SUR LES

SÉRIES DIVERGENTES

ET LES

FONCTIONS DÉFINIES PAR UN DÉVELOPPEMENT DE TAYLOR,

PAR M. ÉDOUARD LE ROY.

I. — Le problème du prolongement analytique.

1. On sait, depuis Weierstrass, quelle différence précise il convient d'établir entre les deux concepts de *fonction analytique* et d'*expression analytique*.

La théorie des fonctions, dont l'un des principaux objets est justement d'approfondir les rapports que soutiennent entre eux ces deux termes, soulève donc deux grands problèmes, inverses l'un de l'autre, mais également importants. Étant donnée d'une part une certaine classe de fonctions, on peut en chercher une représentation analytique appropriée; et l'on peut aussi d'autre part faire directement l'étude des fonctions définies par les expressions analytiques d'un type déterminé. C'est à ce second point de vue que je me suis placé, en prenant pour sujet de mes recherches le développement de Taylor.

2. Considérons une série entière

$$\alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots + \alpha_n z^n + \ldots.$$

Trois cas peuvent se présenter, suivant que cette série est convergente dans tout le plan de la variable complexe z, qu'elle a un cercle de convergence fini ou qu'elle diverge toujours. Un théorème de Cauchy, retrouvé par M. Hadamard, permet de décider, à propos d'un exemple quelconque, par l'examen de la quantité $\sqrt[n]{|\alpha_n|}$, dans lequel de ces trois cas on se trouve. Je n'envisagerai pour le moment que les séries entières possédant un cercle de convergence fini.

Je puis, sans restreindre la généralité, supposer le rayon de ce cercle égal à l'unité : en effet, une transformation élémentaire ramène un cas quelconque à celui-là. Alors, sous la condition

$$|z| < 1,$$

notre série définit une fonction de z dont les propriétés fondamentales sont bien connues.

Mais il peut se faire que cette fonction existe pour des valeurs de z qui rendent la série divergente. Dans ce cas, on sait que la seule connaissance de la série permet encore, au moins théoriquement, de définir sans ambiguïté la fonction en tous les points de son domaine naturel d'existence. En d'autres termes, si l'on adopte la notion de fonction analytique telle que Weierstrass l'a construite, il est possible, — M. Poincaré l'a montré (¹), — d'instituer, à partir de la série envisagée comme élément initial, une suite régulière d'opérations formant un ensemble dénombrable et permettant d'atteindre la fonction en tout point où elle est holomorphe.

Toutefois, on n'a aucun moyen général de reconnaître à la simple inspection de la série si le prolongement est possible, ni, dans le cas où il le serait, d'apercevoir sur la série même des signes indiquant l'allure de la fonction en chacun des points où elle existe. D'où il résulte que, si le développement de Taylor constitue une bonne définition *théorique* d'une fonction, il n'en constitue pas une bonne définition *pratique*. C'est cette lacune que je me suis efforcé de combler, question dont la solution complète serait d'autant plus désirable qu'aucun autre mode de représentation analytique des fonctions ne présente, au point de vue du calcul, les mêmes avantages que la série de Taylor.

En résumé, le problème que je me propose de résoudre peut s'énoncer ainsi :

Sachant qu'une série entière pourvue d'un cercle de convergence représente une fonction douée d'une individualité bien définie et qu'elle permet de calculer de proche en proche toutes les valeurs de cette fonction, trouver des caractères qui fassent lire sur la série même les propriétés de continuité de la fonction.

Il va sans dire que je n'ai pu obtenir une solution complète. La question posée, comme celle de la convergence des séries numériques, n'est pas de celles qui en comportent. Mais ce n'est pas une raison pour ne point proposer les méthodes qui, sans permettre de traiter tous les cas possibles, procurent cependant le moyen d'aborder bien des cas pratiques.

3. Partons d'un développement de Taylor arbitrairement donné et cherchons à en effectuer le prolongement analytique. M. Borel a démontré (²) que le cercle de

(¹) *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. II.

(²) *Acta mathematica*, t. XXI.

convergence d'une série entière est, *en général,* une coupure ou ligne singulière essentielle pour la fonction que cette série définit. Le prolongement est alors impossible. Il arrive donc, *en général,* que les théorèmes classiques dus à Abel suffisent pour étudier la fonction dans tout son domaine naturel d'existence. D'ailleurs cela pouvait être aisément prévu, la série de Taylor étant une expression *isotrope* pour laquelle, si l'on reste dans le cas le plus général, aucune direction du plan z ne saurait être privilégiée.

Une remarque s'impose à ce sujet. Le théorème de M. Borel est relatif aux séries *quelconques* dont les coefficients sont donnés *au hasard.* Mais la fonction la plus générale ne correspond pas à la série la plus générale. Au point de vue ordinaire de l'Analyse, la fonction la plus générale est, en effet, celle pour qui la distribution des points singuliers n'est soumise à aucune loi. Il est donc certain que, si l'on se borne aux questions naturelles d'Analyse dans lesquelles les séries de Taylor que l'on devra considérer seront *amenées* par un calcul et non posées *a priori,* les fonctions les plus fréquentes et les plus utiles seront des fonctions prolongeables.

Je crois pouvoir conclure de ce qui précède que, en essayant surtout de définir des *classes de séries prolongeables,* je ne limite pas outre mesure la portée pratique des recherches que j'entreprends. Je m'attacherai donc spécialement à découvrir des *caractères de prolongeabilité.* Il y a là une théorie à édifier, semblable, je le répète, à celle de la convergence des séries. Cette comparaison expliquera que je néglige, au besoin, la généralité des résultats devant leur netteté. J'ajoute enfin que, loin de prétendre être complet, ce Mémoire contient principalement des exemples et des applications dont le but est de montrer le mécanisme de la méthode que je propose et l'intérêt qu'elle peut offrir.

4. Pour utiliser le théorème de M. Borel, il faut connaître des cas précis que l'on puisse dire *généraux* au point de vue qui nous occupe.

En voici un exemple. Les travaux de MM. Hadamard, Borel et Fabry [1] conduisent à formuler la proposition suivante :

La série $\sum_0^\infty \alpha_n z^{a_n}$ *admet effectivement son cercle de convergence comme coupure, quels que soient les coefficients* α_n *(sous la seule réserve qu'il y ait en effet un cercle de convergence fini), pourvu que les exposants* a_n *soient des nombres entiers positifs et croissants tels que la différence* $a_{n+1} - a_n$ *augmente au delà de toute limite avec* n.

---

(1) HADAMARD, *Journal de Mathématiques;* 1892. — BOREL, *Ibid.;* 1896. — FABRY, *Annales de l'École Normale supérieure;* 1896.

Le problème étant ainsi résolu pour les séries à *lacunes indéfiniment grandissantes,* je n'examinerai que les séries *complètes.* Mais il est bien entendu que je n'exclus pas le cas où une substitution de la forme

$$z' = z^p,$$

p désignant un entier positif, ramènerait la série étudiée à la forme complète.

5. Il résulte encore des travaux de M. Fabry que, si l'on pose

$$\alpha_n = \rho_n e^{i\theta_n},$$

ρ_n et θ_n étant réels, pourvu que $\rho_n^{\frac{1}{n}}$ tende vers 1 quand n augmente indéfiniment, on peut toujours choisir θ_n de façon que le cercle de rayon 1 soit coupure effective pour la série $\sum\limits_0^\infty \alpha_n z^n$.

Donc, même en se bornant aux séries complètes, il ne faut pas chercher des critères *généraux* permettant d'affirmer que le prolongement est possible : la question posée ne peut recevoir que des réponses *particulières* dont il y a lieu d'assurer le caractère pratique plus que l'étendue.

Je dis même que le cercle de convergence de la série $\sum\limits_0^\infty \alpha_n z^n$ *est une coupure effective pour la fonction que cette série définit, si* α_n *est une fonction périodique de n développable en série trigonométrique absolument convergente.*

Soit, en effet,

$$\alpha_n = \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda_p e^{ipn},$$

la série $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} |\lambda_p|$ étant convergente. On a évidemment

$$f(z) = \sum_0^\infty \alpha_n z^n = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda_p}{1 - z e^{ip}}.$$

La fonction $f(z)$, holomorphe à l'intérieur du cercle de rayon 1, admet tous les points e^{ip} de ce cercle comme pôles simples. D'après une proposition due à M. Goursat et reprise par M. Borel dans sa Thèse, ces points sont effectivement singuliers pour $f(z)$. Or la théorie des fractions continues nous apprend qu'ils forment un ensemble *dense sur tout le cercle.* D'où la conclusion. Il importe d'ailleurs de remarquer que la fonction $f(z)$ appartient à la catégorie de celles pour lesquelles M. Borel a montré que l'on pouvait généraliser la notion de prolongement.

Ce théorème permet de construire des séries très simples qui ont leur cercle de convergence comme coupure. Il suffit, par exemple, de prendre

$$\alpha_n = e^{\cos n}.$$

On déduit de là sans peine des séries $\sum_0^\infty \alpha_n z^n$ présentant le même caractère et pour lesquelles :

1° α_n est positif et va en décroissant quand n augmente;

2° La série $\sum_0^\infty \alpha_n$ converge;

3° Le rapport $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$ tend vers 1 pour n infini.

Il est visible que l'on peut trouver ainsi des séries de même nature dont les coefficients satisfont isolément à telles inégalités restrictives que l'on veut. *Ce n'est pas l'ordre de grandeur de α_n pour n infini qui intervient pour la possibilité du prolongement, mais bien la nature analytique pour n infini de α_n regardé comme une fonction de son indice.* Tel est le principe que je veux établir.

Le théorème énoncé plus haut comporte deux cas d'exception que je dois signaler :

1° *Si α_n s'exprime par une suite de Fourier limitée, $f(z)$ est une somme d'un nombre fini de fractions simples et n'a donc dans tout le plan qu'un nombre fini de pôles simples distribués sur le cercle de rayon* 1;

2° *Si α_n est une fonction périodique de n à période commensurable, la suite des points singuliers est elle même périodique et $f(z)$ n'a qu'un nombre fini de pôles simples distribués sur le cercle de convergence aux sommets d'un polygone régulier inscrit.*

6. La question que je me suis posée dans ce Mémoire a déjà donné lieu à bien des travaux qu'il serait trop long d'énumérer. Mais je me place à un point de vue très différent. Jusqu'ici, on partait généralement d'une série arbitraire et l'on cherchait un moyen d'en découvrir les points singuliers : c'est ce qui explique qu'on ait surtout trouvé des résultats relatifs au cas où le prolongement est impossible. Je veux, au contraire, développer quelques hypothèses simples portant, soit sur la forme analytique explicite de α_n, soit sur la manière dont ce coefficient est donné par un calcul antérieur.

MM. Leau et Fabry (1) ont obtenu plusieurs des résultats que je donne ici. Mais je crois que la méthode que je propose présente plusieurs avantages. D'abord elle est très simple, puis elle permet d'étudier une fonction dans tout le plan et non pas seulement aux environs du cercle de convergence. Issue de cette idée que toutes les propriétés d'une fonction sont pour ainsi dire condensées dans la structure de son développement taylorien, elle fournit, lorsqu'elle s'applique, non seulement les affixes des points singuliers, mais leur nature, les périodes qui s'y rapportent et les valeurs de la fonction en tous les autres points. Enfin, conduisant à extraire de la série de Taylor une expression analytique équivalente valable pour tout le plan, elle se prête à de nombreuses applications dont je signalerai les principales.

Un résumé de ce Mémoire a paru dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* le 20 février 1899.

II. — Calcul numérique d'une fonction en dehors du cercle de convergence.

7. Le premier problème qui se présente est celui-ci :

Étant donnée une fonction par son développement taylorien, calculer ses valeurs en tout point où elle est régulière.

La série primitive et celles qu'on en peut déduire par la méthode du prolongement fournissent une première solution, malheureusement très compliquée.

M. Borel (2), par ses recherches sur la sommation des séries divergentes, a ouvert une voie nouvelle où M. Servant (3), après lui, a obtenu d'importants résultats.

M. Lindelöf (4) a indiqué un procédé tout à fait général, fondé sur l'emploi de représentations conformes.

Enfin, tout récemment, M. Mittag-Leffler (5) a montré que l'on pouvait toujours construire, à partir de la série entière donnée, une série de polynomes qui converge en tout point où la fonction est holomorphe, sauf des coupures rectilignes allant de chacun des points singuliers à l'infini.

---

(1) Fabry, *Journal de Mathématiques;* 1898. — Leau, *Ibid.;* 1899. — Le présent Mémoire, daté du 23 février 1899, était rédigé avant la publication du Mémoire de M. Leau. Des circonstances indépendantes de ma volonté en ont retardé l'impression : j'en ai profité pour y ajouter le paragraphe II, ainsi que plusieurs indications bibliographiques.

(2) *Journal de Mathématiques;* 1896, et *Annales de l'École Normale;* 1899.

(3) *Thèse de Doctorat;* 1899.

(4) *Acta Societatis fennicæ;* 1898.

(5) *Comptes rendus;* 15 mai 1899.

Mais, dans une pareille question, on ne saurait trop multiplier les méthodes que le calculateur aura à sa disposition. Je vais donc indiquer un procédé nouveau, qui permet d'ailleurs de retrouver très simplement le théorème de M. Mittag-Leffler ([1]).

8. Considérons d'abord la progression géométrique

$$\sum_0^\infty z^n. \tag{1}$$

Soit t un paramètre réel compris entre o et 1. Je pose

$$G(z, t) = \sum_0^\infty \frac{\Gamma(nt+1)}{\Gamma(n+1)} z^n, \tag{2}$$

Γ désignant la fonction eulérienne de seconde espèce. La formule bien connue qui donne la valeur asymptotique de Γ montre immédiatement que G est une fonction entière de z, tant que t reste inférieur à 1.

On peut écrire

$$G(z, t) = \int_0^\infty e^{-x+zx^t}\,dx,$$

et cette intégrale est convergente pour $t < 1$, quel que soit z.

Le chemin d'intégration coïncide d'abord avec la partie positive de l'axe réel du plan. Mais il est visible qu'on peut lui substituer un autre chemin rectiligne L allant de l'origine à l'infini et faisant avec le premier un angle φ moindre que $\frac{\pi}{2}$ en valeur absolue. Cela tient à ce que l'intégrale G, prise le long d'un arc de cercle C compris entre les deux chemins précédents, tend vers zéro quand le rayon de C croît au delà de toute limite.

Imaginons maintenant que t tende vers 1. Alors le développement (2) tend *formellement* vers le développement (1). Mais qu'arrive-t-il pour G?

Considérons l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-x+zx}\,dx$$

prise le long du chemin rectiligne L. Elle est convergente et a pour valeur $\frac{1}{1-z}$ tant que le point z est dans un certain domaine T. La convergence est même

([1]) On verra facilement le lien de cette méthode avec celle de M. Borel.

absolue et *uniforme* dans tout domaine intérieur à T. Or, quel est ce domaine T? Posons

$$x = \rho e^{i\varphi}, \qquad z = \alpha + i\beta.$$

Le domaine T est formé de toute la région du plan située du même côté que l'origine par rapport à la droite dont l'équation est

$$\alpha \cos\varphi - \beta \sin\varphi = \cos\varphi.$$

Cette dernière droite, frontière unique de T, n'est autre que la droite menée par le point $z = 1$ parallèlement à la symétrique de L par rapport à la bissectrice $\alpha = \beta$. Nous supposerons désormais que z reste dans T. D'ailleurs, en faisant varier φ dans les limites permises, T balaie le plan tout entier, sauf une coupure rectiligne allant de $z = 1$ à $z = \infty$ le long de l'axe réel.

Quoi qu'il en soit, supposons L et T fixés. Si z est dans T, l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-x+zx^t}\,dx$$

prise le long de L est absolument et uniformément convergente pour $t \leqq 1$. On conclut de là que $G(z, t)$ tend vers $\frac{1}{1-z}$ quand t tend vers 1; G tend même uniformément vers sa limite, pourvu que z n'atteigne pas la frontière de T.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant, tout à fait fondamental dans la question qui nous occupe :

Soit T *un domaine fini quelconque dont la frontière reste à distance finie d'une coupure allant du point* $z = 1$ *au point* $z = \infty$ *le long de l'axe réel : l'expression*

$$\sum_0^\infty \frac{\Gamma(nt+1)}{\Gamma(n+1)} z^n,$$

où t *désigne un paramètre réel inférieur à* 1, *tend uniformément vers*

$$\frac{1}{1-z},$$

quand t *tend vers* 1, *pourvu que* z *reste dans* T.

9. Soit maintenant

$$f(z) = \sum_0^\infty \alpha_n z^n$$

une fonction holomorphe à l'origine. Traçons des coupures rectilignes allant de chacun des points singuliers de $f(z)$ à l'infini le long des rayons vecteurs de ces points singuliers. Je désignerai par T un domaine fini quelconque dont la frontière reste à distance finie des coupures précédentes et je supposerai que z ne sort pas de T. Appelons d'ailleurs C un contour fermé contenant T à son intérieur et ne rencontrant aucune des coupures envisagées.

On a

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{(C)} \frac{f(u)}{z-u}\,du.$$

Posons

$$G(z, t) = \sum_0^\infty \frac{\Gamma(nt+1)}{\Gamma(n+1)}\alpha_n z^n,$$

t désignant comme ci-dessus un paramètre réel compris entre 0 et 1. La fonction entière G peut se mettre sous la forme

$$G(z, t) = \frac{1}{2i\pi}\int_{(C)} \frac{f(u)}{u}\sum_0^\infty \frac{\Gamma(nt+1)}{\Gamma(n+1)}\frac{z^n}{u^n}\,du,$$

car

$$\alpha_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{(C)} \frac{f(u)}{u^{n+1}}\,du.$$

Or on peut toujours supposer C choisi de telle façon que, z restant dans T, $\frac{z}{u}$ reste (quand u décrit C) dans un domaine T' auquel est applicable le théorème du paragraphe précédent. Alors

$$\sum_0^\infty \frac{\Gamma(nt+1)}{\Gamma(n+1)}\frac{z^n}{u^n}$$

tend uniformément vers

$$\frac{u}{u-z},$$

et, par suite, G tend uniformément vers $f(z)$, le tout quand t tend vers 1.

Nous obtenons donc finalement le théorème que voici :

Étant donnée une fonction holomorphe autour de l'origine

$$f(z) = \sum_0^\infty \alpha_n z^n,$$

et un domaine T *défini comme il a été dit, l'expression*

$$\sum_0^\infty \frac{\Gamma(nt+1)}{\Gamma(n+1)}\alpha_n z^n$$

tend uniformément vers $f(z)$ quand t tend vers 1 *par valeurs réelles et plus petites que* 1, *pourvu que z reste dans* T.

10. La méthode précédente donne immédiatement l'extension d'une série de Taylor à tout le plan.

Elle constitue, si l'on veut, un procédé général pour rechercher les points singuliers d'une fonction définie par son développement taylorien.

Mais je l'envisagerai surtout comme fournissant un moyen de calculer numériquement cette fonction.

A ce dernier point de vue, elle permet de retrouver bien aisément le théorème de M. Mittag-Leffler. Soit, en effet, ε un nombre positif donné aussi petit que l'on veut. Choisissons $t = t_0$ de telle manière que l'on ait

$$|G(z, t_0) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

quel que soit z dans T. Cela fait, on peut limiter la série convergente $G(z, t_0)$ de façon qu'en désignant par $P(z)$ la somme de ses n premiers termes, on ait

$$|G(z, t_0) - P(z)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

dès que n surpasse une certaine limite assignable. Il vient alors

$$|f(z) - P(z)| < \varepsilon.$$

Ainsi la fonction $f(z)$ peut être représentée par un polynome avec telle approximation que l'on veut dans tout le domaine T.

Soient enfin

$$\varepsilon_0, \quad \varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \ldots, \quad \varepsilon_n, \quad \ldots$$

des nombres positifs tels que la série

$$\sum_0^\infty \varepsilon_n$$

soit convergente. Déterminons, par la méthode précédente, les polynomes P_n tels que

$$|f(z) - P_n(z)| < \varepsilon_n$$

dans T. On a évidemment

$$f(z) = P_0 + (P_1 - P_0) + (P_2 - P_1) + \ldots$$

et la série du second membre est absolument et uniformément convergente dans T. *C'est le théorème de M. Mittag-Leffler.*

Mais, sans insister davantage, je vais présenter quelques remarques générales.

11. Considérons une série quelconque

$$\sum_{0}^{\infty} \alpha_n \tag{1}$$

convergente ou divergente. Nous dirons avec Cauchy qu'elle est *de module fini,* si la série entière associée

$$\sum_{0}^{\infty} \alpha_n z^n \tag{2}$$

possède un cercle de convergence limité. Dans ce cas, la série auxiliaire

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{\Gamma(nt+1)}{\Gamma(n+1)} \alpha_n \qquad (0 < t < 1) \tag{3}$$

est convergente.

Si la somme de la série (3) tend vers une limite L quand t tend vers 1, nous conviendrons de dire que la série (1) est *sommable* et a pour somme L.

Il est clair qu'une série convergente est toujours sommable et a la même somme aux deux points de vue de la convergence et de la sommabilité : la notion de sommabilité fournit donc une généralisation *légitime* de la notion de convergence.

Cette généralisation est *effective,* comme le montrent les théorèmes établis ci-dessus.

Si la série (1) est divergente et a ses termes tous positifs, la série (3) augmente indéfiniment à mesure que t se rapproche de 1. Il faut donc, dans le cas de la divergence, que la série (1) soit *oscillante* pour que la considération de la série (3) permette de lui attribuer une *vraie valeur.*

Lorsque les α_n dépendent d'une variable u, nous dirons que la série (1) est *uniformément sommable* dans un domaine T si la série (3) tend uniformément vers une limite quand t tend vers 1, u restant dans T.

Il résulte des théorèmes établis dans ce Chapitre que toute série entière de module fini est sommable dans le domaine naturel d'existence de la fonction $f(z)$ qu'elle définit autour de l'origine.

Une telle série peut être maniée dans le calcul, soit au point de vue de la multiplication, soit au point de vue de l'intégration ou de la dérivation terme à terme, comme si elle était convergente.

On voit, en fin de compte, que les considérations développées dans ce Chapitre donnent une solution complète du *problème des séries divergentes de module fini.*

La valeur numérique d'une telle série peut être calculée ainsi par un procédé qui ne dépend que de la valeur numérique des termes de la série donnée.

J'ai à peine besoin d'ajouter qu'une série uniformément sommable de fonctions continues est une fonction continue, qu'une série uniformément sommable de fonctions holomorphes est une fonction holomorphe, qu'on peut intégrer ou dériver terme à terme une série uniformément sommable dans les mêmes conditions (*mutatis mutandis*) qu'une série uniformément convergente, etc.

On pourrait essayer d'étendre la méthode que je viens d'esquisser au cas des séries entières dont le rayon de convergence est nul. C'est un point sur lequel je me réserve de revenir. Mais ici je m'attacherai surtout à une autre méthode, à l'étude de laquelle je me bornerai désormais.

III. — Principes de la méthode employée.

12. Voici la marche qu'il est le plus naturel de suivre pour effectuer le prolongement analytique d'une série de Taylor : *déduire de la série donnée une autre expression qui converge dans la plus grande étendue possible du plan et qui prenne les mêmes valeurs que la série primitive autour de l'origine.* La légitimité de cette méthode est fondée sur le théorème suivant, qui est bien connu : *Deux fonctions, holomorphes dans un domaine d'un seul tenant, coïncident en tout point de ce domaine si elles coïncident dans une petite aire intérieure.*

C'est cette marche que l'on suit dans les cas tout à fait élémentaires où l'on peut sommer la série, par exemple dans le cas des séries récurrentes. C'est encore cette marche qu'ont suivie M. Lindelöf [1] en utilisant des représentations conformes et M. Borel [2] en introduisant la notion de série divergente sommable. Mais, dans une question de ce genre, il est avantageux de multiplier les méthodes que le calculateur aura à sa disposition. C'est pourquoi je proposerai un autre procédé, basé sur l'emploi de certaines intégrales définies.

Ce procédé n'est pas absolument inédit. M. Hadamard [3] signale rapidement dans sa Thèse l'une des propositions fondamentales dont j'aurai à faire usage. M. Pincherle [4] a consacré quelques pages au même sujet. Mais je me placerai à un point de vue exactement inverse de celui qu'adopte M. Hadamard et je devrai d'autre part m'éloigner beaucoup de M. Pincherle dans les développements que je donnerai à quelques-uns de ses théorèmes.

---

(1) *Acta Societatis fennicæ;* 1898.

(2) *Journal de Mathématiques;* 1896, et *Annales de l'École Normale supérieure;* 1899.

(3) *Journal de Mathématiques;* 1892.

(4) *Acta mathematica;* 1887.

13. Considérons tout d'abord l'intégrale

$$J(z) = \int_0^1 \frac{\varphi(x)}{1 - zx}\, dx,$$

et cherchons-en les propriétés principales.

Nous supposerons l'intégration effectuée le long du segment $(0, 1)$ de l'axe réel OX.

Quant à la fonction φ, nous ne ferons pas sur elle d'autre hypothèse que celle-ci : *l'intégrale*

$$\int_0^1 |\varphi(x)|\, dx$$

a un sens.

Cela posé, l'intégrale $J(z)$ a une valeur finie et déterminée en tout point z qui n'est pas situé sur la partie $(+1, +\infty)$ de OX. Il y a plus : *je dis que* $J(z)$ *est holomorphe dans le même domaine.* En effet, choisissons au hasard un point z_0 dont l'affixe ne soit pas réelle et supérieure ou égale à 1. On voit immédiatement que l'on peut écrire

$$J(z) = \sum_0^\infty \alpha_n (z - z_0)^n,$$

avec

$$\alpha_n = \int_0^1 \varphi(x) \frac{x^n}{(1 - z_0 x)^{n+1}}\, dx.$$

La convergence a lieu dans un certain cercle décrit de z_0 comme centre et le théorème annoncé est donc vrai. *La fonction* $J(z)$ *est holomorphe en tout point du plan, sauf peut-être pour z réel et plus grand que* 1.

Posons maintenant

$$\alpha_n = \int_0^1 \varphi(x)\, x^n\, dx.$$

On a, au voisinage de l'origine,

$$J(z) = \sum_0^\infty \alpha_n z^n. \tag{1}$$

Le rayon de convergence de cette série est égal au moins à 1. *L'intégrale* $J(z)$ *coïncide, à l'intérieur du cercle de convergence, avec la somme de la série* (1) *et, par suite, définit l'extension analytique à tout le plan de la fonction représentée par celle-ci.*

Les points singuliers de $J(z)$ ne peuvent être situés que sur la portion $(+1, +\infty)$ de OX. En particulier, si le cercle de convergence de la série (1) a l'unité pour rayon, il ne contient qu'un point singulier de $J(z)$: $z = 1$.

La portion $(+1, +\infty)$ de OX est pour $J(z)$ une *coupure*. Cette coupure est essentielle si la fonction φ n'est pas analytique pour $0 < x < 1$. Mais supposons $\varphi(x)$ holomorphe dans une aire contenant ce segment à son intérieur. Alors l'intégration peut être effectuée le long d'un chemin curviligne allant du point 0 au point 1 : *d'où l'on conclut que la coupure n'est pas essentielle et que* $J(z)$ *n'a pas d'autres points singuliers que* $z = 1$ *et* $z = \infty$.

Plus généralement, si $\varphi(x)$ est holomorphe autour du point λ (λ réel et compris entre 0 et 1), $J(z)$ est holomorphe autour du point $\frac{1}{\lambda}$. *Si donc* $\varphi(x)$ *est généralement holomorphe au voisinage du segment* $(0, +1)$ *de* OX, *sauf en des points isolés,* $J(z)$ *n'a que des points singuliers isolés, distribués sur la partie* $(+1, +\infty)$ *du même axe.*

Dans ce cas simple, $J(z)$ *n'est pas uniforme et le calcul du saut brusque subi par l'intégrale quand on franchit la coupure donne les diverses déterminations de* $J(z)$. Il suffit, pour le voir, de se reporter aux travaux bien connus de M. Hermite sur les intégrales à coupures et d'appliquer le théorème des résidus. Plusieurs circonstances peuvent se présenter : Si $\varphi(x)$ est holomorphe dans tout le plan, sauf peut-être à l'origine, on peut faire passer la coupure par tel point que l'on veut et les périodes de $J(z)$, quand on tourne autour du point 1, sont données par l'expression

$$2k\pi i \frac{1}{z} \varphi\left(\frac{1}{z}\right).$$

Dans le cas général (la coupure n'étant cependant pas essentielle), la même formule est valable pour les points voisins de OX et peut ensuite être étendue par prolongement à tout le plan, *mais toutes les singularités sont alors possibles, suivant la nature analytique de la fonction* φ, *pour les déterminations de* $J(z)$ *autres que la détermination principale.*

Ces résultats sont bien simples et l'on voit que la considération de $J(z)$ permet de résoudre complètement le problème de l'extension analytique de la série (1).

On peut bien souvent aller plus loin. Je ne citerai que quelques exemples. Si la fonction $\varphi(x)$ est positive et si l'on pose

$$z = u + iv,$$

il vient

$$J(z) = \int_0^1 \varphi(x) \frac{1 - ux}{(1 - ux)^2 + v^2 x^2} dx + iv \int_0^1 \varphi(x) \frac{x}{(1 - ux)^2 + v^2 x^2} dx.$$

Si v n'est pas nul, il est impossible d'annuler le coefficient de i dans l'expression de $J(z)$: l'équation $J(z) = 0$ n'a donc pas de racines imaginaires. Si $v = 0$, la partie réelle de $J(z)$ ne peut pas être nulle pour $u < 1$: l'équation $J(z) = 0$

n'a donc pas de racines réelles inférieures à 1. *En résumé, l'équation* $J(z) = 0$ *ne peut avoir que des racines réelles supérieures à* 1. Cette remarque, utilisée par M. Desaint [1] dans sa Thèse, ne s'applique évidemment qu'à la branche principale de $J(z)$.

Je montrerai plus loin sur des exemples que l'on peut tirer parti de l'expression de $J(z)$ pour trouver l'allure de cette fonction à l'approche de ses points singuliers. Qu'il me suffise de faire remarquer actuellement que la détermination principale reste finie quand z grandit indéfiniment avec un argument différent de zéro.

14. Considérons maintenant une série entière

$$\sum_0^\infty \alpha_n z^n,$$

dont nous supposerons le rayon de convergence égal à l'unité. Soit $f(z)$ la fonction définie par cette série. Si nous parvenons à construire une fonction $\varphi(x)$ telle que l'on ait

$$\alpha_n = \int_0^1 \varphi(x)\, x^n\, dx,$$

pour toutes les valeurs entières et positives de n, nous poserons

$$f(z) = \int_0^1 \frac{\varphi(x)}{1 - zx}\, dx,$$

et nous aurons effectué le prolongement analytique de la série. Ce procédé nous fournit le moyen, non seulement d'étudier la nature analytique de $f(z)$, mais encore d'en calculer numériquement la valeur en tout point du plan qui n'est pas singulier.

Sans doute, la méthode précédente ne peut rien donner de plus que la méthode classique du prolongement analytique à l'aide de cercles de convergence successifs. Mais elle est beaucoup plus pratique et permet en outre, *par un ensemble régulier d'opérations,* d'atteindre la fonction étudiée dans tout son domaine d'existence, y compris le voisinage des points singuliers, et non pas seulement (comme le procédé de M. Poincaré) dans tout domaine intérieur au domaine naturel d'existence. Le seul inconvénient de la méthode est de n'être pas générale : pour savoir si elle est applicable, il faut résoudre un problème d'in-

---

[1] E. DESAINT, *Sur quelques points de la théorie des fonctions* (*Annales de l'École Normale supérieure;* 1897).

version d'intégrale définie consistant à construire une fonction φ telle que

$$\alpha_n = \int_0^1 \varphi(x)\, x^n\, dx,$$

pour n entier et positif.

15. On aperçoit immédiatement la possibilité de généralisations étendues. J'y insisterai peu, les démonstrations étant les mêmes, *mutatis mutandis,* au moins en ce qui concerne les points importants.

Rien n'empêche, par exemple, de faire correspondre à une série de Taylor donnée une intégrale de la forme

$$f(z) = \int_0^1 \varphi(x)\, \mathrm{G}\left(\frac{1}{1 - zx}\right) dx,$$

$\mathrm{G}(t)$ désignant une fonction entière de t, ou même plus généralement encore une intégrale telle que

$$f(z) = \int_0^1 \varphi(x)\, \mathrm{F}(zx)\, dx$$

où $\mathrm{F}(t)$ représente une fonction analytique de t holomorphe à l'origine dont les singularités sont supposées connues dans tout le plan.

Bornons-nous, pour simplifier, au cas où $\mathrm{F}(t)$ n'a que des points singuliers isolés : soient

$$t_0, \quad t_1, \quad t_2, \quad \ldots, \quad t_p, \quad \ldots$$

les affixes de ces points.

Si $\mathrm{F}(t)$ n'est pas uniforme, nous commencerons par pratiquer dans le plan (z) des coupures rectilignes allant de chacun des points t_p à l'infini et dont les prolongements passent par l'origine : la fonction F est ainsi rendue uniforme.

Dans tous les cas, ces coupures seront celles de l'intégrale $f(z)$. Celle-ci est holomorphe en tout point non situé sur les coupures, au moins tant que l'on se contente de considérer les valeurs de $f(z)$ susceptibles d'être atteintes quand la variable z suit un chemin issu de l'origine et ne rencontrant pas les coupures. Il est clair que, dans le plan ainsi coupé, $f(z)$ est uniforme.

Si $\varphi(x)$ n'est pas analytique, les coupures sont essentielles et il n'y a rien à dire de plus, à moins que l'on n'abandonne le concept de fonction analytique tel que l'a constitué Weierstrass et que l'on ne cherche à généraliser l'idée de prolongement. Mais, si $\varphi(x)$ est analytique, on sait que les coupures ne sont plus qu'apparentes. Dans ce cas, $f(z)$ n'est plus uniforme et il y a lieu d'en poursuivre l'étude.

Supposons donc que $\varphi(x)$ soit une fonction analytique admettant des points singuliers isolés :

$$x_0, \quad x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_p, \quad \ldots.$$

Traçons, dans le plan (x), des coupures rectilignes allant de chacun des points x_p à l'infini et dont les prolongements passent par o : $\varphi(x)$ est ainsi rendue uniforme.

Soit ξ un point situé sur le segment (o, 1) de l'axe réel du plan (x) : choisissons-le de façon que $\varphi(x)$ soit holomorphe en son voisinage. Considérons maintenant le point $\frac{t_p}{\xi}$ du plan (z) et donnons à z une valeur voisine de $\frac{t_p}{\xi}$. En vertu du théorème fondamental de Cauchy sur l'intégration des fonctions holomorphes, nous pouvons effectuer l'intégration qui donne $f(z)$ le long d'un chemin curviligne ainsi construit : ce chemin coïncide avec le segment rectiligne $(x = 0, x = 1)$, sauf aux environs de ξ où il affecte la forme d'une demi-circonférence. Cette demi-circonférence doit être prise assez petite pour ne contenir à son intérieur aucun point x_p, ce qui est évidemment possible. En outre, cette même demi-circonférence sera d'un côté ou de l'autre de l'axe réel du plan (x) suivant que z sera d'un côté ou de l'autre de la coupure (t_p) du plan (z). Les diverses coupures du plan (z) sont d'ailleurs très peu modifiées par suite du changement de contour d'intégration. En particulier, la coupure (t_p) reste la même, sauf aux environs du point $\frac{t_p}{\xi}$ où elle devient une petite courbe. On suppose la demi-circonférence du plan (x) choisie de telle façon que le point z et la petite courbe dont je viens de parler soient de part et d'autre de la coupure (t_p). *Dans ces conditions, on voit immédiatement que $f(z)$ est holomorphe, même au voisinage du point $\frac{t_p}{\xi}$.* Il ne s'agit ici que des valeurs de $f(z)$ susceptibles d'être atteintes quand l'on fait suivre à z un chemin partant de o et aboutissant à $\frac{t_p}{\xi}$ d'un certain côté de la coupure (t_p); on aurait le même résultat si le chemin que décrit z aboutissait à $\frac{t_p}{\xi}$ de l'autre côté; mais les deux valeurs obtenues pour $f(z)$ ne seraient pas forcément égales. *On voit donc qu'en général, si les coupures (t_p) ne sont pas essentielles, $f(z)$ n'est plus uniforme.*

Imaginons que z parcoure un chemin fermé partant de z_0 $\left(\text{voisin de } \frac{t_p}{\xi}\right)$ et y revenant après avoir franchi m_p fois la coupure (t_p) dans le même sens, sans en franchir aucune autre. Les considérations précédentes permettent de calculer aisément la quantité dont s'est accrue $f(z_0)$ [1] : il suffit d'appliquer les méthodes de M. Hermite sur les intégrales à coupures. Désignons par R_p le résidu $F(t)$ au point t_p. En supposant que ce point soit un pôle simple de $F(t)$, la quantité en question est

$$2 m_p \pi i R_p \frac{1}{z_0} \varphi\left(\frac{t_p}{z_0}\right). \tag{1}$$

---

(1) $f(z_0)$ désigne ici la valeur en z_0 de la branche principale de $f(z)$.

Dans les conditions indiquées, $f(z)$ a donc, dans le domaine du point $\frac{t_p}{\xi}$, une infinité de déterminations se déduisant de la détermination principale par addition de la quantité précédente où l'on donne successivement à m_p toutes les valeurs positives ou négatives.

Plus généralement, supposons que

$$F(t) = \frac{1}{(t - t_p)^\alpha},$$

α désignant un certain entier positif. La quantité dont s'accroît $f(z_0)$ est le produit de $2 m_p \pi i$ par le résidu de $\varphi(x) F(z_0 x)$ pour $x = \xi_0$, ξ_0 étant donné par la formule

$$z_0 \xi_0 = t_p.$$

Or, dans le voisinage de ξ_0 (qui est lui-même très voisin de ξ), $\varphi(x)$ est holomorphe et l'on peut écrire

$$\varphi(x) = \sum_0^\infty \frac{1}{h!} \frac{d^h \varphi(\xi_0)}{dx^h} (x - \xi_0)^h.$$

D'autre part

$$F(z_0 x) = \frac{1}{t_p^\alpha} \frac{1}{\left(\frac{x}{\xi_0} - 1\right)^\alpha} = \frac{1}{z_0^\alpha} \frac{1}{(x - \xi_0)^\alpha}.$$

Le résidu considéré est donc

$$2 m_p \pi i \frac{1}{(\alpha - 1)!} \frac{d^{\alpha-1} \varphi\left(\frac{t_p}{z_0}\right)}{dx^{\alpha-1}} \frac{1}{z_0^\alpha}.$$

C'est une généralisation évidente de la formule établie plus haut pour le cas où t_p est pôle simple de $F(t)$.

Si t_p est un point singulier quelconque (pôle d'ordre général ou point essentiel) de la fonction *uniforme* $F(t)$, on a par la formule de Laurent

$$F(t) = \sum_0^\infty A_\alpha (t - t_p)^\alpha + \sum_0^\infty B_\beta \frac{1}{(t - t_p)^{\beta+1}};$$

et il vient

$$2 m_p \pi i \sum_1^\infty \frac{B_{\beta-1}}{(\beta - 1)} \frac{1}{z_0^\beta} \frac{d^{\beta-1} \varphi\left(\frac{t_p}{z_0}\right)}{dx^{\beta-1}}$$

pour expression de la quantité dont s'accroît $f(z_0)$.

Dans le cas, tout à fait général, où $F(t)$ n'est plus uniforme et où t_p est un point d'espèce quelconque de cette fonction, il faut calculer directement le résidu de

$\varphi(x) F(z_0 x)$ pour $x = \xi_0$. Nous nous bornerons, pour énoncer nos conclusions, à considérer la formule simple relative au cas où t_p est pôle simple. On verra d'ailleurs que ces conclusions sont néanmoins générales.

Notre formule (1), établie pour le voisinage du point $\frac{t_p}{\xi}$, peut être étendue à tout le plan par prolongement analytique. Mais on ne considère toujours pour z que des chemins ne rencontrant que la seule coupure (t_p).

La dernière restriction est inutile. Les mêmes raisonnements montrent que, si z est regardé comme pouvant décrire un chemin quelconque, $f(z)$ a une infinité de déterminations qui se déduisent de la détermination principale par addition du terme

$$2\pi i \sum m_p \mathrm{R}_p \frac{1}{z} \varphi\left(\frac{t_p}{z}\right)$$

où m_p et R_p ont la même signification que tout à l'heure et où le signe $\sum$ s'étend à l'ensemble des coupures traversées.

Une importante conclusion découle de là : $f(z)$ *est holomorphe en tout point, sauf aux points* t_p *et aux points* $\frac{t_p}{x_p}$. *Mais ces derniers points ne sont singuliers que pour les branches de* $f(z)$ *autres que la branche principale. Il en est de même du point* 0. *Quant au point* ∞, *c'est en général un point singulier pour toutes les branches.*

Il est manifeste que ce théorème s'étend au cas où la distribution des points x_p est absolument quelconque. Mais alors les branches de $f(z)$ autres que la branche principale peuvent avoir des singularités non isolées, par exemple des coupures essentielles ou des espaces lacunaires. Ainsi soit

$$\varphi(x) = \sum_0^\infty a^n x^{n^2} \qquad (0 < a < 1).$$

Toutes les branches de $f(z)$, sauf la branche principale, sont holomorphes à l'extérieur du cercle de rayon 1 et admettent la circonférence de ce cercle comme coupure.

Il est, enfin, bien entendu que, s'il y avait des points x_p dont les affixes fussent réelles et comprises entre 0 et 1, on devrait d'abord supposer ces points tels que l'intégrale

$$\int_0^1 |\varphi(x)|\, dx$$

ait un sens. Il faudrait ensuite avoir rendu $\varphi(x)$ uniforme par des conventions appropriées. Cela fait, on trouverait comme points singuliers de *toutes* les branches de $f(z)$, outre les points t_p, ceux des points $\frac{t_p}{x_p}$ qui correspondent à des x_p situés sur le segment $(0, 1)$ du plan (x).

16. Pour finir, voyons sur un exemple simple comment on déterminerait le degré de généralité des représentations précédentes.

Soit $f(z)$ une fonction analytique n'ayant à distance finie que le point singulier $z = 1$. Supposons qu'un circuit autour de ce point change $f(z)$ en $f(z) + f_1(z)$. Je pose

$$2\pi i \frac{1}{z} \varphi\left(\frac{1}{z}\right) = f_1(z).$$

D'où

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{x} f_1\left(\frac{1}{x}\right).$$

Si l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{1}{x} \left| f_1\left(\frac{1}{x}\right) \right| dx$$

a un sens, je considère la fonction

$$\int_0^1 \frac{\varphi(x)}{1 - zx} dx.$$

Il est clair que la différence

$$f(z) - \int_0^1 \frac{\varphi(x)}{1 - zx} dx$$

est une fonction *uniforme* n'ayant à distance finie que le point singulier $z = 1$.

On voit la conclusion qui découle de là : il y aurait lieu de chercher à la généraliser.

17. Le cas le plus complexe que j'envisagerai dans ce Mémoire sera celui de l'intégrale

$$\int_{(C)} \varphi(x) A(x, z) \, dx,$$

C désignant un chemin de longueur finie ouvert ou fermé, et A une fonction analytique de z holomorphe autour du point $z = 0$.

On obtiendrait sans peine, dans ce cas général, des théorèmes analogues à ceux que nous venons de rencontrer à propos d'intégrales plus simples : je n'y insisterai pas.

Les coupures sont ici les lieux géométriques engendrés par les points singuliers de A envisagé comme fonction de z lorsque le point x parcourt la ligne C : lieux qui peuvent être des points, des courbes ou même des aires.

Enfin il m'arrivera aussi d'avoir à considérer des intégrales dont les limites seront infinies. La discussion de ces intégrales, envisagées comme définissant des fonctions de z, se fera toujours très facilement par les procédés classiques.

Il est clair, en vertu de la proposition fondamentale de la théorie du prolongement, que, si l'on met une même série sous plusieurs des formes décrites plus haut, les diverses définitions que l'on obtient pour la fonction étudiée sont équivalentes : seule peut varier la région du plan où le prolongement se trouve effectué.

Il resterait à voir quel degré précis de généralité présente la méthode dont je viens d'exposer les principes. On examinerait pour cela les propriétés caractéristiques des fonctions représentées par les divers types d'intégrales que j'ai signalés. J'ai donné plus haut un exemple d'un pareil examen. Mais la discussion générale ne saurait trouver place ici.

18. Un mot de conclusion. La méthode que je propose est basée sur l'emploi de certaines intégrales définies dépendant d'une variable z. Dans tous les cas, le problème du prolongement analytique est ramené au choix d'une forme simple convenable pour le facteur du coefficient différentiel qui contient z, car c'est ce facteur qui détermine les propriétés de continuité de l'intégrale, et à la mise des coefficients de la série donnée sous la forme de certaines intégrales définies, car c'est cela qui permet d'identifier la série en question avec une intégrale du type choisi. Le présent Mémoire est consacré à la résolution de ce double problème dans les cas les plus usuels.

On voit combien est vaste le champ des applications qui se présentent et, si j'ose dire, combien la méthode proposée semble élastique. Une longue et patiente observation des faits analytiques naturels peut seule nous apprendre quels sont les types d'intégrales qu'il est le plus avantageux de considérer. Il faudrait avoir établi beaucoup de formules relatives au calcul inverse des intégrales définies pour être en mesure de tirer plein parti de notre procédé de prolongement, comme il a fallu réaliser beaucoup de quadratures avant de pouvoir manier facilement les intégrales définies ordinaires. On comprendra donc que je me borne, dans une première étude, à des généralités et à des exemples.

IV. — Quelques cas simples où le coefficient général α_n est une fonction analytique de n.

19. Si nous envisageons une série de Taylor

$$\sum_0^\infty \alpha_n z^n$$

convergente dans le cercle de rayon 1, les circonstances les plus simples sont celles où l'on connaît l'expression explicite de α_n en fonction de n. Ce cas se rencontre d'ailleurs fréquemment dans les applications, et nous allons tout d'abord l'étudier.

Loin de prétendre épuiser la question, je veux surtout indiquer des méthodes précises et les illustrer de quelques exemples bien nets.

20. Je traiterai d'abord un cas particulier qui fera comprendre la marche que je compte suivre en général.

Soit la série

$$\varphi(z) = \sum_1^\infty \frac{z^n}{n^p},$$

où p désigne un nombre quelconque dont la partie réelle est positive. On a, d'après la théorie des intégrales eulériennes,

$$\frac{1}{n^p} = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^1 \left(\mathrm{L}\frac{1}{x}\right)^{p-1} x^{n-1}\,dx;$$

d'où

$$\varphi(z) = \frac{z}{\Gamma(p)} \int_0^1 \left(\mathrm{L}\frac{1}{x}\right)^{p-1} \frac{dx}{1 - zx}.$$

Cette nouvelle expression représente la fonction $\varphi(z)$ dans tout le plan et met en pleine lumière ses diverses propriétés. Voici ce qu'on en déduit à simple inspection, conformément aux principes exposés plus haut [1].

La fonction $\varphi(z)$ est holomorphe en tout point du plan, sauf peut-être pour z réel et plus grand que 1. La partie $(+1, +\infty)$ de l'axe réel OX est, en apparence, une coupure pour $\varphi(z)$. Mais, $\mathrm{L}\frac{1}{x}$ étant holomorphe, cette coupure n'est pas essentielle, et les seuls points singuliers effectifs sont $z = 1$ et $z = \infty$.

On peut calculer numériquement $\varphi(z)$ et ses dérivées successives à l'aide de la formule précédente, et cela sans intermédiaires, pour un point quelconque du plan. Il vient, par exemple,

$$\frac{\varphi^{(n)}(z)}{n!} = \frac{z}{\Gamma(p)} \int_0^1 \left(\mathrm{L}\frac{1}{x}\right)^{p-1} \frac{x^n}{(1 - zx)^{n+1}}\,dx + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^1 \left(\mathrm{L}\frac{1}{x}\right)^{p-1} \frac{x^{n-1}}{(1 - zx)^n}\,dx,$$

ce qui fournit le moyen de construire immédiatement les séries auxquelles conduirait la méthode ordinaire de prolongement.

La fonction $\varphi(z)$ n'est pas uniforme. Appelons $[\varphi(z)]$ sa *détermination prin-*

---

(1) Je suppose p réel pour simplifier.

cipale (celle qui est développable en série entière autour de l'origine) et désignons par la caractéristique L la branche du logarithme qui se réduit, pour les valeurs réelles et positives de la variable, à la détermination arithmétique. L'expression générale des valeurs de $\varphi(z)$ est

$$[\varphi(z)] + \frac{2k\pi i}{\Gamma(p)}(\mathrm{L}z + 2h\pi i)^{p-1},$$

si l'on a tourné k fois autour de $z = 1$ et h fois autour de $z = 0$. On voit que ce dernier point est singulier pour toutes les branches de $\varphi(z)$ autres que la branche principale.

La fonction $\mathrm{L}\frac{1}{x}$ étant positive pour $0 \leqq x \leqq 1$, l'équation $\varphi(z) = 0$ ne peut avoir sur le plan principal, outre la racine nulle, que des racines réelles et supérieures à 1.

Pour $z < 0$, $\varphi(z)$ prend des valeurs réelles et négatives, et le rapport positif

$$\frac{\varphi(z)}{z}$$

décroît à mesure que la valeur absolue de z augmente.

Quand z devient infini avec un argument différent de zéro, le rapport $\frac{\varphi(z)}{z}$ tend vers zéro.

Qu'arrive-t-il enfin lorsque z tend vers 1? Si $p > 1$, $\varphi(z)$ reste fini, et l'on a

$$\varphi(1) = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots = \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^1 \left(\mathrm{L}\frac{1}{x}\right)^{p-1} \frac{dx}{1-x},$$

car l'intégrale du second membre conserve alors un sens. Mais, si $p < 1$, posons

$$z = 1 - \varepsilon e^{i\theta}, \qquad \varepsilon > 0, \qquad \theta \neq \pi.$$

Le changement de variable $\mathrm{L}\frac{1}{x} = t\varepsilon$ donne

$$\mathrm{J} = \frac{\Gamma(p)(1-z)^{1-p}\varphi(z)}{z} = e^{i(1-p)\theta}\int_0^\infty t^{p-1}\frac{\varepsilon}{e^{\varepsilon t} - (1 - \varepsilon e^{i\theta})}\,dt.$$

Faisons tendre ε vers zéro, θ restant fixe,

$$\lim \mathrm{J} = e^{i(1-p)\theta}\int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{t + e^{i\theta}}\,dt.$$

Soit $\tau = te^{-i\theta}$. On trouve bien facilement

$$\lim \mathrm{J} = \int_0^\infty \frac{\tau^{p-1}}{1+\tau}\,d\tau = \frac{\pi}{\sin p\pi} = \Gamma(p)\,\Gamma(1-p).$$

Donc, lorsque z tend vers 1, $\varphi(z)$ a pour valeur asymptotique

$$\frac{\Gamma(1-p)}{(1-z)^{1-p}}.$$

C'est un résultat que M. Appell avait déjà établi en supposant $\theta = 0$ (¹).

21. Le cas de la série

$$\varphi(z) = \sum_1^\infty n^p z^n$$

peut se traiter de la même façon.

Si p est un entier positif, $\varphi(z)$ est une fraction rationnelle ayant $z=1$ pour pôle unique d'ordre $p+1$. Le produit

$$(1-z)^{p+1}\varphi(z)$$

est en effet développable par la formule de Taylor, et les coefficients du développement (comme on le voit de proche en proche) sont, à partir d'un certain rang, les différences d'ordre $p+1$ des quantités n^p. Ces coefficients sont nuls. Donc $(1-z)^{p+1}\varphi(z)$ se réduit à un polynome $P(z)$ et la conclusion se trouve ainsi établie.

Si p est positif sans être entier, appelons q l'entier qui lui est immédiatement supérieur. On a

$$\varphi(z) = \frac{z}{\Gamma(q-p)}\int_0^1 \left(L\frac{1}{x}\right)^{q-p-1} \frac{Q(zx)}{(1-zx)^{q+1}}\,dx,$$

en posant

$$(1-z)^{q+1}\sum_1^\infty n^q z^{n-1} = Q(z),$$

et l'étude de $\varphi(z)$ est aisée à faire, puisque $Q(z)$ est un polynome.

Nous voyons, en résumé, que notre méthode permet d'étudier complètement, dans tout le plan, les fonctions définies autour de l'origine par une série du type

$$\sum_1^\infty n^p z^n,$$

quelles que soient les valeurs réelles ou imaginaires de p.

Cette proposition s'étend sans difficultés au cas d'une combinaison linéaire des séries précédentes.

(¹) P. Appell, *Comptes rendus;* 1878.

Ce premier exemple étant traité avec quelque détail, on voit bien maintenant le mécanisme de la méthode; rien ne serait plus facile que de multiplier les remarques précédentes, et nous pouvons donc, sans insister davantage, aborder la démonstration de théorèmes plus généraux.

22. Considérons le cas où α_n est une fonction analytique de n régulière dans le domaine de l'infini. Soit

$$\alpha_n = \sum_0^\infty \frac{\lambda_p}{n^p},$$

la série étant convergente dès que le module de n dépasse une certaine limite. On a

$$|\lambda_p| < \lambda^p,$$

λ désignant une constante positive convenablement choisie. D'où

$$\alpha_n = \int_0^1 \varphi(x) x^{n-1}\, dx + \lambda_0,$$

avec

$$\varphi(x) = \sum_1^\infty \frac{\lambda_p \left(\mathrm{L}\,\frac{1}{x}\right)^{p-1}}{\Gamma(p)}.$$

Il est visible que $\varphi(x)$ est une fonction entière de $\mathrm{L}\,\frac{1}{x}$.

On a, pour $0 < x < 1$,

$$|\varphi(x)| < \frac{\lambda}{x^\lambda}.$$

Donc, l'intégrale qui donne α_n a un sens dès que n est supérieure à une certaine valeur n_0. Par conséquent,

$$f(z) = \sum_0^\infty \alpha_n z^n = \mathrm{P}(z) + z\int_0^1 \varphi(x)\frac{z^{n_0} x^{n_0}}{1 - zx}\, dx + \frac{\lambda_0 z^{n_0+1}}{1 - z},$$

en posant

$$\mathrm{P}(z) = \sum_0^{n_0} \alpha_n z^n.$$

La conclusion est immédiate : *$f(z)$ est une fonction non uniforme, holomorphe en tout point du plan, sauf pour $z = 1$ et $z = \infty$.* Les diverses particularités de $f(z)$ peuvent être étudiées sur l'expression précédente. Remarquons seulement que $z = 0$ est un point singulier pour toutes les branches de $f(z)$ autres que la branche principale.

Les mêmes conclusions subsistent si le développement de α_n contient un nombre fini de termes affectés d'exposants positifs, *par exemple si le point x est un pôle pour α_n*.

Enfin rien n'empêche de traiter aussi le cas où α_n est exprimable par une série procédant suivant des puissances positives *quelconques* de $\frac{1}{n}$, *en particulier le cas où α_n est une fonction algébrique de n régulière à l'infini ou n'y ayant qu'un pôle* (¹).

Nous retrouvons ainsi, d'une façon tout à fait simple, un résultat signalé déjà par M. Fabry et relatif au cas où α_n est une *fraction rationnelle de n*. Mais nous avons en plus le moyen de découvrir toutes les propriétés des fonctions définies par les séries de Taylor considérées, puisque nous en possédons une représentation analytique valable pour tout le plan.

Je citerai les exemples suivants :

$$\sum_0^\infty \frac{z^n}{n^2+1} = 1 + z\int_0^1 \sin\left(\mathrm{L}\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{1-zx}$$

et

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n} e^{-\frac{a}{n}} z^n = z\int_0^1 \mathrm{J}_0\left(2\sqrt{a\,\mathrm{L}\frac{1}{x}}\right)\frac{dx}{1-zx},$$

qui nous seront utiles plus loin. Dans le second exemple, J_0 désigne la fonction de Bessel. Remarquons que le premier donne une expression analytique très simple, et valable pour tout le plan, d'une transcendante que les travaux de Tchebicheff ont montrée ne pouvoir résulter d'aucune combinaison de fonctions algébriques, exponentielles et logarithmiques en nombre limité.

En résumé, nous savons désormais faire l'étude complète des séries où α_n est développable suivant des puissances de $\frac{1}{n}$ dont quelques-unes seulement (en nombre fini) peuvent être négatives.

Il est parfois possible de déduire de là des généralisations. Si, par exemple, on a

$$\alpha_n = \frac{1}{n}\sum_0^\infty \lambda_p e^{-\frac{a_p}{n}},$$

la série $\sum_0^\infty |\lambda_p|$ étant convergente et les nombres a_p étant positifs, il vient

$$\sum_1^\infty \alpha_n z^n = z\int_0^1 \varphi(x)\,\frac{dx}{1-zx},$$

(¹) On a alors, pour α_n, un développement suivant les puissances de $n^{-\frac{1}{q}}$, q étant entier.

avec

$$\varphi(x) = \sum_{0}^{\infty} \lambda_p J_0\left(2\sqrt{a_p L \frac{1}{x}}\right).$$

Comme le module de $J_0(t)$ est toujours inférieur à 1 pour t réel, on voit que $\varphi(x)$ remplit les conditions prescrites. Ici la coupure peut être effective, car $\varphi(x)$ n'est pas forcément analytique.

23. De ce qui précède peut se conclure un théorème auquel j'ai été conduit en même temps que M. Leau (1).

Soit

$$S = \sum_{0}^{\infty} \frac{\lambda_p}{n^p} = S_n + R_n,$$

avec

$$S_n = \lambda_0 + \frac{\lambda_1}{n} + \ldots + \frac{\lambda_n}{n^n}.$$

Nous savons étudier la série

$$\sum_{1}^{\infty} S\left(\frac{1}{n}\right) z^n,$$

donc aussi la série

$$\sum_{1}^{\infty} S_n\left(\frac{1}{n}\right) z^n,$$

puisque celle-ci ne diffère de la première que par la soustraction de la troisième série

$$\sum_{1}^{\infty} R_n\left(\frac{1}{n}\right) z^n,$$

qui définit évidemment une fonction entière.

Sans insister sur les conséquences que l'on peut tirer de là, remarquons que, si les coefficients α_n sont quelconques, un procédé d'étude consiste à essayer de les mettre sous la forme

$$\alpha_n = \lambda_0 + \frac{\lambda_1}{n} + \ldots + \frac{\lambda_n}{n^n},$$

en calculant les valeurs des λ_p à l'aide des équations linéaires précédentes. Ces équations, en nombre infini, sont résolubles de proche en proche, puisque chacune d'elles contient seulement une inconnue de plus que les précédentes.

(1) Leau, *Journal de Mathématiques;* 1899.

L'unique condition requise est que la série

$$\sum_0^\infty \lambda_n t^n$$

ne soit pas toujours divergente.

24. Après avoir examiné le cas où α_n est une fonction analytique de n régulière à l'infini, supposons que $n = \infty$ soit un point singulier de α_n. Nous imaginerons d'abord que ce point soit singulier pour α_n, non pas en lui-même, mais comme limite de points singuliers.

On a

$$\frac{1}{(n + a_p)^{b_q}} = \int_0^1 \frac{x^{a_p}\left(\mathrm{L}\frac{1}{x}\right)^{b_q - 1}}{\Gamma(b_q)} x^{n-1}\, dx,$$

si les parties réelles de a_p et de b_q sont positives. Si donc α_n est de la forme

$$\sum\sum \frac{\lambda_{p,q}}{(n + a_p)^{b_q}},$$

les parties réelles de a_p et de b_q étant positives et la série

$$\sum\sum \left|\frac{\lambda_{p,q}}{a_p^{b_q}}\right|$$

étant convergente, on pourra étudier dans tout le plan la fonction $\sum_0^\infty \alpha_n z^n$. Diverses généralisations sont d'ailleurs immédiates. On trouve, par exemple,

$$\alpha_n = \sum_0^\infty \frac{\lambda_p}{n^2 + \mu_p^2} = \int_0^1 \left[\sum_0^\infty \frac{\lambda_p}{\mu_p} \sin\left(\mu_p \mathrm{L}\frac{1}{x}\right)\right] x^{n-1}\, dx,$$

sous certaines conditions très larges qu'il serait bien facile d'écrire.

On atteint ainsi des cas étendus où le coefficient général α_n est donné par une série simple ou multiple de fractions simples. Je me contenterai de signaler brièvement une application.

Soit

$$\varphi(z) = \sum_0^\infty \frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} z^n.$$

On a

$$\frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} = -\mathrm{C} + n \sum_1^\infty \frac{1}{p(n+p)},$$

C désignant la constante d'Euler. D'où

$$\varphi(z) = \frac{C}{z-1} + z\int_0^1 L\frac{1}{1-x}\,\frac{dx}{(1-zx)^2};$$

et l'on voit que $\varphi(z)$ n'a pas d'autres points singuliers que $z=1$ et $z=\infty$.

D'une façon générale, je vais montrer que cette conclusion subsiste *si α_n est la dérivée logarithmique d'une fonction entière de genre fini n'ayant que des zéros simples à parties réelles négatives.*

Soient p le genre et $-a_q$ un zéro de la fonction entière. On a, d'après le théorème de M. Mittag-Leffler,

$$\alpha_n = P(n) + \sum_0^\infty \left[\frac{1}{n+a_q} - \frac{1}{a_q} + \ldots + (-1)^p\frac{n^{p-1}}{a_q^p}\right],$$

P désignant un polynome de degré p et la série $\sum\limits_0^\infty \frac{1}{|a_q|^{p+1}}$ étant convergente. Nous n'avons pas à nous préoccuper de la série

$$\sum_0^\infty P(n)\,z^n$$

dont l'étude est immédiate (n° **21**). Cela posé, le second terme de α_n peut s'écrire

$$(-1)^p n^p \sum_0^\infty \frac{1}{a_q^p(n+a_q)};$$

ce qui peut se mettre sous la forme

$$(-1)^p n^p \int_0^1 \varphi(x)\,x^{n-1}\,dx,$$

en vertu des remarques énoncées plus haut. Mais on a (n° **21**)

$$\sum_1^\infty n^p(zx)^{n-1} = \frac{Q(zx)}{(1-zx)^{p+1}}.$$

D'où

$$\sum_1^\infty \alpha_n z^n = \sum_1^\infty P(n)\,z^n + (-1)^p z\int_0^1 \varphi(x)\,\frac{Q(zx)}{(1-zx)^{p+1}}\,dx,$$

et la question est résolue.

Finalement, nous avons le théorème suivant :

Si α_n est la dérivée logarithmique d'une fonction entière de genre fini n'ayant que des zéros simples à parties réelles négatives, la série $\sum_0^\infty \alpha_n z^n$ n'a que les points singuliers $z = 1$ et $z = \infty$ (¹).

Il n'y aurait aucune difficulté à étendre ces considérations au cas où la fonction entière aurait des zéros multiples. Mais, sans plus insister, je passe à l'examen du cas où α_n est une fonction entière de n, ce qui va nous donner un nouveau théorème.

25. Établissons d'abord un lemme. On sait, depuis les travaux de M. Hadamard, que *la condition nécessaire et suffisante pour qu'une série de Taylor $\sum_0^\infty \alpha_n z^n$ représente une fonction entière est que la quantité $|\alpha_n|^{\frac{1}{n}}$ tende vers zéro quand n augmente indéfiniment*. Nous allons généraliser ce résultat et démontrer que *la condition nécessaire et suffisante pour qu'une série de Taylor $\sum_0^\infty \alpha_n z^n$ représente une fonction uniforme dans tout le plan n'ayant à distance finie qu'un point singulier $z = \frac{1}{\lambda}$ est que l'on ait*

$$\alpha_n = a_n + b_n \lambda^n,$$

les quantités

$$|a_n|^{\frac{1}{n}}, \quad |\Delta^{(n)} b_0|^{\frac{1}{n}}$$

tendant vers zéro quand n augmente indéfiniment. On a posé, dans cet énoncé,

$$\Delta^{(n)} b_0 = b_n - C_n^1 b_{n-1} + C_n^2 b_{n-2} - C_n^3 b_{n-3} + \ldots + (-1)^n b_0,$$

conformément aux notations usitées dans la théorie des différences, les lettres C_n^p désignant les coefficients binomiaux.

En effet, soit $f(z)$ une fonction uniforme n'ayant à distance finie qu'un seul point singulier : $z = \frac{1}{\lambda}$. La formule de Laurent nous donne

$$f(z) = H(z) + G\left(\frac{1}{1 - \lambda z}\right),$$

H et G désignant deux fonctions entières.

(¹) Un déplacement de quelques rangs dans la série permet de traiter le cas plus général où les pôles de α_n sont tous situés à gauche d'une parallèle quelconque à oy.

Il est clair que $f(z)$ est développable, autour de o, par la formule de Taylor

$$f(z) = \sum_0^\infty \alpha_n z^n.$$

Le cercle de convergence a pour rayon $\frac{1}{|\lambda|}$.

On peut écrire

$$\alpha_n = a_n + b_n \lambda^n$$

et $|a_n|^{\frac{1}{n}}$ tend vers zéro, puisque a_n est le coefficient du terme de rang n dans $H(z)$. Étudions b_n.

Soit

$$G(t) = \sum_0^\infty c_p t^{p+1}.$$

Le changement de variable

$$\frac{u}{u-1} = v, \qquad \frac{v}{v-1} = u,$$

fait dans l'égalité

$$G\left(\frac{1}{1-u}\right) = \sum_0^\infty b_n u^n,$$

donne

$$\frac{G(1-v)}{1-v} = -\sum_0^\infty b_n \frac{v^n}{(v-1)^{n+1}} = \sum_0^\infty (-v)^n \Delta^{(n)} b_0.$$

Or, le premier membre est une fonction entière de v. Donc $|\Delta^{(n)} b_0|^{\frac{1}{n}}$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Les conditions énoncées sont ainsi *nécessaires*.

Il est facile de voir qu'elles sont aussi *suffisantes*. En effet, le calcul précédent permet de déterminer H et G comme fonctions entières à partir des a_n et b_n, pourvu que les quantités

$$|a_n|^{\frac{1}{n}}, \quad |\Delta^{(n)} b_0|^{\frac{1}{n}}$$

tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

Plus généralement, la condition nécessaire et suffisante pour que la série de Taylor $\sum_0^\infty \alpha_n z^n$ représente une fonction uniforme dans tout le plan n'ayant qu'un nombre limité de points singuliers

$$\frac{1}{\lambda_0}, \quad \frac{1}{\lambda_1}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{\lambda_p}$$

est que l'on ait

$$\alpha_n = a_n + \sum_0^p b_{n,i}\lambda_i^n,$$

les quantités

$$|a_n|^{\frac{1}{n}}, \quad |\Delta^{(n)} b_{0,i}|^{\frac{1}{n}}$$

tendant vers zéro quand n augmente indéfiniment.

Il serait possible, sans aucun doute, d'étendre ces considérations, à l'aide du théorème de M. Mittag-Leffler, au cas de fonctions uniformes possédant une infinité dénombrable de points singuliers, au moins sous certaines réserves.

Je me bornerai à faire remarquer que, si l'on peut réaliser l'égalité

$$\alpha_n = a_n + \lambda^n b_n \int_0^1 \varphi(x)\, x^n\, dx,$$

on a

$$f(z) = \mathrm{H}(z) + \int_0^1 \varphi(x)\, \mathrm{G}\left(\frac{1}{1-\lambda z x}\right) dx.$$

L'étude de la fonction $f(z)$ est alors facile, et certaines généralisations sont d'ailleurs immédiates.

26. Nous allons appliquer ces résultats au cas où l'on a

$$\alpha_n = \sum_0^\infty \frac{\lambda_p}{p!} n^p,$$

la série

$$\sum_0^\infty \lambda_p a^p$$

définissant une fonction entière de a. Ici,

$$\Delta^{(n)}\alpha_0 = \lambda_n + \sum_{n+1}^\infty \frac{\lambda_p}{p!}\,[n^p - \mathrm{C}_n^1(n-1)^p + \mathrm{C}_n^2(n-2)^p - \mathrm{C}_n^3(n-3)^p + \ldots],$$

en vertu de théorèmes bien connus relatifs à la théorie des différences ; d'où

$$|\Delta^{(n)}\alpha_0| < |\lambda_n|\,[1 + \mathrm{M}(2e)^n],$$

M désignant une certaine constante. Donc $|\Delta^{(n)}\alpha_0|^{\frac{1}{n}}$ tend vers zéro en même temps que $|\lambda_n|^{\frac{1}{n}}$. Ainsi, *si α_n est une fonction entière de n du type indiqué* (1),

(1) Il suffit, en particulier, que α_n soit une fonction entière de n *d'ordre apparent inférieur à* 1.

la série $\sum\limits_0^\infty \alpha_n z^n$ *définit une fonction* $f(z)$ *uniforme n'ayant à distance finie que le point singulier* $z = 1$: $f(z)$ *est d'ailleurs régulière à l'infini.*

Soit, par exemple,

$$\alpha_n = \frac{1}{n+1} g\left(\frac{1}{n+1}\right) J_0(2i\sqrt{n}),$$

J_0 désignant la fonction de Bessel et g une fonction holomorphe de $\frac{1}{n+1}$. On a

$$\sum_0^\infty \alpha_n z^n = \int_0^1 \varphi(x)\, G\left(\frac{1}{1-zx}\right) dx,$$

en vertu de ce qui précède, et l'étude de la série peut se faire sur cette formule.

Si α_n était développable suivant les puissances de $n^{\frac{1}{p}}$, les autres conditions restant remplies et p désignant un entier positif, on écrirait :

$$\alpha_n = \varphi_0(n) + n^{\frac{1}{p}} \varphi_1(n) + \ldots + n^{\frac{p-1}{p}} \varphi_{p-1}(n);$$

chacune des lettres φ_i représente une fonction entière de n du type précédent, et l'on serait ainsi ramené à une combinaison linéaire des solutions que nous savons obtenir.

Exemple :

$$\alpha_n = e^{\sqrt[3]{n}} = \sum_0^\infty \frac{n^p}{(3p)!} + \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}} \sum_0^\infty \frac{n^{p+1}}{(3p+1)!} + \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}} \sum_0^\infty \frac{n^{p+1}}{(3p+2)!};$$

d'où

$$\sum_1^\infty \alpha_n z^n = z\, G_1\left(\frac{1}{1-z}\right)$$
$$+ \frac{z}{\Gamma(\frac{2}{3})} \int_0^1 \left(L\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{3}} G_2\left(\frac{1}{1-zx}\right) dx + \frac{z}{\Gamma(\frac{1}{3})} \int_0^1 \left(L\frac{1}{x}\right)^{-\frac{2}{3}} G_3\left(\frac{1}{1-zx}\right) dx,$$

formule obtenue immédiatement par application des diverses remarques énumérées ci-dessus et dans laquelle les lettres

$$G_1, \quad G_2, \quad G_3$$

désignent des fonctions entières aisément calculables.

27. Le cas où α_n est une fonction entière de n peut encore être traité par une méthode se rapprochant davantage de celle qui nous occupe dans ce Mémoire.

Soit

$$f(z)=\sum_0^\infty \alpha_n z^n,$$

avec

$$\alpha_n=\sum_0^\infty \frac{\lambda_p}{p!} n^p,$$

la série

$$\sum_0^\infty \lambda_p a^p,$$

ayant un certain cercle de convergence. Posons

$$\varphi(\theta)=\frac{1}{2}\lambda_0+\sum_1^\infty \lambda_p a^p \cos p\theta.$$

$$e^{\frac{n}{a}\cos\theta}\cos\left(\frac{n}{a}\sin\theta\right)=\sum_0^\infty \frac{1}{p!}\frac{n^p}{a^p}\cos p\theta.$$

Supposons a choisi de façon que la série $\varphi(\theta)$ converge. Alors on a

$$\alpha_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \varphi(\theta)\, e^{\frac{n}{a}\cos\theta}\cos\left(\frac{n}{a}\sin\theta\right)d\theta$$

et

$$f(z)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \varphi(\theta)\frac{1-z\,e^{\frac{\cos\theta}{a}}\cos\left(\frac{\sin\theta}{a}\right)}{1-2z\,e^{\frac{\cos\theta}{a}}\cos\left(\frac{\sin\theta}{a}\right)+z^2 e^{\frac{2\cos\theta}{a}}}d\theta.$$

D'où le prolongement de la série $f(z)$.

Supposons, pour fixer les idées, a réel et positif. *On voit que* $f(z)$ *est uniforme et holomorphe dans toute la région du plan située du même côté que l'origine par rapport à une certaine courbe.* Cette courbe constitue une coupure qui peut n'être pas essentielle. En posant

$$z=x+iy,$$

on trouve une représentation paramétrique de la coupure

$$x=e^{-\frac{\cos\theta}{a}}\cos\left(\frac{\sin\theta}{a}\right),\qquad y=e^{-\frac{\cos\theta}{a}}\sin\left(\frac{\sin\theta}{a}\right);$$

et, pour construire la courbe, il suffit de faire varier θ de $-\pi$ à $+\pi$. Plusieurs cas sont à distinguer.

Si a peut être pris aussi grand que l'on veut, c'est-à-dire si la série $\sum_0^\infty \lambda_p a^p$ définit une fonction entière, la coupure se réduit à une petite courbe fermée entourant le point 1. La fonction $f(z)$ est alors uniforme et holomorphe dans tout le plan, sauf au point 1, qui est un pôle ou un point essentiel. On peut prendre, par exemple, pour α_n l'une des expressions suivantes

$$\frac{e^{\sqrt{n}} + e^{-\sqrt{n}}}{2}, \quad \cos(\sqrt{n}), \quad \sum_0^\infty e^{-p^2} n^p.$$

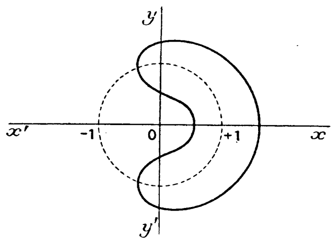
Elles appartiennent toutes au type étudié.

Si l'on a

$$0 < \frac{1}{a} < \pi,$$

la coupure affecte la forme qu'indique la *fig.* 1 ci-dessous. La fonction $f(z)$ est uni-

Fig. 1.



forme et holomorphe à l'extérieur de cette courbe. Tel est le cas où

$$\alpha_n = \sum_0^\infty e^{-p \mathrm{L} p} n^p.$$

On peut prendre ici

$$a = e$$

(ou, tout au moins, a peut être pris aussi peu inférieur qu'on le veut à e), comme l'apprend l'emploi de la valeur asymptotique de $\Gamma(p+1)$. Tel est encore le cas où $\alpha_n = \mathrm{J}_0(n)$, qui correspond à $a = 1$ (1).

Enfin, si

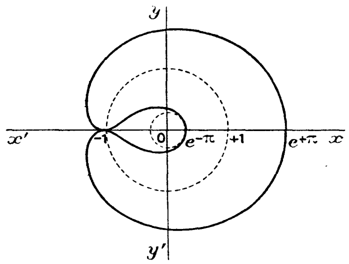
$$\frac{1}{a} = \pi,$$

(1) On a

$$\mathrm{J}_0(n) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos(nt)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \sum_0^\infty (-1)^p \frac{n^{2p}}{(2.4.6\ldots 2p)^2} = \sum_0^\infty (-1)^p \frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{2.4.6\ldots 2p} \frac{n^{2p}}{(2p)!}.$$

la coupure a la forme indiquée (*fig.* 2). On n'a aucun renseignement sur $f(z)$, à moins que le rayon de convergence de $\sum_0^\infty \alpha_n z^n$ ne soit inférieur à 1. La même

Fig. 2.



circonstance a lieu pour $\frac{1}{a} > \pi$. Pour citer un exemple de ce cas, je prendrai

$$\alpha_n = \sum_0^\infty \lambda_p \frac{\pi^p n^p}{p!},$$

avec

$$0 < \lambda_p < \lambda.$$

Le rayon de convergence a ici pour valeur $e^{-\pi}$, si les λ_p sont convenablement choisis. Le raisonnement précédent montre alors que la série $\sum_0^\infty \alpha_n z^n$ n'a que le point $e^{-\pi}$ comme point singulier situé sur le cercle de convergence.

28. On peut encore retrouver les mêmes résultats à l'aide du théorème des résidus. Soit, en effet,

$$G(x) = \sum_0^\infty \lambda_p x^p.$$

Il vient

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} e^{\frac{n}{x}} \frac{G(x)}{x}\,dx;$$

d'où

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} \frac{G(x)}{x}\,\frac{dx}{1 - z e^{\frac{1}{x}}},$$

C désignant un contour fermé qui englobe l'origine.

Je n'insisterai pas sur ce point. Mais je ferai cependant remarquer que, si l'on a

$$\alpha_n = b_n \sum_0^\infty \frac{\lambda_p}{p!} n^p,$$

la quantité $|\Delta^{(n)} b_0|^{\frac{1}{n}}$ tendant vers zéro quand n devient infini, on peut écrire

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{(C)} \frac{G(x)}{x} G_1\left(\frac{1}{1 - ze^{\frac{1}{x}}}\right)dx,$$

G_1 étant une fonction entière.

La méthode indiquée dans ce paragraphe est particulièrement avantageuse, si l'on connaît les points singuliers de la série

$$G(a) = \sum_0^\infty \lambda_p a^p.$$

Dans ce cas, en effet, il vient

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{(C)} \frac{1}{x} G\left(\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{1 - ze^x},$$

C désignant un contour qui renferme à son intérieur toutes les singularités de $G\left(\frac{1}{x}\right)$. On peut prendre pour contour C un contour formé des pièces suivantes : 1° un petit cercle entourant l'origine; 2° des petits cercles entourant chacun des points singuliers α de $G\left(\frac{1}{x}\right)$; 3° des morceaux de courbes reliant chacun de ces derniers cercles au premier. Le contour C est ainsi une sorte de lacet multiple. Cela posé, la coupure est donnée ici par l'équation

$$z = e^{-x},$$

quand x décrit C. On voit que c'est un lacet multiple analogue au précédent, dont le centre est le point 1 et dont les branches vont tourner autour des points $e^{-\alpha}$. *La fonction $f(z)$ est holomorphe dans tout le point, sauf peut-être aux points $z = 1$ et $z = e^{-\alpha}$.*

29. Nous savons traiter le cas où α_n est une fonction entière de n d'ordre inférieur à 1. On pourrait songer, pour faire la discussion d'une série quelconque, à mettre son coefficient général α_n sous la forme d'une fonction entière à l'aide des procédés d'interpolation. Il est aisé de voir que cela ne donnerait rien de simple. Supposons en effet, pour plus de simplicité, que la série $\sum_0^\infty |\alpha_n|$ soit convergente (1). Posons

$$\varphi(\theta) = \sum_0^\infty \alpha_n \cos n\theta.$$

(1) Si cette condition n'était pas remplie, mais que le rayon de convergence de $\sum_0 \alpha_n z^n$ fût égal à 1, on opérerait, par exemple, sur les nombres $e^{-n}\alpha_n$.

On déduit de là

$$\alpha_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \varphi(\theta)\cos n\theta\, d\theta.$$

D'où

$$\alpha_n = \frac{2}{\pi}\sum_0^\infty \frac{(-1)^p n^{2p}}{(2p)!}\int_0^\pi \varphi(\theta)\theta^{2p}\, d\theta,$$

et α_n est bien mis sous forme d'une fonction entière. Mais ici

$$\lambda_{2p} = \int_0^\pi \varphi(\theta)\theta^{2p}\, d\theta.$$

On a donc, en général,

$$a = \frac{1}{\pi},$$

et l'on ne peut rien conclure. *Les méthodes d'interpolation nous ramènent à un problème précisément aussi difficile que celui du prolongement : l'étude de la série trigonométrique* $\varphi(\theta)$.

30. Un théorème semblable à celui du n° 23 peut être énoncé ici. Posons

$$\alpha_n = \sum_0^\infty \frac{\lambda_p}{p!} n^p = \mathrm{S}_n + \mathrm{R}_n,$$

avec

$$\mathrm{S}_n = \lambda_0 + \frac{\lambda_1}{1!}n + \frac{\lambda_2}{2!}n^2 + \ldots + \frac{\lambda_n}{n!}n^n.$$

Admettons que la série

$$\sum_0^\infty \lambda_p a^p$$

éfinisse une fonction entière. Nous savons étudier la série

$$\sum_0^\infty \alpha_n z^n,$$

donc aussi la série

$$\sum_0^\infty \mathrm{S}_n z^n,$$

car celle-ci ne diffère de la première que par la soustraction de la troisième série

$$\sum_0^\infty \mathrm{R}_n z^n,$$

qui représente évidemment une fonction entière.

Si les coefficients α_n sont quelconques, on peut essayer de les mettre sous la forme

$$\alpha_n = S_n,$$

en calculant les λ_p à l'aide de ces équations linéaires. L'unique condition requise est que la série

$$\sum_0^\infty \lambda_p a^p$$

converge pour toute valeur de a.

31. Nous arrivons maintenant à des théorèmes plus généraux pour l'établissement desquels nous devrons seulement supposer que α_n *est une fonction analytique de n holomorphe dans un certain domaine auquel appartiennent les grandes valeurs positives de n.*

Il ne sera plus nécessaire ici de faire comme précédemment des hypothèses complètes sur la nature analytique de α_n dans le voisinage du point ∞. Les seules conditions requises seront de l'espèce suivante : α_n *devra vérifier certaines inégalités asymptotiques.*

Quoi qu'il en soit, voici tout d'abord un principe qui semble devoir être fécond dans l'étude de la question qui nous occupe.

La méthode des représentations conformes, utilisée par M. Lindelöf (¹) dans la théorie du prolongement analytique pour transformer une série de Taylor en d'autres séries analogues ayant des régions de convergence variées et de plus en plus grandes, peut encore servir à mettre une fonction donnée par son développement taylorien sous la forme d'une intégrale définie semblable à celles que nous avons considérées plus haut. Le changement de variable porte alors, non sur la série même, mais sur l'expression du coefficient α_n.

Supposons d'abord que α_n soit une fonction analytique de n holomorphe pour toutes les valeurs de n dont la partie réelle est supérieure à $-\frac{1}{2}$. Faisons la transformation d'Euler :

$$\frac{n}{n+1} = t, \qquad \frac{t}{1-t} = n;$$

il vient

$$\alpha_n = \sum_0^\infty \lambda_p \left(\frac{n}{n+1}\right)^p,$$

la série étant valable pour toutes les valeurs de n considérées. Admettons, pour commencer, que la série $\sum\limits_0^\infty \lambda_p$ soit absolument convergente ou, tout au moins,

(¹) *Loc. cit.*

absolument sommable au sens de M. Borel : cela signifie, comme on sait, que l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-x}\left|\sum_0^\infty \frac{\lambda_p x^p}{p!}\right| dx$$

a un sens.

On a

$$(1) \qquad \alpha_n = \lambda_0 + \int_0^\infty e^{-x} e^{-\frac{x}{n}} \sum_0^\infty \frac{\lambda_{p+1} x^p}{p!}\, dx,$$

pour toutes les valeurs entières de n à partir de 1 : cela résulte de la théorie des intégrales eulériennes.

On déduit de là

$$f(z) = \alpha_0 + \frac{\lambda_0 z}{1-z} + \int_0^\infty e^{-x} \sum_1^\infty e^{-\frac{x}{n}} z^n \sum_0^\infty \frac{\lambda_{p+1} x^p}{p!}\, dx.$$

Mais nous avons vu (n° 22) que

$$\sum_1^\infty e^{-\frac{x}{n}} z^n = z\int_0^1 J_0\left(2\sqrt{x\,\mathrm{L}\frac{1}{y}}\right)\frac{dy}{(1-zy)^2},$$

J_0 désignant la fonction de Bessel.

Prenons, dans le plan de la variable z, un domaine T qui ne contienne à son intérieur aucun point de la portion $(+1, +\infty)$ de l'axe réel. Quelle que soit la position du point z dans ce domaine et quelle que soit d'ailleurs la valeur positive attribuée au paramètre x, on peut assigner un nombre positif M auquel restent inférieurs les modules de la fonction $\sum_1^\infty e^{-\frac{x}{n}} z^n$ et de sa dérivée par rapport à z. On voit donc que l'intégrale qui donne $f(z)$ est absolument convergente. Il en est de même de la seconde intégrale obtenue en dérivant la première par rapport à z. On conclut de là que *$f(z)$ est une fonction analytique de z, holomorphe en tout point du plan, sauf peut-être pour z réel et plus grand que* 1. D'ailleurs, au voisinage de l'origine, on a

$$f(z) = \sum_0^\infty \alpha_n z^n,$$

comme il est aisé de le vérifier. *Le prolongement de cette série est donc effectué.*

On peut évidemment intervertir l'ordre des intégrations; d'où

$$f(z) = \alpha_0 + \frac{\lambda_0 z}{1-z} + z\int_0^1 \varphi(y)\frac{dy}{(1-zy)^2},$$

avec

$$\varphi(y) = \int_0^\infty e^{-x} J_0\left(2\sqrt{x L \frac{1}{y}}\right) \sum_0^\infty \frac{\lambda_{p+1} x^p}{p!} dx.$$

Nous revenons ainsi aux formes étudiées plus haut.

La partie $(+1, +\infty)$ de OX est, pour $f(z)$, une coupure qui peut être essentielle, car $\varphi(y)$ n'est pas forcément analytique.

D'une façon générale, l'étude complète de $f(z)$ est possible sur cette expression *qui est valable pour tout le plan.*

32. Quelles sont les conditions d'application du théorème précédent? On en trouvera sans peine de *suffisantes,* en utilisant les conditions données par M. Hadamard [1] pour qu'une série de Taylor $\left(\text{ici } \sum_0^\infty \lambda_p t^p\right)$ soit absolument convergente sur le cercle de convergence (ici de rayon 1). Voici un cas simple :

A la circonférence $|t| = 1$, correspond la droite $n = -\frac{1}{2} + i\lambda$, λ variant par valeurs réelles de $-\infty$ à $+\infty$. Supposons, ce qui ne restreint nullement la généralité, que α_n soit holomorphe même sur cette droite. Nous voulons que la fonction $\beta(t)$, en laquelle se transforme α_n par le changement de variable, soit développable pour $|t| = 1$ en série trigonométrique absolument convergente. Comme $\beta(t)$ est holomorphe sur ce cercle, sauf peut-être pour $t = 1$, il n'y a de difficultés que pour ce point. Or

$$\alpha_n = \beta(t), \qquad (n+1)^2 \frac{d\alpha_n}{dn} = \frac{d\beta(t)}{dt}, \qquad (n+1)^2 \frac{d}{dn}\left[(n+1)^2 \frac{d\alpha_n}{dn}\right] = \frac{d^2\beta(t)}{dt^2}.$$

D'où l'énoncé suivant : *Il suffit que les expressions précédentes tendent chacune vers une limite finie lorsque t tend vers* 1 *en restant à l'intérieur du cercle de rayon* 1 *ou sur ce cercle.*

J'ajoute que les mêmes propositions demeurent vraies, si α_n est seulement holomorphe lorsque la partie réelle de n surpasse une certaine quantité positive n_0. Il suffit, pour s'en assurer, de négliger quelques-uns des premiers termes de $\sum^\infty \alpha_n z^n$, ce qui ne change rien aux conclusions, et d'appliquer notre théorème à la série $\sum_0^\infty \alpha_{n+p} z^n$, p désignant un entier positif convenablement choisi.

Enfin, on pourra encore traiter les cas où il sera possible de déterminer un

---

(1) *Thèse,* p. 67-70.

nombre rationnel θ compris entre o et 1, tel que

$$\alpha_n = e^{n^\theta} a_n,$$

a_n remplissant les conditions énumérées ci-dessus (1).

Pour nous rendre compte du degré de généralité ainsi atteint, *supposons α_n holomorphe dès que la partie réelle de n dépasse une certaine limite.* Admettons, pour fixer les idées, que cette limite soit négative : on sait que cette restriction n'a rien d'essentiel. Cela étant, posons $n = \rho e^{i\omega}$ et supposons que n grandisse indéfiniment avec un argument au plus égal à $\frac{\pi}{2}$ en valeur absolue. *S'il existe un nombre rationnel θ compris entre* o *et* 1 *tel que la quantité* $\frac{\mathrm{L}|\alpha_n|}{\rho}$ *soit d'ordre inférieur à* $\frac{1}{\rho^\theta}$ *quand* ρ *devient infini,* ω *restant dans les limites voulues, la méthode précédente réussira et la fonction*

$$f(z) = \sum_0^\infty \alpha_n z^n$$

sera holomorphe dans tout le plan, sauf peut-être pour z réel, et plus grand que 1. En effet, on pourra alors écrire

$$\alpha_n = e^{n^\theta} e^{-n^\theta} \alpha_n,$$

et la quantité $e^{-n^\theta}\alpha_n$ remplira les conditions prescrites pour qu'on puisse appliquer le théorème du n° 31.

Voici quelques exemples :

1° Si α_n est une fonction de $\frac{1}{\mathrm{L}n}$ holomorphe dès que $|\mathrm{L}n|$ est assez grand;

2° Si α_n est une fonction de n holomorphe au voisinage de l'origine et étudiable par les procédés de prolongement exposés dans ce Chapitre, le point -1, par exemple, étant son seul point singulier;

3° Si α_n est une fonction entière de $\mathrm{L}n$,

$$\alpha_n = \sum_0^\infty a_p (\mathrm{L}n)^p,$$

pourvu que les coefficients a_p obéissent (pour p infini) à certaines inégalités asymptotiques (2).

---

(1) Cela résulte de ce qu'on sait étudier la série $\sum_0^\infty e^{n^\theta} z^n$ (n° 26).

(2) Il suffit que la fonction entière considérée soit d'ordre fini, mais ce n'est pas nécessaire; on peut prendre simplement a_p, de manière que $|a_p| < \frac{\theta^p}{(\mathrm{L}_p)^p}$ (o < θ < 1). — *Voir* HADAMARD, *Mémoire sur les fonctions entières* (*Journal de Mathématiques;* 1893).

33. Dans tous les cas traités jusqu'ici, α_n était holomorphe dès que la partie réelle de n surpassait une certaine limite. C'est qu'en effet on peut prendre, comme type des coefficients α_n étudiés plus haut, ceux qui sont de la forme

$$G(n)\int_0^1 \varphi(x)x^n\,dx,$$

$G(n)$ désignant une fonction entière d'ordre inférieur à 1. Or l'intégrale qui figure dans cette expression, si elle est convergente pour une valeur n_0, définit en général une fonction de n holomorphe pour toutes les valeurs de n dont la partie réelle est plus grande que n_0.

Mais il serait bien facile de généraliser ces résultats. Il suffirait de remplacer la transformation d'Euler, dans les calculs du n° **31**, par le changement de variable

$$t = 1 - \frac{1}{(n+1)^p}.$$

On pourrait alors se borner à supposer α_n holomorphe dans la région du plan (n) obtenue en posant

$$n = \rho e^{i\omega},$$

et en prenant

$$\rho > \rho_0, \qquad |\omega| < \frac{\pi}{2p},$$

ρ_0 désignant une certaine constante.

D'une façon générale, il suffit que α_n soit une fonction holomorphe de n dans un domaine angulaire contenant, à son intérieur, l'axe réel positif du plan n.

Mais c'est là un point que je me contenterai d'avoir indiqué.

34. Je vais développer maintenant une méthode générale de recherche.

Je me contenterai d'ailleurs de préciser la partie principale des théorèmes que je veux établir, sans essayer d'atteindre exactement la frontière de leur domaine d'application.

Dans une première étude comme celle-ci, il faut, en effet, viser surtout à la simplicité des résultats.

Soit donc la série

$$f(z) = \sum_0^\infty \alpha_n z^n,$$

convergente aux environs de l'origine. J'appelle

$$\alpha(t) = \sum_0^\infty \lambda_p t^p$$

une fonction holomorphe pour les petites valeurs de t. Imaginons que tous les points singuliers de cette fonction soient situés à gauche de l'axe imaginaire du plan t. Pour plus de simplicité, je supposerai même que $t=-1$ est le seul point singulier de $\alpha(t)$, mais cette restriction n'a rien d'essentiel. Quoi qu'il en soit, je prends

$$\alpha_n = \alpha(n),$$

et je vais étudier la fonction $f(z)$ correspondante.

La méthode de sommation des séries divergentes exposée par M. Borel conduit à la formule suivante

$$\alpha_n = \int_0^\infty e^{-a}\, G(an)\, da,$$

où

$$G(an) = \sum_0^\infty \frac{\lambda_p a^p n^p}{p!}.$$

Cette formule est valable pour toutes les valeurs de n dont la partie réelle est supérieure à -1, en tout cas dans une région qui contient l'axe réel positif du plan n. Quant à a, c'est un paramètre positif.

Posons

$$\varphi(z, a) = \sum_0^\infty G(an)\, z^n;$$

il vient

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-a}\, \varphi(a, z)\, da,$$

et tout revient à discuter cette solution formelle.

On a

$$G(an) = \frac{1}{2i\pi} \int_{(C)} \frac{1}{x}\, \alpha\left(\frac{1}{x}\right) e^{nax}\, dx,$$

C désignant un contour fermé qui contient à son intérieur l'origine et les points singuliers de $\alpha\left(\frac{1}{x}\right)$. D'où

$$\varphi(z, a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{(C)} \frac{1}{x}\, \alpha\left(\frac{1}{x}\right) \frac{dx}{1 - z e^{ax}}.$$

La coupure se déduit du contour C par la formule

$$z = e^{-ax},$$

et il faut supposer que le point z est du même côté que l'origine par rapport à cette coupure.

Plaçons-nous spécialement dans le cas où $t=-1$ est la seule singularité de $\alpha(t)$. Donnons à a une valeur positive quelconque. Cela posé, choisissons le contour C de la manière suivante : 1° un cercle C_1 de rayon $\frac{\lambda\pi}{2a}$ ayant l'origine pour centre; 2° un cercle égal C_2 ayant le point -1 pour centre; 3° une portion L de l'axe réel pour relier les deux cercles. Le contour C est ainsi une sorte de double lacet. Quant à λ, c'est une fonction de a toujours positive et tendant vers zéro quand a augmente indéfiniment.

Désignons par $\theta(a)$ le maximum du module de la quantité $\frac{1}{x}\alpha\left(\frac{1}{x}\right)$ quand x décrit C. Cette fonction $\theta(a)$ est bien déterminée dès qu'on a choisi λ.

A partir d'un point d'abscisse inférieure à 1, mais aussi voisine de 1 qu'on veut, traçons deux demi-droites symétriques par rapport à l'axe réel positif et faisant avec celui-ci un angle ω aussi petit qu'il plaira. Soit T la région du plan qui contient l'origine par rapport à l'angle que forment ces deux droites, angle dont l'axe réel positif est la bissectrice intérieure. Nous supposerons que z reste dans T.

La coupure a pour équation

$$z = e^{-ax}.$$

L'argument correspondant à un point de cette coupure a pour valeur o sur L et $-\frac{\lambda\pi}{2}\sin\varphi$ sur C_1 et C_2, φ étant l'argument de x. La coupure elle-même se compose de deux petites courbes fermées entourant l'une le point $z = 1$ et l'autre le point $z = e^a$, reliées par un morceau de l'axe réel positif. On peut toujours supposer λ assez petit pour que, quelle que soit la valeur positive ou nulle de a, toute cette coupure soit intérieure à l'angle considéré plus haut. Je supposerai même λ tellement choisi que l'on ait

$$|1 - ze^{ax}| > \delta,$$

z étant dans T et x sur C, et δ désignant une constante positive. Cela est évidemment possible, comme on le voit en suivant le point ze^{ax} quand x décrit C.

Dans ces conditions, on a

$$|\varphi(z, a)| < \frac{M}{\delta}\theta(a),$$

M désignant une certaine constante. *Alors, pourvu que l'intégrale*

$$\int_0^\infty e^{-a}\,\theta(a)\,da$$

ait un sens, $f(z)$ est holomorphe en tout point du plan, sauf peut-être pour z réel et plus grand que 1.

Pour appliquer ce théorème, tout revient à voir dans chaque cas que l'on peut choisir la fonction $\lambda(a)$ $\left(\text{assujettie seulement à être positive et à tendre vers zéro avec } \frac{1}{a}\right)$, de façon que l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-a}\,\theta(a)\,da$$

ait un sens. On vérifiera, par exemple, que cela est possible si

$$\alpha_n = e^{\frac{n}{L(n+1)}}.$$

Nous parvenons à étudier ainsi une fonction qui échappait aux méthodes des n^{os} **31** et **32**. Il va de soi, d'ailleurs, qu'une fois ce cas traité il devient possible de traiter comme au n° **32** le cas où

$$\alpha_n = e^{\frac{n}{L(n+1)}}\,a_n,$$

a_n vérifiant les conditions requises pour l'application du théorème du n° **31**.

35. Rendons-nous compte maintenant du degré de généralité obtenu.

Pour cela, remarquons d'abord que, si α_n est une fonction entière de n, le contour C du numéro précédent se réduit au cercle C_1 décrit de l'origine comme centre. On a alors

$$\theta(a) = \text{Max. de } \left|\frac{2a}{\lambda\pi}\,e^{i\varphi}\,\alpha\left(\frac{2a}{\lambda\pi}\,e^{i\varphi}\right)\right|,$$

lorsque φ varie de 0 à 2π. Cela étant, il est bien clair que l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-a}\,\theta(a)\,da$$

aura un sens, pourvu que, si l'on pose $n = \rho e^{i\omega}$, la quantité $\frac{L|\alpha_n|}{\rho}$ tende vers zéro (ou du moins ait zéro comme limite supérieure) lorsque ρ augmente indéfiniment, ω étant quelconque.

Supposons maintenant que α_n, holomorphe pour $\rho > \rho_0$ et $|\omega| < \omega_0$, ρ_0 et ω_0 étant deux nombres positifs quelconques, soit tel que la quantité $\frac{L|\alpha_n|}{\rho}$ ait zéro pour limite supérieure quand ρ devient infini, ω restant moindre que ω_0 en valeur absolue. On pourra toujours concevoir une fonction entière $G(n)$ qui présente les caractères indiqués à l'alinéa précédent et qui soit telle, en outre, que le quotient

$$\frac{\alpha_n}{G(n)}$$

remplisse les conditions voulues pour l'application des théorèmes exposés aux nos 31 et 33. Cela résulte de ce fait qu'il existe des fonctions entières dépourvues de zéro *de n'importe quel type de croissance*. En réunissant alors tous les résultats obtenus plus haut, nous pouvons formuler la conclusion suivante :

La fonction $\sum_0^\infty \alpha_n z^n$ *est holomorphe dans tout le plan, sauf peut-être pour* z *réel et plus grand que* 1, *si, en posant* $n = \rho e^{i\omega}$, *le coefficient général* α_n *est une fonction analytique de* n *holomorphe pour* $\rho > \rho_0$ *et* $|\omega| < \omega_0$ (ρ_0 *et* ω_0 *étant deux nombres positifs quelconques) et si la quantité* $\frac{\mathrm{L}|\alpha_n|}{\rho}$ *a pour limite supérieure zéro quand* ρ *devient infini,* ω *restant moindre que* ω_0 *en valeur absolue.*

J'espère que ces brèves indications paraîtront suffisantes pour faire entrevoir le degré de généralité que possèdent les méthodes de prolongement étudiées dans ce Chapitre. Au surplus, je me propose de revenir prochainement sur cette question. Pour le moment, je cherche surtout des exemples simples. Mais il importait cependant de marquer les frontières du domaine où s'applique notre méthode.

36. Pour finir, je citerai un théorème où intervient le rapport $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$ et qui rapproche la présente théorie de celle de la convergence des séries.

Mais je dois établir d'abord, à titre de lemme, au moins dans un cas particulier, une proposition qui d'ailleurs est intéressante par elle-même et sur laquelle nous reviendrons plus loin pour l'étudier en général.

Soit

$$f(z) = \sum_0^\infty \alpha_n z^n,$$

avec

$$\alpha_n = \int_0^1 \varphi(x) x^n \, dx$$

et

$$\int_0^1 |\varphi(x)| \, dx < \mathrm{M},$$

M désignant une constante positive. On a

$$f(z) = \int_0^1 \varphi(x) \frac{dx}{1 - zx}.$$

Imaginons un petit cercle de rayon δ décrit de $z = 1$ comme centre, deux tangentes à ce cercle symétriques par rapport à l'axe réel et se rencontrant sur celui-ci entre les points 0 et 1, enfin la région T du plan située du même côté que l'origine par rapport à l'angle (aussi aigu que l'on veut, si δ est assez petit) limité par les deux tangentes précédentes que l'on arrête à leur point de concours. Tant que le point z est dans T, le point zx y est aussi et l'on a, par conséquent,

$$\left|\frac{1}{1-zx}\right| < \frac{1}{\delta}.$$

D'où

$$|f(z)| < \frac{M}{\delta},$$

inégalité qui va jouer un rôle fondamental.

Posons

$$f_p(z) = \sum_0^\infty \alpha_n^p z^n,$$

p désignant un entier positif. Il vient

$$f_p(z) = \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 \varphi(x_1)\varphi(x_2)\ldots\varphi(x_p)\frac{dx_1\,dx_2\ldots dx_p}{1 - zx_1x_2\ldots x_p},$$

le nombre des signes intégraux superposés étant égal à p. Lorsque le point z est dans T, le point $zx_1x_2\ldots x_p$ y est aussi. D'où

$$|f_p(z)| < \frac{M^p}{\delta}.$$

Considérons alors une fonction entière quelconque $G(t)$ et la série

$$F(z) = \sum_0^\infty G(\alpha_n) z^n.$$

Si l'on a

$$G(\alpha_n) = \sum_0^\infty \lambda_p \alpha_n^p,$$

il vient

$$F(z) = \sum_0^\infty \lambda_p f_p(z),$$

et l'on voit que $F(z)$ est une fonction holomorphe dans T, pourvu que la série

$$\sum_0^\infty |\lambda_p| M^p$$

soit convergente. Cette dernière condition est d'ailleurs remplie si $G(t)$ est une fonction entière. Mais il suffit que $G(t)$ soit holomorphe dans un cercle de rayon supérieur à M.

Lorsque $G(t)$ a un rayon de convergence inférieur ou égal à M, on peut poser

$$F(a, z) = \sum_0^\infty \lambda_p a^p f_p(z),$$

a étant un paramètre. Le théorème précédent s'applique pour les petites valeurs de a. Tout revient alors à effectuer le prolongement de $F(a, z)$ regardée comme fonction de a. Divers artifices le permettent souvent. On devra finalement faire $a = 1$.

Quoi qu'il en soit, je me bornerai à l'énoncé suivant :

Si α_n est de la forme

$$\alpha_n = \int_0^1 \varphi(x) x^n \, dx,$$

avec

$$\int_0^1 |\varphi(x)| \, dx < M,$$

la série

$$\sum_0^\infty G(\alpha_n) z^n$$

est holomorphe dans tout le plan, sauf peut-être pour z réel et plus grand que 1, *pourvu que la fonction* $G(t)$ *soit holomorphe elle-même dans un cercle de rayon supérieur à* M.

Prenons, par exemple,

$$\alpha_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n} = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{x^n \, dx}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

Ici $M = 1$. On peut donc prendre pour $G(\alpha_n)$ l'une des expressions e^{α_n}, $\sin \alpha_n$, $\cos \alpha_n$, $L\left(1 + \frac{\alpha_n}{2}\right)$, $\frac{1}{\sqrt{\alpha_n^2 + 4}}$, ...

37. Cela posé, soit

$$a_n = 1 + \sum_1^\infty \frac{\lambda_p}{n^p},$$

une fonction de $\frac{1}{n}$ holomorphe dès que le module de n dépasse une certaine valeur. Si l'on a

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = a_n,$$

la série

$$\sum_0^\infty \alpha_n z^n$$

a l'unité pour rayon de convergence.

Posons

$$L\alpha_n = f(n), \qquad La_n = \varphi(n).$$

Il vient

$$f(n+1) - f(n) = \varphi(n),$$

et nous sommes ramenés à calculer l'*intégrale finie* de $\varphi(n)$. Or

$$\varphi(n) = \sum_1^\infty \frac{\mu_p}{n^p},$$

à cause des propriétés bien connues de la fonction logarithmique. La quantité

$$\varphi(n) - \mu_1 L\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \varphi_1(n)$$

est développable suivant les puissances de $\frac{1}{n}$, l'exposant le plus petit étant égal à 2. Posons alors

$$f(n) = f_1(n) + \mu_1 L n.$$

On a

$$f_1(n+1) - f_1(n) = \varphi_1(n).$$

Mais il existe (n° **12**) une fonction $\Phi(x)$ telle que

$$\varphi_1(n) = \int_0^1 \Phi(x) x^{n-1}\, dx.$$

Essayons de prendre

$$f_1(n) = \int_0^1 F(x) x^{n-1}\, dx.$$

Il viendra

$$\int_0^1 F(x) x^n\, dx - \int_0^1 F(x) x^{n-1}\, dx = \int_0^1 \Phi(x) x^{n-1}\, dx,$$

c'est-à-dire

$$F(x) = \frac{\Phi(x)}{x-1}.$$

Or (n° **12**) $\Phi(x)$ s'annule pour $x = 1$, puisque $\varphi_1(n)$ commence par un terme en $\frac{1}{n^2}$. Donc l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{\Phi(x)}{x-1} x^{n-1}\, dx$$

a un sens, et nous avons bien ainsi une solution de notre équation aux différences finies.

Soit

$$f(n) = \mu_1 \mathrm{L} n + \int_0^1 \frac{\Phi(x)}{x-1} x^{n-1}\, dx + \mathrm{LC},$$

C désignant une constante laissée arbitraire pour le moment. Cette formule est vraie pour toutes les valeurs de n qui surpassent une certaine limite n_0.

On conclut de là

$$\alpha_n = \mathrm{C} n^{\mu_1} e^{\int_0^1 \frac{\Phi(x)}{x-1} x^{n-1}\, dx}.$$

La constante C est déterminée de façon que le premier des coefficients α_n que l'on peut mettre sous cette forme ait bien la valeur voulue.

On sait étudier la série

$$\sum n^{\mu_1} z^n.$$

Utilisons d'autre part le théorème du numéro précédent. On a le résultat que voici :

Si le rapport $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$ *de deux coefficients consécutifs dans la série* $\sum_0^\infty \alpha_n z^n$ *est développable en une série de la forme*

$$1 + \sum_1^\infty \frac{\lambda_p}{n^p},$$

convergente dès que le module de n est assez grand, la fonction analytique définie par la série considérée est holomorphe en tout point du plan, sauf peut-être pour z réel et plus grand que 1.

J'ajoute que, d'une façon générale, on peut, dans ce cas, faire l'étude complète de $\sum_0^\infty \alpha_n z^n$.

On pourrait étendre ce théorème au cas où $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$ est développable suivant des puissances fractionnaires de $\frac{1}{n}$: la démonstration serait toute semblable.

Enfin, et je terminerai sur cette remarque, les mêmes procédés réussissent encore si la différence

$$\mathrm{L}\alpha_{n+1} - \mathrm{L}\alpha_n$$

peut être mise sous la forme

$$\int_0^1 \varphi(x) x^n\, dx,$$

la fonction $\frac{\varphi(x)}{x-1}$ restant finie (ou du moins intégrable) pour $x = 1$.

38. En terminant ce Chapitre, je tiens à rappeler le but que j'y poursuivais et le véritable caractère des théorèmes que j'y ai démontrés.

J'ai proposé une méthode *pratique* pour étudier dans tout le plan une fonction donnée par une série de Taylor et j'ai montré sur quelques *exemples* le parti qu'on pouvait tirer de cette méthode.

Il est bien clair que le nombre des applications possibles est infini, qu'il y a encore beaucoup à trouver dans la même voie et que l'expérience est seule capable d'indiquer quels sont les *critères de prolongeabilité* qu'il y a le plus d'avantages à établir.

V. — Généralisations diverses.

39. Les résultats précédents peuvent être généralisés d'un très grand nombre de manières que je ne puis songer à énumérer ici. Je me bornerai à indiquer deux ou trois théorèmes simples.

Soit une série

$$f(z)=\sum_0^\infty \alpha_n z^n,$$

pour laquelle on a

$$\alpha_n=\int_0^1 \varphi(x)x^n\,dx.$$

Nous avons vu que la fonction donnée par cette série est représentable dans tout le plan par une certaine intégrale définie.

Cela posé, je dis qu'*on en peut déduire une infinité d'autres fonctions qui présentent le même caractère*. Voici quelques exemples :

On a

$$\Delta^{(n)}\alpha_0=\int_0^1 \varphi(x)(x-1)^n\,dx=(-1)^n\int_0^1 \varphi(1-y)y^n\,dy.$$

Donc la série $\sum\limits_0^\infty z^n\Delta^{(n)}\alpha_0$ est, elle aussi, étudiable dans tout le plan. Elle se déduit d'ailleurs de la série donnée par la *transformation d'Euler*. Sa somme est $\frac{1}{1+z}f\left(\frac{z}{1+z}\right)$.

Soit $X_n(x)$ un polynome de Legendre. Désignons par $X_n[(\alpha)]$ ce que devient $X_n(x)$ quand on y remplace en général x^p par α_p. On a

$$X_n[(\alpha)]=\int_0^1 \varphi(x)X_n(x)\,dx.$$

D'où

$$\sum_0^\infty X_n[(\alpha)]z^n = \int_0^1 \varphi(x)\frac{dx}{\sqrt{1-2xz+z^2}}.$$

La coupure est ici la moitié du cercle de rayon 1 correspondant aux valeurs de z dont la partie réelle est positive.

Rien n'empêcherait, dans ce dernier exemple, de substituer aux polynomes de Legendre d'autres fonctions analogues, pourvu que l'on connaisse également la fonction génératrice de celles-ci. On peut prendre, par exemple, les puissances successives d'un polynome quelconque. Si donc α_n est de la forme supposée, il existe des suites de nombres $\lambda_{p,n}$ dépendant de n tels qu'en posant

$$\beta_n = \lambda_{0,n}\alpha_0 + \lambda_{1,n}\alpha_1 + \ldots + \lambda_{\nu,n}\alpha_\nu,$$

ν désignant un entier fonction de n, la série $\sum_0^\infty \beta_n z^n$ soit étudiable dans tout le plan.

On peut même envisager des fonctions entières au lieu de polynomes. Ainsi

$$\beta_n = \cos[(\alpha)\theta n] = \sum_0^\infty \frac{(-1)^p \alpha_{2p}\theta^{2p} n^{2p}}{(2p)!} = \int_0^1 \varphi(x)\cos(n\theta x)\,dx.$$

D'où

$$\sum_0^\infty \beta_n z^n = \int_0^1 \varphi(x)\frac{1-z\cos(\theta x)}{1-2z\cos(\theta x)+z^2}dx.$$

La coupure va sur le cercle de rayon 1 du point $z = e^{-i\theta}$ au point $z = e^{+i\theta}$ en passant par le point $z = 1$.

On conçoit sans peine que ces procédés de généralisation puissent être variés à l'infini; on obtient de la sorte des coupures de formes quelconques.

Je citerai, pour finir, un autre type de méthode. Soit λ_p une constante. Appelons $\alpha_n^{(p)}$ la $p^{\text{ième}}$ dérivée de α_n par rapport à n. Il vient

$$\beta_n = \sum_0^\infty \frac{\lambda_p}{p!}\alpha_n^{(p)} = \int_0^1 \varphi(x)\sum_0^\infty \frac{(-1)^p\lambda_p}{p!}\left(\mathrm{L}\frac{1}{x}\right)^p x^n\,dx,$$

et, pourvu que l'on ait par exemple

$$|\lambda_p| < \lambda^p,$$

λ désignant une certaine constante positive, on voit que la série $\sum_0^\infty \beta_n z^n$ est étudiable dans tout le plan.

40. Pour aller plus loin, je pourrais m'appuyer sur un théorème très remarquable dû à M. Hadamard [1].

D'après ce théorème, la série $\sum_0^\infty a_n b_n z^n$ ne peut avoir, *dans tout le plan,* d'autres points singuliers que ceux que l'on obtient en multipliant l'affixe d'un point singulier de $\sum_0^\infty a_n z^n$ par l'affixe d'un point singulier de $\sum_0^\infty b_n z^n$.

On peut utiliser effectivement ce théorème, dès qu'on a formé un tableau de séries particulières dont les points singuliers sont connus : or c'est ce que nous permet de faire la méthode exposée au Chapitre précédent.

Mais je préfère développer quelques considérations directes qui ne supposent pas démontré le théorème de M. Hadamard.

Considérons la série

$$f(z) = \sum_0^\infty \alpha_n z^n$$

et supposons que l'on ait

$$\alpha_n = a_n b_n$$

avec

$$a_n = \int_0^1 \varphi(x) x^n \, dx.$$

Soit

$$F(t) = \sum_0^\infty b_n t^n,$$

une fonction dont on sache effectuer le prolongement dans tout le plan et déterminer les points singuliers. Il viendra

$$f(z) = \int_0^1 \varphi(x) F(zx) \, dx,$$

et les principes exposés au Chapitre III permettront de faire l'étude complète de $f(z)$.

J'ai déjà signalé une application relative au cas où $|\Delta^{(n)} b_0|^{\frac{1}{n}}$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

On en aurait une autre en prenant b_n tel que $F(t)$ vérifie une équation différentielle linéaire. C'est ce qui arrive en particulier s'il existe, entre un certain nombre fixe de coefficients b_n consécutifs, une relation récurrente linéaire dont

(1) *Acta mathematica,* t. XXII.

les coefficients soient des polynomes en n; $F(t)$ satisfait alors à une équation différentielle linéaire dont les coefficients sont eux-mêmes des polynomes en t (1).

Si $F(t)$ est méromorphe dans tout le plan, on peut l'étudier en suivant la marche exposée par M. Hadamard dans la seconde partie de sa Thèse et le prolongement de $f(z)$ est encore possible.

Un cas particulier intéressant est celui où b_n est le coefficient général d'une série récurrente. On a alors

$$f(z) = \int_0^1 \varphi(x)\,R(zx)\,dx,$$

R désignant une fraction rationnelle.

Si l'on a

$$b_n = \int_0^1 \psi(y) y^n\,dy,$$

on peut écrire

$$f(z) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\varphi(x)\,\psi(y)}{1 - zxy}\,dx\,dy.$$

Plus généralement, on voit que, si les séries

$$\sum_0^\infty a_n z^n, \qquad \sum_0^\infty b_n z^n, \qquad \ldots, \qquad \sum_0^\infty l_n z^n$$

sont étudiables par les procédés du Chapitre précédent, il en sera de même de la série

$$\sum_0^\infty P(a_n, b_n, \ldots, l_n) z^n,$$

où P désigne un polynome : la démonstration se fait aisément de proche en proche.

Supposons, par exemple, que le rapport $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$ soit une fraction rationnelle $\frac{P(n)}{Q(n)}$. Posons

$$P(n) = (n + a_1)(n + a_2)\ldots(n + a_q),$$
$$Q(n) = (n + b_1)(n + b_2)\ldots(n + b_q).$$

Alors le rayon de convergence est égal à l'unité et l'on a

$$\alpha_n = \alpha_0 \frac{P(0)P(1)\ldots P(n-1)}{Q(0)Q(1)\ldots Q(n-1)}.$$

(1) Il faut évidemment que le point $t = 0$ ne soit pas un point singulier de l'équation différentielle.

Il faut admettre évidemment qu'aucune des quantités a ou b n'est *nulle* ou *entière et négative*. Si cette condition est remplie, on voit que α_n est (au facteur α_0 près) le produit de $2q$ termes dont les q premiers sont de la forme

$$\lambda_{p,n} = \frac{a_p(a_p+1)\ldots(a_p+n-1)}{n!}$$

et les q derniers de la forme

$$\mu_{p,n} = \frac{n!}{b_p(b_p+1)\ldots(b_p+n-1)}.$$

Or

$$\sum_0^\infty \lambda_{p,n} z^n = (1-z)^{-a_p}.$$

D'autre part

$$\mu_{p,n} = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(b_p)}{\Gamma(n+b_p)} = n\mathrm{B}(n, b_p) = n\int_0^1 (1-x)^{b_p-1} x^{n-1}\,dx,$$

si la partie réelle de b_p est positive. Alors la série

$$\sum_0^\infty \mu_{p,n} z^n$$

n'a pas d'autres points singuliers que $z=1$ et $z=\infty$. Cette conclusion subsiste d'ailleurs si la partie réelle de b_p est négative (pourvu que b_p ne soit pas un entier négatif), comme on le constate en étudiant la série

$$\sum_0^\infty \mu_{p,n+h} z^n,$$

h étant un entier positif convenablement choisi. *Donc, dans tous les cas, on sait étudier* $\sum_0^\infty \alpha_n z^n$: *les seuls points singuliers de cette série sont* $z=1$ *et* $z=\infty$. Un grand nombre de séries usuelles rentrent dans ce type auquel appartient notamment la série hypergéométrique.

Remarquons que, si les parties réelles des a_p sont toutes comprises entre 0 et 1, on peut écrire

$$\lambda_{p,n} = \frac{\sin(\pi a_p)}{\pi}\mathrm{B}(a_p+n, 1-a_p) = \frac{\sin(\pi a_p)}{\pi}\int_0^1 y^{a_p-1}(1-y)^{-a_p} y^n\,dy.$$

Si alors les parties réelles des b_p sont toutes positives, il vient

$$f(z) = \alpha_0 + \alpha_0 z \frac{\prod_1^q \sin(\pi a_p)}{\pi^q}$$
$$\times \int_0^1 \prod_1^q \left(\frac{y_p}{1-y_p}\right)^{a_p} \prod_1^q (1-x_p)^{b_p-1} \mathrm{R}(zx_1 \ldots x_q y_1 \ldots y_q)\, dx_1 \ldots dx_q dy_1 \ldots dy_q,$$

en posant

$$\mathrm{R} = \sum_0^\infty n^q (zx_1 \ldots x_q y_1 \ldots y_q)^{n-1}.$$

J'ajoute que R est une fraction rationnelle.

41. Revenons à la série

$$\sum_0^\infty \mathrm{P}(\alpha_n) z^n,$$

P désignant un polynome, et cherchons à remplacer le polynome $\mathrm{P}(\alpha_n)$ par une fonction entière $\mathrm{G}(\alpha_n)$. Je me bornerai à l'examen d'un cas simple.

Soit

$$\alpha_n = (n+1)^q \int_0^1 \varphi(x) x^n \, dx$$

avec

$$\int_0^1 |\varphi(x)| \, dx < \mathrm{M},$$

q désignant un nombre positif quelconque.

Appelons p un entier positif et posons, en général,

$$f_p(z) = \sum_0^\infty \alpha_n^p z^n.$$

Nous allons chercher une limite supérieure de $|f_p(z)|$ quand z reste dans un certain domaine T.

Ce domaine sera défini de la façon suivante : Prenons sur l'axe réel positif du plan z un point appartenant au segment (0, 1) et aussi voisin du point 1 que nous voudrons. Ce point étant choisi, traçons deux demi-droites formant un angle qui admette le point considéré comme sommet et l'axe réel positif comme bissectrice intérieure. Le domaine T contiendra, par hypothèse, tous les points situés du même côté que l'origine par rapport à cet angle. Soit δ la distance du point 1 aux côtés de l'angle. J'imagine le cercle C de centre 1 et de rayon δ et j'appelle C' un cercle concentrique de rayon plus petit ε. La quantité δ peut être prise aussi petite que l'on veut, mais elle restera fixe, de même que ε.

Cela posé, on a

$$f_p(z) = \int_0^1 \varphi(x_1)\,\varphi(x_2)\ldots\varphi(x_p)\sum_0^\infty (n+1)^{pq} x_1^n x_2^n \ldots x_p^n z^n \, dx_1\, dx_2 \ldots dx_p,$$

chacune des p intégrations étant relative à l'intervalle (0, 1). Posons en général, α étant positif,

$$\sum_0^\infty (n+1)^\alpha t^n = \mathrm{R}_\alpha(t).$$

Il viendra

$$|f_p(z)| < \mathrm{M}^p \text{ Max. de } |\mathrm{R}_{pq}(z x_1 x_2 \ldots x_p)|.$$

Or, tant que le point z reste dans le domaine T, le point $z x_1 x_2 \ldots x_p$ y reste aussi, puisque les x varient seulement de 0 à 1. Tout revient donc à calculer en général la quantité

$$\text{Max. de } |\mathrm{R}_\alpha(t)|,$$

quand t reste dans T.

On a

$$(n+1)^\alpha = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2i\pi}\int_{(\mathrm{L})} \frac{e^{(n+1)y}}{y^{\alpha+1}}\, dy,$$

le chemin d'intégration étant composé : 1° de l'axe réel négatif depuis $-\infty$ jusqu'à une valeur négative quelconque $-a$; 2° d'un cercle décrit de O comme centre avec a pour rayon ; 3° de l'axe réel négatif depuis $-a$ jusqu'à $-\infty$. D'où

$$\mathrm{R}_\alpha(t) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2i\pi}\int_{(\mathrm{L})} \frac{e^y}{1-te^y}\,\frac{dy}{y^{\alpha+1}}.$$

Cette formule représente $\mathrm{R}_\alpha(t)$ dans tout le plan, sauf une coupure qui correspond au contour d'intégration par l'égalité

$$t = e^{-y}.$$

On voit que cette coupure est constituée par un lacet partant du point $+\infty$, longeant l'axe réel, tournant autour de $t=1$ et retournant à $+\infty$ le long de l'axe réel. Je puis toujours supposer que le contour L est choisi de façon que la boucle du lacet qui lui correspond circule autour de $t=1$ entre le cercle C' de rayon ε défini plus haut et un cercle concentrique intérieur C'' de rayon ε' également fixe.

Cela étant, on a

$$|e^{-y} - t| > \delta - \varepsilon,$$

quels que soient t dans T et y sur L. D'où

$$|R_\alpha(t)| < \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\pi}\frac{1}{\delta-\varepsilon}\left[2\int_{\varepsilon'}^{\infty}\frac{dy}{y^{\alpha+1}}+\int_{(C'')}\left|\frac{dy}{y^{\alpha+1}}\right|\right],$$

c'est-à-dire

$$|R_\alpha(t)| < \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\pi(\delta-\varepsilon)}\left(\frac{1}{\alpha}+\pi\right)\frac{1}{\varepsilon'^\alpha}.$$

Par suite,

$$|f_p(z)| < \frac{1}{\pi(\delta-\varepsilon)}\left(\frac{M}{\varepsilon'^q}\right)^p\Gamma(pq+1)\left(\pi+\frac{1}{pq}\right);$$

et cette formule est valable quel que soit z dans T.

Dans ces conditions, la série

$$\sum_0^\infty \lambda_p f_p(z)$$

définira une fonction de z holomorphe dans T, pourvu que le produit

$$\lambda_p \Gamma(pq+1)$$

soit le coefficient général d'une fonction entière.

Supposons λ_p ainsi choisi. Soit

$$G(u) = \sum_0^\infty \lambda_p u^p.$$

La série

$$f(z) = \sum_0^\infty G(\alpha_n) z^n$$

définira une fonction de z holomorphe dans T. Comme les demi-droites qui limitent T peuvent former un angle aussi aigu que l'on veut, on voit qu'en définitive $f(z)$ est holomorphe dans tout le plan sauf peut-être sur une coupure rectiligne allant de $z=1$ à $z=\infty$ le long de l'axe réel positif.

On peut prendre pour G une fonction entière d'ordre inférieur à $\frac{1}{q}$. Si $q=0$, on peut prendre pour G une fonction entière quelconque, car alors $|f_p(z)|$ reste inférieur à $\frac{M^p}{\delta}$, comme on le voit directement.

Remarquons que la méthode précédente permet d'assigner à $|f(z)|$ une limite supérieure indépendante de z et valable pour tout le domaine infini T. Nous verrons plus loin l'importance de cette remarque. C'est surtout à cause d'elle que j'ai développé les calculs précédents. M. Leau (1), qui a traité une question toute

(1) *Journal de Mathématiques;* 1899.

semblable et qui a même poussé la discussion un peu plus loin, n'établit pas cette conclusion.

Pour donner un exemple, je partirai de la formule

$$\frac{1}{(n+1)^{p+1}} = \int_0^1 \frac{\left(\mathrm{L}\frac{1}{x}\right)^p}{\Gamma(p+1)} x^n \, dx.$$

Dérivons par rapport à p et faisons ensuite $p = -1 + \eta$, η étant un nombre positif quelconque. Il vient

$$\mathrm{L}(n+1) = (n+1)^\eta \int_0^1 \left[\frac{\Gamma'(\eta)}{\Gamma(\eta)} - \mathrm{LL}\frac{1}{x}\right] \frac{\left(\mathrm{L}\frac{1}{x}\right)^{1-\eta}}{\Gamma(\eta)} x^n \, dx.$$

Ici l'on a $q = \eta$. Si donc G désigne une fonction entière d'ordre fini, la série

$$\sum_0^\infty \mathrm{G}[\mathrm{L}(n+1)] z^n$$

est étudiable par notre méthode.

On déduit de là

$$\left|\sum_0^\infty z^n [\mathrm{L}(n+1)]^p\right| < \frac{1}{\pi(\delta-\varepsilon)} \left(\frac{\mathrm{M}}{\varepsilon'\eta}\right)^p \Gamma(p\eta+1)\left(\pi + \frac{1}{p\pi}\right),$$

tant que z reste dans T. Soit alors, par exemple,

$$\alpha_n = \mathrm{L}(n+1)\int_0^1 \varphi(x) x^n \, dx.$$

On pourra faire, à partir de ce coefficient α_n, des constructions analogues à celles que nous avons faites plus haut. On obtiendra des conclusions semblables et l'on voit ainsi comment la méthode exposée peut être généralisée à l'infini.

Mais je n'insisterai pas davantage, et je passe à un autre ordre d'idées.

42. Il est évident qu'une combinaison linéaire quelconque de séries étudiables par les méthodes du Chapitre précédent est encore étudiable par les mêmes méthodes.

Si l'on peut écrire

$$\alpha_n = a_n + b_n,$$

la série $\sum_0^\infty a_n z^n$ étant étudiable par nos procédés et la série $\sum_0^\infty b_n z^n$ ayant un rayon de convergence supérieur à celui de la première, le prolongement analytique de la série $\sum_0^\infty \alpha_n z^n$ peut être effectué jusqu'au cercle de convergence de $\sum_0^\infty b_n z^n$. Un cas particulier intéressant est celui où cette dernière série définit une fonction entière : l'étude de la série donnée peut alors être faite dans tout le plan.

De pareilles décompositions d'une série entière en une somme de plusieurs autres séries de même espèce peuvent être variées à l'infini, suivant les besoins du calcul. J'indiquerai un dernier exemple, relatif au cas où α_n est une fonction de n analogue à la fonction $\zeta(s)$ de Riemann. Des séries d'exponentielles, telles que celles que M. Cahen (1) a envisagées dans sa Thèse ou même plus générales, vont jouer ici le rôle essentiel. L'expérience montre que ce cas, très fréquemment réalisé dans la pratique, est celui de la plupart des fonctions usuelles qui possèdent plusieurs points singuliers.

Soit

$$\varphi(z) = \sum_0^\infty \alpha_n z^n,$$

avec

$$\alpha_n = \sum_0^\infty \lambda_{p,n} \xi_p^n.$$

Posons

$$\varphi_p(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \lambda_{p,n} (\xi_p z)^n.$$

Il vient

$$\varphi(z) = \sum_0^\infty \varphi_p(z),$$

et, si les fonctions φ_p sont étudiables par les méthodes indiquées plus haut, il en est de même de φ. Quant aux conditions de convergence requises, elles sont aisées à déterminer dans chaque cas.

On a, par exemple, pour $|z| < 1$,

$$\mathrm{L}\Gamma(1 - z) = \mathrm{C}z + \tfrac{1}{2}\zeta(2)z^2 + \ldots + \frac{1}{n}\zeta(n)z^n + \ldots,$$

C désignant la constante d'Euler et $\zeta(s)$ la fonction de Riemann. Or

$$\frac{1}{n} = \int_0^1 x^{n-1}\,dx.$$

(1) *Annales de l'École Normale supérieure;* 1894.

D'où

$$\mathrm{L}\Gamma(1-z) = \mathrm{C}z + z^2 \sum_0^\infty \frac{1}{p} \int_0^1 \frac{x\,dx}{p - zx}.$$

On a ainsi l'extension de $\mathrm{L}\Gamma(1-z)$ à tout le plan.

On voit par là comment, malgré les apparences, les théorèmes du Chapitre IV peuvent servir à l'étude de fonctions dont la distribution des points singuliers est quelconque.

43. Je terminerai par deux remarques.

Avant de transformer une série en une intégrale, il peut être bon de la multiplier par un facteur connu dans tout le plan. Soit, par exemple,

$$f(z) = \sum_0^\infty (\mathrm{L}\,n!)\,z^n.$$

On a

$$(1-z)^2 f(z) = \sum_1^\infty \mathrm{L}\left(1 + \frac{1}{n}\right) z^{n+1};$$

d'où

$$f(z) = \frac{z^2}{(1-z)^2} \int_0^1 \frac{x-1}{\mathrm{L}x}\,\frac{dx}{1-zx},$$

expression très simple qui donne $f(z)$ dans tout le plan.

Enfin, avant de mettre une série sous forme d'intégrale, il peut être bon aussi d'effectuer préalablement une représentation conforme suivant les procédés étudiés par M. Lindelöf (¹). On a alors, par exemple,

$$f(z) = \sum_0^\infty \alpha_n z^n = \int_0^1 \frac{\varphi(x)}{1 - x\,\psi(z)}\,dx,$$

$\psi(z)$ désignant une fonction holomorphe autour de l'origine et qui s'annule en ce point, et l'on peut obtenir ainsi des coupures de forme quelconque.

VI. — Le problème des moments.

44. Un lien existe entre les méthodes que nous venons d'étudier et le *problème des moments,* posé par Stieltjes dans son grand Mémoire sur les fractions continues (²).

(¹) *Acta Societatis fennicæ;* 1898.

(²) *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse;* 1894-1895.

Étant donnée une suite dénombrable de quantités

$$\alpha_0, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_n, \quad \ldots,$$

peut-on construire une fonction $\varphi(x)$ intégrable dans l'intervalle $(0, +\infty)$ telle que l'on ait

$$\alpha_n = \int_0^\infty \varphi(x) x^n \, dx,$$

pour toutes les valeurs entières et positives de n? Tel est l'énoncé général du problème des moments. Nous allons examiner le rapport qui unit ce problème à ceux que nous avons déjà résolus.

Deux questions se posent. Il faut d'abord déterminer φ à partir des α_n. Mais, comme Stieltjes le fait remarquer, cette détermination n'est pas possible d'*une façon unique*. En effet, la théorie des intégrales eulériennes montre que l'on a, par exemple,

$$\int_0^\infty e^{-\sqrt[4]{x}} \sin \sqrt[4]{x} \, x^n \, dx = 0,$$

quel que soit l'entier positif n. Si donc les α_n sont tels qu'*une* solution existe, il y en aura une *infinité* et il importera de chercher un principe qui permette de faire un *choix* parmi ces diverses solutions.

Les considérations que je veux développer à cet égard dépendent des propriétés d'une certaine classe fort intéressante de polynomes entiers en x dont je vais rappeler la définition. On verra que ces polynomes se rapprochent, par l'ensemble de leurs propriétés, de polynomes bien connus, tels que les polynomes de Legendre, les polynomes hypergéométriques ou les polynomes de M. Hermite.

Nous serons incidemment amenés, dans les pages qui suivent, à montrer comment on peut souvent utiliser, pour la représentation analytique des fonctions données par une série de Taylor, des intégrales définies prises entre les limites 0 et $+\infty$.

45. Soit

$$D_n = \frac{d^n (x^n e^{-x})}{dx^n}.$$

On a, par la formule de Leibniz sur la dérivation d'un produit,

$$D_n = (-1)^n e^{-x} P_n(x),$$

P_n désignant un polynome entier en x de degré n,

$$P_n(x) = x^n - \frac{n^2}{1} x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{1.2} x^{n-2} - \frac{n^2(n-1)^2(n-2)^2}{1.2.3} x^{n-3} + \ldots + (-1)^n n!.$$

Tels sont les polynomes que je vais étudier.

Des intégrations par parties conduisent aisément à la relation

$$\int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{P}_n(x)\,\theta(x)\,dx = 0,$$

où $\theta(x)$ est un polynome arbitraire de degré $n-1$ au plus. On en déduit

$$(1)\qquad \int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{P}_p(x)\,\mathrm{P}_q(x)\,dx = 0 \qquad \text{si} \quad p \neq q,$$

ce qui donne, en particulier,

$$\int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{P}_n(x)\,dx = 0 \qquad \text{si} \quad n \geqq 1,$$

car $\mathrm{P}_0 = 1$.

Je dis que la relation

$$\int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{P}_n(x)\,\theta(x)\,dx = 0,$$

où $\theta(x)$ est un polynome arbitraire de degré $n-1$, *caractérise* le polynome $\mathrm{P}_n(x)$ à un multiplicateur constant près. Soit, en effet, $\mathrm{Q}_n(x)$ un second polynome de degré n tel que

$$\int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{Q}_n(x)\,\theta(x)\,dx = 0.$$

Appelons C une constante quelconque. Il viendra

$$\int_0^\infty e^{-x}[\mathrm{P}_n(x) - \mathrm{C}\,\mathrm{Q}_n(x)]\,\theta(x)\,dx = 0.$$

Or, prenons C de façon que $\mathrm{P}_n(x) - \mathrm{C}\,\mathrm{Q}_n(x)$ soit de degré $n-1$ et posons alors

$$\theta(x) = \mathrm{P}_n(x) - \mathrm{C}\,\mathrm{Q}_n(x).$$

On devrait avoir

$$\int_0^\infty e^{-x}[\mathrm{P}_n(x) - \mathrm{C}\,\mathrm{Q}_n(x)]^2\,dx = 0.$$

Donc

$$\mathrm{P}_n(x) \equiv \mathrm{C}\,\mathrm{Q}_n(x); \qquad\qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Cela posé, revenons aux polynomes P_n [1].

---

[1] Ces polynomes P_n peuvent être généralisés de bien des façons, par exemple en considérant les quantités

$$\mathrm{D}_n^{(\alpha)} = \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^{\frac{1}{\alpha}}}x^n\right),$$

où α désigne un nombre positif quelconque. On peut ainsi obtenir, au sujet du problème des moments, des résultats plus généraux que ceux de ce Chapitre. Mais, pour abréger, je me limiterai au cas simple où $\alpha = 1$.

On a aussi

$$(2) \qquad \int_0^\infty e^{-x} \mathrm{P}_n^2(x)\,dx = \int_0^\infty e^{-x}\mathrm{P}_n(x)x^n\,dx = (n!)^2,$$

comme le montre encore l'intégration par parties; et l'on peut déduire de là une identité que vérifie la fonction Γ.

La formule de Lagrange conduit au développement

$$(3) \qquad \frac{e^{\frac{tx}{1+t}}}{1+t} = \sum_0^\infty \frac{\mathrm{P}_n(x)}{n!}t^n.$$

D'où l'on tire la fonction génératrice des quantités P_n,

$$\sum_0^\infty \mathrm{P}_n(x)t^n = \int_0^\infty e^{-a}\frac{e^{\frac{atx}{1+at}}}{1+at}da,$$

en employant le procédé de sommation des séries divergentes indiqué par M. Borel [1]. Cette fonction génératrice est donnée par une série entière qui n'a pas de cercle de convergence; mais la série en question est *sommable* et l'on voit que sa somme (qui remplit d'ailleurs toutes les conditions voulues pour être prise comme fonction génératrice des P_n) est holomorphe en tout point du plan, sauf pour t réel et négatif. La partie négative de l'axe réel du plan (t) est une coupure apparente; en réalité, notre fonction génératrice peut être prolongée à travers cette pseudo-coupure, mais elle n'est pas uniforme. Du reste, si on l'appelle $\mathrm{P}(t)$, les expressions

$$\frac{1}{n!}\frac{d^n\mathrm{P}(t)}{dt^n}$$

tendent bien vers les polynomes $\mathrm{P}_n(x)$, pourvu que t tende vers zéro en suivant un chemin qui ne rencontre pas la coupure.

Partons de l'égalité

$$e^{xy} = \sum_0^\infty \frac{x^n}{n!}y^n,$$

et faisons la transformation d'Euler,

$$y = \frac{t}{1+t}, \qquad t = \frac{y}{1-y}.$$

---

[1] E. Borel, *Mémoire sur les séries divergentes*, III[e] Partie. (*Annales de l'École Normale supérieure*; 1899.)

Il vient

$$\frac{1}{1+t}e^{\frac{tx}{1+t}}=\sum_0^\infty \frac{P_n(x)}{n!}t^n=\sum_0^\infty \Delta_0^n\left(\frac{x^p}{p!}\right)t^n,$$

en posant

$$\Delta_0^n\left(\frac{x^p}{p!}\right)=\frac{x^n}{n!}-\frac{n}{1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\ldots+(-1)^n.$$

D'où

$$P_n(x)=n!\,\Delta_0^n\left(\frac{x^p}{p!}\right). \tag{4}$$

On en déduit

$$x^n=P_n+\frac{n^2}{1}P_{n-1}+\frac{n^2(n-1)^2}{1.2}P_{n-2}+\ldots+1, \tag{5}$$

en vertu des formules bien connues de la théorie des différences. On voit par là qu'un polynome quelconque de degré q en x peut toujours être mis sous la forme d'une combinaison linéaire et homogène à coefficients constants des q premiers polynomes P_n, et cette remarque s'étend même (sous certaines conditions de convergence) au cas d'une série entière en x.

On a

$$\frac{t}{(1+t)^2}e^{\frac{tx}{1+t}}=\frac{t}{1+t}\sum_0^\infty \frac{P_n(x)}{n!}t^n=\sum_0^\infty \frac{P'_n(x)}{n!}t^n.$$

D'où

$$\frac{P_n(x)}{n!}=\frac{P'_{n+1}(x)}{(n+1)!}+\frac{P'_n(x)}{n!},$$

en identifiant; ce qui donne

$$P'_{n+1}=(n+1)(P_n-P'_n), \tag{6}$$

relation qui nous sera utile plus loin.

L'égalité

$$\frac{1}{1+t}\int_0^\infty e^{-x}e^{\frac{tx}{1+t}}\frac{x^n}{n!}dx=(1+t)^n$$

conduit, par identification des deux membres, à la formule

$$\int_0^\infty e^{-x}\frac{P_p(x)}{p!}\frac{x^n}{n!}dx=C_n^p, \tag{7}$$

où C_n^p désigne le coefficient binomial bien connu, qui doit être regardé comme nul pour $p>n$.

L'application de la formule de Leibniz à la fonction $x^n e^{-x}=V$ fournit immédiatement les relations

$$xV' = (n - x)V;$$

d'où

$$xV^{(n+2)} + (n+1)V^{(n+1)} = (n-x)V^{(n+1)} - (n+1)V^{(n)},$$

et, par suite,

$$x\frac{d^2 D_n}{dx^2} + (1+x)\frac{dD_n}{dx} + (n+1)D_n = 0.$$

Finalement, on voit que P_n est une intégrale de l'équation différentielle

$$(8) \qquad x\frac{d^2 P_n}{dx^2} + (1-x)\frac{dP_n}{dx} + nP_n = 0.$$

Ayant ainsi une intégrale de cette équation, il est facile d'achever l'intégration et de trouver la solution générale. Appelons Q_n une autre intégrale, distincte de P_n. On a

$$(9) \qquad Q_n(x) = \int_0^\infty \frac{e^{x-z} z^n}{(z-x)^{n+1}} dz,$$

comme on le vérifie aisément. On voit que $Q_n(x)$ est une fonction non uniforme holomorphe en tout point du plan (x), sauf à l'origine : la partie positive de l'axe réel est une coupure apparente. Il est d'ailleurs facile de trouver la fonction génératrice des Q_n. C'est

$$\sum_0^\infty Q_n(x)t^n = \int_0^\infty e^{x-z}\frac{dz}{(1-t)z-x} = -\frac{e^x}{x}\int_0^\infty \frac{e^{-z}}{1-\frac{1-t}{x}z}dz = -\frac{e^x}{x}\sum_0^\infty n!\left(\frac{1-t}{x}\right)^n.$$

La dernière série (dont on connaît le lien avec le logarithme intégral) est *divergente,* mais *sommable* au sens de M. Borel; Laguerre a montré qu'il lui correspond une fraction continue convergente.

Il existe une relation récurrente entre trois polynomes P_n consécutifs,

$$(10) \qquad P_{n+1} + (2n+1-x)P_n + n^2 P_{n-1} = 0.$$

Ces polynomes forment donc une suite de Sturm. On en conclut aisément que l'équation

$$P_n(x) = 0$$

a toutes ses racines réelles, positives et distinctes.

Si l'on désigne par C un contour fermé qui entoure l'origine du plan (t) et qui est suffisamment petit, il vient

$$(11) \qquad P_n(x) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{(C)} \frac{e^{\frac{tx}{1+t}}}{1+t}\frac{dt}{t^{n+1}}.$$

D'où, en changeant de variable d'intégration,

$$P_n(x) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{(\Gamma)} e^{zx}\frac{(1-z)^n}{z^{n+1}}\,dz,$$

(Γ) étant un nouveau contour fermé. Cette dernière expression est celle qu'on obtiendrait en appliquant la méthode de Laplace à l'équation différentielle (8).

Une autre expression de $P_n(x)$ nous sera plus utile. Si l'on remarque que la fonction J_0 de Bessel est donnée par le développement

$$J_0(2\sqrt{t}) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^p t^p}{(p!)^2},$$

on voit que

$$D_n = \int_0^\infty e^{-y} y^n J_0(2\sqrt{xy})\,dy = \sum_0^\infty \frac{(-1)^p x^p}{(p!)^2}\Gamma(n+p+1). \tag{12}$$

Cette formule pourrait servir à définir les quantités D_n pour toutes les valeurs de n réelles ou imaginaires; l'interpolation des quantités D_n est ainsi accomplie. De là pourrait encore se déduire une théorie de la quantité D_n regardée comme fonction de son indice.

J'ai présenté, dans ce numéro, un tableau résumé des principales propriétés des polynomes $P_n(x)$. Non pas que je doive me servir ici de toutes ces propriétés. Mais je tenais à les rappeler, parce que je crois les polynomes P_n destinés à jouer un rôle important dans la résolution du problème des moments et, par suite, dans la théorie des fonctions données par un développement taylorien.

46. Arrivons maintenant au *problème des moments*. Il consiste, comme on sait, à résoudre par rapport à φ les égalités

$$\alpha_n = \int_0^\infty \varphi(x)x^n\,dx,$$

pour toutes les valeurs entières et positives de n. Je vais en donner une solution bien déterminée dans un cas assez étendu. Mais quelques lemmes sont d'abord nécessaires.

Soit une série

$$\sum_0^\infty \lambda_n D_n,$$

les λ_n désignant des constantes. Si x est positif, la formule (12) donne

$$|D_n| < n!.$$