ÉTUDE

D'UNE

CLASSE DE SURFACES RÉGLÉES,

PAR M. VICTOR ROUQUET,

Professeur honoraire de Mathématiques spéciales au Lycée de Toulouse.

1. Les surfaces réglées dont l'étude fait l'objet du présent travail sont engendrées par l'axe instantané de rotation et de glissement dans le mouvement du trièdre fondamental d'une courbe gauche arbitraire.

On sait que le trièdre fondamental d'une courbe (O), en l'un de ses points O, a pour arêtes la tangente Ox, la normale principale Oy, et la bi-normale Oz, menées à la courbe au point O. Ce trièdre tri-rectangle, qui est aussi celui des coordonnées instantanées de la périmorphie curviligne, a pour faces le plan osculateur xOy, le plan normal yOz, et le plan rectifiant zOx, de (O) en O.

Lorsque le point O parcourt (O), le trièdre fondamental de la courbe se déplace. Le système invariable formé par ce trièdre est, par suite, animé d'un certain mouvement dont on peut déterminer, dans chaque position de O, l'axe instantané de rotation et de glissement que, pour abréger, j'appellerai simplement l'*axe instantané*. Cet axe décrit dans l'espace une surface réglée dont les génératrices rectilignes correspondent ainsi aux points de (O).

D'ailleurs, la surface lieu des axes instantanés relatifs au déplacement du trièdre fondamental d'une courbe ne peut être prise à volonté, car sa détermination est assurée par celle de la courbe correspondante et, par suite, dépend seulement de deux fonctions d'une variable, alors que la définition de la surface réglée la plus générale comporte trois fonctions arbitraires d'une même variable.

Dans ce qui suit, je me propose principalement de caractériser les surfaces S décrites par les axes instantanés dans les déplacements des trièdres fondamentaux des courbes gauches et de construire, pour chaque surface S, la courbe (O) qui lui correspond. Comme dans d'autres travaux antérieurs j'utiliserai, à cet effet, les formules de la périmorphie des surfaces et des courbes, telles qu'on les trouve dans le grand Traité de M. Darboux.

I. — *Généralités sur les surfaces réglées. Surfaces réglées adjointes.*

2. Pour la commodité du lecteur, je rappellerai en commençant les formules essentielles de la théorie des surfaces réglées [1].

En prenant, pour lignes (v), les génératrices rectilignes d'une surface réglée Σ, pour lignes (u), leurs trajectoires orthogonales, le carré dS^2 de l'élément linéaire de cette surface, c'est-à-dire de la distance qui sépare le point $O(u, v)$ du point infiniment voisin $O'(u+du, v+dv)$, a pour expression

$$dS^2 = du^2 + [(u-\alpha)^2 + \beta^2]\,dv^2.$$

Les significations géométriques des variables u et v, ainsi que celles des fonctions α et β contenues dans la formule ci-dessus, sont les suivantes :

1° La variable u, qui reste constante suivant une ligne (u), est le segment de génératrice rectiligne compris entre la trajectoire orthogonale initiale et le point (u, v) situé sur cette génératrice. D'après cela, la trajectoire orthogonale initiale, d'ailleurs arbitraire, correspond à la valeur $u = 0$.

2° La variable v, dont la valeur reste constante suivant une génératrice rectiligne de Σ, est l'arc de l'image sphérique de la surface, compté à partir d'une origine quelconque, mais fixe, jusqu'à l'image de la génératrice sur laquelle est situé le point (u, v). On entend, comme on sait, par image sphérique d'une surface réglée, la trace, sur une sphère dont le rayon est égal à l'unité, de celui des cônes directeurs de la surface qui a pour sommet le centre de cette sphère.

3° La fonction α dépend seulement de v. Elle est égale, pour toute valeur de cette variable, au segment de génératrice rectiligne compris entre la trajectoire orthogonale initiale et le point central de cette génératrice. Il résulte de là que l'équation de la ligne de striction de Σ est

$$u = \alpha.$$

4° De même que α, la fonction β dépend uniquement de v. Elle représente, pour toute valeur de v, le paramètre de distribution de la génératrice rectiligne correspondant à cette valeur.

Les fonctions α et β qui, seules, interviennent dans l'expression de dS^2 sont les éléments appelés *indéformables,* et conviennent à toutes les surfaces, réglées ou non, applicables sur Σ. Elles ne peuvent suffire, par suite, à déterminer la forme de la surface. Pour compléter la définition de celle-ci, on introduit une troisième fonction γ de la seule variable v qui, pour toute valeur de v, représente

---

(1) DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, IIIe Partie, p. 293 à 315.

la courbure géodésique de l'image sphérique de la surface au point de cette courbe qui correspond à la valeur considérée de v [1].

On démontre que les fonctions α, β, γ de v peuvent être choisies à volonté et que, lorsqu'elles sont connues, elles déterminent complètement, à la symétrie près, la surface qui leur correspond, dont on peut calculer ensuite, en fonction de u et de v, les équations dans un système d'axes fixes.

3. La surface réglée Σ est susceptible, bien entendu, d'autres modes de définition. On pourrait, par exemple, choisir arbitrairement la ligne de striction, qui dépend de deux fonctions d'une seule variable, en y joignant, pour chaque point de cette ligne, la direction de la droite qui engendre la surface.

Les cosinus des angles A, B, C, que forme cette direction avec les axes du trièdre fondamental de la ligne de striction, au point où elle est rencontrée par la génératrice considérée, dépendent d'une nouvelle fonction de la variable choisie, car, en outre de la relation

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1,$$

ils doivent vérifier la suivante

$$\cos B = \rho \frac{d(\cos A)}{ds},$$

où ds désigne l'élément d'arc de la ligne de striction, et ρ, son rayon de courbure au point de rencontre considéré.

On retrouve ainsi les trois fonctions arbitraires d'une variable qui sont nécessaires pour déterminer une surface réglée. Mais les fonctions α, β, γ, dont les significations géométriques ont été indiquées ci-dessus, doivent être regardées comme les fonctions déterminantes *canoniques,* parce qu'elles se prêtent, mieux que les autres, à l'application des méthodes de la périmorphie.

4. Pour les recherches de ce genre, les formules qui précèdent doivent être complétées par d'autres, dont nous aurons à faire constamment usage en les empruntant encore à l'Ouvrage de M. Darboux.

Étant donnée une surface quelconque, sur laquelle est tracé un réseau orthogonal (u, v), on suppose qu'un trièdre tri-rectangle T se meuve de manière que son sommet O décrive une courbe arbitraire de la surface; que les axes Ox et Oy de ce trièdre soient respectivement tangents, en ce point O, aux lignes (v) et (u) du réseau orthogonal et que, par suite, l'axe Oz reste constamment normal à cette surface.

---

[1] Darboux (*loc. cit.*, p. 306) désigne cette fonction par V.

Dans chaque position du trièdre T, on prend, par rapport à ses axes, les coordonnées des points de l'espace, de telle sorte que, lorsque T se déplace, ces coordonnées, dites *instantanées,* varient pour deux raisons : d'abord, parce que les axes changent et, en second lieu, parce que les points considérés comme correspondants du point O, peuvent eux-mêmes se déplacer.

Ceci posé, soient x, y, z, les coordonnées instantanées d'un point M par rapport au trièdre T dont le sommet est le point $O(u, v)$ de la surface. Quand le point O vient occuper, sur cette surface, la position infiniment voisine $O'(u+du, v+dv)$, les projections, sur les axes mobiles de T, du déplacement infiniment petit MM' subi par le point M, sont données par les formules suivantes

$$\begin{aligned}
\Delta X &= dx + A\,du + (q\,du + q_1\,dv)z - (r\,du + r_1\,dv)y,\\
\Delta Y &= dy + C\,dv + (r\,du + r_1\,dv)x - (p\,du + p_1\,dv)z,\\
\Delta Z &= dz \qquad\qquad + (p\,du + p_1\,dv)y - (q\,du + q_1\,dv)x,
\end{aligned}$$

en supposant que le carré dS^2 de l'élément linéaire de la surface, rapportée au réseau orthogonal (u, v), ait pour expression

$$dS^2 = A^2\,du^2 + C^2\,dv^2.$$

En outre, dans ces formules qui, pour tous les déplacements de O caractérisés par les diverses valeurs de du et dv, fournissent ce que j'appellerai, pour abréger, les Δ du point $M(x, y, z)$, les quantités p, q, r, p_1, q_1, r_1 sont des fonctions des variables indépendantes u et v qui représentent les composantes de certaines rotations et doivent vérifier, en conséquence, les équations de Codazzi [1].

5. Appliquons maintenant ces équations générales au cas d'une surface réglée, rapportée, comme il est dit ci-dessus (n° 2), à un réseau orthogonal dont les lignes (v), tangentes à Ox, sont les génératrices rectilignes et se confondent, par suite, avec cet axe, et dont les lignes (u), tangentes à Oy, sont les trajectoires orthogonales de ces génératrices.

D'après l'expression de dS^2 écrite au n° 2, on a, d'abord,

$$A = 1, \qquad C = \sqrt{(u-\alpha)^2 + \beta^2}.$$

Introduisons maintenant un angle auxiliaire φ, par la formule

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{u-\alpha}{\beta},$$

[1] DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, IIe Partie, p. 385, Tableau IV.

d'où il résulte que φ est l'angle que fait le plan tangent à la surface au point (u, v) avec le plan central de la génératrice rectiligne qui passe par ce point.

L'intégration des équations de Codazzi fournit alors les valeurs suivantes pour les composantes des rotations

$$p = \frac{\partial\varphi}{\partial u} = \frac{1}{\beta}\cos^2\varphi, \qquad q = 0, \qquad r = 0,$$

$$p_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial v} + \gamma, \qquad q_1 = -\cos\varphi, \qquad r_1 = \sin\varphi;$$

on a d'ailleurs

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v} = -\frac{\alpha'\beta + (u-\alpha)\beta'}{(u-\alpha)^2+\beta^2},$$

en désignant, comme d'habitude, par des accents, les dérivées des fonctions α et β de v.

On trouve aisément, pour les Δ d'un point M (x, y, z),

$$(\mathrm{A}) \qquad \begin{cases} \Delta X = dx + du - (z\cos\varphi + y\sin\varphi)\,dv, \\ \Delta Y = dy + C\,dv + x\sin\varphi\,dv - \left[\dfrac{1}{\beta}\cos^2\varphi\,du + \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} + \gamma\right)dv\right]z, \\ \Delta Z = dz + \left[\dfrac{1}{\beta}\cos^2\varphi\,du + \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} + \gamma\right)dv\right]y + x\cos\varphi\,dv. \end{cases}$$

On en déduit d'autres équations, particulièrement utiles dans les recherches relatives aux enveloppes et à leurs caractéristiques, qui font connaître les différentielles des coordonnées instantanées d'un point qui reste fixe pendant le déplacement du trièdre T. Ces différentielles, qui s'obtiennent évidemment en exprimant que les Δ du point (x, y, z) sont nuls, ont pour valeurs

$$(\mathrm{B}) \qquad \begin{cases} dx = -du + (z\cos\varphi + y\sin\varphi)\,dv, \\ dy = -C\,dv - x\sin\varphi\,dv + \left[\dfrac{1}{\beta}\cos^2\varphi\,du + \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} + \gamma\right)dv\right]z, \\ dz = -\left[\dfrac{1}{\beta}\cos^2\varphi\,du + \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} + \gamma\right)dv\right]y - x\cos\varphi\,dv. \end{cases}$$

J'emploierai principalement ces équations dans le cas où le point O appartient à la ligne de striction de la surface réglée Σ. On a, dans ce cas,

$$u = \alpha, \qquad C = \beta, \qquad \varphi = 0,$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)_\alpha = -\frac{\alpha'}{\beta}.$$

Les formules (A) et (B) deviennent alors

$$(\mathrm{A}')\quad \begin{cases} \Delta X = dx + du - z\,dv, \\ \Delta Y = dy + \beta\,dv - \left[\frac{1}{\beta}du + \left(\gamma - \frac{\alpha'}{\beta}\right)dv\right]z, \\ \Delta Z = dz + \left[\frac{1}{\beta}du + \left(\gamma - \frac{\alpha'}{\beta}\right)dv\right]y + x\,dv; \end{cases}$$

$$(\mathrm{B}')\quad \begin{cases} dx = - du + z\,dv, \\ dy = -\beta\,dv + \left[\frac{1}{\beta}du + \left(\gamma - \frac{\alpha'}{\beta}\right)dv\right]z, \\ dz = - \left[\frac{1}{\beta}du + \left(\gamma - \frac{\alpha'}{\beta}\right)dv\right]y - x\,dv. \end{cases}$$

Si l'on suppose, de plus, comme nous le ferons ci-après, que le déplacement du point O ait lieu sur la ligne de striction elle-même, la relation entre du et dv, déduite de l'équation

$$u = \alpha$$

de la ligne de striction, est

$$du = \alpha'\,dv.$$

Les formules (A′) et (B′) se simplifient encore et l'on a

$$(\mathrm{A}'')\quad \begin{cases} \Delta X = dx + (\alpha' - z)\,dv, \\ \Delta Y = dy + (\beta - \gamma z)\,dv, \\ \Delta Z = dz + (x + \gamma y)\,dv; \end{cases}$$

$$(\mathrm{B}'')\quad \begin{cases} dx = (z - \alpha')\,dv, \\ dy = (\gamma z - \beta)\,dv, \\ dz = -(x + \gamma y)\,dv. \end{cases}$$

Ces formules conviennent aux surfaces développables qui correspondent au cas où le paramètre de distribution β est identiquement nul.

6. Avant d'aller plus loin, je présenterai deux applications des équations précédentes. La première est relative à l'interprétation géométrique de la dérivée α' qui, au fond, importe seule, puisque la fonction α relative à une surface réglée donnée Σ n'est déterminée qu'à une constante près, dont la valeur dépend de la trajectoire initiale (u), qui peut être choisie arbitrairement.

Je me propose de faire voir que la dérivée α' de la fonction α de v représente, pour toute valeur de cette variable, le rayon de courbure de la ligne de striction, *suivant la génératrice rectiligne de la surface* passant par le point de cette ligne fourni par la valeur considérée de v.

Voici ce qu'il faut entendre par là.

Le rayon de courbure d'une courbe (O), en l'un de ses points O, est la distance de O à la caractéristique du plan normal à la courbe, qui est le plan perpendiculaire à la tangente au même point. Par extension, j'appellerai rayon de courbure d'une courbe (O), en l'un de ses points O, *suivant celle des génératrices qui passe par* O, d'une surface réglée contenant (O), la distance de O à la caractéristique du plan mené par ce point perpendiculairement à la génératrice considérée.

Ceci posé, soient une surface réglée Σ, sa ligne de striction (O) et un point quelconque O de cette ligne. Le rayon de courbure de (O) en O, suivant la génératrice rectiligne passant par ce point, est égal, d'après la définition précédente, à la distance du point O à la caractéristique du plan mené par O perpendiculairement à cette génératrice, en supposant, bien entendu, que le point O se meuve sur la ligne de striction.

Il en résulte que la caractéristique dont il est question ci-dessus est celle du plan yOz du trièdre T. Or, l'équation instantanée de ce plan étant

$$x = 0,$$

sa caractéristique est représentée par cette équation jointe à celle-ci

$$dx = 0,$$

ou

$$z - \alpha' = 0,$$

en vertu de la première des formules (A″) applicables, dans ce cas, puisque le sommet O du trièdre T est situé sur la ligne de striction de Σ et parcourt cette ligne.

La caractéristique cherchée, génératrice de la développable enveloppe des plans perpendiculaires aux génératrices rectilignes de Σ en leurs points centraux, est une droite parallèle à Oy et située à une distance de O égale à α'. La dérivée α' de α est donc, comme il s'agissait de le démontrer, le rayon de courbure en O de la ligne de striction (O), suivant la génératrice rectiligne Ox de Σ.

Lorsque la surface réglée est développable, α' représente évidemment le rayon de courbure ordinaire de l'arête de retroussement de cette développable.

7. La seconde application des formules (A″) et (B″) vise une notion fort importante pour notre objet, savoir celle des surfaces réglées *adjointes*.

Je dirai que deux surfaces réglées Σ et Σ_1 sont adjointes l'une de l'autre quand elles satisfont aux conditions suivantes :

1° Elles ont la même ligne de striction ;

2° Elles se touchent en tous les points de cette ligne ;

3° Les génératrices des deux surfaces qui ont le même point central sont constamment perpendiculaires entre elles.

Toutefois, cette définition paraissant comporter un nombre surabondant de conditions, il est nécessaire de la justifier et d'établir, à cet effet, la proposition que voici :

Lorsque les génératrices rectilignes d'une surface réglée Σ_1 *sont perpendiculaires aux génératrices rectilignes d'une autre surface réglée* Σ, *aux points centraux et dans les plans centraux de celles-ci, ces deux surfaces ont la même ligne de striction et se touchent en tous les points de cette ligne, en sorte qu'elles sont adjointes l'une de l'autre.*

8. Je démontrerai même une proposition plus générale qui s'énonce ainsi :

Théorème. — *Lorsque les génératrices rectilignes d'une surface réglée* Σ_1 *coupent, sous un angle constant* ω, *les génératrices rectilignes d'une autre surface réglée* Σ, *aux points centraux et dans les plans centraux de celles ci, ces deux surfaces ont la même ligne de striction et se touchent en tous les points de cette ligne.*

Prenons la surface Σ pour surface de référence, en supposant que le sommet O du trièdre T décrive la ligne de striction (O) de cette surface. La surface Σ_1 sera, d'après l'énoncé, le lieu des droites L_1 menées par les points O, dans les plans xOy, de manière que l'angle L_1Ox soit toujours égal à l'angle constant ω.

Pour toute position du trièdre T, les coordonnées instantanées d'un point quelconque M de la génératrice L_1 auront pour valeurs

$$x = l\cos\omega, \qquad y = l\sin\omega, \qquad z = 0,$$

l désignant le segment variable OM.

Quand le point O vient occuper, sur la ligne de striction, la position infiniment voisine O′, les Δ du point M, donnés par les formules (A″), sont

$$\Delta \text{ de M} \quad \begin{cases} \Delta X = dl\cos\omega + \alpha'\,dv, \\ \Delta Y = dl\sin\omega + \beta\,dv, \\ \Delta Z = l(\cos\omega + \gamma\,2\mathrm{in}\,\omega)\,dv. \end{cases}$$

L'équation instantanée (par rapport au trièdre T) du plan tangent en M à la surface réglée Σ_1 est de la forme

$$K(x\sin\omega - y\cos\omega) - z = 0,$$

K étant déterminé par la condition

$$K(\Delta X\sin\omega - \Delta Y\cos\omega) - \Delta Z = 0,$$

d'où l'on déduit

$$K = \frac{l(\cos\omega + \gamma \sin\omega)}{\alpha' \sin\omega - \beta \cos\omega}.$$

On a exprimé, en effet, que le plan tangent passe par L_1 et contient aussi le déplacement du point M.

L'équation du plan tangent montre que lorsque le point de contact M s'éloigne à l'infini sur L_1, ce plan tangent a pour équation

$$x \sin\omega - y \cos\omega = 0,$$

puisque à une valeur infinie de l correspond une valeur infinie de K. Or, on sait que le plan central de L_1 est perpendiculaire au plan tangent à la surface au point de L_1 situé à l'infini. Par suite, le plan central cherché a pour équation

$$z = 0.$$

Il correspond ainsi à une valeur nulle de K et, par suite, à la valeur zéro de l, ce qui prouve que son point de contact, c'est-à-dire le point central de L_1, est le point O. En résumé, les points centraux et les plans centraux des génératrices L de Σ, et L_1 de Σ_1 sont confondus. La proposition est donc démontrée, puisque O est un point quelconque de la ligne de striction.

Remarque I. — Je me propose de calculer le paramètre de distribution β_1 relatif à la génératrice L_1 de Σ_1.

Soit Θ l'angle que forme, avec le plan central xOy, le plan tangent en M à la surface réglée, en prenant, pour sens positif de cet angle, le sens habituel, qui est celui de Ox à Oz quand la droite L_1 coïncide avec Oy. L'équation du plan tangent donne

$$\tang\Theta = K = \frac{l(\cos\omega + \gamma \sin\omega)}{\alpha' \sin\omega - \beta \cos\omega}.$$

On en déduit immédiatement, pour la valeur cherchée de β_1,

$$\beta_1 = \frac{\alpha' \sin\omega - \beta \cos\omega}{\cos\omega + \gamma \sin\omega} \quad (^1).$$

Remarque II. — Une démonstration géométrique de la proposition précédente résulte de la considération des images sphériques (B) et (B_1) des surfaces Σ et Σ_1, tracées sur une sphère ayant pour centre un point fixe G et un rayon égal à

---

(1) Pour $\omega = 0$, auquel cas Σ_1 se confond avec Σ, on trouve $\beta_1 = -\beta$, ce qui paraît impliquer contradiction. Cette contradiction apparente provient de ce que le sens positif de l'angle que fait, avec xOy, un plan passant par Ox est dirigé de Oy vers Oz, c'est-à-dire en sens contraire de celui qu'on a admis pour établir la formule générale donnant β_1.

l'unité. Soient B et B_1 les points des courbes (B) et (B_1) qui sont les extrémités des rayons de la sphère respectivement parallèles aux génératrices L et L_1 de Σ et de Σ_1.

On sait que le plan central de L est parallèle au plan normal de (B) en B. D'après les conditions de l'énoncé, ce plan normal contient l'image B_1 de L_1 et l'arc de grand cercle BB_1 mesure l'angle constant ω. Les points de la courbe (B_1) sont donc situés dans les plans normaux de (B), aux points correspondants, et à des distances sphériques constantes de ces points. Il en résulte que les courbes (B) et (B_1) ont les mêmes plans normaux et, par suite, que les surfaces Σ et Σ_1 ont les mêmes plans centraux.

9. La surface adjointe d'une surface réglée donnée correspondant au cas où l'angle ω est droit, on peut énoncer les conclusions suivantes :

1° Toute surface réglée Σ admet une seule adjointe, qui est le lieu des perpendiculaires à ses génératrices, menées en leurs points centraux et dans leurs plans centraux ;

2° Inversement, la surface Σ est l'adjointe de la seconde surface Σ_1 ;

3° Le paramètre de distribution β_1 de la surface Σ_1, pour la génératrice L_1 correspondant à la génératrice L de Σ, est donné par la formule

$$\beta_1 = \frac{\alpha'}{\gamma}, \qquad \left(\alpha' = \frac{d\alpha}{dv}\right),$$

qui détermine l'une des fonctions canoniques de Σ_1 quand on suppose connues celles de Σ. Il est facile de déterminer les autres α_1 et γ_1, analogues à α et γ, ainsi que les variables u_1 et v_1 qui, par rapport à Σ_1, jouent le rôle de u et v par rapport à Σ. On y parvient en associant la valeur de β_1 à celle du carré de l'élément linéaire de Σ_1.

Les notations précédentes étant conservées, la surface Σ_1 est le lieu des droites Oy. Les coordonnées instantanées d'un point quelconque N de Oy, ayant pour valeurs

$$x = 0, \qquad y = l, \qquad z = 0,$$

où l désigne la distance ON, les Δ du point N auront pour valeur (A″)

$$\Delta \text{ de } N(0, l, 0) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta X &= \alpha' \, dv, \\ \Delta Y &= dl + \beta \, dv, \\ \Delta Z &= \gamma \, l \, dv. \end{aligned} \right.$$

Conséquemment, l'expression de dS_1^2, qui est

$$dS_1^2 = \Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2,$$

prendra la forme

$$dS_1^2 = (dl + \beta\, dv)^2 + (\alpha'^2 + \gamma^2 l^2)\, dv^2.$$

C'est en identifiant cette formule avec celle que donnent les variables canoniques, savoir

$$dS_1^2 = du_1^2 + [(u_1 - \alpha_1)^2 + \beta_1^2]\, dv_1^2,$$

que l'on obtiendra les relations cherchées.

En faisant usage de la valeur connue de β_1, la première des deux formules précédentes peut s'écrire

$$dS_1^2 = (dl + \beta\, dv)^2 + (l^2 + \beta_1^2)\gamma^2\, dv^2.$$

Pour obtenir l'identification des deux valeurs de dS_1^2, il suffira de poser

$$dv_1 = \gamma\, dv,$$
$$u_1 - \alpha_1 = l,$$
$$du_1 = dl + \beta\, dv.$$

La première de ces équations permet, au moyen d'une quadrature, de trouver v_1 en fonction de v, c'est-à-dire d'exprimer l'arc de l'image sphérique de Σ_1 en fonction de l'arc correspondant de l'image sphérique de Σ. La dernière équation associée à la seconde donne la suivante

$$d\alpha_1 = \beta\, dv,$$

qui fournit la valeur de α_1 en fonction de v et de la constante arbitraire introduite par l'intégration. La fonction α_1 n'est ainsi déterminée qu'à une constante près, ce qui doit être, puisque la longueur du segment qu'elle représente dépend de la trajectoire orthogonale initiale qui a été choisie.

On aura ensuite u_1, au moyen de la seconde équation que donne

$$u_1 = l + \alpha.$$

Il ne reste plus qu'à trouver γ_1. Remarquons, à cet effet, que la surface Σ étant l'adjointe de Σ_1, on doit avoir la relation

$$dv = \gamma_1\, dv_1$$

analogue à la première des équations écrites ci-dessus. On en déduit, par comparaison, la relation très simple

$$\gamma\gamma_1 = 1,$$

qui conduit à l'énoncé suivant :

Les fonctions γ et γ_1 relatives à deux surfaces réglées adjointes sont inverses l'une de l'autre.

Remarque I. — La considération, déjà utilisée au n° 8, des images sphériques des surfaces adjointes Σ et Σ_1 permet d'établir géométriquement ce dernier résultat.

On a vu que ces images sphériques sont deux courbes (B) et (B_1), telles qu'en leurs points correspondants B et B_1 les plans normaux sont les mêmes, les rayons GB et GB_1 étant rectangulaires. Il résulte de là que les caractéristiques de ces plans normaux sont aussi confondues et puisque, d'autre part, les rayons de courbure géodésique $\frac{1}{\gamma}$, $\frac{1}{\gamma_1}$, de ces courbes sont les distances des points B et B_1 aux points de rencontre de la caractéristique commune avec les traces, sur le plan normal, des plans tangents à la sphère aux points B et B_1, on voit que la proposition à démontrer revient à celle-ci : Si par les extrémités B et B_1 de deux rayons rectangulaires, GB et GB_1, d'un cercle de rayon égal à l'unité, on mène les tangentes qui coupent une droite passant par le centre aux points C et C_1, le produit des segments BC et B_1C_1 est égal à l'unité. Cette relation est une conséquence immédiate de ce que BC et B_1C_1 sont, l'un la tangente, l'autre la cotangente de l'angle que forme, avec le rayon GB, la caractéristique du plan normal.

Remarque II. — Nous venons de voir que les images sphériques de deux surfaces réglées adjointes l'une de l'autre sont deux courbes ayant les mêmes plans normaux et telles, en outre, que les rayons aboutissant aux points correspondants soient rectangulaires. On reconnaît les propriétés caractéristiques des courbes sphériques dites *supplémentaires*. Chacune de ces courbes est le lieu des extrémités des rayons perpendiculaires aux plans tangents du cône passant par l'autre courbe et ayant pour sommet le centre de la sphère. Ainsi :

Les images sphériques de deux surfaces réglées adjointes sont deux courbes supplémentaires.

II. — *Étude directe des surfaces* S.

10. Pour étudier le déplacement du trièdre fondamental d'une courbe (O), j'emploierai les formules de la périmorphie curviligne.

On sait [1] que si x, y, z désignent les coordonnées, par rapport au trièdre fondamental d'une courbe (O), en l'un de ses points O, d'un point M, fixe ou mobile, que l'on fait correspondre à O, les projections ΔX, ΔY, ΔZ, sur les axes Ox, Oy, Oz, du déplacement infiniment petit MM' que subit le point M quand le point O vient occuper sur (O), la position O' infiniment voisine de O et telle que OO' soit égal à l'élément d'arc ds de la courbe, sont données par les for-

(1) *Voir* Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces,* Ire Partie, p. 8 et 10.

mules

$$(C)\qquad \begin{cases} \Delta X = dx + \left(1 - \dfrac{y}{\rho}\right) ds, \\ \Delta Y = dy + \left(\dfrac{x}{\rho} - \dfrac{z}{\tau}\right) ds, \\ \Delta Z = dz + \dfrac{y}{\tau} ds, \end{cases}$$

dans lesquelles $\frac{1}{\rho}$ et $\frac{1}{\tau}$ désignent respectivement la courbure et la torsion de (O) en O.

On en déduit immédiatement que les différentielles des coordonnées d'un point M, qui reste fixe pendant le déplacement du trièdre fondamental, ont pour valeurs

$$(D)\qquad \begin{cases} dx = \left(\dfrac{y}{\rho} - 1\right) ds, \\ dy = \left(\dfrac{z}{\tau} - \dfrac{x}{\rho}\right) ds, \\ dz = -\dfrac{y}{\tau} ds, \end{cases}$$

puisque les déplacements d'un pareil point sont nuls.

Si le point M est invariablement lié au trièdre fondamental, les coordonnées instantanées x, y, z, ne varient pas avec s. Alors, les formules (C), où l'on fera

$$dx = dy = dz = 0,$$

fourniront les Δ du point M et, par suite, les éléments nécessaires à l'étude du mouvement d'un système invariablement lié au trièdre fondamental de la courbe (O).

11. Proposons-nous d'abord de déterminer, pour chaque position du trièdre fondamental de (O), l'axe instantané ainsi que les vitesses de glissement et de rotation, en admettant que le temps soit égal à l'arc s de (O) compté à partir d'une origine arbitraire, ce qui revient à supposer que O décrit uniformément (O) avec une vitesse égale à l'unité. Dans cette hypothèse, la vitesse d'un point quelconque est le rapport à ds de son déplacement infiniment petit.

L'axe instantané correspondant à la position du trièdre dont le sommet coïncide avec un point O de (O) est le lieu des points du système invariable pour lesquels la vitesse V, donnée par la formule

$$\begin{aligned} V^2 = \frac{\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2}{ds^2} &= \left(1 - \frac{y}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{x}{\rho} - \frac{z}{\tau}\right)^2 + \frac{y^2}{\tau^2} \\ &= \left(\frac{x}{\rho} - \frac{z}{\tau}\right)^2 + \left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\tau^2}\right)\left(y - \frac{\frac{1}{\rho}}{\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\tau^2}}\right)^2 + \frac{1}{\tau^2\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\tau^2}\right)}, \end{aligned}$$

acquiert sa valeur minimum.

Les équations de l'axe instantané L, par rapport au trièdre fondamental de (O) en O, sont donc

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{x}{\rho} = \dfrac{z}{\tau}, \\ y = a, \end{cases}$$

en posant, pour abréger,

$$(2)\qquad a = \frac{1}{\rho\left(\dfrac{1}{\rho^2} + \dfrac{1}{\tau^2}\right)}.$$

Le carré de la vitesse de translation, parallèle à cet axe, des différents points du système invariable, est le minimum de V^2, savoir

$$(3)\qquad V^2 = \frac{1}{\tau^2\left(\dfrac{1}{\rho^2} + \dfrac{1}{\tau^2}\right)}.$$

Le carré de la vitesse Ω de rotation, autour de l'axe instantané L, s'obtiendra en considérant un point particulier, le point O, par exemple, dont la vitesse totale est 1 et dont la distance à l'axe instantané est a. On a donc

$$a^2\Omega^2 + V^2 = 1,$$

et, par suite,

$$(4)\qquad \Omega^2 = \frac{1 - V^2}{a^2} = \frac{1}{a\rho} \quad (^1).$$

12. En introduisant l'angle μ que fait, avec la tangente Ox, la caractéristique du plan rectifiant zOx, les équations précédentes se simplifient et prennent des formes qui se prêtent, mieux que les premières, aux interprétations géométriques.

D'abord, on a la formule

$$(5)\qquad \operatorname{tang}\mu = \frac{\tau}{\rho},$$

qui résulte de ce que la caractéristique du plan rectifiant zOx est la droite d'intersection de ce plan, dont l'équation est

$$y = 0,$$

et de celui que représente l'équation

$$dy = 0;$$

ou, d'après la seconde des équations (D), la nouvelle équation

$$\frac{z}{\tau} - \frac{x}{\rho} = 0;$$

[1] Ces résultats sont contenus dans l'Ouvrage de M. Darboux (*loc. cit.*, p. 8).

par suite, la caractéristique cherchée est une droite passant par le point O, située dans le plan rectifiant et faisant, avec Ox, un angle μ dont la tangente est $\frac{\tau}{\rho}$.

Si, au moyen de l'équation (5), on élimine τ, les équations (1) de l'axe instantané L deviennent

$$(1)' \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{x}{\cos\mu} = \dfrac{z}{\sin\mu} \\ y = a, \end{array} \right.$$

après avoir posé, en vertu de (2) et de (5),

$$(2)' \qquad a = \rho \sin^2\mu.$$

On tire de là cette première conséquence :

Pour toute position du trièdre fondamental d'une courbe, l'axe instantané d'un système invariablement lié à ce trièdre est une droite L *parallèle à la caractéristique du plan rectifiant et qui rencontre la normale principale en un point dont la distance au sommet du trièdre est égale à* $\rho \sin^2\mu$.

On trouve, par la même substitution, les valeurs suivantes des vitesses

$$(3)' \qquad V = \cos\mu,$$

$$(4)' \qquad \Omega = \frac{\sin\mu}{a} = \frac{1}{\rho\sin\mu}.$$

Lorsque l'angle μ varie avec s, ce qui a lieu pour toutes les courbes à l'exception des hélices cylindriques [1], on peut prendre μ pour variable indépendante, à la place de s ou de toute autre. Il est d'autant plus utile de se placer à ce point de vue que, dans l'étude actuelle, μ est identique, comme nous le montrerons ci-après, à la variable v de la théorie des surfaces réglées.

13. Lorsque le point O décrit (O), l'axe L se déplace et décrit, dans l'espace, une surface réglée S, appartenant à la classe de celles que le but de cette étude est de caractériser.

Par rapport au système invariable entraîné dans le mouvement du trièdre fondamental, l'axe L décrit un conoïde, puisque cet axe reste constamment parallèle au plan zOx et rencontre toujours Oy. La forme de ce conoïde dépend évidemment des relations qui lient les courbures de (O) à la variable définissant individuellement les points de la courbe.

---

(1) Ce cas particulier est examiné plus loin (*voir* Remarque II du n° 19).

Laissant de côté ce conoïde pour ne m'occuper que de la surface S, je me propose de rechercher les variables et les fonctions canoniques qui déterminent cette surface, en partant des éléments de la courbe (O).

14. En premier lieu, je vais établir l'identité des variables μ et ν, c'est-à-dire démontrer la proposition suivante :

L'élément d'arc de l'image sphérique de la surface S *est égal à* $d\mu$.

Soient G le centre de la sphère, ayant pour rayon l'unité de longueur, par lequel on mène des rayons GB parallèles aux droites L de S et, par suite, aux caractéristiques des plans rectifiants de (O), et (B) la courbe lieu des extrémités B de ces rayons, c'est-à-dire l'image sphérique de S.

En outre, soient x_0, y_0, z_0, les coordonnées instantanées du centre G par rapport au trièdre fondamental de (O) en l'un de ses points O. Le point G étant fixe, on aura, en vertu des équations (D),

$$dx_0 = \left(\frac{y_0}{\rho} - 1\right) ds,$$

$$dy_0 = \left(\frac{z_0}{\tau} - \frac{x_0}{\rho}\right) ds,$$

$$dz_0 = -\frac{y_0}{\tau} ds.$$

Soit B l'extrémité du rayon de la sphère parallèle à l'axe L correspondant à la position considérée du trièdre. Les coordonnées instantanées de B auront évidemment pour valeurs

$$x = x_0 + r\cos\mu, \qquad y = y_0, \qquad z = z_0 + r\sin\mu \qquad (r = 1).$$

En appliquant les équations (C) et tenant compte des relations auxquelles satisfont x_0, y_0, z_0, dx_0, dy_0, dz_0, on trouve que les Δ du point B ont pour valeurs

$$\Delta \text{ de B} \begin{cases} \Delta X = -\sin\mu\, d\mu, \\ \Delta Y = 0, \\ \Delta Z = \cos\mu\, d\mu. \end{cases}$$

Puisque $\Delta Y = 0$, la tangente en B à (B) est parallèle au plan zOx. On voit donc, en premier lieu, que l'élément d'arc BB′ de (B) est parallèle au plan rectifiant correspondant de (O). De plus, les projections du déplacement BB′ sont les mêmes que celles du déplacement infiniment petit d'un point appartenant à un cercle fixe de rayon unité, situé dans un plan parallèle au plan zOx, le rayon aboutissant en B faisant l'angle μ avec Ox, car les coordonnées d'un pareil point, dans un système d'axes fixes, seraient

$$\cos\mu, \quad \sin\mu$$

et leurs différentielles, savoir

$$-\sin\mu\, d\mu, \quad \cos\mu\, d\mu,$$

auraient les mêmes valeurs que les Δ de B.

Il suit de là que l'élément d'arc de la courbe (B) est égal, en grandeur et en signe, à la différentielle $d\mu$, comme il s'agissait de le démontrer.

Cet angle $d\mu$ est encore celui que forment deux droites L infiniment voisines, ou bien encore les caractéristiques de deux plans rectifiants consécutifs de (O).

Lorsqu'on adopte, pour la surface S, les variables u et v dont les significations ont été données au n° 2, la dernière, v, de ces variables est égale à μ à une constante près que l'on pourra supposer nulle en choisissant convenablement l'origine des arcs v. En effet, $d\mu$ et dv représentent, toutes deux, l'élément d'arc de l'image sphérique de S et, par suite, sont égales.

Remarque. — Le calcul des Δ du point B, d'où l'on a déduit que l'élément d'arc de (B) est parallèle au plan rectifiant correspondant de (O), établit, par cela même, la relation très simple qui existe entre la courbe (B) et l'indicatrice sphérique de (O).

Cette indicatrice est, comme on sait, une courbe (Ω) dont la tangente, en chacun de ses points, est parallèle à la normale principale correspondante de (O) ou, ce qui revient au même, perpendiculaire au plan rectifiant de cette courbe; car cette tangente visiblement perpendiculaire à deux tangentes infiniment voisines de (O) est située dans un plan parallèle au plan osculateur de (O). D'après le résultat rappelé ci-dessus, les éléments de la courbe (B) sont situés dans les plans normaux de Ω en supposant, bien entendu, que ces courbes soient tracées sur la même sphère. On en conclut que la première courbe est la développée sphérique de la seconde; d'où cette proposition :

L'image sphérique de la surface S *qui correspond à une courbe* (O) *est la développée sphérique de l'indicatrice* (Ω) *de* O.

15. La recherche des fonctions α, β, γ, relatives à S, va maintenant nous occuper; nous déterminerons, à cet effet, pour chaque axe instantané, le point central, le plan central, ainsi que le paramètre de distribution.

Les coordonnées instantanées d'un point variable M pris sur la droite L, axe instantané du trièdre fondamental dont le sommet est le point O de (O), ayant pour valeurs

$$x = l\cos\mu, \qquad y = a \qquad z = l\sin\mu,$$

où l désigne la distance AM qui sépare le point M du point de rencontre A de L et de Oy, il en résulte que les Δ du point M seront fournis par les formules (C) et auront pour valeurs

$$\Delta \text{ de M} \begin{cases} \Delta X = dl\cos\mu - l\sin\mu\, d\mu + \left(1 - \dfrac{a}{\rho}\right) ds = dl\cos\mu - l\sin\mu\, d\mu + \cos^2\mu\, ds, \\ \Delta Y = da, \\ \Delta Z = dl\sin\mu + l\cos\mu\, d\mu + \dfrac{a}{\tau}\, ds = dl\sin\mu + l\cos\mu\, d\mu + \sin\mu\cos\mu\, ds. \end{cases}$$

Conséquemment, le plan tangent en M à la surface S, devant contenir l'axe instantané L et le déplacement de M, aura une équation de la forme

$$z\cos\mu - x\sin\mu - K(y - a) = 0, \tag{6}$$

avec la condition

$$\Delta Z\cos\mu - \Delta X\sin\mu - K\,\Delta Y = 0,$$

d'où l'on tire immédiatement

$$K = \frac{l}{\dfrac{da}{d\mu}}. \tag{7}$$

Pour une valeur infinie de l, le coefficient K est infini et l'équation (6) devient

$$y = a,$$

ce qui prouve que le plan tangent à S au point de la génératrice L situé à l'infini est le plan parallèle au plan rectifiant de (O) en O. Le plan central, qui lui est perpendiculaire, est, par suite, le plan LOy dont l'équation est

$$z\cos\mu - x\sin\mu = 0,$$

et correspond ainsi à des valeurs nulles de K et de l. Le point central de L est donc le point A où cette droite rencontre Oy, et la ligne de striction de S est la courbe (A) décrite par ce point de rencontre A, quand O décrit (O).

Les deux plans dont la combinaison forme l'équation (6) étant rectangulaires, on voit aussi que, φ désignant l'angle que fait, avec le plan central, le plan tangent en M,

$$\operatorname{tang}\varphi = K = \frac{l}{\dfrac{da}{d\mu}}. \tag{8}$$

De ces formules résultent, d'abord, les conséquences précédemment exposées relativement au plan central et au point central de L, ainsi que la valeur du paramètre de distribution β, savoir

$$\beta = \frac{da}{d\mu}. \tag{9}$$

Il est bon de remarquer, en passant, que la valeur du paramètre de distribution est la même que celle que l'on aurait trouvée pour le conoïde engendré par L dans le système invariable.

En effet, pour trouver les éléments de ce conoïde, il suffit de faire $ds = 0$ dans les formules précédentes, ce qui ne change pas la valeur de K et, par suite, celle de β.

Ce résultat est, d'ailleurs, la conséquence d'une propriété générale du mouvement d'un système invariable quelconque, en vertu de laquelle les deux surfaces réglées dont le déplacement relatif définit le mouvement considéré se touchent en tous les points d'une génératrice commune.

En résumé : *Pour toute position du trièdre fondamental de* (O), *le plan central de l'axe instantané* L *est normal au plan rectifiant de* (O) *suivant la caractéristique de ce plan, le point central est le point* A *où cet axe coupe la normale principale correspondante de* (O), *et le paramètre de distribution, égal à* $\frac{da}{d\mu}$, *est le même pour les deux surfaces que* L *décrit dans l'espace et par rapport au système invariable.*

On voit que la ligne de striction (A) de la surface S appartient à la développée de la développable rectifiante de (O). Car cette développée, enveloppe des plans normaux de la développable rectifiante de (O), est aussi l'enveloppe des plans centraux de S et contient, dès lors, la courbe de contact de ces plans tangents, qui est la ligne de striction (A).

16. On calculera la fonction α qui représente, pour chaque génératrice rectiligne de S, le segment compris entre la trajectoire orthogonale initiale et la ligne de striction, en exprimant que si l'on prend, sur L, une longueur

$$l = -\alpha,$$

le déplacement de l'extrémité M du segment est normal à L, ce qui donne la condition

$$\Delta X \cos\mu + \Delta Z \sin\mu = 0.$$

D'après les valeurs des Δ données au n° 14, on trouve aisément que la fonction α est définie par l'équation différentielle

$$d\alpha = ds \cos\mu, \tag{10}$$

qui fournira la valeur de α, à l'aide d'une quadrature introduisant une constante arbitraire, comme cela doit être. On aura ensuite la valeur de la variable u, par la relation évidente

$$u = l + \alpha. \tag{11}$$

Il est facile de vérifier qu'en introduisant les nouvelles variables u et v, le carré de l'élément linéaire de la surface réglée a bien la forme canonique indiquée au n° 2, savoir

$$dS^2 = du^2 + [(u-\alpha)^2 + \beta^2].$$

Effectivement, on a

$$dS^2 = \Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2,$$

où les Δ sont ceux du n° 14. La substitution des valeurs de ces Δ donne

$$dS^2 = (dl + ds\cos\mu)^2 + l^2\,d\mu^2 + da^2 = (dl + ds\cos\mu)^2 + \left(l^2 + \frac{da^2}{d\mu^2}\right)d\mu^2;$$

d'où, en remarquant que, d'après ce qui précède,

$$d\mu = dv, \qquad ds\cos\mu = d\alpha, \qquad du = dl + d\alpha, \qquad \beta = \frac{da}{d\mu},$$

on déduit la forme annoncée.

17. Nous chercherons, à l'aide de la surface réglée adjointe de S, la valeur de γ qui, d'ailleurs, pourrait être calculée directement. Cette surface est connue. On peut énoncer, en effet, la proposition suivante :

La surface réglée adjointe de S *est la surface* S_1, *lieu des normales principales de* (O).

Car ces normales principales sont perpendiculaires aux génératrices rectilignes L de S, en leurs points centraux et dans leurs plans centraux LOy.

Or, on peut calculer facilement le paramètre de distribution β_1 de S_1. Les coordonnées instantanées d'un point quelconque N de la génératrice Oy de S_1 étant

$$x = 0, \qquad y = l + a, \qquad z = 0,$$

où l désigne maintenant la distance AN, les Δ du point N auront pour valeurs

$$\begin{aligned}
\Delta X &= \left(1 - \frac{l+a}{\rho}\right)ds = \left(\cos^2\mu - \frac{l}{\rho}\right)ds,\\
\Delta Y &= dl + da,\\
\Delta Z &= \left(\frac{l+a}{\tau}\right)ds = \left(\sin\mu\cos\mu + \frac{l}{\tau}\right)ds.
\end{aligned}$$

Le plan tangent en N à la surface S_1 passe par la génératrice Oy et forme, avec le plan qui projette L sur le plan xOz, un angle Θ donné par la formule

$$\operatorname{tang}\Theta = \frac{\dfrac{\Delta Z}{\Delta X} - \operatorname{tang}\mu}{1 + \dfrac{\Delta Z}{\Delta X}\operatorname{tang}\mu} = \frac{\Delta Z\cos\mu - \Delta X\sin\mu}{\Delta Z\sin\mu + \Delta X\cos\mu}.$$

Après quelques réductions, on trouve

$$\operatorname{tang}\Theta = \frac{l}{\rho\sin\mu\cos\mu},$$

d'où l'on déduit, soit directement, soit en reprenant les raisonnements du n° 15, les conséquences suivantes :

1° Le point central de Oy est le point A et le plan central de cette génératrice est le plan LOy, comme cela doit être, d'après la propriété générale énoncée au n° 8;

2° Le paramètre de distribution β_1 de la génératrice Oy de S, a pour valeur

$$\beta_1 = \rho\sin\mu\cos\mu = a\cos\mu. \tag{11}$$

D'autre part, on sait (n° 9), que

$$\beta_1 = \frac{\alpha'}{\gamma}.$$

On en déduit d'abord, puisque $dv = d\mu$,

$$\gamma = \frac{\alpha'}{\beta_1} = \frac{\dfrac{d\alpha}{dv}}{\beta_1} = \frac{\dfrac{d\alpha}{d\mu}}{\beta_1}.$$

Mais on a trouvé que $\dfrac{d\alpha}{ds} = \cos\mu$. On a donc finalement

$$\gamma = \frac{1}{\rho\sin\mu}\frac{ds}{d\mu} = \frac{\sin\mu}{a}\frac{ds}{d\mu}. \tag{12}$$

Les relations établies entre les fonctions canoniques relatives à deux surfaces réglées adjointes fourniront ensuite les valeurs de α_1 et de γ_1, savoir :

$$\left\{\begin{aligned} \alpha_1 &= a + \text{const.} \\ \gamma_1 &= \frac{1}{\gamma} = \frac{a}{\sin\mu}\frac{d\mu}{ds}, \end{aligned}\right. \tag{13}$$

dont la première est évidente, puisque A est le point central de Oy et que (O) est une trajectoire orthogonale des génératrices de S_1.

Remarque. — Les relations entre l'indicatrice sphérique (Ω) de (O) et les images sphériques (B) et (B_1) des surfaces réglées adjointes S et S_1 sont les suivantes :

1° Les courbes (B) et (B_1) sont supplémentaires (n° 9, remarque II);

2° La courbe (B) est la développée sphérique de (Ω) (n° 14, remarque);

3° La courbe (B_1), image de la surface lieu des normales principales de (O), est l'indicatrice sphérique de l'indicatrice (Ω).

III. — *Condition pour qu'une surface réglée soit surface* S.

18. Pour obtenir cette condition, soit sous forme géométrique, soit sous forme analytique, il n'y aura à retenir qu'un petit nombre des propriétés exposées précédemment, savoir celles dont on déduit la position de l'axe instantané L, de son point central A situé sur la normale principale Oy, et enfin la propriété que possède la surface lieu des axes L d'être l'adjointe de la surface formée par les normales principales de la courbe considérée.

En nous plaçant d'abord au point de vue géométrique, la condition cherchée est fournie par la proposition suivante, que les résultats rappelés rendent évidente :

Théorème. — *Pour qu'une surface réglée soit le lieu des axes instantanés dans le mouvement du trièdre fondamental d'une courbe (c'est-à-dire soit surface* S), *il faut et il suffit que les génératrices rectilignes de sa surface réglée adjointe soient les normales principales d'une courbe* (O) *qui sera, alors, la courbe dont le lieu des axes instantanés, dans le déplacement de son trièdre fondamental, se confond avec la surface réglée donnée.*

D'après ce qui a été vu au n° 17, la condition est nécessaire. Il reste donc à démontrer la réciproque.

On suppose que les génératrices rectilignes de la surface Σ_1, adjointe d'une surface réglée Σ, sont les normales principales d'une courbe (O). Le lieu Σ' des axes instantanés dans le déplacement du trièdre fondamental de (O) est, comme on sait, une surface adjointe de celle, Σ_1, qui est formée par les normales principales de (O). Puisqu'une surface réglée n'a qu'une adjointe, Σ' se confond avec Σ qui est, par suite, une surface S, comme il fallait le prouver.

19. *Remarque I.* — On obtiendra, par suite, toutes les surfaces S, en construisant les surfaces adjointes de celles qui sont formées par les normales principales des courbes gauches.

Il entre donc deux fonctions arbitraires d'une même variable dans la définition de la surface S la plus générale, et ces fonctions sont celles qui définissent la courbe (O), qui lui correspond.

Nous allons maintenant étudier quelques cas particuliers dans lesquels il est plus simple de traiter la question directement.

Remarque II. — Lorsque la surface donnée est cylindrique, les résultats précédents ne sont pas applicables, parce que, dans ce cas, la ligne de striction se réduit à un point rejeté à l'infini, de telle sorte que la surface réglée adjointe est elle-même rejetée à l'infini. Il convient donc de traiter ce cas séparément.

On voit d'abord que toute surface cylindrique est le lieu des axes instantanés relatifs aux développantes de ses sections droites. Mais, comme nous allons l'établir, elle est surface S pour une infinité de courbes gauches.

Remarquons, en premier lieu, que si le lieu S des axes instantanés relatifs à une courbe gauche (O) est un cylindre, les caractéristiques des plans rectifiants de cette courbe étant parallèles aux génératrices de S sont elles-mêmes les génératrices d'un cylindre Σ dont la courbe (O) est une hélice. On est ainsi placé dans le cas d'exception signalé au n° 12, pour lequel l'angle μ reste constant quand O parcourt (O).

Pour chaque position de O, l'axe instantané L est une droite parallèle à la direction des génératrices du cylindre Σ, rencontrant la normale principale Oy de (O) en O, en un point A dont la distance au point O est toujours donnée par la formule (2),

$$a = \rho \sin^2 \mu,$$

μ désignant maintenant l'angle constant que forment les tangentes de (O) avec les génératrices de Σ.

Cherchons le plan tangent, suivant L, au cylindre S lieu des axes instantanés. Il suffit, à cet effet, de connaître le déplacement infiniment petit du point A dont les coordonnées sont

$$x = 0, \qquad y = \rho \sin \mu, \qquad z = 0.$$

On trouve, puisque l'angle μ est constant et que $\frac{\tau}{\rho} = \operatorname{tang} \mu$,

$$\Delta \text{ de A} \begin{cases} \Delta X = \cos^2 \mu \, ds \\ \Delta Y = d\rho, \\ \Delta Z = \sin \mu \cos \mu \, ds, \end{cases}$$

et, par suite,

$$\frac{\Delta Z}{\Delta X} = \operatorname{tang} \mu.$$

ce qui prouve que la tangente à (A) au point A se projette, sur le plan rectifiant xOz, suivant la caractéristique de ce plan. Il en résulte que le plan tangent à S, suivant L, est le plan qui projette L sur le plan rectifiant de (O) en O. Comme, d'un autre côté, le plan rectifiant de O est le plan tangent, en ce point, au cylindre Σ, on en conclut que le plan tangent au cylindre S, suivant L, est le plan normal au cylindre Σ, suivant la génératrice passant par le point O. On peut donc énoncer la proposition suivante :

1° *Le lieu des axes instantanés dans le déplacement du trièdre fondamental d'une hélice tracée sur un cylindre* Σ *est le cylindre enveloppe des plans normaux au premier cylindre.*

2° *Réciproquement, un cylindre quelconque est le lieu des axes instantanés dans le déplacement des trièrdres fondamentaux des hélices tracés sur les cylindres normaux à ses plans tangents.*

En résumé, une surface cylindrique est surface S pour une infinité de courbes qui, d'ailleurs, sont toutes des hélices cylindriques. La détermination de ces courbes dépend d'une quadrature, quand on suppose connu le cylindre S.

III. *Un cône peut-il être surface* S ?

La question revient à chercher la condition à laquelle doit satisfaire la courbe (O) pour que la droite L représentée par les équations (1) passe par un point fixe. Les coordonnées d'un point variable de L étant

$$x = l\cos\mu, \qquad y = a = \rho\sin^2\mu, \qquad z = l\sin\mu,$$

où l désigne la distance du point considéré au point A où L coupe la normale principale Oy, il s'agit de savoir dans quel cas on peut déterminer l de façon que les équations (D) du n° 10 soient vérifiées par les valeurs précédentes de x, y, z.

Or, ces équations deviennent

$$dl\cos\mu - l\sin\mu\, d\mu = \left(\frac{a}{\rho} - 1\right) ds = -\cos^2\mu\, ds,$$

$$da = 0,$$

$$dl\sin\mu + l\cos\mu\, d\mu = -\frac{a}{T}\, ds \qquad = -\sin\mu\cos\mu\, ds.$$

La seconde de ces équations montre que la longueur a doit être constante, c'est-à-dire que le point A est à une distance constante de O.

En ajoutant ensuite la première et la troisième de ces mêmes équations respectivement multipliées par $-\sin\mu$ et $\cos\mu$, on trouve la nouvelle condition

$$l\, d\mu = 0,$$

d'où l'on déduit $l = 0$, en supposant μ variable, pour mettre de côté le cas, précédemment examiné, où μ est constant. Le point fixe de L, s'il existe, est donc le point A lui-même. On en conclut que la courbe (O) est un cercle de centre A, puisque toutes ses normales principales passent par ce point A.

Inversement, il est évident que si (O) est un cercle, la droite L se confond, dans toutes ses positions, avec l'axe de ce cercle. Ainsi, un cône ne peut être une surface S, à moins de se réduire à une droite, et, dans ce cas, il est surface S pour tout cercle dont l'axe se confond avec cette droite.

IV. *Une surface* S *peut-elle correspondre à plusieurs courbes* (O)?

On connaît déjà le cas des cylindres qui sont surfaces S pour une infinité de courbes. Pour trouver les autres, nous remarquerons que si une surface réglée non cylindrique est surface S pour deux courbes (O) et (O′), la surface réglée adjointe est telle que ses génératrices sont les normales principales de ces deux courbes. Celles-ci sont, par suite, deux courbes de M. Bertrand conjuguées. Inversement, les lieux des axes instantanés relatifs aux déplacements des trièdres fondamentaux de deux pareilles courbes forment une seule surface réglée, qui est l'adjointe de celle qui contient les normales principales communes à ces deux courbes.

Cette dernière conclusion résulte aussi de ce que les trièdres fondamentaux, en deux points correspondants de deux courbes de M. Bertrand conjuguées, forment un système invariable.

Il n'y a pas lieu de rechercher les surfaces réglées qui seraient surfaces S pour plus de deux courbes, car, si une surface réglée possédait cette propriété, les génératrices rectilignes de la surface réglée adjointe formeraient les normales principales communes à trois courbes qui, dès lors, seraient planes et parallèles entre elles. Dans ce cas, la surface, lieu des axes instantanés, serait un cylindre et l'on retomberait ainsi sur le cas examiné précédemment (Remarque II).

Ainsi, sauf le cas des cylindres, une surface réglée ne peut être surface S *pour plus de deux courbes. Si elle convient à deux courbes, celles-ci sont deux courbes de M. Bertrand conjuguées, et réciproquement.*

20. Proposons-nous maintenant d'exprimer analytiquement la condition trouvée au n° 18, c'est-à-dire de rechercher la relation qui doit exister entre les fonctions α, β, γ, de la variable v, qui déterminent une surface réglée, pour que celle-ci soit surface S. A cet effet, utilisant une relation donnée par M. Darboux [1], il suffirait d'écrire que les génératrices rectilignes de la surface réglée adjointe sont les normales principales d'une courbe. Mais il est tout aussi simple de résoudre directement la question et c'est à quoi nous procéderons, comme il suit.

Reprenons les formules du n° 5 relatives à la périmorphie d'une surface réglée, dans l'hypothèse où le sommet du trièdre T décrit la ligne de striction de la surface, auquel cas la surface adjointe est le lieu des droites Oy.

---

[1] *Loc. cit.*, p. 312.

On doit exprimer que ces droites sont les normales principales d'une courbe, c'est-à-dire que, parmi leurs trajectoires orthogonales dont l'équation différentielle est (n° 9)

$$du_1 = 0,$$

ou bien encore (puisque $du_1 = dl + \beta\, dv$)

$$\frac{dl}{dv} = -\beta, \tag{14}$$

il en existe une pour laquelle la caractéristique du plan normal est constamment perpendiculaire à Oy.

Soit l la valeur du segment OM, vérifiant l'équation (14), relative à cette trajectoire orthogonale. Le plan normal en M à la trajectoire (M) passe par Oy et est perpendiculaire au déplacement de M ($x=0$, $y=l$, $z=0$). Son équation est donc

$$x\,\Delta X + z\,\Delta Z = 0;$$

ou, en remplaçant les Δ par leurs valeurs (A″),

$$\alpha' x + l\gamma z = 0.$$

Si l'on suppose que la fonction γ ne soit pas identiquement nulle, l'équation de ce plan normal point s'écrire

$$\beta_1 x + lz = 0, \tag{15}$$

β_1 désignant le paramètre de distribution de la surface lieu des droites Oy, qui est l'adjointe de la surface donnée. Cela résulte de la formule connue

$$\beta_1 = \frac{\alpha'}{\gamma}.$$

La caractéristique du plan normal considéré est la droite d'intersection du plan représenté par l'équation (15) et de celui qui a pour équation

$$\beta_1\, dx + l\, dz + x\, d\beta_1 + z\, dl = 0,$$

ou, en appliquant les formules (B″),

$$x\left(\frac{d\beta_1}{dv} - l\right) - l\gamma y + z\left(\beta_1 + \frac{dl}{dv}\right) - \alpha'\beta_1 = 0. \tag{16}$$

La droite d'intersection des plans représentés par les équations (15) et (16) devant être perpendiculaire à Oy, les coefficients de x et de z, dans ces deux équations, sont assujettis à la condition d'être proportionnels. La relation cherchée est donc

$$\frac{\frac{d\beta_1}{dv} - l}{\beta_1} = \frac{\frac{dl}{dv} + \beta_1}{l}.$$

On peut l'écrire

$$\frac{l\frac{d\beta_1}{dv} - \beta_1\frac{dl}{dv}}{l^2 + \beta_1^2} = 1,$$

ou

$$\frac{d}{dv}\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{\beta_1}{l}\right) = 1.$$

L'intégration est immédiate et donne, pour l, la valeur

$$(17) \qquad l = -\beta_1 \operatorname{tang}(v - v_1) = -\frac{\alpha'}{\gamma}\operatorname{tang}(v - v_1),$$

dans laquelle v_1 désigne une constante

Il reste à porter cette valeur de l dans l'équation différentielle (14) des trajectoires orthogonales pour obtenir la condition cherchée qui est, par conséquent,

$$(18) \qquad \beta = \frac{d}{dv}\left[\frac{\alpha'}{\gamma}\operatorname{tang}(v - v_1)\right].$$

Si la relation (18) est vérifiée, la surface réglée donnée est une surface S, et la valeur (17) de l détermine la courbe (O) qui lui correspond. On peut donc énoncer la proposition suivante qui caractérise les surfaces S au moyen de la relation qui doit exister entre les fonctions canoniques α, β, γ :

1° *Pour qu'une surface réglée soit surface* S, *il faut et il suffit que quelle que soit la valeur de v, le paramètre de distribution β soit la dérivée de l'expression $\frac{\alpha'}{\gamma}\operatorname{tang}(v - v_1)$, où v_1 désigne une constante.*

2° *La condition précédente étant satisfaite, la surface donnée est le lieu des axes instantanés dans le déplacement du trièdre fondamental d'une courbe que l'on obtient en portant, sur les génératrices de la surface réglée adjointe et à partir de la ligne de striction commune aux deux surfaces, des segments dont la longueur l a pour expression générale*

$$l = -\frac{\alpha'}{\gamma}\operatorname{tang}(v - v_1).$$

Remarque. — Il reste à examiner le cas, réservé dans les calculs précédents, où la valeur de γ est nulle pour toute valeur de v.

La fonction γ, qui représente la courbure géodésique de l'image sphérique de la surface, ne peut être identiquement nulle que si cette image est un grand cercle de la sphère, ce qui signifie que le cône directeur de la surface doit se réduire à un plan. Le cas où la fonction γ est nulle est donc celui des surfaces réglées à plan directeur. Je me propose d'établir que de pareilles surfaces réglées ne peuvent être surfaces S. Les formules de la périmorphie des surfaces réglées conduiraient à cette conclusion, car on établirait aisément que les trajectoires orthogonales des génératrices de la surface réglée Σ_1, adjointe d'une surface réglée Σ à plan directeur, sont des géodésiques de Σ_1, ce qui entraîne l'énoncé que voici :

La surface réglée adjointe Σ_1 d'une surface réglée Σ à plan directeur est un cylindre dont les génératrices sont perpendiculaires à ce plan.

On s'en rend compte géométriquement comme il suit : Étant donnée une surface réglée Σ à plan directeur P, le plan central d'une génératrice L est perpendiculaire au plan P, puisque ce dernier est parallèle au plan tangent à l'infini suivant cette génératrice. On en déduit :

1° Que la ligne de striction d'une surface réglée à plan directeur P se projette, sur ce plan, suivant l'enveloppe des projections des génératrices rectilignes de la surface;

2° Que les génératrices de la surface réglée adjointe Σ_1 sont perpendiculaires au plan P et, par suite, comme on l'avait annoncé, que Σ_1 est un cylindre normal au plan P. Ceci posé, les génératrices du cylindre Σ_1 ne pouvant être évidemment les normales principales de l'une de leurs trajectoires orthogonales, qui se confondent avec les sections droites du cylindre, il en résulte que la surface donnée Σ ne peut être une surface S.

21. Les formules (9) et (11) démontrées aux nos 15 et 17 font prévoir le résultat exprimé par l'équation de condition (18), sans permettre toutefois d'établir la réciproque. On a trouvé, en effet,

$$\beta = \frac{da}{d\mu},$$

$$a = \beta_1 \operatorname{tang} \mu.$$

On en déduit

$$\beta = \frac{d}{d\mu}(\beta_1 \operatorname{tang} \mu).$$

Les variables v et μ étant égales, comme on sait (n° 14), à une constante près, on voit que cette relation est la même que (18). De plus, les variables μ et v sont liées par l'équation

$$\mu = v - v_1. \tag{19}$$

Or, μ désigne l'angle que fait le plan central de la génératrice L de S avec le plan osculateur correspondant de (O). Il résulte de là que l'équation (19) fournit, pour chaque génératrice d'une surface réglée donnée qui est surface S, le plan osculateur de la courbe (O) qui lui correspond. Cette construction donne lieu à l'énoncé suivant :

Une surface S *étant donnée, la courbe correspondante* (O) *est l'arête de rebroussement de la développable enveloppe des plans passant par les génératrices de la surface réglée adjointe, de manière que l'angle que fait un plan central quelconque de la surface donnée avec le plan tangent de la développable diffère de l'angle* v *de la quantité constante* v_1.

Il est clair qu'en choisissant convenablement l'origine des arcs v, on pourra faire $v_1 = 0$, auquel cas les variables μ et v sont constamment égales. Dans cette hypothèse, la condition (18) prend la forme

$$(18)' \qquad \beta = \frac{d}{dv}\left(\frac{\alpha'}{\gamma}\operatorname{tang} v\right),$$

et la valeur de l devient

$$(19)' \qquad l = -\frac{\alpha'}{\gamma}\operatorname{tang} v.$$

22. Ces résultats permettent d'indiquer, tout au moins, les solutions de deux problèmes que cette étude conduit naturellement à poser. Le premier de ces problèmes est celui-ci :

Une surface réglée étant donnée, reconnaître si elle est surface S *et, dans ce cas, construire la courbe correspondante* (O).

Indépendamment de la solution géométrique, déduite du théorème du n° **18**, consistant à exprimer que les génératrices de la surface réglée adjointe sont les normales principales d'une courbe, qui sera alors la courbe cherchée (O), on peut résoudre la question à l'aide de la relation obtenue (18).

Après avoir déterminé les fonctions canoniques α', β, γ de la surface proposée, on s'assurera qu'elles vérifient la relation (18), ce qui exige que l'on puisse déterminer la constante v_1 de telle manière que cette relation devienne une identité. S'il en est ainsi, les théorèmes des n^{os} **20** et **21** fourniront des constructions géométriques pour la courbe correspondante (O).

On peut remarquer que cette vérification exige une seule quadrature, savoir le calcul de l'arc v de l'image sphérique, car les quantités $\frac{1}{\alpha'}$ et γ sont des courbures dont la détermination n'exige aucune intégration.

23. L'énoncé du second problème est le suivant :

Former les équations de la surface S *la plus générale.*

Au point de vue périmorphique, la solution est immédiate. On peut la présenter de façon à n'avoir aucune quadrature à effectuer, car les fonctions α, β, γ étant assujetties à vérifier une seule relation, que l'on peut, d'ailleurs, mettre sous la forme (18)' en choisissant convenablement l'origine des arcs v, on prendra arbitrairement deux de ces variables α et γ, auquel cas β sera déterminée au moyen d'une différentiation.

En résumé, la surface S la plus générale contient, dans sa définition, deux fonctions arbitraires d'une seule variable. C'est le résultat annoncé au n° 1 et que l'on déduit aussi de la construction géométrique de la surface S la plus générale, considérée comme surface réglée adjointe de celle qui est formée par les normales principales d'une courbe gauche arbitraire.

Mais tout n'est pas terminé, car il reste à trouver les équations, dans un système d'axes fixes, de la surface ainsi définie.

Pour plus de clarté, je transcrirai ici le passage que M. Darboux consacre à la solution de cette question, envisagée pour une surface réglée quelconque :

« Les rotations (*voir* les formules du n° 5) donnant p, q, r, p_1, q_1, r_1, étant connues, la surface, nous le savons, est complètement déterminée de forme; mais, pour l'obtenir, nous devons intégrer les systèmes linéaires étudiés au Livre I, et qui définissent les cosinus directeurs du trièdre T. Ils deviennent ici

$$(a)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial u} = 0, & \dfrac{\partial a}{\partial v} = b\sin\varphi + c\cos\varphi, \\[2mm] \dfrac{\partial b}{\partial u} = c\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}, & \dfrac{\partial b}{\partial v} = c\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} + \gamma\right) - a\sin\varphi, \\[2mm] \dfrac{\partial c}{\partial u} = -b\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}, & \dfrac{\partial c}{\partial v} = -a\cos\varphi - b\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} + \gamma\right) \text{ [1]}. \end{cases}$$

» Le premier (a) s'intègre sans difficulté et donne

$$(c)\qquad a = V_1, \qquad b = V_2\cos\varphi + V_3\sin\varphi, \qquad c = -V_2\sin\varphi + V_3\cos\varphi,$$

V_1, V_2, V_3 étant des fonctions de v seule. En substituant les valeurs de a, b, c dans le second système, on trouve les équations suivantes :

$$(d)\qquad V'_1 = V_3, \qquad V'_2 = \gamma V_3, \qquad V'_3 = -\gamma V_2 - V_1,$$

qui font connaître V_1, V_2, V_3. On en déduit

$$(e)\qquad V_3 = V'_1, \qquad V_2 = -\frac{V_1 + V''_1}{\gamma},$$

---

[1] Nous rappellerons que γ désigne la fonction de v que M. Darboux appelle V.

et V_1 sera déterminé par l'équation

$$V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 = 1,$$

qui donne

$$(f) \qquad V_1^2 + V_1'^2 + \frac{(V_1 + V_1'')^2}{\gamma^2} = 1.$$

» Comme γ est arbitraire, on pourra prendre arbitrairement V_1, et l'équation précédente donnera γ; puis, comme on aura une solution particulière des systèmes (a) et (b), la solution générale sera donnée par une quadrature. »

Ces considérations trouvent leur application dans le problème particulier que nous nous sommes posé, puisque la fonction γ peut être choisie arbitrairement. Conséquemment, au moyen d'une seule quadrature on pourra obtenir, non seulement les équations générales des surfaces S, mais encore leurs fonctions canoniques α, β, γ.

Ce résultat pouvait être prévu. On peut remarquer, en effet, que toute surface S étant le lieu des axes instantanés dans le déplacement du trièdre fondamental d'une courbe gauche quelconque, il est clair que ses équations s'obtiendront sans quadrature, si l'on part d'une courbe arbitraire. Les fonctions β et γ qui lui correspondent seront connues, pareillement, sans quadrature; mais la fonction α, où interviennent les trajectoires orthogonales des génératrices, exige une intégration pour sa détermination.

24. Proposons-nous maintenant d'examiner le cas particulier dans lequel une surface réglée est doublement surface S. On sait qu'alors les deux courbes (O) et (O') qui lui correspondent sont deux courbes de M. Bertrand conjuguées (n° **19**). Pour qu'il en soit ainsi, il faut que l'on puisse déterminer deux constantes v_1 et v_2 telles que l'on ait simultanément

$$\beta = \frac{d}{dv}\left[\frac{\alpha'}{\gamma}\operatorname{tang}(v - v_1)\right] = \frac{d}{dv}\left[\frac{\alpha'}{\gamma}\operatorname{tang}(v - v_2)\right],$$

ce qui entraîne la condition nouvelle

$$\frac{\alpha'}{\gamma}\operatorname{tang}(v - v_1) - \frac{\alpha'}{\gamma}\operatorname{tang}(v - v_2) = \text{const.},$$

ou celle-ci, h désignant une autre constante,

$$(19) \quad \frac{\alpha'}{\gamma} = h\cos(v - v_1)\cos(v - v_2) = \frac{h}{2}[\cos(2v - v_1 - v_2) + \cos(v_1 - v_2)],$$

La substitution, dans la valeur de β, donne ensuite

$$(20) \qquad \beta = -h\sin(2v - v_1 - v_2).$$

Il n'y a donc plus qu'une fonction arbitraire, puisque les fonctions canoniques α, β, γ sont liées par deux relations (19) et (20).

En prenant arbitrairement α, la détermination périmorphique de la surface n'exige aucune quadrature. Mais si l'on se propose de trouver les équations de la surface dans un système d'axes fixes, il est préférable de prendre γ arbitrairement ou, mieux encore, V_1 (n° 23). Alors γ est déterminée par l'équation (f), et β par (20). Une quadrature donne α au moyen de l'équation (19) et, d'après ce qui a été dit, une seconde quadrature achève la solution.

Quant aux courbes de M. Bertrand conjuguées correspondant à une surface réglée qui est doublement surface S, on les obtient en portant, sur les génératrices rectilignes de la surface réglée adjointe, à partir de la ligne de striction commune, des segments dont l'expression générale est

$$-\frac{\alpha'}{\gamma}\operatorname{tang}(v-v_1), \qquad -\frac{\alpha'}{\gamma}\operatorname{tang}(v-v_2).$$

La différence de ces segments est constante et égale à

$$\frac{h}{\sin(v_1-v_2)},$$

ce qui signifie que la distance de deux points correspondants de deux courbes de M. Bertrand conjuguées est constante. On retrouve ainsi une propriété connue et rappelée au n° 19.

On voit, par ce qui précède, que la recherche des équations de la courbe de M. Bertrand la plus générale peut être réalisée au moyen de *deux quadratures* seulement, au lieu des trois qui, jusqu'à présent, étaient regardées comme nécessaires. Ce résultat, déduit de l'étude des surfaces S, nous a paru utile à signaler.

Si l'on fait usage de la relation entre μ et v, on voit qu'en désignant par μ et μ' les angles que fait le plan central suivant une génératrice de toute surface réglée doublement surface S avec les plans osculateurs correspondants des deux courbes associées de M. Bertrand, on a d'abord

$$\mu-\mu'=v_2-v_1,$$

ce qui prouve que ces plans osculateurs font, entre eux, un angle constant, comme on le savait déjà (n° 19).

Les fonctions canoniques α, β, γ de la surface donnée satisfont ensuite aux relations suivantes :

$$\frac{\alpha'}{\gamma}=\frac{h}{2}[\cos(\mu+\mu')+\cos(v_1-v_2)], \tag{21}$$

$$\beta=-h\sin(\mu+\mu'). \tag{22}$$

25. Les surfaces S, lieux des axes instantanés dans le déplacement du trièdre fondamental d'une courbe à torsion constante, sont des cas particuliers des précédentes. Une courbe à torsion constante est, en effet, une courbe de M. Bertrand qui se confond avec la courbe conjuguée. On aura donc les formules relatives à ces surfaces et à ces courbes particulières en introduisant, dans les équations du numéro précédent, l'hypothèse $v_1 = v_2$, ce qui donne

$$\frac{\alpha'}{\gamma} = \quad h\cos^2(v - v_1) = h\cos^2\mu,$$
$$\beta = -h\sin 2(v - v_1) = -h\sin 2\mu.$$

D'après ce qui a été dit précédemment, deux quadratures permettront de former, dans un système d'axes fixes, les équations de la courbe à torsion constante la plus générale.

IV. — *Cas où la surface* S *est développable.*

26. Proposons-nous de rechercher dans quel cas la surface S est développable. Les surfaces développables étant caractérisées par la valeur constamment nulle de leur paramètre de distribution et, d'autre part, le paramètre de distribution de la surface S qui correspond à une courbe (O) ayant pour valeur $\frac{da}{d\mu}$ (9), il en résulte que la condition cherchée est

$$a = \text{const.},$$

ou, en remplaçant a par sa valeur,

$$\frac{1}{\rho\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\tau^2}\right)} = \text{const.} \tag{23}$$

On peut donc énoncer la proposition suivante, due à M. Cesàro [1]:

Pour que le lieu des axes instantanés dans le déplacement du trièdre fondamental d'une courbe (O) *soit une surface développable, il faut et il suffit que les courbures de cette courbe vérifient la relation* (23), *c'est-à-dire que l'axe instantané soit à une distance constante du point correspondant de la courbe* [1].

Cette condition (23) exprime aussi que le conoïde décrit par l'axe instantané dans le système invariable se réduit à un plan.

Lorsque la condition est satisfaite, les droites L sont les tangentes de la

[1] *Voir l'Intermédiaire des Mathématiciens,* t. VI, p. 154; 1899.

courbe (A), ligne de striction de la surface et lieu des points A où ces droites rencontrent les normales principales correspondantes. Ces points A sont tous situés à la même distance a des points correspondants de (O).

La ligne (A) est la ligne de striction de la surface S_1, adjointe de S, qui est le lieu des normales principales de (O). Ces normales sont, en même temps, les binormales de (A), puisqu'elles sont perpendiculaires aux plans osculateurs de cette courbe, parallèles aux plans rectifiants de (O).

La réciproque est vraie. Lorsque l normales principales d'une courbe (O) sont les binormales d'une autre courbe (A), la développable dont (A) est l'arête de rebroussement est le lieu des axes instantanés dans le déplacement du trièdre fondamental de la courbe donnée (O) dont les courbures vérifient, par suite, la relation (23).

Car la surface adjointe de cette développable est le lieu des binormales de son arête de rebroussement, lesquelles sont, par hypothèse, les normales principales de (O). La développable est donc une surface S correspondant à la courbe (O), puisque la condition exprimée par le théorème du n° 18 est vérifiée. De là cette proposition :

Pour que les normales principales d'une courbe (O) *soient les binormales d'une autre courbe, il faut et il suffit que ses courbures vérifient la relation* (23) *et, dans ce cas, la nouvelle courbe* (A) *est le lieu des points obtenus en portant, sur les normales principales de* (O) *et à partir de leurs pieds* O, *des segments égaux à la valeur constante du rapport* $\dfrac{1}{\rho\left(\dfrac{1}{\rho^2}+\dfrac{1}{\tau^2}\right)}$.

Cette proposition, due à M. Mannheim (*Comptes rendus,* novembre 1877, et *Principes et développements de Géométrie cinématique,* p. 536) (1), fait connaître une nouvelle classe de courbes intimement liées, comme on le voit, à l'étude du déplacement du trièdre fondamental d'une courbe. Leurs courbures vérifient une équation du second degré, que l'on déduit de la relation générale de ce degré, savoir :

$$A\frac{1}{\rho^2}+2B\frac{1}{\rho}\frac{1}{\tau}+C\frac{1}{\tau^2}+2D\frac{1}{\rho}+2E\frac{1}{\tau}+F=0,$$

en y introduisant les hypothèses

$$B=E=F=0, \qquad A=C.$$

(1) Elle a été donnée aussi par M. Hatzidakis, dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens,* t. VI, p. 105, en réponse à une question posée antérieurement par M. Cesàro dans le même Recueil.

Remarque. — L'image sphérique (B) de S est, comme on sait (n° **14**, *Remarque*), la développée sphérique de l'indicatrice (Ω) de (O). Dans le cas où la surface S est développable, son image sphérique est évidemment l'indicatrice de l'arête de rebroussement (A) de cette surface. La relation entre les indicatrices des courbes (O) et (A) est exprimée par le théorème suivant :

Lorsque les normales principales d'une courbe (O) *sont les binormales d'une autre courbe* (A), *l'indicatrice de la première courbe est l'une des développantes sphériques de l'indicatrice de la seconde.*

27. Il s'agit maintenant de former, dans un système d'axes fixes, les équations des courbes (O) que l'on vient de définir. Cette définition dépend d'une fonction arbitraire de l'arc s, puisque les courbures $\frac{1}{\rho}$ et $\frac{1}{\tau}$ sont liées par la seule équation (23).

Je prendrai arbitrairement l'indicatrice sphérique de la courbe. J'établirai qu'à toute courbe sphérique correspond une seule courbe l'admettant pour indicatrice et dont les courbures vérifient la relation (23), que l'on peut aussi mettre sous la forme

$$\rho \sin^2 \mu = a, \tag{24}$$

a désignant une longueur constante.

On sait que, en désignant par $d\sigma$ l'élément d'arc de l'indicatrice sphérique correspondant à l'élément d'arc ds d'une courbe quelconque,

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{a}{\rho}, \tag{25}$$

en supposant que le rayon de la sphère sur laquelle est tracée la courbe soit égal à a. Cela résulte de ce que $\frac{d\sigma}{a}$ étant l'angle formé par deux tangentes infiniment voisines, le rapport $\frac{\frac{1}{a}d\sigma}{ds}$ mesure la courbure de la courbe.

On sait aussi que la tangente en un point de l'indicatrice sphérique d'une courbe est parallèle à la normale principale au point correspondant de la courbe. Il s'ensuit que le plan normal, en un point de l'indicatrice sphérique, est parallèle au plan rectifiant de la courbe donnée au point correspondant et, par suite, que la caractéristique de ce plan normal est une droite passant d'abord par le centre de la sphère et parallèle, en outre, à la caractéristique du plan rectifiant de la courbe. L'angle que fait cette caractéristique avec le rayon aboutissant au point de l'indicatrice est donc égal à l'angle désigné par μ dans les développements précédents.

Si l'on introduit le rayon de courbure R de l'indicatrice, qui est la distance du point de cette courbe à la caractéristique dont il est question ci-dessus, on aura la relation

$$R = a \sin\mu. \tag{26}$$

Ces notions générales étant rappelées, désignons par ξ, η, ζ les coordonnées d'un point quelconque de l'indicatrice sphérique rapportée à un système d'axes rectangulaires fixes passant par le centre G de la sphère de rayon a, sur laquelle elle est tracée.

Soient, dans le même système, x, y, z les coordonnées du point de la courbe correspondant au point (ξ, η, ζ) de l'indicatrice. D'après la définition de cette dernière courbe, on a

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\xi}{a}, \qquad \frac{dy}{ds} = \frac{\eta}{a}, \qquad \frac{dz}{ds} = \frac{\zeta}{a};$$

d'où l'on déduit, d'après (25), en remarquant que

$$\frac{d}{d\sigma} = \frac{d}{ds}\frac{ds}{d\sigma},$$

$$\frac{dx}{d\sigma} = \frac{\xi\rho}{a^2}, \qquad \frac{dy}{d\sigma} = \frac{\eta\rho}{a^2}, \qquad \frac{dz}{d\sigma} = \frac{\zeta\rho}{a^2},$$

et en remplaçant a par $\frac{R}{\sin\mu}$ (26),

$$\frac{dx}{d\sigma} = \frac{\xi\rho\sin^2\mu}{R^2}, \qquad \frac{dy}{d\sigma} = \frac{\eta\rho\sin^2\mu}{R^2}, \qquad \frac{dz}{d\sigma} = \frac{\zeta\rho\sin^2\mu}{R^2}. \tag{27}$$

28. Appliquons ces formules générales aux courbes (O) dont les courbures vérifient la relation (24). On aura, pour ces courbes,

$$\frac{dx}{d\sigma} = \frac{a\xi}{R^2}, \qquad \frac{dy}{d\sigma} = \frac{a\eta}{R^2}, \qquad \frac{dz}{d\sigma} = \frac{a\zeta}{R^2};$$

d'où l'on tire les formules définitives

$$\left\{\begin{aligned} x &= a\int \frac{\xi}{R^2}\,d\sigma, \\ y &= a\int \frac{\eta}{R^2}\,d\sigma, \\ z &= a\int \frac{\zeta}{R^2}\,d\sigma. \end{aligned}\right. \tag{28}$$

Il est manifeste que les constantes introduites par les intégrations sont sans influence sur la forme et l'orientation de la courbe. On est donc en droit de dire qu'il existe une seule courbe admettant pour indicatrice la courbe sphérique donnée et dont les courbures vérifient la relation (24), puisque toutes les courbes répondant à ces conditions se déduisent, par de simples translations, les unes des autres. De plus, la construction de cette courbe est la suivante :

Sur une sphère de rayon égal à la constante a, tracez une courbe sphérique arbitraire. Soient ξ, η, ζ les coordonnées, par rapport à des axes rectangulaires issus du centre de la sphère, d'un point quelconque de cette courbe, et R son rayon de courbure au même point. Les coordonnées d'un point quelconque de la courbe qui admet pour indicatrice la courbe sphérique donnée et dont les courbures vérifient la relation (24) sont données par les formules (28), en fonction de la variable indépendante, d'ailleurs quelconque, qui définit individuellement les points de l'indicatrice.

Les courbures de la courbe peuvent s'obtenir sans intégration. En effet, on a les relations

$$a = \rho \sin^2 \mu, \qquad \mathrm{R} = a \sin \mu, \qquad \tau = \rho \operatorname{tang} \mu;$$

d'où l'on déduit, par l'élimination de μ,

$$(29) \qquad \left\{ \begin{aligned} \rho &= \frac{a^3}{\mathrm{R}^2}, \\ \tau &= \frac{a^3}{\mathrm{R}\sqrt{a^2 - \mathrm{R}^2}}. \end{aligned} \right.$$

D'ailleurs, le rayon de courbure R de l'indicatrice sphérique est donné par la formule classique

$$(30) \qquad \mathrm{R}^2 = \frac{d\sigma^4}{(d^2\xi)^2 + (d^2\eta)^2 + (d^2\zeta)^2 - (d^2\sigma)^2}.$$

29. Pour donner un exemple, je rechercherai les courbes (O) admettant pour indicatrice sphérique la développante sphérique d'un petit cercle, qui est aussi la courbe engendrée par un point d'un grand cercle qui roule sans glisser sur ce petit cercle [1].

Soient a le rayon de la sphère, ak celui du petit cercle, en sorte que le rapport k est inférieur à l'unité.

Prenons un système d'axes rectangulaires fixes passant par le centre G de la sphère, tels que l'axe Gz soit perpendiculaire au plan du petit cercle, et que le plan zGx passe par l'origine des arcs du petit cercle ou, ce qui revient au même, par le point de rebroussement de la développante. Nous choisirons pour variable

---

[1] L'indicatrice sphérique de la courbe (A), qui correspond à l'une de ses courbes (O), est ce petit cercle lui-même (n° 26, *Remarque*). Nous retrouverons plus loin ces courbes (A) (n° 32).

indépendante l'angle ω que fait, avec le plan zGx, le plan contenant Gz et le point de contact des deux cercles.

On trouve aisément que les équations de l'indicatrice sphérique sont

$$\xi = a(k\cos k\omega\cos\omega + \sin k\omega\sin\omega),$$
$$\eta = a(k\cos k\omega\sin\omega - \sin k\omega\cos\omega),$$
$$\zeta = a\sqrt{1-k^2}\cos k\omega.$$

On en déduit, par différentiation,

$$d\sigma = a\sqrt{1-k^2}\sin k\omega\, d\omega,$$
$$R = a\sin k\omega.$$

Ceci posé, les coordonnées d'un point quelconque de la courbe admettant la développante considérée pour indicatrice, et dont les courbures vérifient la relation (24), sont données, en fonction de la variable ω, par les formules, où l'on n'a pas à tenir compte des constantes introduites par les intégrations,

$$x = a\sqrt{1-k^2}\int\frac{k\cos k\omega\cos\omega + \sin k\omega\sin\omega}{\sin k\omega}\,d\omega,$$
$$y = a\sqrt{1-k^2}\int\frac{k\cos k\omega\sin\omega - \sin k\omega\cos\omega}{\sin k\omega}\,d\omega,$$
$$z = a(1-k^2)\int\frac{\cos k\omega}{\sin k\omega}\,d\omega.$$

L'intégration, sous forme finie, n'est possible que lorsque le rapport k est un nombre commensurable. Mais la valeur de z est toujours intégrable et l'on a

$$z = \frac{a(1-k^2)}{k}\log(\pm\sin k\omega),$$

en prenant le signe $+$ ou le signe $-$, selon que le sinus est positif ou négatif. Toutes les courbes de cette famille sont évidemment transcendantes, quelle que soit la valeur de k.

Dans le cas particulier où $k = \frac{1}{2}$, on obtient la courbe ayant pour équations

$$x = \frac{a\sqrt{3}}{2}\left[\log\left(\pm\frac{\sin\omega}{2}\right) - \frac{\cos\omega}{2}\right],$$
$$y = \frac{a\sqrt{3}}{4}(\omega - \sin\omega),$$
$$z = \frac{3a}{2}\log\left(\pm\sin\frac{\omega}{2}\right).$$

30. Après les courbes (O) précédemment définies, nous avons à nous occuper des surfaces développables S et de leurs arêtes de rebroussement (A), afin de trouver leurs équations dans un système d'axes fixes. A la vérité, la courbe (O) une fois connue, on peut, pour trouver la courbe (A) qui lui correspond, utiliser la construction géométrique qui relie ces deux courbes et écrire les formules suivantes :

$$x' = x + a\frac{d\xi}{d\sigma},$$

$$y' = y + a\frac{d\eta}{d\sigma},$$

$$z' = z + a\frac{d\zeta}{d\sigma},$$

qui font connaître les coordonnées x', y', z', d'un point quelconque de (A) en fonction des coordonnées x, y, z, du point correspondant de (O) et des éléments de l'indicatrice sphérique de cette dernière courbe.

Ces formules résultent de ce que l'on passe de la courbe (O) à la courbe (A) en portant, sur les normales principales de (O) et à partir de leurs pieds, un segment de grandeur constante a et aussi de cette remarque, déjà faite, que toute normale principale de (O) est parallèle à la tangente correspondante de son indicatrice.

Mais il est plus utile de rechercher directement les développables S ou, ce qui revient au même, leurs arêtes de rebroussement (A). C'est à quoi l'on parvient comme il suit :

La condition (18) devient, dans le cas des surfaces développables pour lesquelles β doit être identiquement nul,

$$\frac{\alpha'}{\gamma}\operatorname{tang}(v - v_1) = a \quad (^1),$$

a désignant une longueur constante, qui est celle de la formule (24).

En introduisant le paramètre de distribution $\beta_1 = \frac{\alpha'}{\gamma}$ de la surface adjointe de S, cette condition peut s'écrire

$$(31) \qquad \beta_1 = a\cot(v - v_1) = -a\operatorname{tang}(v - v_2),$$

v_2 désignant une nouvelle constante égale à $v_1 - \frac{\varpi}{2}$, à un multiple de ϖ près.

Or, dans ce cas, la surface adjointe de S est la surface formée par les binormales de l'arête de rebroussement (A) de cette développable. On peut établir que

(1) La longueur désignée par l dans la théorie générale est ici égale à $-a$.

le paramètre de distribution β_1 de cette nouvelle surface réglée est égal et de signe contraire au rayon de torsion τ_1 de (A), quelle que soit, d'ailleurs, cette dernière courbe.

Prenons, en effet, la courbe (A) pour courbe de référence et son trièdre fondamental pour trièdre des coordonnées instantanées. La surface réglée adjointe de la développable ayant (A) pour arête de rebroussement est le lieu des axes Az. Les coordonnées d'un point quelconque M de Az étant, par rapport au trièdre fondamental de (A) en A,

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad z,$$

les Δ de M ont pour valeurs (C″)

$$\Delta X = ds,$$
$$\Delta Y = -\frac{z}{\tau_1}\,ds,$$
$$\Delta Z = dz,$$

L'angle θ que forme le plan tangent en M à la surface réglée considérée, avec le plan zAx, est, dès lors, donné par la formule

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = -\frac{z}{\tau_1},$$

d'où l'on déduit immédiatement, comme cela doit être, que le point central de la génératrice Az est le point A et que le paramètre de distribution de cette génératrice est égal à $-\tau_1$.

Donc, pour les courbes cherchées (A), on doit avoir, d'après (31),

$$\tau_1 = a \operatorname{tang}(\varphi - \varphi_2)$$

ou, simplement,

$$\tau_1 = a \operatorname{tang}\varphi, \tag{32}$$

en choisissant convenablement l'origine des arcs sur l'image sphérique de la surface.

D'un autre côté, cette image sphérique de la développable S est l'indicatrice sphérique de son arête de rebroussement tracée sur une sphère de rayon unité. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Pour qu'une surface développable soit surface S *ou, ce qui revient au même, pour que les binormales de son arête de rebroussement* (A) *soient les normales principales d'une courbe, il faut et il suffit que le rayon de torsion de* (A), *en chacun de ses points, soit égal au produit d'une constante a par* *la tangente de l'arc de son indicatrice sphérique compté à partir d'une origine convenablement choisie.*

Si cette condition est satisfaite, les binormales de (A) sont les normales principales de la courbe (O) obtenue en portant, sur ces binormales et à partir de leurs pieds, un segment de grandeur constante et égal à $-a$ (17).

31. Pour former, dans un système d'axes fixes, les équations de la courbe (A) la plus générale, dont la définition dépend évidemment d'une fonction arbitraire, nous choisirons encore à volonté son indicatrice sphérique sur une sphère de rayon égal à la constante a.

L'origine des coordonnées étant toujours placée au centre G de la sphère, nous ferons usage des formules (27), qui conviennent à une courbe quelconque et que nous écrirons comme il suit :

$$(33) \qquad \frac{dx}{d\sigma} = \frac{\xi\rho_1}{a^2}, \qquad \frac{dy}{d\sigma} = \frac{\eta\rho_1}{a^2}, \qquad \frac{dz}{d\sigma} = \frac{\zeta\rho_1}{a^2},$$

en nous rappelant que $R = a\sin\mu_1$ [l'indice 1 se rapportant à (A)].

Dans le cas actuel,

$$\sigma = av,$$

$$\tau_1 = a\,\mathrm{tang}\,v = a\,\mathrm{tang}\,\frac{\sigma}{a},$$

$$\rho_1 = \frac{\tau_1}{\mathrm{tang}\,\mu_1} = \frac{a\,\mathrm{tang}\,\frac{\sigma}{a}}{\mathrm{tang}\,\mu_1}.$$

Substituant, il vient

$$(34) \qquad \frac{dx}{d\sigma} = \frac{\xi\,\mathrm{tang}\,\frac{\sigma}{a}}{a\,\mathrm{tang}\,\mu_1}, \qquad \frac{dy}{d\sigma} = \frac{\eta\,\mathrm{tang}\,\frac{\sigma}{a}}{a\,\mathrm{tang}\,\mu_1}, \qquad \frac{dz}{d\sigma} = \frac{\zeta\,\mathrm{tang}\,\frac{\sigma}{a}}{\mathrm{tang}\,\mu_1}.$$

On en déduit les formules définitives

$$(35) \qquad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{1}{a}\int \frac{\xi\,\mathrm{tang}\,\frac{\sigma}{a}}{\mathrm{tang}\,\mu_1}\,d\sigma, \\ y &= \frac{1}{a}\int \frac{\eta\,\mathrm{tang}\,\frac{\sigma}{a}}{\mathrm{tang}\,\mu_1}\,d\sigma, \\ z &= \frac{1}{a}\int \frac{\zeta\,\mathrm{tang}\,\frac{\sigma}{a}}{\mathrm{tang}\,\mu_1}\,d\sigma, \end{aligned}\right.$$

qui expriment les coordonnées d'un point quelconque de la courbe (A) la plus générale, en fonction des éléments de son indicatrice sphérique, car l'angle μ_1 dépend lui-même de ces éléments, puisque l'on a $\sin\mu_1 = \frac{R}{a}$, ce qui donne

$$\tag{36} \tang\mu_1 = \frac{R}{\sqrt{a^2 - R^2}}.$$

Toutes les courbes (A) en nombre triplement infini, qui correspondent aux diverses valeurs des constantes introduites par les quadratures, se déduisent manifestement de l'une d'entre elles par de simples translations et, dès lors, doivent être regardées comme identiques. On est donc en droit de conclure qu'à toute courbe sphérique correspond une seule courbe (A) l'admettant comme indicatrice et dont le rayon de torsion vérifie la relation (32). Cette courbe est déterminée par les formules (35), où l'on n'aura pas à tenir compte des constantes provenant des quadratures. On obtiendra ensuite aisément, soit la développable S, dont elle est l'arête de rebroussement, soit la courbe (O) elle-même.

32. Comme exemple, je me propose de rechercher les développables S dont le cône directeur est de révolution ou, ce qui revient au même, leurs arêtes de rebroussement (A), qui ont un petit cercle pour indicatrice. On sait qu'une pareille courbe est une hélice tracée sur un cylindre dont les génératrices sont parallèles à l'axe du cercle. La question est donc de rechercher les courbes (A) qui sont des hélices cylindriques et vérifient, en même temps, la relation (32). Ces courbes correspondent, d'ailleurs, aux courbes (O) étudiées dans l'exemple du n° 29, d'après le théorème énoncé dans la Remarque du n° 26.

Sur une sphère de centre G et de rayon a, traçons le petit cercle, indicatrice sphérique de la courbe cherchée (A), et dont le rayon a pour valeur ak, k étant un nombre constant inférieur à l'unité. Prenons un système d'axes rectangulaires passant par le point G, tels que l'axe Gz soit perpendiculaire au plan du petit cercle et que le plan zGx contienne l'origine des arcs σ. Choisissons enfin comme variable indépendante l'argument ω d'un point du petit cercle, auquel cas les coordonnées d'un point de cette indicatrice seront

$$\xi = ak\cos\omega, \qquad \eta = ak\sin\omega, \qquad \zeta = a\sqrt{1-k^2}.$$

D'ailleurs,

$$\sigma = ak\omega,$$

et l'angle μ_1 est constant et égal au demi-angle au sommet du cône qui, ayant G pour sommet, passe par le petit cercle, en sorte que

$$\tang\mu_1 = \frac{k}{\sqrt{1-k^2}}.$$

Les formules (35) donnent, dans ce cas, pour l'expression, en fonction de la variable ω, des coordonnées d'un point de (A),

$$x = ak\sqrt{1-k^2}\int \cos\omega \operatorname{tang} k\omega \, d\omega,$$

$$y = ak\sqrt{1-k^2}\int \sin\omega \operatorname{tang} k\omega \, d\omega,$$

$$z = a(1-k^2)\int \operatorname{tang} k\omega \, d\omega.$$

L'intégration n'est possible, sous forme finie, comme nous l'avons déjà constaté au n° 29, que lorsque la valeur de k est commensurable, sauf pour l'expression de z, qui est intégrable dans tous les cas et résulte de la formule

$$z = \frac{a(1-k^2)}{k}\log(\pm \operatorname{séc} k\omega),$$

où l'on prend le signe $+$ ou le signe $-$, suivant que la sécante est positive ou négative.

L'axe du cylindre, dont la courbe (A) ainsi déterminée est une hélice, est parallèle à l'axe du cercle, qui est ici l'axe Gz des coordonnées.

On en conclut que les deux premières équations donnant x et y sont celles de la section droite du cylindre dont (A) est une hélice et que l'arc de cette section droite a pour valeur

$$z \operatorname{tang} \mu_1 = a\sqrt{1-k^2}\log(\pm \operatorname{séc} k\omega).$$

Si la valeur de $k = \frac{1}{2}$, ce qui signifie que l'angle au sommet du cône directeur de S vaut 60°, on trouve aisément

$$x = \frac{a\sqrt{3}}{4}\left[2\log\left(\pm\cos\frac{\omega}{2}\right) - \cos\omega\right],$$

$$y = \frac{a\sqrt{3}}{4}(\omega - \sin\omega),$$

$$z = \frac{3a}{2}\log\left(\pm \operatorname{séc}\frac{\omega}{2}\right),$$

pour les équations de la courbe (A) qui correspond à cette valeur particulière de k.