MÉMOIRE

SUR LES

FONCTIONS HARMONIQUES DE M. H. POINCARÉ,

PAR M. W. STEKLOFF.

INTRODUCTION.

1. Il existe une classe générale de surfaces fermées pour lesquelles on peut trouver une infinité de nombres positifs

$$k_1, \quad k_2, \quad \ldots, \quad k_s, \quad \ldots$$

indéfiniment croissant avec l'indice s, et de fonctions correspondantes des coordonnées rectangulaires x, y, z

$$U_1, \quad U_2, \quad \ldots, \quad U_s, \quad \ldots$$

satisfaisant aux conditions

$$(1) \quad \frac{\partial^2 U_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_s}{\partial z^2} + k_s U_s = \Delta U_s + k_s U_s = 0 \qquad \text{à l'intérieur de (S),}$$

$$(2) \qquad U_s = 0 \qquad \text{sur (S)}$$

$$(s = 1, 2, 3, \ldots),$$

(S) étant la surface donnée.

On peut démontrer l'existence de ces fonctions, appelées par M. Poincaré *fonctions harmoniques,* pour toute surface fermée (S) ayant les propriétés suivantes :

1° La surface (S) admet en tout point la courbure finie et un plan tangent déterminé;

2° Autour de chaque point p_0 de (S) on peut décrire une sphère de rayon D, assez petit mais déterminé, tel qu'une parallèle à la normale n à (S) en p_0 ne puisse rencontrer (S), à l'intérieur de la sphère, qu'en un seul point;

3° La surface (S) admet la transformation de M. Poincaré (*Acta mathematica,* t. XX) [1].

Nous supposerons que les nombres $k_s (s = 1, 2, \ldots)$ sont rangés par ordre de grandeur croissante et qu'il n'existe aucun nombre k, entre deux nombres consécutifs k_s et k_{s+1} (y compris l'intervalle $0, k_1$), auquel corresponde une fonction harmonique qui n'est pas identiquement nulle.

On peut ajouter aux conditions (1) et (2) la condition suivante

$$\int U_s^2 \, d\tau = 1 \qquad (s = 1, 2, \ldots), \tag{3}$$

l'intégrale étant étendue au domaine (D), limité par (S).

Les fonctions U_s satisfont encore, comme on sait, aux égalités suivantes

$$\int U_m U_n \, d\tau = 0 \qquad \text{si } m \gtrless n. \tag{4}$$

2. Il existe aussi, pour les surfaces satisfaisant aux conditions 1°, 2° et 3°, une infinité de nombres positifs

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_s, \quad \ldots$$

---

(1) *Voir* mon Mémoire précédent : *Les Méthodes générales pour résoudre les problèmes fondamentaux de la Physique mathématique.* Je profite de l'occasion pour rectifier quelques erreurs dans le Mémoire cité (*Les Méthodes générales,* etc.) :

Au lieu de (p. 264, ligne 22)

$$\sigma_s = \sum_{s=1}^{\infty} |U_s| < \varepsilon_s \frac{Q}{\delta},$$

il faut lire

$$\sigma_s = \sum_{s=1}^{\infty} |U_s| < \varepsilon_s \frac{Q}{\delta} + \mu^s \qquad (0 < \mu < 1).$$

La formule (p. 270, dernière ligne)

$$V = c - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} V_{2k-1}$$

doit être remplacée par la suivante

$$V = c - \sum_{k=1}^{\infty} V_{2k-1},$$

et l'égalité (p. 271, ligne 5)

$$V = \frac{1}{2\pi} \int [\rho + L - \rho_3 + \rho_5 - \ldots + (-1)^k \rho_{2k+1} + \ldots] \frac{1}{r} \, ds,$$

par la suivante

$$V = \frac{1}{2\pi} \int (\rho + L + \rho_2 + \rho_4 + \ldots + \rho_{2k} + \ldots) \frac{1}{r} \, ds.$$

W. S.

indéfiniment croissant avec s, et de fonctions correspondantes

$$V_1, \quad V_2, \quad \ldots, \quad V_s, \quad \ldots$$

satisfaisant aux conditions

$$\Delta V_s + \lambda_s V_s = 0 \qquad \text{à l'intérieur de (D)}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial V_{s,i}}{\partial n} + h V_{si} = 0 \qquad \text{sur (S)}, \tag{6}$$

$$\int V_s^2 \, d\tau = 1, \tag{7}$$

où h désigne une constante positive, $\frac{\partial V_{s,i}}{\partial n}$ la dérivée normale intérieure de V_s sur (S), n la direction de la normale extérieure à (S).

Les fonctions V_s satisfont encore aux conditions suivantes

$$\int V_m V_n \, d\tau = 0 \qquad \text{si } m \gtrless n. \tag{8}$$

Dans ce qui va suivre nous considérons principalement les fonctions U_s, mais les recherches que j'exposerai dans ce Mémoire s'appliqueront sans peine au cas des fonctions V_s.

Les fonctions harmoniques sont très utiles pour la solution des diverses questions d'Analyse et de Physique mathématique; il suffit d'indiquer le problème classique du refroidissement d'un corps solide, qui se ramène au problème du développement d'une fonction donnée en série procédant suivant les fonctions harmoniques.

Ce dernier problème fut traité pour la première fois sous sa forme générale par M. Poincaré dans son Mémoire *Sur les équations de la Physique mathématique* (*Rendiconti del Circolo di Palermo,* 1894).

Deux ans après, j'ai proposé une nouvelle démonstration simple du théorème de M. Poincaré dans mon Mémoire *Sur le développement d'une fonction donnée en série ordonnée suivant les fonctions harmoniques,* publié en *russe* dans les *Communications de la Société mathématique de Kharkow,* t. V, nos 1 et 2; 1895.

Ensuite, dans un nouveau Mémoire *Sur le développement d'une fonction donnée suivant les fonctions harmoniques*, publié aussi en *russe* en 1897 (*Communications*, t. VI, nos 2 et 3), j'ai démontré ce théorème plus général :

La fonction donnée est développable en série ABSOLUMENT ET UNIFORMÉMENT *convergente, procédant suivant les fonctions* U_s, *si* f *est continu avec ses dérivées de trois premiers ordres et satisfait aux conditions*

$$f = 0, \quad \Delta f = 0 \qquad \text{sur la surface donnée (S).}$$

Une nouvelle démonstration du *même théorème* a paru un an après dans le Mémoire de M. Éd. Le Roy *Sur l'intégration des équations de la chaleur* (*Annales de l'École Normale*, mai 1898).

Presque en même temps (4 avril 1898) j'ai publié aux *Comptes rendus* une Note *Sur un problème de la théorie analytique de la chaleur*, où j'ai démontré que *la fonction donnée f peut se développer en série* ABSOLUMENT *convergente, procédant suivant les fonctions satisfaisant aux conditions* (5) *et* (6), *si cette fonction est continue à l'intérieur de* (S) *avec ses dérivées des trois premiers ordres et satisfait à l'équation du rayonnement sur* (S).

Enfin, dans ma Note *Sur le développement d'une fonction donnée suivant les fonctions harmoniques*, insérée aux *Comptes rendus* du 30 janvier 1899, j'ai indiqué une méthode assez simple pour établir un théorème qui peut s'énoncer comme il suit :

La fonction f est développable en série procédant suivant les fonctions U_s, *si elle est continue avec ses dérivées des deux premiers ordres à l'intérieur de* (S) *et s'annule sur* (S).

C'est le théorème même dont la démonstration nouvelle se retrouve dans le Mémoire récent de M. Zaremba *Sur le développement d'une fonction arbitraire en une série procédant suivant les fonctions harmoniques*, inséré dans le *Journal de Mathématiques* (n° 1, 1900).

M. Zaremba ne mentionne pas mes recherches sur ce sujet, les ignorant sans doute.

Je crois de mon devoir de publier en détail les recherches dont j'ai exposé les résultats principaux en extrait dans ma Note du 30 janvier 1899.

LES PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DE L'INTÉGRALE DE L'ÉQUATION $\Delta w + kw + f = 0$.

3. Nous commencerons par l'étude de l'intégrale de l'équation

$$(9) \qquad \Delta w + kw + f = 0 \qquad \text{à l'intérieur de (S)},$$

jointe à la condition

$$(10) \qquad w = 0 \qquad \text{sur (S)},$$

k étant une constante et f une fonction donnée.

Nous supposerons d'abord que f est continue à l'intérieur de (S) avec ses dérivées du premier ordre.

On sait qu'il existe une seule fonction, continue à l'intérieur de (S) avec ses dérivées des deux premiers ordres, satisfaisant aux conditions (9) et (10) et se présentant sous la forme de la série

$$w_0 + kw_1 + k^2 w_2 + \ldots + k^s w_s + \ldots, \tag{11}$$

qui converge absolument et uniformément, pourvu que $|k|$ ne surpasse pas une certaine limite μ.

Dans la série (11), $w_s (s = 0, 1, 2, \ldots)$ sont des fonctions satisfaisant aux équations

$$\Delta w_0 + f = 0, \qquad \Delta w_s + w_{s-1} = 0 \qquad \text{à l'intérieur de (S)}, \tag{12}$$

$$w_0 = 0, \qquad w_s = 0 \qquad \text{sur (S)} \tag{13}$$

$$(s = 1, 2, 3, \ldots).$$

En désignant, en général, par F′ ce que devient la fonction $F(x, y, z)$ quand on y remplace x, y, z par ξ, η, ζ, nous aurons

$$w_0 = \int G f' \, d\tau', \qquad w_s = \int G w'_{s-1} \, d\tau' \qquad (s = 1, 2, 3, \ldots), \tag{14}$$

les intégrales étant étendues au domaine (D) tout entier, G étant la fonction connue de Green (dépendant de x, y, z et ξ, η, ζ).

Formons la suite des intégrales de M. Schwarz, en posant

$$W_{2s} = \int w_s^2 \, d\tau, \qquad W_{2s-1} = \int \sum \left(\frac{\partial w_s}{\partial x}\right)^2 d\tau. \tag{15}$$

On sait que

$$\frac{W_1}{W_0} < \frac{W_2}{W_1} < \ldots < \frac{W_{s+1}}{W_s} < \ldots, \tag{16}$$

et que

$$\mu = \lim_{s=\infty} \frac{W_s}{W_{s+1}}. \tag{17}$$

4. Considérons w comme une fonction du paramètre k.

On sait que *w est une fonction méromorphe de k, n'ayant que des pôles simples*

$$k_1, \quad k_2, \quad \ldots, \quad k_s, \quad \ldots,$$

dont les résidus sont proportionnels aux fonctions harmoniques

$$U_1, \quad U_2, \quad \ldots, \quad U_s, \quad \ldots.$$

Les nombres $k_s (s = 1, 2, \ldots)$ satisfont à l'inégalité

$$k_s > a s^{\frac{2}{3}} \qquad (s = 1, 2, 3, \ldots), \tag{18}$$

a étant un nombre assignable.

La fonction w se représente sous la forme suivante

$$w = \frac{P}{\Delta}, \tag{19}$$

où P est une fonction holomorphe en k pour

$$|k| < k_p,$$

p étant un nombre entier *qu'on peut prendre aussi grand qu'on veut,* Δ désigne un polynome en k de degré $(p-1)$ à coefficients constants.

Pour

$$k = k_s < k_p,$$

Δ devient nul et la fonction P se réduit à U_s.

Ces propositions ont été établies par M. Poincaré en 1894 dans son Mémoire *Sur les équations de la Physique mathématique;* nous les citons sans reproduire la démonstration.

5. Le nombre des pôles de w et leur distribution dépendent de la fonction donnée f.

Théorème I. — *Si f satisfait à la condition*

$$\int f U_s \, d\tau = 0, \tag{20}$$

l'intégrale étant étendue au domaine (D) *tout entier, le point*

$$k = k_s,$$

est un point simple de la fonction w.

On a, en effet,

$$(k - k_s) \int w U_s \, d\tau + \int f U_s \, d\tau = 0,$$

ou, en vertu de (20),

$$(k - k_s) \int w U_s \, d\tau = 0.$$

Si k_s est un pôle de w, nous aurons, en vertu de (19),

$$M \int U_s^2 \, d\tau = 0,$$

M étant une constante différente de zéro.

Il est donc absurde de supposer que

$$k = k_s$$

est un point critique de w, si f satisfait à la condition (20).

Il s'ensuit que *si f satisfait aux conditions*

$$\int f U_1 \, d\tau = 0, \qquad \int f U_2 \, d\tau = 0, \qquad \ldots, \qquad \int f U_p \, d\tau = 0, \tag{21}$$

la fonction w est holomorphe en k, pourvu que

$$|k| \leqq k_{p+1}.$$

Dans ce cas nous aurons, en vertu de (16) et (17),

$$\frac{W_0}{W_1} > \lim_{s=\infty} \frac{W_s}{W_{s+1}} > k_{p+1}. \tag{22}$$

DÉMONSTRATION DE QUELQUES ÉGALITÉS FONDAMENTALES.

6. Soit maintenant f une fonction *finie* à l'intérieur de (S).

Posons

$$R_p = f - \sum_{s=1}^{p} A_s U_s, \tag{23}$$

où

$$A_s = \int f U_s \, d\tau \qquad (s = 1, 2, \ldots, p). \tag{24}$$

Posons ensuite

$$S_p = \int R_p^2 \, d\tau.$$

On trouve, en vertu de (3), (4) (n° 1), (23) et (24),

$$S_p = \int f^2 \, d\tau - \sum_{s=1}^{p} A_s^2 \geqq 0. \tag{25}$$

De cette formule on tire immédiatement les lemmes suivants :

Lemme I. — *L'expression*

$$S_p = \int R_p^2 \, d\tau$$

est une fonction décroissante de l'indice p.

Lemme II. — *La série*

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s^2$$

converge quelle que soit la fonction f, finie à l'intérieur de (S).

7. Supposons maintenant que f soit continue au domaine (D) ainsi que ses dérivées du premier ordre et s'annule à la frontière de (D) [sur (S)].

Dans ce cas R_p sera une fonction ayant les mêmes propriétés que f.

Posons

$$T_p = \int \sum \left(\frac{\partial R_p}{\partial x}\right)^2 d\tau.$$

On trouve aisément

$$T_p = \int \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 d\tau - \sum_{s=1}^{p} k_s A_s^2 \geqq 0.$$

Cette formule démontre les deux lemmes suivants :

Lemme III. — *L'expression*

$$T_p = \int \sum \left(\frac{\partial R_p}{\partial x}\right)^2 d\tau$$

est une fonction décroissante de l'indice p.

Lemme IV. — *La série*

$$\sum_{s=1}^{\infty} k_s A_s^2$$

converge, si la fonction f, *continue à l'intérieur de* (S) *avec ses dérivées du premier ordre, s'annule sur* (S).

8. Supposons que f satisfasse aux conditions du lemme IV.

Cherchons l'intégrale de l'équation

$$\Delta w + kw + R_p = 0 \qquad \text{à l'intérieur de (S),}$$

jointe à la condition

$$w = 0 \qquad \text{sur (S),}$$

sous la forme de la série

$$w = w_0 + \sum_{s=1}^{\infty} k^s w_s. \tag{26}$$

Il est aisé de voir, en vertu de (3), (4) et (24), que R_p satisfait aux conditions

$$\int R_p U_s \, d\tau = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, p).$$

On peut donc affirmer, en tenant compte du théorème du n° 5, que la série (26) converge, pourvu que

$$|k| < k_p.$$

En entendant par $W_s^{(p)}(s=1, 2, \ldots)$ les intégrales de Schwarz correspondant à la fonction R_p, on peut écrire, en vertu de (22),

$$\frac{W_0^{(p)}}{W_1^{(p)}} > k_p. \tag{27}$$

En employant la transformation de Green et en remarquant que R_p s'annule sur (S), on trouve, en vertu de (12) (en y remplaçant f par R_p),

$$\int \sum \frac{\partial R_p}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial x}\,d\tau = -\int R_p\,\Delta w_0\,d\tau = \int R_p^2\,d\tau.$$

Par conséquent (l'inégalité de Schwarz),

$$\left(\int R_p^2\,d\tau\right)^2 < \int \sum \left(\frac{\partial R_p}{\partial x}\right)^2 d\tau \int \sum \left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 d\tau,$$

ou

$$\frac{\int R_p^2\,d\tau}{\int \sum \left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 d\tau} < \frac{\int \sum \left(\frac{\partial R_p}{\partial x}\right)^2 d\tau}{\int R_p^2\,d\tau} = \frac{T_p}{S_p}.$$

D'autre part, on a

$$\int \sum \left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 d\tau = -\int w_0\,\Delta w_0\,d\tau = \int R_p\,w_0\,d\tau.$$

Cette égalité et l'inégalité précédente nous donnent

$$K = \frac{\int \sum \left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 d\tau}{\int w_0^2\,d\tau} < \frac{\int R_p^2\,d\tau}{\int \sum \left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 d\tau} < \frac{T_p}{S_p}.$$

Mais

$$\int \sum \frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w_1}{\partial x}\,d\tau = -\int w_0\,\Delta w_1\,d\tau = \int w_0^2\,d\tau.$$

Par conséquent,

$$K > \frac{\int w_0^2\,d\tau}{\int \sum \left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2 d\tau} = \frac{W_0^{(p)}}{W_1^{(p)}},$$

et finalement, en vertu de (27),

$$\frac{T_p}{S_p} > k_p,$$

d'où, eu égard au lemme III,

$$\lim_{p=\infty} S_p = 0,$$

puisque k_p croît indéfiniment avec l'indice p [l'inégalité (18)].

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME II. — *Si f est une fonction continue à l'intérieur d'un domaine* (D) *avec ses dérivées du premier ordre et s'annule à la frontière de* (D), *l'intégrale* $\int f^2\,d\tau$ *peut se présenter sous la forme de la série suivante:*

$$\int f^2\,d\tau = \sum_{s=1}^{\infty} A_s^2, \qquad A_s = \int f U_s\,d\tau.$$

9. Supposons maintenant que la fonction f, étant continue à l'intérieur de (D) avec ses dérivées du premier ordre, *ne s'annule pas sur* (S).

Prenons sur la normale n en un point quelconque de (S) un autre point P, situé à l'intérieur de (S), et désignons par δ la distance pP.

Si la surface (S) satisfait aux conditions 1° et 2° du n° **1**, le lieu géométrique des points P représentera, δ étant un nombre fixe assez petit, une surface fermée, *parallèle à* (S), tendant vers (S), quand δ tend vers zéro.

Désignons cette surface par (S_i), par (D_i) le domaine limité par (S_i), par $d\tau_i$ l'élément de volume de (D_i), par $d\tau_0$ l'élément de volume du domaine limité par (S) et (S_i).

On peut toujours trouver une fonction ψ satisfaisant aux conditions suivantes:

$$(28)\qquad \begin{aligned} &\psi = f \qquad \text{à l'intérieur de } (S_i),\\ &\psi = 0 \qquad \text{sur } (S). \end{aligned}$$

Posons

$$(29)\qquad \psi = \sum_{s=1}^{p} B_s U_s + R_p, \qquad B_s = \int \psi U_s\,d\tau,$$

$$(30)\qquad f = \sum_{s=1}^{p} A_s U_s + R'_p, \qquad A_s = \int f U_s\,d\tau,$$

D'après le lemme I, les expressions

$$S_p = \int R_p^2\,d\tau, \qquad S'_p = \int R'^2_p\,d\tau$$

sont les fonctions décroissantes de p, et, d'après le théorème II,

$$\lim_{p=\infty} S_p = 0.$$

Quant aux R_p et R'_p, ils satisfont aux conditions

$$\int R_p U_s\,d\tau = 0, \qquad \int R'_p U_s\,d\tau = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, p).$$

En tenant compte de ces égalités, on trouve

(31) $$S'_p = \int R'^2_p \, d\tau = \int R'_p f \, d\tau.$$

Multiplions l'égalité (29) par $f\,d\tau$, l'égalité (30) par $\psi\,d\tau$ et intégrons.

En retranchant les résultats ainsi obtenus, on trouve

$$\int R'_p \psi \, d\tau = \int R_p f \, d\tau,$$

ou, en vertu de (28) et de (31),

$$\int R'_p \psi \, d\tau = \int R_p f \, d\tau = S'_p + \int R'_p (\psi - f) \, d\tau_0.$$

On a donc

(32) $$S'_p = \int R_p f \, d\tau + \int R'_p (f - \psi) \, d\tau_0.$$

Mais

$$\left(\int R_p f \, d\tau\right)^2 < Q^2 S_p,$$

$$\left(\int R'_p (f - \psi) \, d\tau_0\right)^2 < Q_1^2 \int R'^2_p \, d\tau_0 < Q_1^2 S'_p,$$

où l'on a posé

$$Q^2 = \int f^2 \, d\tau, \qquad Q_1^2 = \int (f - \psi)^2 \, d\tau_0.$$

Désignons par M le maximum de $|f - \psi|$ dans le domaine (D).

Nous aurons

$$Q_1^2 < M^2 \int d\tau_0 = M^2 S \delta,$$

S étant l'aire de la surface (S).

D'autre part, en vertu de (25),

$$S'_p \leqq \int f^2 \, d\tau = Q^2.$$

On peut donc écrire

$$\left|\int R_p f \, d\tau\right| < Q \sqrt{S_p}, \qquad \left|\int R'_p (f - \psi) \, d\tau\right| < MQ \sqrt{S} \sqrt{\delta} = N\varepsilon.$$

Par conséquent [l'égalité (32)],

$$S'_p < Q \sqrt{S_p} + N\varepsilon.$$

Sachant que S_p tend vers zéro, lorsque p croît indéfiniment, et en passant à la limite, on trouve

$$\lim_{p=\infty} S'_p < N\varepsilon,$$

N étant un nombre fini, ε *étant un nombre arbitraire si petit qu'on veut.*

On a donc nécessairement

$$\lim_{p=\infty} S'_p = 0. \tag{33}$$

Ce résultat conduit à la proposition suivante :

THÉORÈME III. — *Si f est une fonction continue à l'intérieur d'un domaine* (D) *avec ses dérivées du premier ordre, l'intégrale $\int f^2\,d\tau$ peut se présenter sous la forme de la série suivante :*

$$\int f^2\,d\tau = \sum_{s=1}^{\infty} A_s^2.$$

10. Désignons par φ une fonction quelconque satisfaisant à une seule condition

$$\int \varphi^2\,d\tau < Q^2,$$

où Q est un nombre assignable.

L'égalité (30) nous donne

$$\int f\varphi\,d\tau = \sum_{s=1}^{p} A_s B_s + \int R'_p \varphi\,d\tau, \qquad B_s = \int \varphi U_s\,d\tau,$$

quel que soit le nombre p.

Mais

$$\left|\int R'_p \varphi\,d\tau\right| < Q\sqrt{S'_p}.$$

En supposant que p croît indéfiniment et en passant à la limite, on trouve, en vertu de (33),

$$\lim_{p=\infty} \left|\int R'_p \varphi\,d\tau\right| = 0.$$

On a donc

$$\int f\varphi\,d\tau = \sum_{s=1}^{\infty} A_s B_s.$$

Il est facile de voir que la série

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s B_s \tag{34}$$

converge *absolument*.

On a, en effet,

$$\sum_{s=1}^{\infty} |A_s|\,|B_s| < \frac{1}{2}\left(\sum_{s=1}^{\infty} A_s^2 + \sum_{s=1}^{\infty} B_s^2\right).$$

Chacune de ces dernières séries converge d'après le lemme I.

Donc, la série (34) converge absolument.

Le théorème suivant est donc démontré :

THÉORÈME IV. — *Si f est une fonction continue à l'intérieur d'un domaine* (D) *avec ses dérivées du premier ordre et φ est une fonction quelconque satisfaisant à une seule condition*

$$\int \varphi^2\,d\tau < Q,$$

Q *étant un nombre assignable, l'intégrale $\int f\varphi\,d\tau$ peut se présenter sous la forme de la série* ABSOLUMENT *convergente*

$$\int f\varphi\,d\tau = \sum_{s=1}^{\infty} A_s B_s, \qquad A_s = \int f\,U_s\,d\tau, \qquad B_s = \int \varphi\,U_s\,d\tau.$$

11. Considérons enfin une fonction f qui n'est que *continue* à l'intérieur de (D).

D'après le théorème de M. Picard, on peut construire une suite de quantités positives décroissantes, données à l'avance,

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \ldots, \quad \varepsilon_s, \quad \ldots,$$

formant une série convergente, et déterminer une suite de polynomes en x, y, z

$$P_1, \quad P_2, \quad \ldots, \quad P_s, \quad \ldots,$$

tels qu'on ait

$$|P_s| < \varepsilon_s \qquad (s = 1, 2, 3, \ldots),$$

(35) $$f = \sum_{s=1}^{\infty} P_s \qquad \text{à l'intérieur de (D)} \quad (^1).$$

On peut poser

$$\varepsilon_s = \varepsilon \rho^s;$$

ε étant une constante positive, ρ étant un nombre positif plus petit que l'unité.

La série (35) converge *absolument* et uniformément à l'intérieur de (D). On peut donc écrire

$$f^2 = \sum_{s=1}^{\infty} P_s^2 + 2\sum_{s=2}^{\infty} P_s\varphi_s,$$

où l'on a posé

$$\varphi_s = \sum_{k=s+1}^{\infty} P_k.$$

(1) E. PICARD, *Traité d'Analyse*, t. I, p. 258. Paris, 1891.

L'égalité précédente nous donne

$$(36)\qquad \int f^2\,d\tau = \sum_{s=1}^{\infty}\int P_s^2\,d\tau + 2\sum_{s=2}^{\infty}\int P_s\varphi_s\,d\tau.$$

Les polynomes P_s satisfont aux conditions du théorème III, les fonctions φ_s aux mêmes conditions que la fonction φ dans le théorème IV.

En employant ces théorèmes, on peut écrire

$$(37)\qquad \sigma_s = \int P_s^2\,d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} A_{sk}^2, \qquad A_{sk} = \int P_s U_k\,d\tau,$$

$$\int P_s\varphi_s\,d\tau = \sum_{s=1}^{\infty} A_{sk}B_{sk}, \qquad B_{sk} = \int \varphi_s U_s\,d\tau.$$

La série

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_s + \ldots$$

converge absolument.

D'après le théorème connu ([1]), on trouve

$$(38)\qquad \sum_{s=1}^{\infty}\int P_s^2\,d\tau = \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} A_{sk}^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} A_{sk}^2.$$

D'autre part,

$$\sigma'_s = 2\sum_{s=1}^{\infty} |A_{sk}B_{sk}| < \sum_{s=1}^{\infty}(A_{sk}^2 + B_{sk}^2),$$

d'où, en tenant compte de (25) et (37),

$$\sigma'_s < \int P_s^2\,d\tau + \int \varphi_s^2\,d\tau.$$

Mais

$$|\varphi_s| < \sum_{k=s+1}^{\infty} |P_k| < \frac{\varepsilon}{1-\rho}\rho^{s+1} < \frac{\varepsilon}{1-\rho}\rho^s,$$

$$|P_s| < \varepsilon\rho^s.$$

On a donc

$$\sigma'_s < D\varepsilon^2\left[1 + \frac{1}{(1-\rho)^2}\right]\rho^{2s} = K\rho^{2s},$$

D étant le volume du domaine (D), K étant un nombre fini et positif.

([1]) Jules Tannery, *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable;* p. 61. Paris, 1886.

La série

$$\sigma'_1 + \sigma'_2 + \ldots + \sigma'_s + \ldots$$

converge.

On peut donc écrire

$$\sum_{s=2}^{\infty} \int \mathrm{P}_s \varphi_s \, d\tau = \sum_{s=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{A}_{sk} \mathrm{B}_{sk} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=2}^{\infty} \mathrm{A}_{sk} \mathrm{B}_{sk}.$$

Cette dernière égalité et les égalités (36) et (38) nous donnent

$$\int f^2 \, d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{s=1}^{\infty} \mathrm{A}_{sk}^2 + 2 \sum_{s=2}^{\infty} \mathrm{A}_{sk} \mathrm{B}_{sk} \right).$$

Eu égard à la convergence absolue et uniforme de la série $\sum\limits_{s=1}^{\infty} \mathrm{P}_s$, on trouve

$$\sum_{s=1}^{\infty} \mathrm{A}_{sk}^2 + 2 \sum_{s=2}^{\infty} \mathrm{A}_{sk} \mathrm{B}_{sk} = \left(\sum_{s=1}^{\infty} \int \mathrm{P}_s \mathrm{V}_k \, d\tau \right)^2 = \left(\int \mathrm{V}_k \sum_{s=1}^{\infty} \mathrm{P}_s \, d\tau \right)^2 = \left(\int f \mathrm{V}_k \, d\tau \right)^2 = \mathrm{A}_k^2.$$

Il s'ensuit que (en remplaçant k par s)

$$\int f^2 \, d\tau = \sum_{s=1}^{\infty} \mathrm{A}_s^2,$$

ce qui démontre ce théorème :

Théorème V. — *Si f est une fonction satisfaisant à une seule condition d'être continue à l'intérieur d'un domaine* (D), *l'intégrale $\int f^2 \, d\tau$ peut se présenter sous la forme de la série suivante :*

$$(39) \qquad \int f^2 \, d\tau = \sum_{s=1}^{\infty} \mathrm{A}_s^2, \qquad \mathrm{A}_s = \int f \mathrm{U}_s \, d\tau.$$

On peut de même démontrer sans peine, comme dans le numéro précédent, le théorème suivant :

Théorème VI. — *Si f est une fonction continue à l'intérieur de* (D), *φ est une fonction quelconque satisfaisant à une seule condition*

$$\int \varphi^2 \, d\tau < \mathrm{Q},$$

Q *étant un nombre assignable, l'intégrale $\int f\varphi \, d\tau$ peut se présenter sous la* *forme de la série* ABSOLUMENT *convergente*

$$\int \varphi f\, d\tau = \sum_{s=1}^{\infty} A_s B_s, \qquad B_s = \int \varphi U_s\, d\tau. \tag{40}$$

12. Supposons maintenant que f soit *continue à l'intérieur de* (D) *avec ses dérivées des deux premiers ordres et s'annule à la frontière de* (D) [*sur* (S)].

Posons

$$\Delta f = \varphi.$$

En employant le théorème VI, on peut écrire

$$\int f\varphi\, d\tau = \sum_{s=1}^{\infty} A_s B_s.$$

Le théorème de Green nous donne

$$\int f\varphi\, d\tau = \int f\, \Delta f\, d\tau = -\int \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 d\tau.$$

D'autre part, d'après le même théorème, on trouve

$$B_s = \int \varphi U_s\, d\tau = \int U_s\, \Delta f\, d\tau = \int f\, \Delta U_s\, d\tau = -k_s \int f U_s\, d\tau = -k_s A_s.$$

On a donc

$$\int \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 d\tau = \sum_{s=1}^{\infty} k_s A_s^2.$$

On arrive ainsi à cette proposition :

THÉORÈME VII. — *Si f est une fonction continue à l'intérieur d'un domaine* (D) *avec ses dérivées des deux premiers ordres et s'annule à la frontière de* (D), *l'intégrale*

$$\int \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 d\tau$$

peut se présenter sous la forme de la série suivante :

$$\int \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 d\tau = \sum_{s=1}^{\infty} k_s A_s^2.$$

Soient f et φ deux fonctions, continues à l'intérieur de (D) avec ses dérivées des deux premiers ordres et s'annulant à la frontière de (D).

D'après le théorème de Green, on a

$$\int \sum \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, d\tau = -\int \varphi\, \Delta f\, d\tau.$$

D'autre part, le théorème VI donne

$$\int \varphi\, \Delta f\, d\tau = \sum_{s=1}^{\infty} B_s C_s, \qquad B_s = \int \varphi\, U_s\, d\tau, \qquad C_s = \int \Delta f\, U_s\, d\tau,$$

mais

$$\int \Delta f\, U_s\, d\tau = \int f\, \Delta U_s\, d\tau = -k_s \int f\, U_s\, d\tau = -k_s A_s,$$

par conséquent,

$$\int \sum \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, d\tau = \sum k_s A_s B_s,$$

d'où l'on tire le théorème suivant :

Théorème VIII. — *Si f et φ sont des fonctions continues à l'intérieur d'un domaine* (D) *avec ses dérivées des deux premiers ordres et s'annulant à la frontière de* (D), *l'intégrale*

$$\int \sum \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, d\tau$$

peut se présenter sous la forme de la série ABSOLUMENT *convergente*

$$\int \sum \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, d\tau = \sum_{s=1}^{\infty} k_s A_s B_s.$$

On s'assure aisément de la convergence absolue de cette série, en remarquant que

$$\sum_{s=1}^{\infty} k_s |A_s|\,|B_s| < \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{\infty} k_s (A_s^2 + B_s^2)$$

et en tenant compte du lemme IV du n° 7.

13. Considérons maintenant les fonctions V_s, définies par les équations (5), (6) et (7) du n° 2.

En raisonnant comme précédemment, nous démontrerons sans peine les théorèmes suivants, que j'énoncerai sans reproduire la démonstration :

Théorème IX. — *Si f est une fonction continue à l'intérieur d'un domaine* (D), *l'intégrale $\int f^2\, d\tau$ peut se présenter sous la forme de la série suivante :*

$$\int f^2\, d\tau = \sum_{s=1}^{\infty} A_s^2, \qquad A_s = \int f\, V_s\, d\tau.$$

Le cas de $h = 0$ mérite une attention particulière.

Dans ce cas on peut poser

$$\lambda_0 = 0,$$

et

$$V_0 = \text{const.}$$

Le théorème, analogue au théorème précédent, peut s'énoncer comme il suit :

Théorème X. — *Si f est une fonction continue à l'intérieur de* (D), *l'intégrale $\int f^2\,d\tau$ peut se présenter sous la forme de la série suivante :*

$$\int f^2\,d\tau = DA_0^2 + \sum_{s=1}^{\infty} A_s^2, \qquad A_s = \int f V_s\,d\tau,$$

D *étant le volume de* (D),

$$DA_0 = \int f\,d\tau.$$

14. Je dois remarquer que les égalités analogues aux (39) et (40) ont été établies pour la première fois par M. Liapounoff par une méthode toute différente dans le cas particulier des fonctions trigonométriques et sphériques, mais sous les conditions encore plus générales par rapport à la fonction donnée f.

M. Liapounoff a indiqué aussi quelques applications intéressantes des égalités dont il s'agit : il les a employées pour déterminer la limite inférieure *précise* du rapport de quelques intégrales définies et pour la solution du problème général de l'Électrostatique, quand la surface du conducteur est un ellipsoïde [1].

Dans ce qui va suivre j'indiquerai les applications nouvelles de mes égalités générales [(39), (40), etc.] à la solution de diverses questions d'Analyse et de Physique mathématique et, entre autres, à la solution du problème de développement d'une fonction donnée en série procédant suivant les fonctions harmoniques $U_s (s = 1, 2, \ldots)$.

LA LIMITE INFÉRIEURE PRÉCISE DU RAPPORT DE CERTAINES INTÉGRALES MULTIPLES.

15. Nous appliquerons les théorèmes, démontrés dans les numéros précédents, au calcul de la limite inférieure précise du rapport de certaines intégrales multiples, qui se rencontrent souvent dans la Physique mathématique.

---

[1] Voir *Communications de la Société Mathématique de Kharkow* (Extrait des *Procès-Verbaux*, t. VI, n° 6; séances des 13 décembre 1896, 2 janvier et 2 mai 1897).

Soit f une fonction, continue avec ses dérivées du premier ordre et s'annulant sur (S).

Posons

$$V=\int\sum\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 d\tau, \qquad W=\int f^2\, d\tau.$$

D'après les théorèmes II et VII, on a

$$V=\sum_{s=1}^{\infty} k_s A_s^2, \qquad W=\sum_{s=1}^{\infty} A_s^2,$$

d'où

$$\frac{V}{W}=\frac{\sum\limits_{s=1}^{\infty} k_s A_s^2}{\sum\limits_{s=1}^{\infty} A_s^2} \geqq k_1,$$

k_1 étant le plus petit des nombres k_s, caractéristiques pour les fonctions harmoniques U_s.

Il est aisé de voir que k_1 *représente la limite inférieure précise du rapport* $\frac{V}{W}$.

En posant, en effet,

$$f=U_1,$$

on trouve

$$\frac{\int\sum\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}\right)^2 d\tau}{\int U_1^2\, d\tau}=k_1,$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Supposons maintenant que f satisfasse aux conditions suivantes :

$$(41) \qquad \int f U_1\, d\tau=0, \qquad \int f U_2\, d\tau=0, \qquad \ldots, \qquad \int f U_p\, d\tau=0.$$

Dans ce cas

$$V=\sum_{s=p+1}^{\infty} A_s k_s^2, \qquad W=\sum_{s=p+1}^{\infty} A_s^2.$$

Il suit de là que

$$\frac{V}{W}\geqq k_{p+1}.$$

Il est facile de voir que k_{p+1} *représente la limite inférieure précise du rapport* $\frac{V}{W}$, *si f satisfait aux conditions* (41).

16. Soient φ et ψ deux fonctions continues à l'intérieur de (D) avec ses dérivées du premier ordre.

On sait que (l'inégalité de Schwarz)

$$\left(\int\sum\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}d\tau\right)^2<\int\sum\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2d\tau\int\sum\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2d\tau. \tag{42}$$

Supposons que ψ satisfasse aux conditions

$$\Delta\psi+\varphi=0 \qquad \text{à l'intérieur de (D)}, \tag{43}$$

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial n}=0 \qquad \text{sur (S)}\ (^1). \tag{44}$$

La fonction φ doit satisfaire à la condition

$$\int\varphi\, d\tau=0. \tag{45}$$

Posons

$$\psi=\frac{1}{4\pi}\int\frac{\varphi'}{r}d\tau'+u=v+u,$$

r étant la distance du point x, y, z au point variable ξ, η, ζ du domaine (D). On trouve

$$\Delta u=0 \qquad \text{à l'intérieur de (D)},$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial n}=-\frac{\partial v_i}{\partial n} \qquad \text{sur (S)},$$

$\frac{\partial v_i}{\partial n}$ étant une fonction connue, continue sur (S).

Il est aisé de voir, en vertu de (45), que

$$\int\frac{\partial v_i}{\partial n}ds=0,$$

l'intégrale étant étendue à la surface (S) tout entière.

En supposant que (S) satisfasse aux conditions du n° 2, nous pouvons déterminer la fonction v et, par suite, la fonction ψ par la méthode de C. Neumann, comme je l'ai démontré dans ma Note : *Sur le problème de Neumann et de Gauss* (*Comptes rendus*, 19 février 1900).

On peut encore assujettir la fonction ψ à la condition suivante :

$$\int\psi\, d\tau=0.$$

---

(1) $\frac{\partial\psi_i}{\partial n}$ représente la dérivée normale intérieure de la fonction ψ sur (S), n désigne la direction de la normale extérieure à (S).

Le théorème X nous donne

$$\int \varphi^2\, d\tau = \sum_{s=1}^{\infty} A_s^2, \qquad \int \psi^2\, d\tau = \sum_{s=1}^{\infty} B_s^2,$$

où

$$A_s = \int \varphi V_s\, d\tau, \qquad B_s = \int \psi V_s\, d\tau.$$

On peut écrire, en vertu de (43),

$$A_s = -\int \Delta\psi V_s\, d\tau,$$

d'où, en tenant compte des propriétés des fonctions ψ et V_s [les égalités (44), (5) et (6)],

$$A_s = \int \psi\, \Delta V_s\, d\tau = -\lambda_s \int \psi V_s\, d\tau = -\lambda_s B_s.$$

On a donc

$$\frac{\int \varphi^2\, d\tau}{\int \psi^2\, d\tau} = \frac{\sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s^2 B_s^2}{\sum_{s=1}^{\infty} B_s^2} \geqq \lambda_1^2. \tag{46}$$

D'autre part, le théorème de Green nous donne, en vertu de (43) et (44),

$$\int \sum \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}\, d\tau = -\int \varphi\, \Delta\psi\, d\tau = \int \varphi^2\, d\tau,$$

$$\int \sum \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 d\tau = -\int \psi\, \Delta\psi\, d\tau = \int \varphi\psi\, d\tau.$$

L'inégalité (42) peut donc s'écrire sous la forme suivante :

$$\left(\int \varphi^2\, d\tau\right)^2 \leqq \int \sum \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 d\tau \int \varphi\psi\, d\tau \leqq \sqrt{\int \varphi^2\, d\tau}\sqrt{\int \psi^2\, d\tau} \int \sum \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 d\tau,$$

d'où, eu égard à l'inégalité (46),

$$K = \frac{\int \sum \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 d\tau}{\int \varphi^2\, d\tau} \geqq \frac{\sqrt{\int \varphi^2\, d\tau}}{\sqrt{\int \psi^2\, d\tau}} \geqq \lambda_1.$$

Il est facile de voir que λ_1 *représente la limite inférieure précise du rapport* K ; pour s'en assurer il suffit de poser

$$\varphi = V_1.$$

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Si φ est une fonction continue avec ses dérivées du premier ordre à l'intérieur d'un domaine (D) *et satisfait à la condition*

$$\int \varphi \, d\tau = 0,$$

la limite inférieure PRÉCISE *du rapport*

$$K = \frac{\int \sum \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 d\tau}{\int \varphi^2 \, d\tau}$$

est égale à λ_1, λ_1 étant le plus petit des nombres λ_s, caractéristiques pour les fonctions V_s (¹).

Nous terminerons cet article en reproduisant sans démonstration, qui est très facile, la proposition suivante :

Si la fonction φ, continue avec ses dérivées du premier ordre à l'intérieur de (D), *satisfait aux conditions*

$$\int \varphi \, d\tau = 0, \qquad \int \varphi V_s \, d\tau = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, p),$$

la limite inférieure PRÉCISE *du rapport* K *est égale à* λ_{p+1}.

UNE MÉTHODE GÉNÉRALE POUR DÉTERMINER LA DENSITÉ ET LES MOMENTS D'INERTIE DE LA TERRE.

17. Supposons que l'on sait par expérience la valeur de la composante, suivant une direction quelconque p, de l'attraction exercée par la Terre sur un point extérieur $P(x, y, z)$.

En désignant par ξ, η, ζ les coordonnées des points intérieurs à la Terre, par Q la composante considérée, par ρ la densité de la Terre, par α_1, α_2, α_3 les angles de la direction p avec les axes des coordonnées, on trouve

$$(47) \qquad \cos\alpha_1 \int \frac{\rho(\xi - x)}{r^3} d\tau + \cos\alpha_2 \int \frac{\rho(\eta - y)}{r^3} d\tau + \cos\alpha_3 \int \frac{\rho(\zeta - z)}{r^3} d\tau = Q,$$

(¹) *Comparer* le lemme fondamental de M. Poincaré, démontré dans son Mémoire : *Sur les équations de la Physique mathématique* (*Rendiconti di Palermo*, p. 70; 1894).

les intégrales étant étendues au volume de la Terre tout entier, ou

$$\int \rho \frac{\cos(p, r)}{r^2} d\tau = \int \rho\varphi\, d\tau = Q,$$

où l'on a posé

$$\varphi = \frac{\cos(p, r)}{r^2}.$$

Le point P étant à l'extérieur des masses attirantes, la fonction φ ainsi que ses dérivées seront continues en ξ, η, ζ, et la formule (40) aura lieu, si la densité ρ est assujettie à la seule condition d'être *finie* à l'intérieur de la Terre.

Le théorème VI nous donne, par conséquent,

$$\int \rho\varphi\, d\tau = a_1 A_1 + a_2 A_2 + \ldots + a_s A_s + \ldots,$$

où

$$A_s = \int \varphi U_s\, d\tau, \qquad a_s = \int \rho U_s\, d\tau.$$

En considérant la surface de la Terre comme une sphère ou un ellipsoïde de révolution, on peut calculer les fonctions harmoniques U_s à l'aide des fonctions sphériques ou des fonctions de Lamé.

Supposons que l'on ait trouvé par expérience les valeurs de Q [l'égalité (47)] en n points différents, extérieurs à la Terre.

Désignons les valeurs de Q dans les points considérés par

$$Q_1, \quad Q_2, \quad \ldots, \quad Q_n,$$

les valeurs-correspondantes des A_s par

$$A_{s1}, \quad A_{s2}, \quad \ldots, \quad A_{sn} \qquad (s = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

En choisissant n suffisamment grand, on peut poser approximativement

$$(48) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a_1 A_{11} + a_2 A_{12} + \ldots + a_n A_{1n} = Q_1, \\ a_1 A_{21} + a_2 A_{22} + \ldots + a_n A_{2n} = Q_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_1 A_{n1} + a_2 A_{n2} + \ldots + a_n A_{nn} = Q_n. \end{array} \right.$$

On peut toujours disposer les points extérieurs de telle manière que le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro.

Les équations (48) donneront les valeurs approximatives des constantes inconnues $a_s (s = 1, 2, \ldots, n)$.

18. Employons maintenant le théorème VI, en y posant

$$f = \rho, \qquad \varphi = 1.$$

On trouve approximativement

$$M = \int \rho \, d\tau = a_1 \int U_1 \, d\tau + a_2 \int U_2 \, d\tau + \ldots + a_n \int U_n \, d\tau,$$

M étant la masse totale de la Terre.

En substituant dans cette égalité les valeurs de $a_s (s = 1, 2, \ldots, n)$, tirées des équations (48), *nous déterminerons avec une approximation suffisante la masse totale de la Terre. Pour cela, il suffit de supposer seulement que la densité* ρ *reste finie à l'intérieur de la Terre.*

Supposons maintenant que la fonction ρ soit continue.

Envisageons un volume quelconque (D_0) à l'intérieur de la Terre et désignons par $d\tau_0$ l'élément de ce volume.

Soit φ une fonction égale à l'unité à l'intérieur de (D_0) et à zéro en tous les autres points de la Terre.

Alors le théorème VI nous donnera

$$\int \rho\varphi \, d\tau = \int \rho \, d\tau_0 = a_1 \int U_1 \, d\tau_0 + a_2 \int U_2 \, d\tau_0 + \ldots + a_n \int U_n \, d\tau_0,$$

a_s étant des constantes définies par les équations (48).

En choisissant le domaine (D_0) suffisamment petit, *nous obtiendrons,* au point de vue de la Physique, *la densité en chaque point de la Terre, si l'on pose*

$$\rho = \frac{\int \rho \, d\tau_0}{D_0} = a_1 \frac{\int U_1 \, d\tau_0}{D_0} + a_2 \frac{\int U_2 \, d\tau_0}{D_0} + \ldots + a_n \frac{\int U_n \, d\tau_0}{D_0},$$

D_0 étant le volume du domaine (D_0).

19. On sait que, pour déterminer les moments d'inertie d'un corps quelconque par rapport à un axe quelconque, il suffit de calculer les moments d'inertie par rapport à trois axes de coordonnées

$$A = \int \rho(\eta^2 + \zeta^2) \, d\tau, \qquad B = \int \rho(\zeta^2 + \xi^2) \, d\tau, \qquad C = \int \rho(\xi^2 + \eta^2) \, d\tau,$$

et les produits

$$D = \int \rho \eta \zeta \, d\tau, \qquad E = \int \rho \zeta \xi \, d\tau, \qquad F = \int \rho \xi \eta \, d\tau.$$

Le problème se ramène au calcul des intégrales de la forme générale

$$K = \int \rho f \, d\tau,$$

f étant une fonction continue à l'intérieur du corps.

Faisons une seule supposition, que *la densité* ρ *soit* FINIE *à l'intérieur de la Terre.*

En appliquant au K le théorème VI, on trouve approximativement

$$K = a_1 \int f U_1 \, d\tau + a_2 \int f U_2 \, d\tau + \ldots + a_n \int f U_n \, d\tau. \tag{49}$$

La fonction f étant donnée, on peut calculer les intégrales

$$\int f U_s \, d\tau \qquad (s = 1, 2, \ldots, n).$$

Quant aux constantes $a_s (s = 1, 2, \ldots, n)$, on pourra les déterminer à l'aide des équations (48). Il suffit, pour cela, de déterminer par expérience les composantes suivant une direction quelconque p de l'attraction de la Terre en n points différents, extérieurs à la Terre.

L'égalité (49) *permet de calculer les moments d'inertie de la Terre sans que nous sachions la densité* ρ *de la Terre, sous la seule supposition générale que* ρ *soit* FINI *en tous les points de la Terre.*

LE PROBLÈME DU DÉVELOPPEMENT D'UNE FONCTION DONNÉE EN SÉRIE PROCÉDANT SUIVANT LES FONCTIONS HARMONIQUES.

20. Supposons maintenant que f soit continue avec ses dérivées à l'intérieur du domaine (D) et s'annule sur (S).

Considérons la fonction

$$u = f + \int G \Delta f' \, d\tau',$$

G étant la fonction de Green.

La fonction u est continue à l'intérieur de (D) et s'annule sur (S).

En appliquant à u le théorème V, on peut écrire

$$\int u^2 \, d\tau = \sum_{s=1}^{\infty} A_s^2, \qquad A_s = \int u U_s \, d\tau,$$

ou

$$A_s = \int f U_s \, d\tau + \int U_s \left(\int G \Delta f' \, d\tau' \right) d\tau.$$

En changeant l'ordre d'intégration, ce qui est possible, on trouve

$$\int U_s \left(\int G \Delta f' \, d\tau' \right) d\tau = \int \Delta f' \left(\int G U_s \, d\tau \right) d\tau' = \frac{1}{k_s} \int U'_s \, \Delta f' \, d\tau = \frac{1}{k_s} \int U_s \Delta f \, d\tau.$$

D'autre part, le théorème de Green nous donne

$$\int U_s \Delta f \, d\tau = \int f \Delta U_s \, d\tau = - k_s \int f U_s \, d\tau.$$

On a donc

$$\int U_s \left(\int G \Delta f' \, d\tau' \right) d\tau = - \int f U_s \, d\tau$$

et, par suite,

$$A_s = 0 \qquad (s = 1, 2, 3, \ldots).$$

Il en résulte que

$$\int u^2 \, d\tau = 0,$$

c'est-à-dire

$$u = 0 \qquad \text{à l'intérieur de (D)}$$

identiquement.

L'égalité

$$u = f + \int G \Delta f' \, d\tau' = 0 \tag{50}$$

est donc démontrée sous la seule supposition que Δf *soit continu à l'intérieur de* (D).

Il faut remarquer qu'on peut regarder cette égalité comme évidente, quand Δf admet les dérivées du premier ordre continu à l'intérieur de (D), ou, plus généralement, quand Δf satisfait à la condition

$$|\Delta f - \Delta f_0| < a r^\beta,$$

Δf et Δf_0 étant les valeurs de Δf en deux points p et p_0 de (D), r étant la distance pp_0, a et $\beta < 1$ étant des nombres ne dépendant pas de la position des points p et p_0 dans le domaine (D) [1].

Dans ce cas, on peut affirmer que la fonction u, s'annulant sur (S), satisfait à la condition

$$\Delta u = 0 \qquad \text{à l'intérieur de (D)},$$

---

[1] *Voir* OTTO HÖLDER, *Beiträge zur Potentialtheorie*, p. 10. Stuttgart; 1882.

d'où l'on conclut immédiatement que

$$u = 0 \qquad \text{à l'intérieur de (D).}$$

21. Appliquons maintenant le théorème VI à l'intégrale

$$\int G \Delta f' \, d\tau',$$

ce qui est possible, parce que la fonction Δf est continue à l'intérieur de (D) et la fonction G satisfait à la condition

$$\int G^2 \, d\tau < Q,$$

Q étant un nombre assignable.

On trouve

$$\int G \Delta f' \, d\tau' = \sum_{s=1}^{\infty} B_s C_s,$$

où

$$B_s = \int \Delta f' \, U'_s \, d\tau', \qquad C_s = \int G U'_s \, d\tau' = \frac{U_s}{k_s} \qquad (s = 1, 2, 3, \ldots).$$

D'autre part,

$$\int \Delta f' \, U'_s \, d\tau' = \int f' \Delta U'_s \, d\tau' = -k_s \int f' \, U'_s \, d\tau' = -k_s A_s.$$

On a donc

$$\int G \Delta f' \, d\tau' = -\sum_{s=1}^{\infty} A_s U_s,$$

d'où, eu égard à l'égalité (50), on conclut que

$$f = \sum_{s=1}^{\infty} A_s U_s,$$

ce qui démontre le théorème suivant :

THÉORÈME XI. — *Si la fonction f est continue à l'intérieur d'un domaine* (D) *avec ses dérivées des deux premiers ordres et s'annule à la frontière de* (D), *la série*

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s U_s, \qquad A_s = \int f \, U_s \, d\tau$$

a f pour somme.

On peut aussi établir d'une manière analogue le théorème suivant que j'énoncerai sans démonstration :

Théorème XII. — *La fonction donnée f peut se développer en série, procédant suivant les fonctions* $V_s (s = 1, 2, \ldots)$, *qui satisfont aux conditions* (5) *et* (6) *du n° 2, si cette fonction f est continue avec ses dérivées des deux premiers ordres à l'intérieur de* (D) *et satisfait à la condition*

$$\frac{\partial f_i}{dn} + h f_i = 0 \qquad \text{sur (S)}.$$

Je renverrai, pour la démonstration de ce théorème, à ma Note : *Sur un problème de la théorie analytique de la chaleur,* insérée aux *Comptes rendus* du 4 avril 1898.

22. Il est presque évident que le lemme II du n° 6 reste vrai, pourvu que la fonction f satisfasse à la seule condition

$$\int f^2 \, d\tau < Q^2,$$

Q étant un nombre assignable.

Sachant que la fonction de Green G satisfait à la condition tout à l'heure indiquée, on peut affirmer que la série

$$\sum_{s=1}^{\infty} \left(\int G U_s \, d\tau \right)^2,$$

ou *la série*

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{U_s^2}{k_s^2} \tag{51}$$

converge.

Considérons maintenant la série

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s U_s, \qquad A_s = \int f U_s \, d\tau,$$

en supposant que f satisfait aux conditions du théorème XII.

On peut écrire

$$\int f U_s \, d\tau = -\frac{1}{k_s} \int f \Delta U_s \, d\tau = -\frac{1}{k_s} \int U_s \Delta f \, d\tau = -\frac{B_s}{k_s},$$

d'où

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s U_s = -\sum_{s=1}^{\infty} B_s \frac{U_s}{k_s}.$$

En tenant compte de l'inégalité évidente

$$\sum |B_s| \frac{|U_s|}{k_s} < \frac{1}{2}\left(\sum B_s^2 + \frac{U_s^2}{k_s^2}\right),$$

et en remarquant que la série

$$\sum \frac{U_s^2}{k_s}$$

converge, comme nous venons de montrer, et la série

$$\sum B_s^2$$

converge d'après le lemme I, on en conclut que *la série*

$$(52)\qquad \sum A_s U_s$$

converge absolument dans le domaine (D).

Démontrons que la convergence est uniforme.

Considérons la série évidemment convergente

$$(53)\qquad F_p = \sum_{s=p}^{\infty} \frac{U_s^2}{k_s^2},$$

p étant un nombre quelconque.

La formule (25) nous donne

$$0 < \sum_{s=1}^{\infty} \frac{U_s^2}{k_s^2} \leqq \int G^2\, d\tau,$$

quelle que soit la position du point x, y, z dans le domaine (D), et *a fortiori*

$$0 < \sum_{s=p}^{\infty} \frac{U_s^2}{k_s^2} \leqq \int G^2\, d\tau \qquad \text{à l'intérieur de (S).}$$

Supposons que le point x, y, z tend d'une manière quelconque au point p_0 de la surface (S).

Comme la fonction

$$\int G^2\, d\tau$$

tend vers zéro, lorsque x, y, z tend vers p_0, quelle que soit la position de p_0 sur (S), on en conclut que la fonction F_p, positive à l'intérieur de (D), s'annule sur (S).

F_p admet donc un maximum ε_0 en un point P_0, bien déterminé, situé à l'intérieur de (D).

On a, par conséquent, quelle que soit la position du point $x, y\ z$ dans le domaine (D),

$$F_p < \varepsilon_0,$$

ε_0 étant un nombre fixe, ne dépendant pas de la position du point x, y, z dans le domaine donné.

En choisissant p assez grand, on pourra prendre ε_0 aussi petit qu'on veut, car la série (51) converge dans (D).

Cela posé, considérons le reste R_p de la série (52)

$$R_p = -\sum_{s=p}^{\infty} B_s \frac{U_s}{k_s} = \sum_{s=p}^{\infty} A_s U_s.$$

Nous aurons

$$2|R_p| < \sum_{s=p}^{\infty} B_s^2 + F_p.$$

Or, la série

$$\sum_{s=1}^{\infty} B_s^2$$

étant convergente (lemme II), on trouve, pour p assez grand,

$$\sum_{s=p}^{\infty} B_s^2 < \varepsilon_1,$$

ε_1 étant un nombre assez petit, ne dépendant pas évidemment de la position du point x, y, z dans le domaine (D).

On peut donc écrire

$$|R_p| < \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_0}{2} = \varepsilon,$$

où ε est une quantité positive assez petite, ne dépendant pas de la position du point x, y, z, à l'intérieur de (D).

Cette inégalité ayant lieu pour une valeur quelconque de p, elle aura lieu aussi pour toutes les valeurs de n plus grandes que p.

On a donc pour $n > p$

$$|R_n| < \varepsilon.$$

Cette inégalité montre que la série (52) converge uniformément à l'intérieur de (D).

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Théorème XIII. — *La série*

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s U_s, \qquad A_s = \int f U_s \, d\tau$$

converge absolument *et* uniformément *dans le domaine* (D), *si la fonction f, continue avec ses dérivées des deux premiers ordres à l'intérieur de* (D), *s'annule à la frontière de* (D).

23. En rapprochant ce théorème et le théorème XI du n° 21, nous obtiendrons enfin le théorème suivant :

Théorème XIV. — *La fonction donnée f peut se développer en série* absolument *et* uniformément *convergente, procédant suivant les fonctions harmoniques, pourvu que f soit continue avec ses dérivées des deux premiers ordres à l'intérieur de* (D) *et s'annule à la frontière de* (D).

En terminant mon Mémoire je ferai encore la remarque suivante :

L'uniformité de convergence de la série (52) étant établie, on peut démontrer le théorème indiqué de la manière suivante :

Posons

$$f = \sum_{s=1}^{p} A_s U_s + R_p.$$

Si la série (52) converge uniformément, la limite de R_p pour $p = \infty$ représentera une fonction continue à l'intérieur de (D).

En appliquant à f le théorème II, nous trouverons

$$\lim_{p=\infty} \int R_p^2 \, d\tau = 0.$$

Mais dans le cas considéré on peut écrire

$$\lim_{p=\infty} \int R_p^2 \, d\tau = \int \lim_{p=\infty} R_p^2 \, d\tau = \int (\lim_{p=\infty} R_p)^2 \, d\tau = 0,$$

d'où l'on tire immédiatement

$$\lim_{p=\infty} R_p = 0,$$

c'est-à-dire

$$f = \sum_{s=1}^{\infty} A_s U_s. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$