Notre série est donc absolument et uniformément convergente pour $x \geqq 0$ sous la seule condition que, si l'on pose

$$\lambda_n n! = g_n,$$

la série

$$\sum_0^\infty |g_n|$$

soit elle-même convergente. On a alors

$$\sum_0^\infty \lambda_n D_n = \int_0^\infty e^{-y} G(y) J_0(2\sqrt{xy})\, dy,$$

en posant

$$G(y) = \sum_0^\infty \lambda_n y^n,$$

ce qui définit une fonction entière de y.

Cela étant, reprenons la formule (11). Soit

$$t = \lambda e^{i\varphi},$$

λ étant compris entre 0 et 1, et φ variant de 0 à 2π. On a

$$|P_n(x)| < \frac{1}{1-\lambda} \frac{n!}{\lambda^n} \text{Max. de } \left| e^{\frac{tx}{1+t}} \right|.$$

Supposons x positif. Tout revient à chercher le maximum de la partie réelle de $\frac{t}{1+t}$ quand t décrit le cercle de rayon λ. Or cette partie réelle est

$$\frac{\lambda^2 + \lambda \cos\varphi}{1 + 2\lambda\cos\varphi + \lambda^2}.$$

Appelons m sa valeur. Il vient

$$\cos\varphi = \frac{(1+\lambda^2)m - \lambda^2}{\lambda(1-2m)}.$$

On voit que m doit être tel que

$$[(1+\lambda^2)m - \lambda^2]^2 < \lambda^2(1-2m)^2;$$

d'où

$$-\frac{\lambda}{1-\lambda} < m < \frac{\lambda}{1+\lambda}.$$

Finalement

$$|P_n(x)| < \frac{1}{1-\lambda} \frac{n!}{\lambda^n} e^{\frac{\lambda x}{1+\lambda}};$$

et, par suite,

$$\left|\sum_0^\infty \lambda_n D_n\right| < \frac{1}{1-\lambda} e^{-\frac{x}{1+\lambda}} \sum_0^\infty \frac{|g_n|}{\lambda^n},$$

pour $x \geqq 0$.

Si donc on peut trouver un nombre μ supérieur à 1 tel que la série

$$\sum_0^\infty |g_n| \mu^n$$

soit convergente, la fonction

$$x^p \sum_0^\infty \lambda_n D_n$$

est intégrable de 0 à $+\infty$, quel que soit l'entier positif p.

Cela posé, cherchons à réaliser les égalités

$$\alpha_n = \int_0^\infty \varphi(x) x^n \, dx.$$

Posons

$$\varphi(x) = \sum_0^\infty \lambda_p D_p.$$

Il viendra, en vertu de la formule (7),

$$\alpha_n = \sum_0^n (-1)^p \lambda_p p!\, n!\, C_n^p.$$

Or soit

$$\frac{\alpha_n}{n!} = a_n, \qquad (-1)^p \lambda_p p! = l_p.$$

L'égalité précédente peut s'écrire

$$a_n = \sum_0^n C_n^p l_p;$$

d'où

$$l_n = \Delta^{(n)} a_0,$$

c'est-à-dire

$$\lambda_n = (-1)^n \frac{\Delta^{(n)} a_0}{n!}.$$

Finalement

$$\varphi(x) = \int_0^\infty e^{-y} \sum (-1)^n \frac{\Delta^{(n)} a_0}{n!} y^n \, J_0(2\sqrt{xy}) \, dy.$$

Mais

$$e^{-y} \sum_0^\infty \frac{(-1)^n \Delta^{(n)} a_0}{n!} y^n = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{\alpha_n}{(n!)^2} y^n.$$

On a donc

$$\varphi(x) = \int_0^\infty J_0(2\sqrt{xy}) \sum_0^\infty (-1)^n \frac{\alpha_n}{(n!)^2} y^n \, dy.$$

Le problème des moments est résolu, mais par un calcul purement formel. Il faut maintenant discuter la solution obtenue. Je me bornerai, sur ce point qui demanderait des recherches spéciales, à donner quelques indications générales et à signaler quelques exemples.

Tout revient à étudier la fonction $\varphi(x)$ définie par les formules précédentes. Une méthode consisterait à poser

$$\varphi(x, z) = e^{-x} \sum_0^\infty \frac{\Delta^{(n)} a_0}{n!} P_n(x) z^n.$$

Si a_n est le coefficient général d'une série de Taylor ayant un rayon de convergence fini, il en est de même de $\Delta^{(n)} a_0$, comme le montre la transformation d'Euler, et alors la série $\varphi(x, z)$ converge certainement pour les petites valeurs de z. Le théorème de M. Hadamard permet d'ailleurs d'exprimer $\varphi(x, z)$ au moyen d'une intégrale définie portant sur les deux séries

$$\sum_0^\infty a_n z^n, \qquad \sum_0^\infty \frac{P_n(x)}{n!} z^n,$$

qui sont supposées connues. Il resterait enfin à effectuer le prolongement de $\varphi(x, z)$ et à étudier cette fonction comme fonction de x et z à la fois, particulièrement au voisinage du point $z = 1$, x demeurant positif; et c'est à quoi l'on parviendrait sans peine en faisant sur les a_n des hypothèses semblables à celles du Chapitre IV. Mais je me bornerai, pour abréger, à quelques remarques.

Imaginons d'abord qu'il existe un nombre μ supérieur à 1 tel que la série

$$\sum_0^\infty |\Delta^{(n)} a_0| \mu^n$$

soit convergente. Alors, en vertu des lemmes établis plus haut, la série

$$\varphi(x) = \sum_0^\infty \lambda_n D_n$$

est absolument et uniformément convergente pour $x \geqq 0$; elle est intégrable terme à terme dans l'intervalle $(0, +\infty)$ et l'on a

$$|\varphi(x)| < M e^{-hx},$$

M et h désignant deux constantes positives assignables. Dans ces conditions, il n'y a pas de difficultés; nous avons une solution effective du problème des moments. *Cela a lieu notamment si* $|\Delta^{(n)} a_0|^{\frac{1}{n}}$ *tend vers zéro avec* $\frac{1}{n}$, *par exemple si* a_n *est une fonction entière de* n *d'ordre inférieur à* 1. Un cas particulier intéressant est celui où a_n est un polynome entier en n : $\varphi(x)$ s'exprime alors par une somme d'un nombre limité de quantités D_n, car $\Delta^{(n)} a_0$ est nul à partir d'un certain rang.

Quoi qu'il en soit, le problème des moments est résolu pour les nombres α_n *de la forme*

$$\alpha_n = n!\, G(n),$$

G *désignant une fonction entière d'ordre inférieur à* 1; *et la fonction* $\varphi(x)$, *qui prend place alors dans les formules*

$$\alpha_n = \int_0^\infty \varphi(x) x^n\, dx,$$

est comparable pour les grandes valeurs positives de x *à une exponentielle* e^{-hx} ($h = \text{const.} > 0$).

Cela posé, je vais montrer que, de toute solution du type précédent, on peut déduire une solution analogue pour les nombres $\alpha_n b_n$, b_n ayant la forme

$$\int_0^1 f(t)\, t^n\, dt.$$

En effet, soit

$$\alpha_n = \int_0^\infty \varphi(x) x^n\, dx,$$

avec

$$|\varphi(x)| < M e^{-hx},$$

M et h désignant deux constantes. On a

$$\alpha_n t^n = \int_0^\infty \frac{1}{t} \varphi\left(\frac{x}{t}\right) x^n\, dx;$$

d'où

$$\alpha_n b_n = \int_0^1 \int_0^\infty \frac{1}{t} f(t)\, \varphi\left(\frac{x}{t}\right) x^n\, dx\, dt,$$

c'est-à-dire

$$\alpha_n b_n = \int_0^\infty G(x) x^n\, dx,$$

avec

$$G(x) = \int^1 \frac{1}{t} f(t)\, \varphi\left(\frac{x}{t}\right) dt$$

L'interversion des signes $\int$ est ici légitime, à cause de l'inégalité que φ vérifie, si l'on a

$$\int_0^1 |f(t)|\, dt < \mathrm{N},$$

N étant une constante positive assignable. On peut alors écrire

$$|\mathrm{G}(x)| < \mathrm{M}\int_0^1 |f(t)|\, \frac{1}{t}\, e^{-\frac{hx}{2t}} e^{-\frac{hx}{2t}} dt.$$

Or

$$e^{-\frac{hx}{2t}} < e^{-\frac{hx}{2}},$$

pour x positif et t compris entre o et 1. D'autre part, dans les mêmes conditions

$$\frac{1}{t}\, e^{-\frac{hx}{2t}} < \frac{2}{ehx};$$

d'où

$$|\mathrm{G}(x)| < 2\mathrm{MN}\frac{e^{-\frac{hx}{2}}}{ehx}.$$

C. Q. F. D.

Finalement, le problème des moments est résolu pour les nombres de la forme

$$\alpha_n = n!\,\mathrm{G}(n)\int_0^1 f(t)\, t^n\, dt,$$

$\mathrm{G}(n)$ *désignant une fonction entière de n d'ordre inférieur à* 1 (1).

Je vais généraliser ce résultat en suivant une marche analogue à celle du n° 34.

Soit

$$\alpha_n = \int_0^\infty \varphi(x)\, x^n\, dx,$$

avec

$$|\varphi(x)| < \mathrm{M}e^{-hx}$$

pour $x > 0$. En général, cette formule définira α_n comme fonction analytique de n, *holomorphe dès que la partie réelle de n sera supérieure à* -1. Cette remarque explique et justifie les hypothèses que je vais faire.

Soit

$$a(t) = \sum_0^\infty \lambda_p t^p$$

---

(1) Un raisonnement identique à celui du n° 36 montre que la même conclusion subsiste pour les nombres α_n de la forme $n!\,\mathrm{G}(n)\,\mathrm{H}\left[\int_0^1 f(t)\, t^n\, dt\right]$, H désignant une fonction entière.

une fonction régulière dans le cercle de rayon 1. Je supposerai tous ses points singuliers situés à gauche de l'axe imaginaire, et même, pour simplifier l'écriture (mais cela n'a rien d'essentiel), je supposerai que le point -1 est son seul point singulier. Cela posé, je prends

$$a_n = a(n).$$

La méthode de sommation exponentielle donnée par M. Borel conduit à la formule

$$a_n = \int_0^\infty e^{-a}\,G(an)\,da,$$

où l'on a posé

$$G(an) = \sum_0^\infty \frac{\lambda_p a^p n^p}{p!}.$$

Cette formule est valable dans toute la région du plan située du même côté que l'origine par rapport à la parallèle à l'axe imaginaire menée par le point -1, en tout cas dans une région contenant toute la partie positive de l'axe réel du plan n.

On peut écrire

$$G(an) = \frac{1}{2i\pi}\int_{(C)} \frac{1}{x}\,a\left(\frac{1}{x}\right) e^{nax}\,dx,$$

C étant un contour fermé qui entoure le point $x = 0$ et qui est assez grand pour enfermer toutes les singularités de $a\left(\frac{1}{x}\right)$. On prendra, si l'on veut, pour C un cercle de rayon supérieur à 1. Rien n'empêche d'ailleurs de déformer ensuite ce contour, pourvu que, dans sa déformation, il n'arrive jamais à rencontrer le point -1.

Soit λ un nombre compris entre 0 et 1. Choisissons le contour C de la façon suivante : 1° un cercle C_1 de rayon $\frac{\lambda\pi}{2a}$ décrit de O comme centre ; 2° un cercle C_2 de même rayon décrit du point -1 comme centre ; 3° une portion L de l'axe réel pour relier les deux cercles : le chemin d'intégration est ainsi une sorte de double lacet [1]. Quant à a, c'est un nombre positif quelconque susceptible de varier de 0 à $+\infty$.

Tant que x reste sur C, la partie réelle de e^{-ax} est positive, car l'argument de cette quantité a pour valeur 0 sur la portion considérée de l'axe réel et $\frac{\lambda\pi}{2}\sin\varphi$ (φ allant de 0 à 2π) sur chacun des deux cercles : dans les deux cas, cet argument

[1] Pour les petites valeurs de a, on suppose, en outre, $\lambda < \frac{a}{\pi}$, afin que C_1 et C_2 restent extérieurs l'un à l'autre.

reste moindre en valeur absolue que $\frac{\pi}{2}$. On a donc

$$(1) \qquad n!\, e^{nax} = e^{-ax} \int_0^\infty e^{-ye^{-ax}} y^n \, dy;$$

d'où

$$(2) \qquad n!\, G(an) = \int_0^\infty \psi(a, y)\, y^n \, dy$$

avec

$$\psi(a, y) = \frac{1}{2i\pi} \int_{(C)} \frac{1}{x}\, a\left(\frac{1}{x}\right) e^{-ax} e^{-ye^{-ax}} dx;$$

il vient alors

$$(3) \qquad n!\, a_n = \int_0^\infty \varphi(y)\, y^n \, dy,$$

si l'on pose

$$\varphi(y) = \int_0^\infty e^{-a} \psi(a, y)\, dy.$$

Le problème des moments est ainsi résolu pour les nombres de la forme

$$\alpha_n = n!\, a_n,$$

mais il faut discuter la solution obtenue.

Donnons à a une valeur positive quelconque. Le contour C est dès lors fixé et la formule (1) a toujours lieu.

Il faut maintenant étudier $\psi(a, y)$. Dans ce but, appelons $\theta(a)$ le maximum du module de $\frac{1}{x}\, a\left(\frac{1}{x}\right)$ quand x décrit le contour C.

Je distinguerai les trois parties C_1, C_2 et L de C. Soient respectivement ψ_1, ψ_2, ψ_3 et φ_1, φ_2, φ_3 les fonctions analogues à ψ et φ qu'on en déduit. On a

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3,$$
$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3.$$

Cherchons des limites supérieures du module de ces six fonctions.

Sur C_1, on a

$$|e^{-ax} e^{-ye^{-ax}}| < e^{\frac{\lambda\pi}{2}} e^{-ye^{-\frac{\lambda\pi}{2}}};$$

d'où

$$|\psi_1| < A e^{-ye^{-\frac{\lambda\pi}{2}}} \theta(a),$$

A désignant une certaine constante.

Sur C_2, on a

$$|e^{-ax}e^{-ye^{-ax}}| < e^a e^{\frac{\lambda\pi}{2}} e^{-ye^a e^{-\frac{\lambda\pi}{2}}};$$

d'où

$$|\psi_2| < \mathrm{B}\, e^a e^{-ye^a e^{-\frac{\lambda\pi}{2}}}\theta(a),$$

B désignant une deuxième constante.

Enfin, sur L, on a

$$0 < e^{-ax}e^{-ye^{-ax}} < e^a;$$

d'où

$$|\psi_3| < \mathrm{C}\, e^a \theta(a)\, e^{-ye^{\frac{\lambda\pi}{2}}},$$

C désignant une dernière constante.

On voit déjà que la formule (2) a lieu pour toute valeur positive de a.

Examinons maintenant la formule (3) et, pour cela, considérons l'intégrale qui donne φ.

Supposons que l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-a}\theta(a)\,da$$

ait un sens. Alors φ_1 existe ainsi que

$$\int_0^\infty \varphi_1(y)\,y^n\,dy$$

pour toute valeur positive de n.

Cela étant, on a

$$|\varphi_2| < \mathrm{B}\int_0^\infty e^{-ye^{a-\frac{\lambda\pi}{2}}}\theta(a)\,da.$$

Pour $y > 0$, cette intégrale a sûrement un sens, à cause de l'hypothèse faite sur $\theta(a)$: donc $\varphi_2(y)$ existe. Mais on peut assigner une limite supérieure D à $e^{-a}\theta(a)$ quand a est positif; d'où

$$|\varphi_2| < \mathrm{BD}\int_0^\infty e^{a-ye^{a-\frac{\lambda\pi}{2}}}\,da.$$

Faisons le changement de variable

$$e^a = b;$$

il vient

$$|\varphi_2| < \mathrm{BD}\int_1^\infty e^{-bye^{-\frac{\lambda\pi}{2}}}\,db,$$

c'est-à-dire

$$|\varphi_2| < \mathrm{BD}\, e^{\frac{\lambda\pi}{2}} \frac{e^{-ye^{-\frac{\lambda\pi}{2}}}}{y}.$$

Donc les intégrales

$$\int_0^\infty \varphi_2(y)\, y^n\, dy$$

ont un sens à partir de $n = 1$.

Enfin

$$|\psi_3| < \frac{\theta(a)}{\pi} \int_{\frac{\lambda\pi}{2a}}^{1-\frac{\lambda\pi}{2a}} e^{at - ye^{at}}\, dt.$$

Posons

$$e^{at} = \tau;$$

il vient

$$|\psi_3| < \frac{\theta(a)}{\pi a} \int_{e^{\frac{\lambda\pi}{2}}}^{e^{a-\frac{\lambda\pi}{2}}} e^{-\tau y}\, d\tau,$$

c'est-à-dire

$$|\psi_3| < \frac{\theta(a)}{\pi a} e^{-ye^{\frac{\lambda\pi}{2}}} \frac{1}{y}.$$

En utilisant cette limite supérieure de $|\psi_3|$, ainsi que celle qui a été obtenue plus haut, l'une pour les grandes valeurs et l'autre pour les petites valeurs de a, on voit que φ_3 existe. On a même

$$|\varphi_3| < \mathrm{E}\, e^{-ye^{\frac{\lambda\pi}{2}}} \left(1 + \frac{1}{y}\right),$$

E désignant une constante. Donc les intégrales

$$\int_0^\infty \varphi_3(y)\, y^n\, dy$$

ont un sens à partir de $n = 1$.

En définitive, on voit que le problème des moments se trouve résolu avec une entière rigueur.

La seule condition, outre celles qui concernent la nature analytique de a_n regardé comme fonction de son indice, est que l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-a}\, \theta(a)\, da$$

ait un sens [1].

---

[1] Inutile de faire remarquer que, si $a(t)$ est une fonction entière, le contour C se réduit à la partie C_1.

Si elle est remplie (1), on peut écrire

$$\alpha_n = n\,!\,a_n = \int_0^\infty \varphi(x)\,x^n\,dx,$$

$\varphi(x)$ étant pour $x = +\infty$ de l'ordre de grandeur d'une exponentielle telle que e^{-hx} ($h = \text{const.} > 0$).

Finalement, nous savons résoudre le problème des moments pour tous les nombres de la forme

$$n\,!\,a_n,$$

a_n étant le coefficient général d'un développement taylorien étudiable par l'un des procédés du Chapitre IV.

Je n'insisterai pas sur quelques généralisations évidentes qu'on obtient soit en formant une combinaison linéaire de formules telles que (4), soit en faisant dans celle-ci une substitution $x = \xi x'$, ξ étant une constante. Mais je vais montrer que, si la formule (4) s'applique aux nombres α_n et β_n, le problème des moments peut encore être résolu pour les nombres $\alpha_n \beta_n$. Cela nous permettra d'atteindre tous les nombres de la forme

$$(n\,!)^2\,a_n,$$

a_n ayant les mêmes caractères que ci-dessus.

Posons, en effet,

$$\alpha_n = \int_0^\infty \varphi(x)\,x^n\,dx, \qquad |\varphi(x)| < \mathrm{M}\,e^{-hx},$$

$$\beta_n = \int_0^\infty \psi(y)\,y^n\,dy, \qquad |\psi(y)| < \mathrm{M}'\,e^{-h'y};$$

on a

$$\alpha_n\,y^n = \frac{1}{y}\int_0^\infty \varphi\left(\frac{x}{y}\right)x^n\,dx;$$

d'où

$$\alpha_n \beta_n = \int_0^\infty \mathrm{G}(x)\,x^n\,dx,$$

avec

$$\mathrm{G}(x) = \int_0^\infty \frac{1}{y}\,\psi(y)\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)dy.$$

La discussion est bien aisée. On peut écrire, en effet,

$$|\mathrm{G}(x)| < \mathrm{MM}'\int_0^\infty \frac{1}{y}\,e^{-h'y}\,e^{-h\frac{x}{y}}\,dy.$$

(1) On peut prendre, par exemple, $a_n = e^{\frac{n}{\mathrm{L}(n+1)}}$.

Posons

$$h'y = z.$$

Il vient

$$|G(x) < MM' \int_0^\infty \frac{1}{z} e^{-z} e^{-\frac{hh'x}{z}} dz;$$

or

$$\frac{1}{\sqrt{z}} e^{-\frac{hh'x}{2z}} < \frac{1}{\sqrt{ehh'x}}$$

quand z varie de o à $+\infty$; d'où

$$|G(x)| < \frac{MM'}{\sqrt{ehh'x}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{z}} e^{-z-\frac{hh'x}{2z}} dz.$$

Mais

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{z}} e^{-z-\frac{hh'x}{2z}} dz = \sqrt{\pi}\, e^{-\sqrt{2hh'x}},$$

par suite,

$$|G(x)| < MM' \sqrt{\frac{\pi}{ehh'x}}\, e^{-\sqrt{2hh'x}},$$

ce qui justifie nos calculs.

On a ainsi, pour le problème des moments, un théorème analogue au théorème de M. Hadamard, étudié dans le Chapitre V.

Remarquons que, dans tous les cas signalés, la fonction $\varphi(x)$, qui résout le problème des moments, est comparable pour $x = +\infty$ à une exponentielle de l'un des types e^{-x} ou $e^{-\sqrt{x}}$. C'est donc toujours une des fonctions appelées par M. Borel (¹) *fonctions de Stieltjes*.

On a alors les résultats suivants :

1° Il n'y a pas deux fonctions de même espèce donnant lieu aux mêmes égalités

$$\alpha_n = \int_0^\infty \varphi(x)\, x^n\, dx;$$

2° La série toujours divergente

$$\sum_0^\infty \frac{(-1)^n \alpha_n}{z^{n+1}}$$

est une *série de Stieltjes*. De pareilles séries conduisent à des fonctions bien déterminées

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(x)}{z+x} dx,$$

(¹) *Mémoire sur les séries divergentes*, IIIᵉ Partie, § V (*Annales de l'École Normale supérieure*; 1899).

holomorphes dans tout le plan, sauf peut-être sur la partie négative de l'axe réel.

3° Chacune de ces séries est la différence de deux fractions continues convergentes du type étudié par Stieltjes.

4° La somme, la différence, le produit de deux de ces séries est encore une série de même espèce.

5° Une de ces séries n'est identiquement nulle que si la fonction correspondante l'est elle-même, et il suffit que la série vérifie *formellement* une équation différentielle algébrique pour que la fonction qui lui est associée soit une intégrale de cette équation.

M. Borel, qui a démontré ces théorèmes, écrivait à ce propos : « Malheureusement, sauf dans le cas très particulier que Stieltjes a traité à l'aide des fractions continues, nous ne pouvons indiquer aucune méthode précise pour reconnaître si une série donnée est une série de Stieljes [1] ». On voit que les résultats obtenus dans le présent Chapitre permettent de combler cette lacune dans un cas assez étendu.

Je ne doute pas d'ailleurs qu'on ne puisse généraliser beaucoup ces résultats. Mais je me contenterai d'avoir cité quelques exemples nets, et, sans plus insister, je terminerai par quelques remarques.

47. *Le problème des moments est lié très étroitement au problème de la représentation d'une série de Taylor par une intégrale prise entre* o *et* $+\infty$.

Soit

$$f(z)=\sum_0^\infty \alpha_n z^n,$$

avec

$$\alpha_n = g_n \int_0^\infty \mathrm{F}(x)\, x^n\, dx,$$

g_n étant le coefficient général du développement d'une fonction entière G. On a

$$f(z)=\int_0^\infty \mathrm{F}(x)\, \mathrm{G}(zx)\, dx.$$

Une discussion facile permettra souvent de déduire de là les propriétés de $f(z)$ dans une région du plan plus étendue que le cercle de convergence.

Pour faire la discussion, en notant par G′ la dérivée de G, on devra d'abord

(1) *Loc. cit.*, p. 122.

établir que les intégrales

$$\int_0^\infty |F(x)|\,|G(zx)|\,dx, \qquad \int_0^\infty |F(x)|\,|G'(zx)|\,x\,dx$$

ont chacune un sens, et convergent uniformément tant que z reste dans un certain domaine T qui contient l'origine; puis, il faudra s'assurer que l'intégrale $f(z)$ est développable autour de o en série entière. Ces points élucidés, on aura défini dans T une fonction analytique de z prolongeant la série donnée. J'ajoute que la discussion ne soulève d'ordinaire aucune difficulté sérieuse, et c'est pourquoi je n'insiste pas.

On remarquera que le procédé de prolongement dont il vient d'être fait mention ne diffère pas, au fond, sinon par la généralité, de celui que M. Borel a proposé sous le nom de *méthode des séries divergentes sommables* (¹). Lui-même avait signalé quelques-unes des généralisations possibles. Comme il a donné sur ce sujet tous les éclaircissements désirables dans ses remarquables Mémoires, je ne fais que passer.

Voici un exemple. Soit

$$f(z) = \sum_1^\infty \alpha_n z^n$$

avec

$$\alpha_n = \sum_1^\infty \frac{w^p}{\left(1+\frac{1}{p}\right)^n} \cdots |w| < 1.$$

C'est une série possédant une infinité de pôles simples aux environs de $z=1$, semblable à celle que M. Poincaré signale au Tome II de ses *Méthodes nouvelles en Mécanique céleste* (²), sauf qu'elle a un cercle de convergence. On a

$$\alpha_n = \int_0^\infty e^{-x} \sum_1^\infty w^p e^{-\frac{x}{p}} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\,dx;$$

d'où

$$f(z) = \sum_1^\infty \alpha_n z^n = z\int_0^\infty e^{-x} \sum_1^\infty w^p e^{-\frac{x}{p}} e^{zx}\,dx.$$

L'intégrale n'a de sens que si la partie réelle de z est inférieure à 1. Dans ce cas,

---

(¹) *Journal de Mathématiques;* 1896, et *Annales de l'École Normale;* 1899. — M. Borel prend systématiquement $F(x) = e^{-x}$.

(²) Page 3. On a ici $f(z) = z\sum_1^\infty \dfrac{w^p}{1+\frac{1}{p}-z}$.

d'ailleurs, il est visible que l'intégrale $f(z)$ fournit la somme de la série $\sum_1^\infty \alpha_n z^n$. On voit que cette série définit donc une fonction holomorphe dans la région du plan située à gauche de la parallèle à l'axe imaginaire ayant $+1$ pour abscisse.

Une relation, établie plus haut à propos de $\sum_1^\infty w^p e^{-\frac{x}{p}}$, permet d'étendre ces conclusions au cas où w a une valeur quelconque réelle ou imaginaire : on a le moyen d'étudier $f(z)$ comme fonction de z et w à la fois. En effet,

$$\sum_1^\infty w^p e^{-\frac{x}{p}} = w \int_0^1 J_0\left(2\sqrt{x\,L\frac{1}{y}}\right) \frac{dy}{(1-wy)^2}.$$

Alors, par changement de l'ordre des intégrations,

$$f(z) = \frac{wz}{1-z} \int_0^1 \frac{1}{(1-wy)^2}\, y^{\frac{1}{1-z}} dy,$$

en remarquant que

$$\int_0^\infty e^{-x} e^{zx} J_0\left(2\sqrt{x\,L\frac{1}{y}}\right) dx = y^{\frac{1}{1-z}} \frac{1}{1-z}.$$

Soit maintenant

$$L\frac{1}{y} = t;$$

il vient

$$f(z) = \frac{wz}{1-z} \int_0^\infty \frac{e^t}{(e^t - w)^2} e^{-\frac{t}{1-z}} dt.$$

Regardons $f(z)$ comme une fonction de w : *ses points critiques restent fixes quand z varie, $f(z)$ est d'ailleurs holomorphe dans tout le plan (w), sauf pour $w = 1$ et $w = \infty$, et elle n'est pas uniforme.* Regardons ensuite $f(z)$ comme une fonction de z : *elle est holomorphe dans la région du plan (z) où la partie réelle de $1 + \frac{1}{1-z}$ est positive, cette région est d'ailleurs formée par l'ensemble des points du plan (z) extérieurs au cercle décrit sur le segment* $(1, 2)$ *comme diamètre.* Tous les points singuliers de $f(z)$ sont donc contenus, quel que soit w, à l'intérieur de ce cercle. En changeant le chemin d'intégration par la formule

$$t = \rho e^{i\omega}, \qquad |\omega| < \frac{\pi}{2},$$

ρ devenant la nouvelle variable d'intégration et ω restant fixe, si l'on pose

$$z = \alpha + i\beta,$$

on trouve comme coupure

$$\alpha^2 + \beta^2 - 3\alpha - \beta \tang \omega + 2 = 0,$$

c'est-à-dire un cercle *quelconque* passant par les points 1 et 2 du plan (z). On voit ainsi que les points singuliers de $f(z)$ sont distribués le long de ce segment $(1, 2)$.

On se rend compte, par cet exemple si simple, de la manière dont on peut varier l'emploi de nos méthodes et dont on arrive à faire l'étude complète d'une fonction donnée autour de l'origine par une série de Taylor.

48. Les procédés d'étude qui viennent d'être exposés sont susceptibles de mille variations.

Pour ne citer qu'un exemple, remarquons qu'il serait facile de trouver les conditions de développement d'une fonction arbitraire en série procédant suivant les polynomes P_n : on pourrait utiliser, pour cela, les remarques données par M. Darboux dans son Mémoire *Sur les fonctions de grands nombres,* à propos des séries ordonnées suivant des polynomes qui forment une suite de Sturm.

Sans m'appesantir là-dessus, je ferai seulement remarquer que, si l'on a

$$\varphi(x) = \sum_0^\infty \lambda_n P_n(x),$$

il vient, en vertu des formules (1) et (2),

$$\lambda_n (n!)^2 = \int_0^\infty e^{-x} \varphi(x) P_n(x)\, dx;$$

d'où la détermination des coefficients du développement de $\varphi(x)$, lorsque celui-ci est possible.

Soit donc

$$f(z) = \sum_0^\infty \alpha_n z^n.$$

Posons

$$\lambda_n = \frac{\alpha_n}{n!}, \qquad G(y) = \sum_0^\infty \lambda_n y^n;$$

on a

$$\sum_0^\infty \lambda_n D_n = \varphi(x) = \int_0^\infty e^{-y} G(y) J_0(2\sqrt{xy})\, dy;$$

d'où

$$\alpha_n = (-1)^n \int_0^\infty \varphi(x) \frac{P_n(x)}{n!} dx$$

et, par suite,

$$f(z) = \frac{1}{1-z} \int_0^\infty \varphi(x) e^{-\frac{zx}{1-z}} dx.$$

Si $\varphi(x)$ est pour x positif et très grand comparable à e^{-ax}, on voit en posant $z = \alpha + i\beta$ que $f(z)$ est holomorphe pour

$$(1-a)(\alpha^2+\beta^2) - (1-2a)\alpha - a < 0.$$

Quelle est la coupure? Pour $a = \frac{1}{2}$, on a le cercle de rayon 1, qui est le cercle de convergence. Pour $a = 1$, on a la droite $\alpha = 1$. Pour $\frac{1}{2} < a < 1$, on a un cercle tangent en 1 au cercle de convergence et contenant celui-ci à son intérieur. Pour $a > 1$, on a un cercle tangent en 1 au cercle de convergence et extérieur à celui-ci. Une discussion aisée fait trouver dans ces divers cas des propriétés importantes de $f(z)$: on est ramené à la discussion de $\varphi(x)$ pour les grandes valeurs positives de x.

On aura sans peine des généralisations de cette méthode, toutes les fois qu'on pourra poser

$$\alpha_n = \int \varphi(x) A_n(x) dx,$$

et qu'on connaîtra la fonction génératrice des A_n.

49. Toutes les remarques précédentes peuvent être étendues au cas où l'on cherche à réaliser les égalités

$$\alpha_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) x^n dx,$$

à quoi l'on parvient à l'aide des polynomes de M. Hermite.

J'en puis dire autant du cas où les limites de l'intégrale sont finies, ce qui nous ramène à notre point de départ.

Soit, par exemple,

$$\alpha_n = \int_{-1}^{+1} \varphi(x) x^n dx.$$

Cherchons à résoudre ces égalités par rapport à φ, les α_n étant donnés.

Posons

$$\varphi(x) = \sum_0^\infty \lambda_p X_p,$$

les X_p étant les polynomes de Legendre. Il vient

$$\lambda_n = \frac{2n+1}{2} X_n(\alpha),$$

$X_n(\alpha)$ désignant ce que devient $X_n(x)$ quand on y remplace x^p par α_p. On est alors ramené à discuter la convergence de la série $\sum_0^\infty (2n+1) X_n(\alpha) X_n(x)$.

Si cette série est absolument et uniformément convergente pour $-1 \leqq x \leqq 1$ (1), $f(z)$ est holomorphe en tout point du plan, sauf si z est réel et plus grand que 1 en valeur absolue. Si même la série en question définit une fonction de x holomorphe au voisinage du segment $(-1, +1)$, $f(z)$ n'a pas d'autres points singuliers à distance finie que -1 et $+1$, mais alors cette fonction n'est pas uniforme.

Si, par exemple, les α_n sont donnés par les équations linéaires

$$\lambda_n = \frac{2n+1}{2} X_n(\alpha) = \frac{1}{n!},$$

aisées à résoudre de proche en proche, il vient

$$\varphi(x) = e^x J_0(\sqrt{1-x^2}),$$

en tenant compte de la relation

$$X_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (x + \sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^n \, d\varphi,$$

qui donne

$$\sum_0^\infty \lambda_n X_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^x e^{i\sqrt{1-x^2}\cos\varphi} \, d\varphi.$$

On aurait d'ailleurs des généralisations immédiates en considérant, non plus les polynomes de Legendre, mais les polynomes hypergéométriques généraux.

VII. — Applications diverses.

50. Je ne puis songer à énumérer toutes les applications que l'on peut faire des méthodes précédentes. J'en citerai seulement quelques-unes, se rapportant encore

---

(1) Il suffit que la série en question définisse une fonction $\varphi(x)$ telle que l'intégrale $\int_{-1}^{+1} |\varphi(x)| \, dx$ ait un sens.

(pour rester dans le même ordre d'idées) à l'étude des fonctions définies par certaines séries.

Tout d'abord, il est clair que notre méthode n'est au fond qu'un procédé de sommation des séries. La transformation d'une série en une intégrale, suivant les modes indiqués plus haut, est parfois très avantageuse au point de vue du calcul numérique, comme l'a montré M. A. Janet (1) sur un exemple auquel je me contenterai de renvoyer le lecteur.

Cette remarque trouve une application immédiate dans la théorie des *fonctions entières,* c'est-à-dire des fonctions holomorphes en tout point du plan.

Soit, par exemple,

$$G(z)=\sum_0^\infty \frac{z^n}{(n+1)^{n+1}};$$

on a

$$\frac{1}{(n+1)^{n+1}}=\int_0^1 \frac{\left(x\,\mathrm{L}\frac{1}{x}\right)^n}{n!}\,dx;$$

d'où

$$G(z)=\int_0^1 e^{zx\,\mathrm{L}\frac{1}{x}}\,dx.$$

Cette nouvelle expression fournit plusieurs renseignements sur $G(z)$: on voit, par exemple, que l'équation

$$G(z)=0$$

n'a pas de racines réelles, que l'on a

$$G(z)<e^{\frac{z}{e}}$$

pour $z>0$, que $G(z)$ tend vers zéro quand z devient infiniment grand et négatif, etc.

Posons, en général,

$$G(z)=\sum_0^\infty \frac{\alpha_n}{\Gamma(pn+1)}\,a^n z^n,$$

a désignant une constante quelconque et p un entier positif. Supposons que l'on ait

$$\alpha_n=\int_0^1 \varphi(x)\,x^n\,dx.$$

Soit ω une racine primitive de l'équation binome

$$y^p=1;$$

(1) A. Janet, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences;* 1894.

il vient

$$G(z) = \int_0^1 \varphi(x) \frac{\sum_0^{p-1} e^{\omega^q (azx)^{\frac{1}{p}}}}{p} \, dx.$$

On peut alors assez généralement, en suivant une marche exposée par M. Poincaré dans sa *Théorie analytique de la chaleur* (¹), trouver la valeur asymptotique de $G(z)$ ou tout au moins des inégalités asymptotiques auxquelles $G(z)$ obéit.

Signalons encore un cas simple, qu'on généraliserait d'ailleurs aisément. On a l'identité

$$e^{-x} G(x) = e^{-x} \sum_0^{\infty} \frac{\alpha_n}{n!} x^n = \sum_0^{\infty} \frac{\Delta^{(n)} \alpha_0}{n!} x^n.$$

Si $\alpha_n = n^p$ (p entier positif), on voit que $G(x)$ est le produit de e^x par un polynome de degré p en x. Si α_n est une fonction entière de n d'ordre inférieur à 1, $G(x)$ est le produit de e^x par une fonction entière de x d'ordre inférieur à 1.

En résumé, si α_n est de l'une des formes examinées au Chapitre IV, la méthode de sommation exposée dans ce Mémoire peut apporter une utile contribution à l'étude des fonctions entières de la forme

$$G(z) = \sum_0^{\infty} \frac{\alpha_n}{\Gamma(pn+1)} z^n$$

autour de leur point essentiel à l'infini.

Je n'insisterai pas davantage. Mais je vais montrer maintenant que l'emploi de cette même méthode ne nous confine pas nécessairement dans la théorie des séries de Taylor.

51. *Une fonction représentée par une série trigonométrique est-elle ou non analytique?* Une réponse peut être donnée à cette question dans des cas étendus.

Soit, pour fixer les idées,

$$f(z) = \sum_0^{\infty} \alpha_n \cos n z,$$

avec

$$\alpha_n = \int_0^1 \varphi(x) x^n \, dx;$$

(¹) Carré; Paris, 1895. — *Voir* le Chapitre XII.

il vient

$$f(z) = \int_0^1 \varphi(x) \frac{1 - x\cos z}{1 - 2x\cos z + x^2} dx.$$

Les coupures sont

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right),$$

c'est-à-dire

$$z = 2k\pi \pm i\mathrm{L}\frac{1}{x}.$$

Comme x varie de 0 à 1 en restant réel, ces coupures sont les parallèles à l'axe imaginaire du plan (z) menées par les points de l'axe réel d'abscisses $2k\pi$. On voit donc que $f(z)$ *est une fonction périodique de z holomorphe dans chacune des bandes ainsi délimitées.*

Des résultats semblables peuvent être obtenus pour des séries autres que les séries trigonométriques, dès que l'on connaît la fonction génératrice des fonctions suivant lesquelles procèdent ces séries [1].

Soit

$$f(z) = \sum_0^\infty \alpha_n \mathrm{X}_n(z),$$

les lettres X_n désignant les polynomes de Legendre, dont la fonction génératrice est

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + x^2}} = \sum_0^\infty x^n \mathrm{X}_n(z).$$

Si l'on a

$$\alpha_n = \int_0^1 \varphi(x)\, x^n\, dx,$$

il viendra

$$f(z) = \int_0^1 \frac{\varphi(x)}{\sqrt{1 - 2zx + x^2}} dx.$$

La coupure est

$$z = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right),$$

x variant de 0 à 1 par valeurs réelles. C'est la portion $(+1, +\infty)$ de l'axe réel du plan (z). On voit que $f(z)$ *est holomorphe en tout point, sauf peut-être pour z réel et supérieur à* 1. La discussion peut d'ailleurs être poussée plus loin, comme il a été déjà dit; et, d'autre part, l'intégrale qui exprime $f(z)$ est bien développable pour $-1 < z < +1$ suivant la série donnée.

---

(1) En particulier, la méthode s'applique aux séries de la forme $\sum_0^\infty \alpha_n[\varphi(z)]^n$.

Soit encore

$$f(z) = \sum_0^\infty \frac{\alpha_n}{n!} P_n(z),$$

les lettres P_n désignant les polynomes déjà considérés, définis par la fonction génératrice

$$\frac{e^{\frac{zx}{1+x}}}{1+x} = \sum_0^\infty \frac{P_n(z)}{n!} x^n.$$

On a, cette fois,

$$f(z) = \int_0^1 \varphi(x) \frac{e^{\frac{zx}{1+x}}}{1+x} dx,$$

et l'on voit que $f(z)$ est une fonction entière de z.

La même conclusion est vraie pour les polynomes de M. Hermite donnés par l'égalité

$$e^{-x^2-2zx} = \sum_0^\infty \frac{U_n(z)}{n!} x^n.$$

On pourrait multiplier ces exemples.

A propos de toutes ces questions, on aurait des théorèmes précis en se reportant aux conditions suffisantes trouvées plus haut pour que

$$\alpha_n = \int_0^1 \varphi(x) x^n dx.$$

Des propositions analogues subsistent d'ailleurs évidemment si α_n, sans être de cette forme, peut être mis sous quelqu'une des autres formes de même espèce que nous avons examinées. J'ajoute enfin que ces divers procédés peuvent servir pour attribuer à des séries divergentes un sens bien défini, particulièrement pour construire, à l'aide de la méthode de sommation de M. Borel, des fonctions génératrices irrégulières à l'origine, comme il a été fait à propos des polynomes P_n. Mais c'est là un point qui demande un examen spécial.

VIII. — Applications a la théorie des séries divergentes.

52. Les considérations développées dans les pages précédentes sont en relation étroite avec le *problème des séries divergentes*. C'est ce que je vais expliquer. Mais, pour cela, je dois commencer par poser nettement la question.

Étant donnée une fonction analytique, que nous supposerons *uniforme* pour plus de simplicité, l'un des objets importants de la Théorie des fonctions est d'en construire une représentation analytique au moyen d'une expression tellement choisie qu'elle explicite, autant qu'il est possible, les diverses particularités de la fonction qui lui correspond. Si l'on veut une représentation parfaite, il faut que l'expression trouvée soit aisément maniable dans le calcul; il faut, en outre, qu'elle soit unique pour une fonction donnée; il faut enfin qu'elle puisse servir à définir la fonction envisagée dans tout le domaine où celle-ci existe. D'autre part, comme les fonctions interviennent surtout en Analyse par leurs singularités, ces dernières doivent être mises en évidence dans l'expression considérée. Or, si l'on en reste aux notions élémentaires de convergence et de limite, le problème de la représentation analytique des fonctions n'est pas complètement résolu. En effet, on en a bien proposé plusieurs solutions; mais, parmi ces solutions, les unes (comme celle de Taylor au moyen d'une série entière, ou celle de Cauchy à l'aide d'une intégrale définie) présentent le double inconvénient de ne pas manifester les propriétés de la fonction représentée et de n'être valables que dans une partie du domaine naturel d'existence de cette fonction; et les autres (séries de fractions rationnelles de MM. Runge et Painlevé ou séries de polynomes de M. Mittag-Leffler), outre qu'elles sont d'un calcul difficile, ne sont pas déterminées sans ambiguïté quand la fonction est donnée, en sorte qu'elles peuvent représenter zéro sans être identiquement nulles. En se résignant à des restrictions sur la nature des fonctions étudiées, on peut, il est vrai, parvenir à des solutions meilleures (par exemple, la solution de M. Mittag-Leffler pour les fonctions uniformes n'ayant qu'une infinité dénombrable de singularités); mais, au défaut de n'être pas facilement maniables dans les calculs, ces solutions joignent celui de ne se rapporter qu'à des fonctions d'un certain type. Que faut-il donc faire? Devons-nous entreprendre la recherche de nouveaux modes d'expression des fonctions? Ne serait-il pas plus conforme aux principes ordinairement suivis dans le développement de l'Analyse de s'ingénier à tirer parti des représentations déjà connues, en élargissant au besoin les définitions sur lesquelles elles reposent? Quelques observations vont nous fixer à cet égard.

La série de Taylor, si simple, si facile à obtenir et si connue depuis tant d'années qu'elle s'est imposée, présente des avantages indiscutables pour la représentation des fonctions :

1° Elle s'est introduite d'elle-même comme un élément essentiel de l'Analyse; elle apparaît comme un *fait* inévitable, et, d'ailleurs, elle est très aisément maniable dans le calcul, notamment aux points de vue de l'intégration et de la dérivation;

2° Elle est unique pour une fonction donnée, en sorte qu'elle ne peut représenter zéro sans être identiquement nulle;

3° Elle peut servir à définir des fonctions quelconques, uniformes ou non uniformes;

4° Bien qu'elle ne converge qu'à l'intérieur d'un certain cercle, elle *caractérise* la fonction qui lui correspond (notion du prolongement analytique, d'après Weierstrass) et fournit le moyen, au moins théorique, d'atteindre cette fonction dans tout son domaine d'existence à l'aide d'un ensemble dénombrable d'opérations régulièrement classées (remarques de M. Poincaré sur les fonctions non uniformes générales); elle *signifie* donc quelque chose, même quand elle diverge.

Son seul défaut est donc de diverger en des points où la fonction qu'elle représente existe encore et, à cause de cela, de ne pas mettre en évidence les singularités de cette fonction. Si l'on parvient à étendre la notion de *représentation taylorienne* jusqu'à la débarrasser de la double restriction que je viens de citer, on aura complètement résolu le problème que nous avons posé. Cela conduit à voir ce que l'on peut faire des développements tayloriens divergents, pour lesquels les notions élémentaires ne donnent plus rien, mais qui n'en remplissent pas moins *formellement* le même rôle que les séries de Taylor convergentes.

La marche que nous suivrons consistera donc à généraliser les notions élémentaires concernant les séries, de façon que nous en arrivions à faire usage de celles-ci, même quand elles ne convergent plus, en sauvegardant toutefois le principe de la permanence des formes opératoires (¹), *comme on a fait dans la Théorie des équations algébriques en inventant les racines imaginaires.* C'est ainsi que se pose le *problème des séries divergentes.*

53. Il importe de se rendre compte, par avance, des difficultés que l'on rencontrera.

Étant donnée une série numérique convergente ou non,

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n + \ldots,$$

on devra lui donner un sens arithmétique au moyen de conventions telles que la valeur qu'on lui attachera soit celle que prend pour $z = 1$ la fonction définie par la série entière

$$\alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots + \alpha_n z^n + \ldots,$$

à supposer que cette série soit convergente dans un certain cercle décrit de $z = 0$ comme centre. Plusieurs conséquences découlent de là.

D'abord nos conventions devront tomber en défaut lorsque la série $\sum_0^\infty \alpha_n z^n$ aura son cercle de convergence comme coupure (du moins, tant que nous n'aurons pas généralisé la notion de prolongement analytique). On sait que c'est le cas général, si l'on part d'une série arbitrairement donnée. Mais, dans la pratique,

(¹) Hankel, *Vorlesungen über complexe Zahlen.*

les séries que l'on rencontrera seront liées à des fonctions analytiques générales, c'est-à-dire engendrées par elles et non posées *a priori;* or, les fonctions intervenant surtout par leurs points singuliers, il faut regarder comme général le cas où la distribution de ceux-ci est quelconque; alors la série de Taylor correspondante aura sur son cercle de convergence *un point singulier au moins et trois au plus;* le prolongement sera possible. Nos conventions seront donc valables pour la plupart des cas usuels.

D'autres difficultés paraissent plus sérieuses. On voit sans peine que les conventions à faire doivent être telles qu'une série à termes tous positifs puisse avoir pour somme (quand elle est divergente) un nombre négatif ou même imaginaire. Il peut même se produire des circonstances (à cause de la non-uniformité des fonctions) où notre série devra avoir plusieurs sommes suivant le chemin suivi par z pour arriver au point 1 (1). En un mot, dès que l'on abandonne les notions classiques de convergence, il est forcé que l'on rencontre des *périodes* pour les séries comme on en a trouvé pour les intégrales.

54. En parlant du problème des séries divergentes entendu comme je viens de le dire, je me trouve amené à signaler un autre problème connexe dont j'aurai aussi à m'occuper.

Existe-t-il des raisons permettant d'attribuer un sens à certaines séries de Taylor dont le rayon de convergence est nul et, si oui, quelle fonction faut-il attacher à une pareille série de Taylor?

On sait que l'on rencontre souvent, au moyen de développements ordonnés suivant les puissances d'une variable, des solutions *formelles* de certaines équations différentielles : *on verra que, dans des cas très étendus, ces solutions formelles définissent des solutions effectives.*

55. M. Borel (2) est le premier qui ait abordé méthodiquement, du moins pour le cas général, l'examen du problème dont je viens de rappeler l'énoncé. Avant lui, Stieltjes s'en était déjà occupé, mais seulement pour les séries développables en fractions continues convergentes d'un certain type. Après lui, MM. Leau (3) et Servant (4) ont examiné les mêmes questions, sans apporter toutefois un principe de solution noueeau. Je terminerai ce court *Historique* par une seule re-

(1) *Exemples :* $L\frac{1}{1-z} = \sum_1^\infty \frac{z^n}{n}$ (pour $z = -2$, $z = +2$) et $\frac{1}{1-z} = \sum_0^\infty z^n$ (pour $z = 2$).

(2) E. Borel, *Journal de Mathématiques;* 1896, et *Annales de l'École Normale;* 1899.

(3) Leau, *Comptes rendus;* 1898.

(4) Servant, *Comptes rendus;* 1899.

marque : Cauchy fut le premier à faire comprendre la nécessité des discussions de convergence et le premier aussi à montrer (notamment à propos de la célèbre série de Stirling) qu'on pouvait tirer légitimement parti des séries, même lorsqu'elles étaient divergentes. On connaît enfin les travaux de M. Poincaré sur les séries asymptotiques dans la théorie des équations différentielles linéaires.

Sans parler des généralisations possibles (indiquées d'ailleurs par l'auteur lui-même), la méthode de M. Borel consiste à faire correspondre à la série numérique $\sum_0^\infty \alpha_n$ la série entière $\sum_0^\infty \alpha_n z^n$ et à celle-ci l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-a} \sum_0^\infty \frac{\alpha_n z^n a^n}{n!} da.$$

M. Borel montre que la somme ainsi donnée à une série entière coïncide avec la somme ordinaire lorsque la série est convergente. Nous avons eu déjà l'occasion d'utiliser plusieurs fois ce procédé de sommation. Mais il est temps maintenant de présenter quelques observations à son sujet.

Si la série $\sum_0^\infty \alpha_n z^n$ définit une fonction entière, elle est convergente dans tout le plan (z) et la méthode de sommation de M. Borel ne peut rien donner de plus que la méthode ordinaire.

Si la série $\sum_0^\infty \alpha_n z^n$ possède un cercle de convergence fini, on est ramené à l'étude de la fonction entière associée

$$\sum_0^\infty \frac{\alpha_n}{n!} z^n.$$

L'emploi de la méthode de M. Borel a donc pour résultat de dilater le cercle de convergence jusqu'à l'infini. Mais cela ne constitue qu'un déplacement de difficulté, utile seulement dans des cas particuliers (si l'on excepte ceux où l'on parvient ainsi à montrer que la série donnée admet son cercle de convergence comme coupure). En réalité, on a *balayé* toutes les singularités que possède $\sum_0^\infty \alpha_n z^n$ dans le plan et on les a condensées à l'infini : il faut ensuite faire une étude aussi difficile que l'étude du prolongement de la fonction donnée, celle de la fonction entière associée aux environs de son point essentiel à l'infini.

Au contraire, si la série $\sum_0^\infty \alpha_n z^n$ a un rayon de convergence nul, la méthode de

M. Borel apporte quelque chose de tout nouveau. La fonction associée présente, en effet, alors (au moins dans des cas étendus) un cercle de convergence fini. L'intégrale peut donc définir une fonction analytique bien déterminée que l'on attachera à la série toujours divergente $\sum_0^\infty \alpha_n z^n$. La question est ramenée à l'étude du prolongement de la fonction associée : on a, en somme, *analysé* les singularités primitivement mêlées en O en les dispersant le long d'un certain cercle, et l'on possède alors, en quelque sorte, le *germe* d'une fonction bien définie.

On voit, pour conclure, que la méthode si intéressante de M. Borel invite à chercher, par d'autres voies, des procédés de prolongement qui permettent de l'appliquer autrement qu'à des exemples tout à fait particuliers. C'est à quoi nous amènent sans peine les méthodes exposées dans les Chapitres précédents.

56. A la série numérique divergente

$$\sum_0^\infty \alpha_n$$

j'attache la série entière

$$\sum_0^\infty \alpha_n z^n.$$

Supposons d'abord que celle-ci ait un rayon de convergence fini. Soit $f(z)$ la fonction qu'elle définit. Admettons, pour fixer les idées, que $f(z)$ existe dans tout le plan et soit holomorphe, sauf en des points singuliers isolés. A la série numérique donnée, je fais correspondre la valeur $f(1)$, unique ou non suivant que $f(z)$ est uniforme ou non, finie ou non suivant que $z = 1$ est ou non un point singulier de $f(z)$ [1]. Cela fait, je dis que la série $\sum_0^\infty \alpha_n$ est *sommable* et que *sa somme est* $f(1)$.

Les méthodes exposées plus haut, permettant de mettre $f(z)$ sous forme d'une intégrale définie et ainsi d'étudier cette fonction dans tout le plan, établissent des *caractères de sommabilité* des séries.

Il est visible que, si la série est convergente, la somme que nous lui attribuons par le procédé que je viens de décrire coïncide avec la somme ordinaire ; la notion de série sommable constitue donc une généralisation légitime de la notion de série convergente.

Les propriétés bien connues du prolongement montrent en outre que, si l'on suit plusieurs procédés de sommation différents pour la même série, on retombe

[1] Il peut se faire que $f(1)$ reste fini bien que $z = 1$ soit un point singulier.

toujours sur la même somme; en effet, une série entière ne définit qu'une seule fonction, comme l'a montré Weierstrass. La somme attachée à une série sommable est donc un véritable *invariant* par rapport aux procédés de calcul qui peuvent la fournir.

Parmi toutes les manières de mettre $f(z)$ sous forme d'intégrale définie, il y a évidemment celle de M. Borel, dont on retrouve ainsi comme cas particulier le procédé de sommation. On peut remarquer que nos méthodes établissent, en somme, des caractères de sommabilité (en prenant ce mot au sens de M. Borel) (1). Mais il n'y a pas avantage ensuite à recourir au procédé de M. Borel, puisque ces mêmes théorèmes donnent immédiatement le prolongement cherché. En outre, la méthode que je propose offre cette propriété, qui peut être précieuse, de se prêter à des variations innombrables suivant les besoins du calculateur.

Nous arrivons aussi à généraliser l'idée de limite, la quantité α_n ayant une *limite généralisée* si la série $\sum_0^\infty (\alpha_n - \alpha_{n-1})$ est *sommable*.

Les divers procédés de sommation que l'on peut appliquer à la même série conduisent à la même fonction, mais les *régions de sommabilité* peuvent être différentes. Ainsi l'on a

$$\frac{1}{\sqrt{1-z}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} e^{zx}\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{y(1-y)}} \frac{dy}{1-zy}.$$

La première intégrale n'est valable que si la partie réelle de z est inférieure à 1, tandis que la seconde est valable pour tout le plan.

On remarquera que l'emploi des intégrales définies étudiées plus haut fournit en général une région de sommabilité aussi grande que possible, ce que ne donne pas directement l'emploi des intégrales à limites infinies telles que celles de M. Borel. En outre, nous arrivons à trouver, à partir d'une série de Taylor, les diverses branches de la fonction envisagée, ainsi que les points singuliers de celle-ci et leur nature. Possédant une expression analytique de $f(z)$ valable pour tout le plan, nous avons aussi le moyen de calculer numériquement cette fonction en tout point où elle est régulière. « Il me reste, disait M. Borel à la fin de son premier *Mémoire sur les séries divergentes* (2), à émettre le vœu de voir la

(1) En effet, la fonction entière associée à une fonction étudiable par les méthodes des Chapitres précédents peut être mise, elle aussi, sous forme d'intégrale définie $\left(\text{telle que } \int_0^1 \varphi(x) e^{zx}\, dx\right)$ et l'on sait alors en calculer la valeur asymptotique, en sorte que l'on parvient à discuter l'intégrale de M. Borel.

(2) *Journal de Mathématiques,* 1896.

notion de somme s'étendre aux séries divergentes dans lesquelles S_n augmente indéfiniment par valeurs de même signe et pour lesquelles notre méthode ne donne aucun résultat. Rien ne prouve qu'il soit impossible de parvenir à ces sommes et de jeter ainsi un jour tout nouveau sur l'étude des fonctions analytiques et, en particulier, des fonctions non uniformes. » C'est pour répondre à ce *desideratum* que j'ai entrepris les présentes recherches; on voit que notre notion de sommabilité s'étend à bien des cas laissés de côté par M. Borel.

Les séries sommables peuvent être maniées dans le calcul comme si elles étaient convergentes, par exemple au point de vue de l'intégration ou de la dérivation terme à terme.

Il faut remarquer qu'une série divergente sommable *numérique* est toujours calculable par un procédé qui ne dépend que de la valeur des termes successifs de la série donnée. Soit, en effet, $\sum_0^\infty \alpha_n$ cette série. Si l'on se reporte au Chapitre II du présent Mémoire, on voit que la somme de notre série est la limite de l'expression

$$\sum_0^\infty \frac{\Gamma(nt+1)}{\Gamma(n+1)}\alpha_n,$$

lorsque t tend vers 1 par valeurs réelles croissantes. Il n'y a d'exception que si la droite joignant l'origine au point 1 passe par un point singulier de la fonction

$$\sum_0^\infty \alpha_n z^n,$$

ce dernier point étant en outre compris entre l'origine et le point 1.

Si α_n est une fonction analytique d'une variable complexe u holomorphe quel que soit n tant que u reste dans un certain domaine T et si l'expression

$$\sum_0^\infty \frac{\Gamma(nt+1)}{\Gamma(n+1)}\alpha_n(u)$$

tend uniformément vers une limite dans les mêmes conditions, il est clair que cette limite sera une fonction analytique de u holomorphe dans T.

Voici un exemple. Prenons la série trigonométrique

$$\sum_0^\infty \alpha_n e^{inu}$$

et supposons que α_n soit de la forme

$$b_n\int_0^1 \varphi(x)x^n\,dx,$$

$\Delta^{(n)} b_0$ tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$. La série en question peut être divergente. Considérons alors la fonction associée

$$f(z) = \sum_0^\infty \alpha_n z^n e^{inu},$$

convergente pour $|z| < 1$. On a

$$f(z) = \int_0^1 \varphi(x)\, G\left(\frac{1}{1 - zx e^{iu}}\right) dx,$$

G désignant une fonction entière. D'où

$$f(1) = \int_0^1 \varphi(x)\, G\left(\frac{1}{1 - x e^{iu}}\right) dx.$$

On voit donc que :

1° Notre série trigonométrique est sommable ;

2° Sa somme est une fonction analytique de u, admettant la période 2π et régulière sur toute parallèle à l'axe imaginaire du plan u dont l'abscisse n'est pas égale à l'un des nombres $2k\pi$ (k entier) ;

3° Les séries obtenues en dérivant terme à terme la série donnée sont encore sommables et ont pour sommes respectivement les dérivées de la somme de la série primitive.

Bref nous pouvons faire complètement l'étude de la série en question et il en sera de même pour toute série trigonométrique dont les coefficients auront l'une des formes envisagées au Chapitre IV.

57. Passons à l'examen des séries entières dont le rayon de convergence est nul. L'observation des faits analytiques naturels nous apprend qu'en bien des circonstances *une fonction précise doit être regardée, à l'exclusion de toute autre, comme définie par un tel développement*. Un calcul formel quelconque, exécuté sur la série divergente, correspond alors à un calcul semblable portant sur la fonction associée. Les écrits des anciens géomètres abondent en exemples de pareils phénomènes. Mais comment régulariser cet aperçu? La résolution du problème des moments nous a fourni une première méthode basée sur l'emploi de certaines fractions continues. Toutefois il y a lieu d'insister davantage. D'ailleurs, fidèle à l'esprit dans lequel j'ai commencé ce Mémoire, je ne m'occuperai pas d'être complet sur la nouvelle question que j'aborde ainsi : mon but sera surtout de découvrir des cas bien nets que l'on puisse traiter pratiquement.

Soit

$$\sum_0^\infty \alpha_n z^n \tag{1}$$

un développement taylorien qui n'est convergent que pour $z = 0$. Imaginons que l'on ait mis α_n sous la forme

$$\alpha_n = a_n \int_0^\infty \varphi(x)\, x^n\, dx\,;$$

la série

$$\sum_0^\infty a_n z^n \tag{2}$$

ayant un cercle de convergence fini et définissant une fonction $F(z)$ qui n'admet pas son cercle de convergence comme coupure. Je pose

$$f(z) = \int_0^\infty \varphi(x)\, F(zx)\, dx \tag{3}$$

et je conviens de dire que *la série divergente* (1) *est sommable et a pour somme la fonction* $f(z)$.

Une discussion s'impose. Je supposerai d'abord $F(z)$ holomorphe à l'intérieur d'un certain angle ayant son sommet au point $z = 0$ et s'étendant jusqu'à l'infini. Je supposerai, en outre, que $F(z)$ se comporte, pour les valeurs de z dont le module est très grand et dont l'argument reste compris entre les deux limites qui définissent l'angle précédent, de telle façon que les intégrales

$$\int_0^\infty \varphi(x)\, F^{(p)}(zx)\, x^p\, dx$$

soient absolument et uniformément convergentes, $F^{(p)}$ désignant la dérivée d'ordre p de F et z restant dans l'*angle de régularité* défini plus haut. Si ces conditions sont remplies, on voit aisément que $f(z)$ *est une fonction analytique de z holomorphe dans l'angle considéré.*

Remarquons que $f(z)$ admet le point $z = 0$ comme point singulier. En utilisant une expression introduite par M. Borel [1], on dira que $f(z)$ *est une fonction d'espèce* (A). Cela signifie, comme on sait, que les quantités

$$\frac{f^{(p)}(z)}{p!}$$

tendent respectivement vers les coefficients α_p quand z tend vers zéro en suivant un chemin contenu dans l'angle d'holomorphisme.

Un lien manifeste existe entre la méthode que je viens de rappeler et le *problème des moments.* D'autre part, les procédés de prolongement analytique

---

(1) *Mémoire sur les séries divergentes* (*Annales de l'École Normale supérieure,* 1899).

étudiés au Chapitre IV trouvent ici leur emploi en permettant de reconnaître pour des cas étendus que $F(z)$ satisfait aux conditions prescrites. Il est bon de noter une fois de plus combien sont étroitement connexes ces trois problèmes des *séries divergentes,* du *prolongement analytique* et de l'*inversion des intégrales définies.*

Plusieurs fonctions $f(z)$ correspondent à la même série divergente (1). Cela tient à ce que l'on peut, en général, décomposer de plusieurs façons différentes le coefficient α_n sous la forme indiquée et aussi à ce que le problème des moments n'admet pas une solution *unique.* Bref, il y a des fonctions (A) [1] pour lesquelles tous les α_n sont nuls. Telle est, par exemple, la fonction

$$\int_0^\infty e^{-\sqrt[4]{x}} \sin\sqrt{x}\, \frac{dx}{1 - zx}. \tag{4}$$

De semblables fonctions jouent, dans la sommation des séries divergentes, le même rôle que les constantes arbitraires dans une intégration. On pourrait en chercher la forme générale. On pourrait également chercher de quelle manière peuvent être modifiées les fonctions φ et F sans que l'intégrale (3) cesse de représenter la même fonction f. L'intégration par parties et le changement de variable fournirait, à cet égard, des théorèmes simples sur lesquels je n'insisterai pas. En se bornant aux solutions du problème des moments obtenues dans le Chapitre VI, on écarte toutes les fonctions telles que (4). Il ne reste donc que deux questions à examiner : *Peut-on faire un choix entre les diverses fonctions $f(z)$ qui correspondent à une même série* (1)*? Quel rôle sont susceptibles de jouer dans le calcul les fonctions ainsi choisies?*

On a déjà donné deux réponses différentes à la première question. Il faut d'ailleurs remarquer que, si les deux méthodes qui en découlent sont à la fois applicables à une même série (1), elles conduisent à la même fonction $f(z)$.

La *solution de Stieltjes* consiste à poser systématiquement

$$a_n = 1,$$

c'est-à-dire

$$F(z) = \frac{1}{1 - z}.$$

Je ne m'en occuperai plus.

La *solution de M. Borel* consiste, au contraire, à laisser F quelconque, mais à poser

$$\varphi(x) = e^{-x}.$$

C'est cette solution que je vais étudier, en la modifiant un peu.

---

[1] J'étends un peu le sens donné par M. Borel à cette locution.

Soit la série

$$\sum_0^\infty \alpha_n z^n,$$

que nous supposerons *complète*, ou du moins préalablement rendue telle par un changement de variable $z' = z^q$ (q entier). Bornons-nous au cas où α_n est de la forme

$$\alpha_n = \Gamma(pn+1)a_n,$$

p désignant un nombre positif et a_n le coefficient général d'une fonction $F(z)$ remplissant les conditions énumérées plus haut ([1]). Ce cas est celui que l'on rencontre le plus souvent dans la pratique. Il est clair que, les α_n étant donnés, on ne peut jamais ni les décomposer de deux manières différentes de la façon que je viens de dire, ni les mettre sous la forme voulue pour deux valeurs distinctes de p; cela résulte immédiatement de la considération de la valeur asymptotique de la fonction Γ et de ce fait que $(a_n)^{\frac{1}{n}}$ doit avoir l'unité pour limite supérieure quand n devient infini.

Cela posé, on a

$$\Gamma(pn+1) = \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-x^{\frac{1}{p}}} x^{\frac{1}{p}-1} x^n \, dx;$$

d'où

$$f(z) = \sum_0^\infty \alpha_n z^n = \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-x^{\frac{1}{p}}} x^{\frac{1}{p}-1} F(zx)\, dx.$$

Nous avons là un *principe de choix* permettant d'associer à la série divergente (1) une fonction $f(z)$ bien déterminée et unique. Pour $p = 1$, on retrouve la *méthode de sommation exponentielle* de M. Borel.

Dans bien des cas, on pourra sommer la série (1) sans faire usage de la marche régulière que je viens de décrire. Il arrivera souvent qu'on obtienne toujours la même somme. Mais ce sera un point à établir directement dans chaque cas.

58. On peut étendre au cas général que nous envisageons les théorèmes démontrés par M. Borel pour $p = 1$: je vais l'indiquer brièvement.

J'introduirai la notion de *série entière d'ordre p* : cela signifiera une série $\sum_0^\infty \alpha_n z^n$ pour laquelle α_n sera égal à $\Gamma(pn+1)a_n$, a_n étant le coefficient général d'une série entière dont le rayon de convergence est différent de zéro et de l'infini.

([1]) Des généralisations s'offrent d'elles-mêmes : leur étude conduirait à classer (autant que faire se peut) les *types de divergence*.

On établit facilement les propositions suivantes :

1° Une même série ne peut pas être à la fois de deux ordres différents;

2° Une série peut n'être d'aucun ordre assignable;

3° Une série d'ordre o a un cercle de convergence fini;

4° Une série d'ordre négatif définit une fonction entière $\left[\text{pour les séries d'ordre négatif, on pose } \alpha_n = \dfrac{a_n}{\Gamma(pn+1)}\right]$;

5° Une série d'ordre positif est toujours divergente.

On voit que l'ordre p mesure en quelque façon le degré de divergence de la série.

Je m'occuperai surtout des séries d'ordre positif. Une pareille série divergente sera dite *sommable dans un angle α issu de l'origine* si le procédé régulier de sommation indiqué au n° 57 lui fait correspondre une fonction holomorphe à l'intérieur de l'angle α dont le sommet est en O et dont l'ouverture peut varier de o à 2π.

Je me propose de démontrer deux théorèmes :

1° *Les séries divergentes sommables sont maniables dans le calcul comme des séries convergentes;*

2° *Il suffit qu'une série divergente sommable vérifie formellement une équation différentielle algébrique pour définir une intégrale effective de cette équation.*

Quelques remarques nous conduiront au but.

Soit d'abord

$$f(z) = \sum_0^\infty \alpha_n z^n = \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-x^{\frac{1}{p}}} x^{\frac{1}{p}-1} \sum_0^\infty \frac{\alpha_n z^n x^n}{\Gamma(pn+1)}\,dx.$$

Si tous les α_n sont nuls, $f(z)$ est identiquement nul. Réciproquement, si $f(z)$ est une fonction d'espèce (A) et si toutes ses dérivées $f^{(q)}(z)$ tendent vers zéro quand z tend vers zéro en restant dans l'angle d'holomorphisme, $f(z)$ est identiquement nul, ainsi que tous les α_n. *Donc une série sommable d'ordre p ne peut représenter zéro sans être identiquement nulle et, par suite, deux séries d'ordre p sommables dans le même angle ne peuvent représenter la même fonction que si elles sont identiques.*

Il est clair aussi qu'*une combinaison linéaire quelconque à coefficients constants de séries d'un même ordre p sommables dans un même angle est encore une série sommable d'ordre p.* La somme de la série finale s'exprime à l'aide des sommes partielles, comme le coefficient général de la série finale à l'aide des coefficients de même rang des séries combinées. La même proposition s'étend d'ailleurs à une combinaison linéaire de séries sommables d'ordres différents, pourvu que l'on puisse regarder celles-ci comme de même ordre (en introduisant au besoin sous le signe $\int$ des fonctions entières), sans que la sommabilité cesse de subsister pour les séries en question dans un même angle α : l'ordre final est alors l'ordre maximum des séries combinées.

Cela posé, j'appelle *transformation de M. Hadamard* la transformation qui fait correspondre la série $\sum_0^\infty \alpha_n \beta_n z^n$ aux séries $\sum_0^\infty \alpha_n z^n$ et $\sum_0^\infty \beta_n z^n$. *Si les séries composantes sont sommables dans un même angle et respectivement d'ordres p et q, la transformation de M. Hadamard donnera naissance à une série résultante qui sera encore sommable et d'ordre $p+q$.* Cela résulte de ce que

$$\begin{aligned}\alpha_n \beta_n &= \Gamma(pn+1)\Gamma(qn+1)a_n b_n\\ &= \Gamma[(p+q)n+1]\,\mathrm{B}(pn+1, qn+1)[(p+q)n+1]a_n b_n\end{aligned}$$

et de ce que, d'après le théorème de M. Hadamard, la série

$$\sum_0^\infty \mathrm{B}(pn+1, qn+1)[(p+q)n+1]a_n b_n z^n$$

est prolongeable si les séries $\sum_0^\infty a_n z^n$ et $\sum_0^\infty b_n z^n$ le sont elles-mêmes, comme cela a lieu par hypothèse [1].

On étendrait facilement ce théorème comme au Chapitre V.

Nous pouvons toujours supposer que la région de sommabilité de la série $\sum_0^\infty \alpha_n z^n$ contient les points correspondant à des valeurs réelles et positives de z. Il suffit, pour obtenir ce résultat, de faire au besoin d'abord une substitution $(z, e^{i\omega} z)$, ω étant convenablement choisi. On peut alors écrire, après un changement de variable évident,

$$f(z) = \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-\left(\frac{u}{z}\right)^{\frac{1}{p}}} \left(\frac{u}{z}\right)^{\frac{1}{p}-1} \mathrm{F}(u)\,\frac{du}{z},$$

---

[1] Il faut se rappeler qu'on a

$$\mathrm{B}(pn+1, qn+1) = \int_0^1 x^{pn}(1-x)^{qn}\,dx,$$

en sorte qu'on peut appliquer les méthodes du Chapitre IV à l'étude de la série

$$\sum_0^\infty \mathrm{B}(pn+1, qn+1)z^n.$$

avec

$$F(u) = \sum_0 \frac{\alpha_n u^n}{\Gamma(pn+1)}.$$

Cette formule, immédiatement établie pour z réel et positif, s'étend d'ailleurs sans difficulté au cas général.

De là peut se déduire, en suivant une marche tout à fait semblable à celle que M. Borel indique pour le cas de $p=1$, le théorème suivant :

Étant données deux séries d'ordre p sommables dans le même angle, leur produit effectué comme si elles étaient convergentes est encore une série sommable du même ordre, dont la valeur est égale au produit des valeurs des deux séries facteurs.

Un cas particulier intéressant est celui où l'une des deux séries données se réduit à un polynome entier en z : l'ordre ne varie pas par le fait de la multiplication, la sommabilité subsiste, la somme est multipliée par le polynome envisagé.

En effet, posons

$$z = x^p, \qquad u = v^p;$$

il vient

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-\frac{v}{x}} F(v^p) \frac{dv}{x}.$$

Le raisonnement de M. Borel, relatif au cas de $p=1$, peut alors être refait ic sans modification notable [1].

Je me bornerai à développer tout au long comme exemple la démonstration du théorème suivant :

Étant donnée une série sommable d'ordre p, la série dérivée est encore sommable et du même ordre et sa somme est la dérivée de la somme de la série primitive.

On a, en effet,

$$f'(z) = \frac{1}{p} z^{\frac{1}{p}-1} \int_0^\infty F(v^p) e^{-\frac{v}{x}} \left(\frac{v}{x^3} - \frac{1}{x^2}\right) dv$$

ou bien

$$f'(z) = \frac{1}{p} z^{\frac{1}{p}-1} \left[-\int_0^\infty F(v^p) \frac{v}{x^2} d\left(e^{-\frac{v}{x}}\right) - \int_0^\infty F(v^p) e^{-\frac{v}{x}} \frac{dv}{x^2} \right].$$

Une intégration par parties donne

$$f'(z) = z^{\frac{1}{p}-1} \int_0^\infty v^p F'(v^p) e^{-\frac{v}{x}} \frac{dv}{x^2},$$

[1] Cf. BOREL, *Mémoire sur les séries divergentes*, p. 92-94 (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1899).

c'est-à-dire

$$z f'(z) = \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-\left(\frac{u}{z}\right)^{\frac{1}{p}}} \left(\frac{u}{z}\right)^{\frac{1}{p}-1} u\,F'(u)\,\frac{du}{z}.$$

Or $u\,F'(u)$ correspond à $z f'(z)$ comme $F(u)$ à $f(z)$. D'où la conclusion annoncée.

De toutes ces propositions réunies, on tire immédiatement le théorème suivant :

Si l'on a un polynome entier par rapport à une variable z, à une série sommable $\sum_0^\infty \alpha_n z^n$ et à ses dérivées jusqu'à un certain ordre, ce polynome est lui-même une série sommable qu'on peut former en effectuant tous les calculs comme si les séries maniées étaient convergentes.

La somme de la série finale est d'ailleurs composée avec la somme de la série donnée comme le polynome lui-même l'est avec celle-ci. *Si donc la série finale est identiquement nulle, c'est-à-dire si la série donnée vérifie formellement l'équation différentielle obtenue en égalant le polynome à zéro, c'est que la somme de la série donnée est effectivement une intégrale de cette équation.*

Ces dernières propositions montrent bien que l'attribution de la somme $f(z)$ à la série divergente $\sum_0^\infty \alpha_n z^n$, par le procédé du n° 57, correspond en fait à une réalité. La série $\sum_0^\infty \alpha_n z^n$ *représente,* sans ambiguïté, la fonction $f(z)$ qui lui est attachée. Le choix de la fonction $f(z)$ pour être associée à la série $\sum_0^\infty \alpha_n z^n$ n'a rien d'arbitraire, mais, au contraire, il s'impose impérieusement.

Ces résultats divers ne sont pas très nouveaux. M. Borel en avait déjà exposé le principal. Mais il s'était borné au cas de $p = 1$. Je devais reprendre la question rapidement pour en généraliser la solution.

Je vais maintenant établir des *caractères de sommabilité* qui permettent de manier pratiquement les séries divergentes. Auparavant, je citerai quelques exemples relatifs à des séries classiques.

59. Soit la série

$$\sum_0^\infty n!\,z^n;$$

on a

$$f(z) = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1 - zx}\,dx.$$

C'est une fonction holomorphe dans tout le plan, à l'exception des points o et ∞. La partie positive de l'axe réel est en apparence une coupure : cela tient à ce que $f(z)$ n'est pas uniforme. Ses diverses branches se déduisent de la branche principale par addition du terme

$$2k\pi i \frac{1}{z} e^{-\frac{1}{z}},$$

on voit que, pour ce terme additif, $z = 0$ est un point singulier essentiel; pour la branche principale, au contraire, $z = 0$ est un point singulier de l'espèce (A), c'est-à-dire que $f(z)$ et ses dérivées y restent finies, sauf peut-être si z tend vers zéro par un chemin qui rencontre l'axe réel du côté positif.

On connaît le rôle que joue $f(z)$ dans la théorie de logarithme intégral

$$\operatorname{Li}(z) = \frac{1}{z} e^{-z} f\left(-\frac{1}{z}\right),$$

On sait aussi que $\frac{1}{z} f\left(\frac{1}{z}\right)$ est la valeur de la fraction continue de Laguerre.

60. Un des usages auxquels on peut employer la série (1) consiste à trouver une fonction génératrice des quantités α_n. Ici, il n'y a pas de discussion spéciale à faire, tous les procédés de sommation sont également bons.

Cherchons, par exemple, une fonction génératrice des nombres de Bernoulli B_n, sous la forme

$$\sum_1^\infty B_n z^{2n};$$

on a

$$B_n = \frac{4n}{(2\pi)^{2n}} \int_0^\infty \frac{x^{2n-1}}{e^x - 1} dx.$$

On peut donc poser

$$f_1(z) = \sum_1^\infty B_n z^{2n} = \frac{z}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sum_1^\infty 2n \left(\frac{zx}{2\pi}\right)^{2n-1}}{e^x - 1} dx,$$

c'est-à-dire

$$f_1(z) = 16\pi^2 z^2 \int_0^\infty \frac{x}{e^x - 1} \frac{dx}{(4\pi^2 - z^2 x^2)^2}.$$

D'autre part, si l'on suit le procédé régulier de sommation, on doit faire $p = 1$, et l'on trouve

$$F(z) = \sum_1 \frac{2\zeta(2n)}{(2\pi)^{2n}} z^{2n},$$

$\zeta(s)$ désignant la fonction de Riemann

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \ldots + \frac{1}{p^s} + \ldots;$$

d'où

$$F(z) = 2z^2 \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{1}{4\pi^2 p^2 - z^2}.$$

Par suite, on peut poser

$$f_2(z) = 2z^2 \int_0^\infty e^{-x} \sum_1^\infty \frac{x^2}{4\pi^2 p^2 - z^2 x^2} dx.$$

En écrivant le second membre sous forme d'une série d'intégrales, et en changeant x en px dans le terme général de cette série, il vient

$$f_2(z) = 2z^2 \int_0^\infty \sum_1^\infty pe^{-px} \frac{x^2}{4\pi^2 - z^2 x^2} dx.$$

En intégrant par parties, on constate que

$$f_1(z) \equiv f_2(z).$$

Donc les deux procédés de sommation conduisent ici au même résultat : *c'est là un fait très fréquent.*

Remarquons que, pour calculer $f_2(z)$ régulièrement, nous aurions dû poser $z^2 = z'$ afin de rendre la série complète. Il aurait fallu prendre alors $p = 2$. Mais on aurait retrouvé le même résultat, à condition de faire le changement de variable $x^2 = x'$. *C'est là un fait général,* comme on le voit sans peine.

La fonction $f(z)$ trouvée est d'ailleurs bien une fonction génératrice des B_n, puisque c'est une fonction (A) (¹). Nous avions déjà fait un raisonnement semblable à propos de la fonction génératrice des polynomes $P_n(x)$ étudiés plus haut.

61. Soit maintenant la série de Stirling

$$\sum_1^\infty (-1)^{n-1} \frac{B_n}{2n(2n-1)} \frac{1}{z^{2n-1}}.$$

Le procédé de sommation qui nous a donné tout à l'heure $f_1(z)$ fournit ici, comme fonction attachée à la série de Stirling, l'intégrale

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{e^x - 1} \operatorname{arc\,tang} \frac{x}{2\pi z} dx;$$

(¹) *Cf.* n° 50.

on en déduit, en intégrant par parties,

$$f(z) = 2z\int_0^\infty \mathrm{L}\frac{1}{1-e^{-x}}\frac{dx}{4\pi^2 z^2 + x^2};$$

or

$$\mathrm{L}\frac{1}{1-e^{-x}} = \sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{e^{-px}}{p};$$

d'où

$$f(z) = 2z\int_0^\infty e^{-x}\sum_1^\infty \frac{dx}{4\pi^2 p^2 z^2 + x^2},$$

après une transformation très simple. Toutes ces formes équivalentes de $f(z)$ correspondent à des procédés de sommation différents que l'on définirait aisément.

D'autre part, le procédé de sommation régulier donne ici

$$f(z) = 2z\int_0^\infty e^{-x}\sum_{p=1}^{p=\infty}\left[\frac{x}{2\pi pz}\,\mathrm{arc\,tang}\,\frac{x}{2\pi pz} - \frac{1}{2}\mathrm{L}\left(1+\frac{x^2}{4\pi^2p^2z^2}\right)\right]dx.$$

En intégrant par parties, il vient

$$f(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-x}\sum_1^\infty \frac{1}{p}\,\mathrm{arc\,tang}\,\frac{x}{2\pi pz}\,dx.$$

C'est la même chose que

$$f(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \sum_1^\infty e^{-px}\,\mathrm{arc\,tang}\,\frac{x}{2\pi z}\,dx,$$

comme on le voit en changeant x en px dans chaque terme de la série obtenue. Mais

$$\sum_1^\infty e^{-px} = \frac{1}{e^x - 1};$$

d'où

$$f(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{e^x-1}\,\mathrm{arc\,tang}\,\frac{x}{2\pi z}\,dx.$$

On retrouve bien la même fonction $f(z)$.

Les diverses expressions que nos procédés de sommation fournissent pour la fonction $f(z)$, attachée à la série de Stirling, montrent que l'on a

$$f(z) = \mathrm{L}\,\Gamma(z) - \left(z - \frac{1}{2}\right)\mathrm{L}\,z + z - \mathrm{L}\sqrt{2\pi},$$

comme il le fallait. (*Voir,* par exemple, le *Cours lithographié* de M. Hermite, XIVe Leçon.)

Dans les deux derniers exemples de séries sommables, la coupure est l'axe imaginaire tout entier. La région de sommabilité est donc constituée par une moitié du plan (z). Les intégrales obtenues sont d'ailleurs les unes paires, les autres impaires, par rapport à z.

62. Considérons encore les *intégrales de Fresnel,* que l'on rencontre en Optique dans la théorie de la diffraction

$$I = \int_0^z \cos\frac{\pi}{2} v^2\, dv,$$

$$J = \int^z \sin\frac{\pi}{2} v^2\, dv.$$

Cauchy a montré que l'on pouvait poser

$$(1) \quad \begin{cases} I = \dfrac{1}{2} + M\sin\dfrac{\pi}{2}z^2 - N\cos\dfrac{\pi}{2}z^2, \\ J = \dfrac{1}{2} - M\cos\dfrac{\pi}{2}z^2 - N\sin\dfrac{\pi}{2}z^2, \end{cases}$$

M et N étant certaines fonctions de z. Ces fonctions, si l'on essaye de les ordonner par rapport aux puissances de $\frac{1}{z}$, donnent les développements divergents suivants :

$$M = \sum_0^\infty (-1)^n .1.3.5\ldots(4n-1)\frac{1}{\pi^{2n+1}z^{4n+1}},$$

$$N = \sum_0^\infty (-1)^n .1.3.5\ldots(4n-1)\frac{1}{\pi^{2n+2}z^{4n+3}},$$

qu'on désigne sous le nom de *séries de Cauchy.* Or si l'on tient compte de la formule

$$\frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{2^p} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2p}\,dx,$$

on trouve, en faisant successivement $p = 2n$ dans la relation précédente et dans celle que l'on en déduit en changeant p en $p+1$, que les séries de Cauchy sont très facilement sommables

$$M = \frac{2\pi z^3}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-x^2}\frac{dx}{\pi^2 z^4 + 4x^4},$$

$$N = \frac{4z}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-x^2}\frac{dx}{\pi^2 z^4 + 4x^4}.$$

Les deux fonctions ainsi associées aux séries de Cauchy sont holomorphes, mais admettent comme coupures (apparentes) les bissectrices du système des axes du plan (z).

Je ne m'arrêterai pas à vérifier que le procédé régulier de sommation donne ici le même résultat. Mais, en supposant z réel, je vais faire voir que les fonctions que nous venons de déterminer permettent de calculer effectivement les intégrales de Fresnel.

Dérivons les formules (1) par rapport à z. On a

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \cos\frac{\pi}{2}z^2 &= M'\sin\frac{\pi}{2}z^2 - N'\cos\frac{\pi}{2}z^2 + \pi z\left(M\cos\frac{\pi}{2}z^2 + N\sin\frac{\pi}{2}z^2\right),\\ \sin\frac{\pi}{2}z^2 &= -M'\cos\frac{\pi}{2}z^2 - N'\sin\frac{\pi}{2}z^2 + \pi z\left(M\sin\frac{\pi}{2}z^2 - N\cos\frac{\pi}{2}z^2\right).\end{aligned}\right.$$

Il suffit de vérifier ces formules (2), ou, ce qui revient au même, les formules

$$(3)\qquad \begin{aligned} \pi z N + M' &= 0,\\ \pi z M - N' &= 1,\end{aligned}$$

qui n'en sont qu'une combinaison linéaire.

Or, posons

$$\sqrt{2}\,x = \sqrt{\pi}\,z\,t$$

dans les intégrales M et N. Il vient

$$M = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\infty e^{-\frac{\pi z^2 t^2}{2}}\frac{dt}{1+t^4},$$

$$N = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\infty e^{-\frac{\pi z^2 t^2}{2}}\frac{t^2\,dt}{1+t^4}.$$

La vérification est alors immédiate.

63. Prenons, pour terminer, un exemple plus général, où nous aurons à nous servir de nos méthodes de prolongement.

Soit

$$\alpha_n = \Gamma(pn+1)a_n,$$

avec

$$a_n = b_n\int_0^1 \varphi(y)y^n\,dy,$$

la quantité $|\Delta^{(n)}b_0|^{\frac{1}{n}}$ tendant vers zéro en même temps que $\frac{1}{n}$. La série associée à $\sum_0^\infty \alpha_n z^n$ est

$$F(zx) = \sum_0^\infty \alpha_n z^n x^n = \int_0^1 \varphi(y)\, G\left(\frac{1}{1 - zxy}\right) dy,$$

G désignant une fonction entière. Si z n'est pas réel et positif, x variant de 0 à $+\infty$, cette fonction est holomorphe; d'ailleurs, quand zx devient infini, ce ne peut être qu'avec un argument non nul et alors la fonction associée reste finie. On a donc

$$f(z) = \sum_0^\infty \alpha_n z^n = \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-x^{\frac{1}{p}}} x^{\frac{1}{p}-1} F(zx)\, dx.$$

La série étudiée est sommable : sa somme est une fonction holomorphe pour toute valeur de z, sauf peut-être pour z réel et positif.

Des conclusions semblables subsistent évidemment si F, au lieu d'être de la forme indiquée, est d'une façon générale étudiable par nos procédés de prolongement. *Nous avons ainsi des cas très étendus où l'on peut faire correspondre une fonction bien définie à une série entière dont le rayon de convergence est nul.* Cela résulte, comme on le constate aisément, de ce fait que les diverses séries dont nous avons appris, dans les Chapitres précédents, à effectuer le prolongement restent finies ou au plus comparables à une puissance de z pour les valeurs de z dont le module est très grand et l'argument différent de certaines valeurs critiques.

Conclusion finale. — *Une série de Taylor dont le cercle de convergence est évanouissant définit, sous de très larges conditions relatives à la nature analytique pour n infini de son coefficient général α_n, une fonction holomorphe à l'intérieur d'un ou plusieurs angles issus de O, et cela par l'emploi d'un procédé régulier de sommation qui fait correspondre à une série donnée une fonction bien déterminée et unique.*

Je n'insisterai pas sur les conditions précises trouvées plus haut pour que a_n soit de l'une des formes visées ici.

64. Je dis, pour terminer, que nos séries sommables appartiennent à la catégorie des *séries asymptotiques* étudiées déjà par M. Poincaré.

Soit, en effet, une série divergente

$$\varphi = \sum_0^\infty \alpha_n z^n = \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-x^{\frac{1}{p}}} x^{\frac{1}{p}-1} F(zx)\, dx,$$

avec

$$F(t) = \int_0^1 \psi(y) \frac{dy}{1 - ty}.$$

Posons

$$\varphi_n = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots + \alpha_n z^n;$$

il vient

$$\frac{\varphi - \varphi_n}{z^n} = \frac{z}{p} \int_0^\infty e^{-x^{\frac{1}{p}}} x^{\frac{1}{p} + n} F_1(zx)\, dx,$$

en écrivant

$$F(t) - F_n(t) = t^{n+1} \int_0^1 \psi(y) \frac{y^{n+1}}{1 - ty} dy = t^{n+1} F_1(t).$$

Pourvu que z ne soit pas réel et positif, on voit que $|F_1(zx)|$ reste inférieur à un nombre fixe assignable, quand x varie de o à $+\infty$. *Donc le rapport* $\frac{\varphi - \varphi_n}{z^n}$ *tend uniformément vers zéro en même temps que* z. C'est la définition même donnée par M. Poincaré des séries asymptotiques.

La même conclusion subsiste évidemment quel que soit le procédé de sommation adopté.

Les règles de calcul des séries asymptotiques démontrées par M. Poincaré au Chapitre I du Tome II des *Méthodes nouvelles en Mécanique céleste* sont donc toutes applicables à nos séries sommables.

En particulier, revenons à l'exemple cité plus haut. Supposons que z ait une valeur réelle et négative. Supposons, en outre, que la fonction $\psi(y)$ soit positive dans l'intervalle (o, 1), en sorte que tous les coefficients a_n soient positifs.

On vérifie aisément alors que

$$|F_1(zx)| < a_{n+1};$$

d'où

$$\left| \frac{\varphi - \varphi_n}{z^{n+1}} \right| < \alpha_{n+1}.$$

L'inégalité

$$|\varphi - \varphi_n| < \alpha_{n+1} |z|^{n+1}$$

montre que, si l'on s'arrête à un certain terme de la série divergente donnée pour l'évaluation rapprochée de φ, on commet une erreur moindre que la valeur absolue du premier terme négligé. Si les termes commencent par décroître pour croître ensuite, il y a intérêt à s'arrêter immédiatement avant le plus petit terme; l'erreur est alors minimum et, d'ailleurs, d'autant plus petite que $|z|$ est lui-même plus petit. Cette circonstance avait déjà été signalée par Cauchy à propos de la série de Stirling; on voit qu'elle est très générale. C'est sur une remarque de ce genre que l'on peut baser un emploi légitime des séries divergentes dans le Calcul numérique, notamment en Astronomie ou en Physique.

J'ajoute que les conclusions de ce paragraphe subsistent *mutatis mutandis* si $F(t)$, au lieu d'être de la forme prise ici comme exemple, est de l'une quelconque des autres formes étudiées au Chapitre IV.

65. Finissons par une dernière remarque, que je me contenterai encore d'établir sur un exemple.

Soit

$$\alpha_n = n!\int_0^1 \varphi(y) y^n\, dy;$$

on a

$$F(t) = \int_0^1 \varphi(y)\frac{dy}{1-ty}$$

et

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-x} F(zx)\, dx;$$

d'où

$$f(z) = \int_0^\infty \int_0^1 e^{-x}\varphi(y)\frac{dx\, dy}{1-zxy}.$$

Mais, d'autre part, en employant le procédé de sommation de Stieltjes, on trouve

$$f(z) = \int_0^\infty \frac{G(x)}{1-zx}\, dx,$$

avec

$$G(x) = \int_0^1 \frac{1}{y}\varphi(y)\, e^{-\frac{x}{y}}\, dy.$$

On voit que *le procédé de sommation de Stieltjes et celui de M. Borel conduisent ici au même résultat.* C'est là un fait qu'il serait aisé de prouver en général.

IX. — Conclusion.

66. Il est bon de résumer en quelques mots les principaux résultats acquis dans le présent Travail et de rappeler, avant de finir, le but que nous nous proposions d'atteindre.

J'ai développé, dans ce Mémoire, une méthode qui permet, pour des cas étendus, l'étude complète d'une fonction définie par une série de Taylor ou par d'autres séries analogues. J'arrive ainsi, grâce à l'emploi de certaines intégrales définies, d'une part à effectuer pratiquement le prolongement analytique d'un développement taylorien qui admet un cercle de convergence fini et, d'autre part, à donner un sens à certaines séries entières toujours divergentes.

L'idée qui m'a dirigé dans ces recherches est la suivante : *une intégrale dé-*

finie est une expression beaucoup plus simple qu'une série, du moins en ce qui concerne la représentation de certaines fonctions usuelles, du type de celles qu'on rencontre le plus fréquemment dans les applications.

Plusieurs des résultats que j'ai obtenus ont été publiés déjà par MM. Borel et Leau dans des Mémoires qui n'avaient pas encore paru au moment où mes recherches étaient terminées. Mais, en ce qui concerne l'étude des fonctions données par leur développement taylorien, la méthode que je propose me semble fournir plus de renseignements que celle dont M. Leau s'est servi. En outre, elle se prête à une foule d'autres applications, concernant en particulier la théorie des séries divergentes. Sur ce dernier point, j'ai cherché surtout à compléter les travaux récents en découvrant des cas précis et suffisamment généraux, où l'on puisse utiliser, dans la pratique, certaines méthodes de sommation dues à Stieltjes et à M. Borel.

J'ai été conduit à distinguer certains ensembles dénombrables de coefficients α_n jouissant de la double propriété suivante :

1° α_n est une fonction analytique de $n = \rho e^{i\omega}$ holomorphe pour $\rho > \rho_0$ et $|\omega| < \omega_0$, ρ_0 et ω_0 désignant deux constantes positives.

2° $\dfrac{\mathrm{L}|\alpha_n|}{\rho}$ tend vers zéro avec $\dfrac{1}{\rho}$, quel que soit ω, pourvu que l'on ait $|\omega| < \omega_0$.

Pour me borner ici au cas le plus simple, je supposerai

$$\alpha_n = \mathrm{G}(n)\int_0^1 \varphi(x)\, x^n\, dx,$$

$\mathrm{G}(n)$ étant une fonction entière d'ordre inférieur à 1. On peut alors énoncer les théorèmes suivants :

Théorème I. — *La fonction* $\sum_0^\infty \alpha_n z^n$ *est holomorphe dans tout le plan, sauf peut-être pour z réel et supérieur à 1 : elle est d'ailleurs représentable dans tout le plan par une certaine intégrale définie qui fournit, à partir de la série donnée, les éléments d'une étude complète de la fonction envisagée.*

Théorème II. — *La fonction entière* $\sum_0^\infty \dfrac{\alpha_n}{\Gamma(pn+1)} z^n$ *(p entier et positif) peut être mise, elle aussi, sous la forme d'une intégrale définie qui permet généralement d'en calculer la valeur asymptotique.*

Théorème III. — *Une série trigonométrique telle que* $\sum_0^\infty \alpha_n \cos nz$ *est convergente ou sommable. Sa somme est une fonction analytique dont on peut obtenir les dérivées successives par dérivation terme à terme. On peut d'ail-*

leurs faire l'étude de cette fonction dans tout le plan, en l'exprimant encore par une intégrale définie; et ces conclusions s'étendent à d'autres séries procédant suivant des fonctions $\varphi_n(z)$ dont on connaît la fonction génératrice.

THÉORÈME IV. — *Le problème des moments peut être résolu sans ambiguïté pour des nombres donnés de la forme $n!\,\alpha_n$ ou $(n!)^2\alpha_n$.*

THÉORÈME V. — *Les séries divergentes du type $\sum_0^\infty \Gamma(pn+1)\alpha_n z^n$ sont asymptotiques et sommables.*

Ces résultats ont été généralisés de bien des façons; par exemple :

1° Si $\dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$ est développable pour les grandes valeurs de n suivant les puissances de $\dfrac{1}{n}$;

2° Si $\alpha_n = G(a_n)$, a_n étant du type

$$a_n = (n+1)^q \int_0^1 \varphi(x) x^n\, dx,$$

et G désignant une fonction entière d'ordre inférieur à $\dfrac{1}{q}$;

3° Si

$$\alpha_n = \sum_0 a_{p,n} \xi_p^n,$$

les ξ_p désignant des nombres donnés et les $a_{p,n}$ des quantités présentant, quel que soit p, par rapport à n, les caractères indiqués plus haut.

Il est sans doute inutile de faire remarquer combien il resterait de travaux à poursuivre dans les diverses voies que j'ai abordées. J'ai voulu surtout indiquer un *principe de recherche* et montrer, par quelques exemples. avec la connexité de certains problèmes, l'intérêt qu'il y aurait à développer le *calcul inverse des intégrales définies*. Mais bien des questions demeurent en suspens, qui feront l'objet d'autres Mémoires.

Je termine en énonçant la possibilité d'étendre la plupart des conclusions et des méthodes que je viens d'exposer au cas des séries multiples et des fonctions de plusieurs variables indépendantes.