu r}}{r} ds \quad (k = 2, 3, \dots), \end{cases}$$

on aura

$$(3) \quad v = \sum_{k=1}^{\infty} v_k;$$

Il existera, en outre, un nombre positif  $\varepsilon$  plus petit que l'unité et une constante positive  $C$ , tels que l'on ait

$$(4) \quad (v_k)_e < C \delta_0^{(0)} \varepsilon^k$$

où  $\delta_0^{(0)}$  représente une limite supérieure du module de la fonction  $\varpi$ .

J'ai encore montré dans le Mémoire cité plus haut que, lorsque l'inégalité (1) n'est pas vérifiée, la fonction  $v$  peut être calculée de la manière suivante : on posera

$$(5) \quad \xi = \xi_0 + \zeta$$

et

$$(6) \quad v = \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k \zeta^k,$$

en ayant soin de choisir  $\xi_0$  de façon que, pour  $\xi = \xi_0$ , l'inégalité (1) soit satisfaite

et que, de plus, le point du plan de la variable complexe  $\xi$  ayant pour affixe la valeur de ce paramètre, pour laquelle on veut construire la fonction  $v$ , soit intérieur au cercle ayant pour centre le point d'affixe  $\xi_0$  et ayant pour rayon la distance de ce point à celui des points correspondant aux différents termes de la suite (2) du n° 1, qui en est le plus voisin. La série (6) représentera alors pour une valeur convenable de  $\zeta$  la fonction demandée, pourvu que les fonctions  $w_k$  soient calculées au moyen des équations suivantes :

$$\begin{aligned} \Delta w_0 + \xi_0 w_0 &= 0, & \Delta w_k + \xi_0 w_k + w_{k-1} &= 0, \\ (w_0)_i &= \varpi, & (w_k)_i &= 0 \\ & & (k = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

Cela posé, je vais prouver que les limites dont l'existence forme l'objet du présent Travail existeront pourvu que la surface (S) satisfasse aux hypothèses énoncées au n° 2 et que la fonction donnée  $\varpi$ , à laquelle la fonction  $v$  doit se réduire sur la surface (S), admette des dérivées finies de tous les ordres.

7. Considérons d'abord le cas où l'inégalité (1) du numéro précédent est vérifiée et posons

$$(1) \quad \sigma = \varpi - \sum_{k=1}^{\infty} (v_k)_e,$$

les équations (2) et (3) donneront

$$(2) \quad v = \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \sigma \frac{d}{dN} \frac{e^{-\mu r}}{r} ds.$$

Les propositions établies dans les numéros précédents nous apprennent que le théorème énoncé à la fin du n° 6 sera démontré, pour le cas qui nous occupe en ce moment, s'il est prouvé que la fonction  $\sigma$  admet des dérivées finies de tous les ordres. Pour établir cette propriété de la fonction  $\sigma$  désignons, comme dans le numéro précédent, par  $\delta_0^{(0)}$  une limite supérieure du module de la fonction  $\varpi$  et soient  $\delta_0^{(j)}$ ,  $\delta_k^{(0)}$  et  $\delta_k^{(j)}$  des limites supérieures des modules des expressions

$$D_0^{(j)} \varpi, \quad (V_k)_e \quad \text{et} \quad D_0^{(j)} (V_k)_e.$$

L'inégalité (17) du n° 3 nous donne

$$\delta_k^{(1)} < \left(\frac{1}{2} + A\right) \delta_{k-1}^{(1)} + E_1 \delta_{k-1}^{(0)};$$

d'où

$$\sum_{k=1}^{\ell} \delta_k^{(1)} < \left(\frac{1}{2} + A\right) \sum_{k=0}^{\ell-1} \delta_k^{(1)} + E_1 \sum_{k=0}^{\ell-1} \delta_k^{(0)},$$

ce qui donne, en supposant, comme on en a le droit, que  $A < \frac{1}{2}$ ,

$$\left(\frac{1}{2} - A\right) \sum_{k=0}^t \delta_k^{(1)} < \delta_0^{(1)} + E_1 \sum_{k=0}^{t-1} \delta_k^{(0)} - \left(\frac{1}{2} + A\right) \delta_t^{(1)}.$$

On déduit de là, en tenant compte de l'inégalité (4) du numéro précédent, que l'on aura

$$\sum_{k=0}^t \delta_k^{(1)} < \frac{1}{\frac{1}{2} - A} \left( \delta_0 + E_1 C \frac{\delta_0^{(0)}}{1 - \varepsilon} \right)$$

quelque grand que soit  $t$ . Il suit de là que la série à termes réels et positifs

$$\sum_{k=0}^{\infty} \delta_k^{(1)}$$

sera convergente. Donc la fonction  $\sigma$  admettra des dérivées premières.

Supposons provisoirement que la série

$$(3) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k^{(j)}$$

soit convergente pourvu que l'on ait

$$(4) \quad j \leq l,$$

où  $l$  est un nombre positif. Je dis que cette série sera encore convergente pour

$$j = l + 1.$$

En effet, l'inégalité (17) du n° 3 nous donne

$$\delta_k^{(l+1)} < \left(\frac{1}{2} + A\right) \delta_{k-1}^{(l+1)} + E_{l+1} \sum_{j=0}^l \delta_{k-1}^{(j)};$$

d'où

$$\sum_{k=1}^t \delta_k^{(l+1)} < \left(\frac{1}{2} + A\right) \sum_{k=0}^{t-1} \delta_k^{(l+1)} + E_{l+1} \sum_{j=0}^l \sum_{k=0}^{t-1} \delta_k^{(j)},$$

par conséquent, puisque  $A < \frac{1}{2}$ ,

$$\left(\frac{1}{2} - A\right) \sum_{k=0}^t \delta_k^{(l+1)} < \delta_0^{(l+1)} + E_{l+1} \sum_{j=0}^l \sum_{k=0}^{t-1} \delta_k^{(j)} - \left(\frac{1}{2} + A\right) \delta_t^{(l+1)}$$

et, *a fortiori*,

$$\left(\frac{1}{2} - \Lambda\right) \sum_{k=0}^t \delta_k^{(t+1)} < \delta_0^{(t+1)} + E_{t+1} \sum_{j=0}^t \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k^{(j)}$$

et cela quelque grand que soit  $t$ . Cela prouve que la série à termes positifs

$$\sum_{k=0}^{\infty} \delta_k^{(t+1)}$$

sera convergente.

On conclut de tout ce qui précède que la série (3) sera convergente si grand que soit  $j$ . Donc, la fonction  $\sigma$  admettra des dérivées de tous les ordres et le théorème qu'il s'agissait de démontrer est établi.

8. Il nous reste à étudier le cas où l'inégalité (1) du n° 6 n'est pas vérifiée. Considérons, à cet effet, la fonction  $w$  s'annulant sur la frontière (S) du domaine (D) et vérifiant dans toute l'étendue de ce domaine l'équation aux dérivées partielles

$$(1) \quad \Delta w + \xi w + f(x, y, z) = 0,$$

où  $f(x, y, z)$  est une fonction admettant des dérivées finies de tous les ordres dans toute l'étendue du domaine (D), et où le paramètre  $\xi$  est choisi de façon que l'inégalité (1) du n° 6 soit satisfaite. Je dis d'abord que la fonction  $w$  admettra des dérivées finies de tous les ordres dans toute l'étendue du domaine (D). En effet, posons

$$v = \frac{1}{4\pi} \int_{(D)} \frac{e^{-\mu r}}{r} f(x', y', z') d\tau - v,$$

où  $d\tau$  représente l'élément de volume relatif au point  $(x', y', z')$ , et où l'indice (D) indique que l'intégration doit être étendue à tout le domaine (D). Nous aurons, dans toute l'étendue de ce domaine,

$$\Delta v + \xi v = 0,$$

et la fonction, à laquelle se réduit la fonction  $v$  sur la surface (S), admettra des dérivées de tous les ordres. Donc, en vertu de ce que nous avons vu au numéro précédent, la fonction  $v$  admettra des dérivées finies de tous les ordres dans toute l'étendue du domaine (D). D'ailleurs, il en est de même de la fonction

$$\frac{1}{4\pi} \int_{(D)} \frac{e^{-\mu r}}{r} f(x', y', z') d\tau,$$

il en sera donc encore de même de la fonction  $w$ .

C. Q. F. D.

Cela posé, désignons par  $W^{(0)}$ ,  $W^{(k)}$ ,  $F^{(0)}$  et  $F^{(k)}$  les maxima des modules de la fonction  $w$ , de ses dérivées d'ordre  $k$ , de la fonction  $f(x, y, z)$  et de ses dérivées d'ordre  $k$ . Je vais prouver que l'on aura

$$(2) \quad W^{(k)} < M_k \sum_{j=0}^{k-1} F^{(j)},$$

où  $M_k$  est un nombre positif ne dépendant que de la nature de la surface (S), de l'indice  $k$  et du paramètre  $\xi$ .

La démonstration de l'inégalité (2) est immédiate pour  $k = 1$ . En effet, désignons par  $G(x, y, z; x', y', z')$  la fonction de Green ordinaire; l'équation (1) nous donnera

$$w(x, y, z) = \int_{(D)} [\xi w(x', y', z') + f(x', y', z')] G(x, y, z; x', y', z') d\tau,$$

où  $d\tau$  est l'élément de volume relatif au point  $(x', y', z')$ . On en déduit

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \int_{(D)} (\xi w + f) \frac{\partial G}{\partial x} d\tau;$$

d'où

$$(3) \quad \left| \frac{\partial w}{\partial x} \right| < [|\xi| W^{(0)} + F^{(0)}] \int_{(D)} \left| \frac{\partial G}{\partial x} \right| d\tau.$$

Or on sait que l'intégrale qui se trouve au second membre de cette inégalité reste inférieure à un nombre assignable, quelle que soit la position du point  $(x, y, z)$  dans le domaine (D).

D'autre part, on verra, en se reportant à mon Mémoire cité au n° 1, que  $W^{(0)}$  est inférieur au produit d'une constante assignable par  $F^{(0)}$ . Donc, puisque la direction de l'axe des  $x$  est quelconque, l'inégalité (3) conduit bien à l'inégalité (2) pour  $k = 1$ . Supposons que l'inégalité (2) soit exacte pour  $k = n$ , et montrons qu'elle le serait alors pour  $k = n + 1$ . Une application facile du théorème de Green nous donnera

$$(4) \quad w = -\frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \frac{\partial w}{\partial N} \frac{e^{-\mu r}}{r} ds + \frac{1}{4\pi} \int_{(D)} f \frac{e^{-\mu r}}{r} d\tau.$$

Prenons pour origine des coordonnées un point quelconque O situé sur la surface (S), dirigeons l'axe des  $z$  suivant la normale intérieure à cette surface, et posons

$$\Phi = \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \frac{dw}{dN} \frac{e^{-\mu r}}{r} ds.$$

On conclura aisément de l'équation (4) et de ce que l'inégalité (2) est supposée être exacte pour  $k \leq n$  que le module d'une dérivée quelconque d'ordre non supérieur à  $n$  de la fonction  $\Phi$  sera inférieur au produit d'une certaine constante par la somme

$$\sum_{j=0}^t \mathbf{F}^{(j)},$$

où

$$t \leq n - 1,$$

et cela, quelle que soit la position à l'intérieur du domaine (D) du point pour lequel la dérivée aura été calculée. On trouve, en tenant compte de cette remarque et en s'appuyant sur le théorème exprimé par l'inégalité (15) du n° 3,

$$(5) \quad \mathbf{D}_0^n \left( \frac{d\Phi}{d\mathbf{N}} + \frac{1}{2} \frac{d\psi}{d\mathbf{N}} \right) = \lambda \left( \mathbf{A} \Omega^{(n)} + \mathbf{K}_n \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{F}^{(j)} \right),$$

où  $\lambda$  est un facteur complexe de module inférieur à 1,  $\mathbf{K}_n$  étant une constante positive assignable et  $\Omega^{(n)}$  étant le maximum des valeurs que peut prendre le module de l'expression

$$\mathbf{D}_0^{(n)} \left( \frac{d\psi}{d\mathbf{N}} \right)$$

lorsque le point de la surface (S) et la direction des axes auxquels se rapporte l'expression précédente varient.

Les équations (4) et (5) donneront aisément :

$$\frac{1}{2} \mathbf{D}_0^{(n)} \left( \frac{d\psi}{d\mathbf{N}} \right) = \lambda' \left( \mathbf{A} \Omega^{(n)} + \mathbf{K}'_n \sum_{j=0}^n \mathbf{F}^{(j)} \right)$$

où  $\lambda'$  est un facteur complexe de module inférieur à 1,  $\mathbf{K}'_n$  étant une constante positive assez grande. Choisissons le point de la surface (S) auquel se rapporte l'équation précédente et la direction de l'axe des  $x$  dans le plan tangent en ce point à la surface de façon que le module du premier membre de cette équation atteigne son maximum  $\frac{1}{2} \Omega^{(n)}$ . Il viendra, en supposant, comme nous en avons le droit, que

$$\mathbf{A} < \frac{1}{2},$$

$$\Omega^{(n)} < \frac{\mathbf{K}'_n}{\frac{1}{2} - \mathbf{A}} \sum_{j=0}^n \mathbf{F}^{(j)}.$$

En tenant compte de cette inégalité, on déduit de l'équation (5)

$$(6) \quad \left| D_0^{(n)} \left( \frac{d\Phi}{dN} \right) \right| < K_n'' \sum_{j=0}^n F^{(j)}$$

où  $K_n''$  est une certaine constante positive.

On déduit de l'équation (4), en considérant que la fonction  $\varpi$  s'annule sur la surface (S),

$$(7) \quad |D_0^{(n+1)} \Phi_i| < K_n''' \sum_{j=0}^n F^{(j)}.$$

Les inégalités (6) et (7) et la remarque faite immédiatement après la définition de la fonction  $\Phi$ , conduisent à la conséquence suivante : le module de chacune des expressions

$$(8) \quad \left( \frac{\partial^{n+1} \Phi}{\partial x^j \partial y^{u-j+1}} \right)_i \quad \text{et} \quad \left( \frac{\partial^{n+1} \Phi}{\partial x^j \partial y^{u-j} \partial z} \right)_i$$

restera inférieur au produit d'une constante positive assignable par la somme

$$(9) \quad \sum_{j=0}^n F^j.$$

On déduit de là, au moyen de l'équation

$$\Delta \Phi + \xi \Phi = 0,$$

qu'il en sera de même du module de toute expression de la forme

$$\left( \frac{\partial^{j+j'+j''} \Phi}{\partial x^j \partial y^{j'} \partial z^{j''}} \right)_i,$$

pourvu que l'on ait

$$j + j' + j'' = n + 1.$$

Supposons maintenant que les axes soient disposés d'une façon quelconque, et désignons par  $\Phi^{(n+1)}$  l'une quelconque des dérivées d'ordre  $n + 1$  de la fonction  $\Phi$ . La fonction  $\Phi^{(n+1)}$  satisfera, dans toute l'étendue du domaine (D), à l'équation

$$(10) \quad \Delta \Phi^{(n+1)} + \xi \Phi^{(n+1)} = 0,$$

et l'on déduira aisément de ce que nous avons vu plus haut que cette fonction prendra sur la surface (S) des valeurs dont les modules resteront inférieurs au produit d'une constante assignable par la somme (9).



On conclura de là, en s'appuyant sur une proposition démontrée dans notre Mémoire cité au n° 4, qu'il en sera encore de même du module de la fonction  $\Phi^{(n+1)}$  dans toute l'étendue du domaine (D). Donc, en vertu de l'équation (4), l'inégalité (2) sera satisfaite. En d'autres termes, il est prouvé que, si l'inégalité (2) a lieu pour  $k \leq n$ , elle aura encore lieu pour  $k = n + 1$ , et, puisqu'elle a lieu pour  $k = 1$ , elle est générale. C. Q. F. D.

9. Considérons maintenant la série (6) du n° 6 et désignons par  $W_n^{(0)}$  et  $W_n^{(j)}$  des limites supérieures des fonctions

$$w_n \quad \text{et} \quad \frac{\partial^{t+t'+t''} w_n}{\partial x^t \partial y^{t'} \partial z^{t''}},$$

où

$$t + t' + t'' = j.$$

L'inégalité (2) du numéro précédent nous donnera

$$W_n^{(k)} < M_k \sum_{j=0}^{k-1} W_{n-1}^{(j)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

On déduit immédiatement de ces inégalités que les séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} W_n^{(k)} \zeta^n \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

ont chacune pour rayon de convergence le rayon de convergence de la série (6) du n° 6.

Donc, pour toute la valeur de  $\zeta$  de module inférieur au rayon du cercle de convergence de la série précédente, chacune des dérivées de la fonction  $v$  par rapport aux variables  $x, y, z$  tendra vers une limite déterminée lorsque le point  $(x, y, z)$  tendra, sans sortir du domaine (D), vers un point donné sur la surface (S). Le théorème que nous voulions démontrer est donc établi.

