SUR LES

VARIÉTÉS A TROIS DIMENSIONS,

PAR M. É. COTTON.

INTRODUCTION.

On appelle *variété à n dimensions* l'ensemble de n variables x_i et d'une forme quadratique de leurs différentielles, à discriminant différent de zéro, le ds^2 de la variété.

L'intérêt que présente l'étude de ces variétés s'explique par le grand nombre de théories où elles interviennent. On peut citer, en Géométrie, la théorie des surfaces et son extension aux espaces à plus de trois dimensions, les recherches sur la nature de l'espace et les Géométries non euclidiennes, les questions relatives aux contacts de courbes ou de surfaces comprises dans des familles dépendant de plusieurs paramètres arbitraires.

On sait aussi que le problème général de la Dynamique peut être considéré comme une extension du problème des géodésiques aux variétés à un nombre quelconque de dimensions. Si l'on remarque, enfin, que certaines propriétés physiques d'un milieu peuvent être définies au moyen des coefficients d'un ds^2, comme l'a montré Riemann à propos de la conductibilité calorifique, on voit que la Physique mathématique donne encore une nouvelle interprétation des variétés précédemment définies.

Le présent Travail est consacré à l'étude de quelques questions d'Analyse relatives aux variétés, surtout aux variétés à trois dimensions. Il est divisé en cinq Chapitres que je vais analyser rapidement.

Dans le Chapitre I j'expose des résultats connus relatifs aux *invariants* et aux *covariants* des ds^2. Je rappelle la définition de ces invariants et de ces covariants, en la rattachant à la notion générale d'invariant différentiel donnée par M. Lie (¹). J'indique alors, d'après le célèbre Mémoire de Christoffel (²), la formation des covariants successifs d'une variété. Tous ces covariants dérivent de l'un d'entre

(¹) *Mathematische Annalen*, t. XXIV.

(²) *Journal de Crelle*, t. 70.

eux, que Christoffel désigne par G_4. Ce covariant est une forme quadrilinéaire de différentielles, signalée d'abord par Riemann [1], ensuite par Christoffel et Lipschitz [2].

Le procédé employé par Christoffel pour déduire de G_4 la suite des autres covariants d'un ds^2 peut s'étendre à d'autres problèmes, ainsi que l'a montré M. Ricci [3]. C'est ainsi que l'on peut former des covariants correspondant à l'ensemble constitué par une variété donnée et une fonction donnée des variables indépendantes. Ces nouveaux covariants conduisent, d'une façon simple, aux paramètres différentiels de Lamé et de M. Beltrami.

Je n'ai donné dans cette première Partie aucune démonstration. Les théorèmes généraux sur les invariants différentiels permettent de concevoir que les divers covariants ou invariants dont il est question s'obtiennent par des opérations effectuables, dont on trouve le détail dans les Ouvrages cités. Aucun des résultats indiqués n'est nouveau, je signalerai cependant le suivant : Dans le cas d'une variété à trois dimensions, on peut substituer au covariant G_4 un paramètre différentiel du premier ordre Df analogue au paramètre différentiel ordinaire Δf. Cette légère modification d'un résultat de Christoffel est très importante pour la suite.

Le Chapitre II est consacré au problème de l'*application* des variétés. On dit, par analogie avec un problème de la théorie des surfaces [4], que deux variétés à n dimensions, x, ds^2; x', ds'^2 sont applicables, s'il est possible de trouver une transformation de passage exprimant les x en fonction des x' et changeant ds^2 en ds'^2. Le problème de l'application consiste à reconnaître si une pareille transformation est possible, et, dans ce cas, à la déterminer. Il conduit à l'étude d'un système S d'équations aux dérivées partielles du premier et du second ordre, auquel on peut appliquer facilement les théorèmes généraux sur les systèmes différentiels. On voit ainsi que la transformation de passage dépend, au plus, de constantes arbitraires. Le nombre maximum de ces constantes est atteint lorsqu'il s'agit de variétés à courbure constante; deux pareilles variétés ayant même courbure, sont, d'ailleurs, toujours applicables.

Je suppose alors que les variétés données sont à *trois dimensions,* et *non à courbure constante*. Christoffel [5] a donné la solution du problème de l'application lorsque la transformation de passage ne dépend pas de constantes arbitraires. Je laisse cette restriction de côté. Pour étudier le système S, je considère l'ensemble du paramètre différentiel ordinaire Δf et du paramètre différentiel Df pré-

---

(1) *Œuvres complètes. Commentatio mathematica....*

(2) *Journal de Crelle,* t. 70, 71. — *Bulletin des Sciences mathématiques,* 1re série, t. IV.

(3) *Bulletin des Sciences mathématiques,* 2e série, t. XVI.

(4) Darboux, *Leçons sur la Théorie des surfaces,* t. III, Livre VII, Chap. II.

(5) Christoffel, *Journal de Crelle,* t. 70, p. 46 et 241.

cédemment défini, comme l'ensemble de deux formes quadratiques dont les variables seraient les dérivées de f. Cela conduit à envisager certaines formes linéaires des dérivées de f, ou, en adoptant une définition bien connue, certains symboles de transformations infinitésimales Lf. On obtient de même des expressions analogues $L'f$ à partir de la seconde variété; on égale alors les formes homologues Lf, $L'f$; le système S est ramené ainsi à un type connu d'équations linéaires étudié par M. Lie (1).

Après la discussion des divers cas possibles, je montre que les transformations infinitésimales Lf sont, en général, échangeables avec les transformations infinitésimales du groupe G de transformations de la variété x, ds^2 en elle-même. Cela permet de déterminer les transformations infinitésimales de G; j'ai donné à cet endroit un exemple particulier de cette méthode que j'ai dû appliquer fréquemment dans la suite.

Le Chapitre III se rapporte à la *représentation conforme des variétés à trois dimensions*. On dit qu'il est possible d'effectuer une représentation conforme d'une variété x, ds^2 sur une autre x', ds'^2 s'il est possible de déterminer un facteur ρ tel que les variétés x, $\rho^2 ds^2$; x', ds'^2 soient applicables. On peut toujours effectuer la représentation conforme de deux variétés à deux dimensions; il n'en est plus de même dans le cas général.

Je donne d'abord les conditions de possibilité du problème lorsque la seconde variété (x', ds'^2) est euclidienne; ces conditions étant remplies, on détermine aisément ρ et la transformation de passage. Si ces conditions ne sont pas remplies, on peut définir un covariant C de ds^2, restant inaltéré quand on multiplie ds^2 par une fonction quelconque des x. L'étude algébrique de ce covariant C et de ds^2 conduit à adjoindre à la variété x, ds^2 une variété dite *variété principale,* que l'on détermine par des opérations effectuables. Cette notion permet de ramener le problème de la représentation conforme au problème de l'application, traité au Chapitre précédent.

Ces résultats ont été indiqués dans deux Notes aux *Comptes rendus* (2). Ils paraissent susceptibles d'applications géométriques intéressantes.

Je donne, dans le Chapitre IV, le moyen de déterminer les *formes de différentielles invariantes vis-à-vis de certains groupes*. Je montre d'abord comment on peut *associer,* dans une multiplicité à n dimensions, un système de n expressions de Pfaff $l(dx)$ et un système de n transformations infinitésimales Λf. Je considère alors un groupe G dont les transformations infinitésimales Xf

(1) LIE-ENGEL, *Transformationsgruppen,* I. Abschnitt, Chap. XIX.

(2) 26 juillet 1897 et 16 août 1898. J'ai dû modifier la définition de la variété principale donnée dans cette dernière Note; les racines de l'équation en λ du n° IV de cette Note peuvent être toutes nulles, contrairement à ce que j'annonçais. Je démontre dans ce Travail l'existence de la variété principale en supposant le ds^2 donné *défini positif.*

sont formes linéaires indépendantes des dérivées de f. Me servant de l'association précédente, j'établis que l'on peut trouver une infinité de systèmes de n expressions de Pfaff $l(dx)$ invariantes vis-à-vis de G; la recherche de ces systèmes revient [1] à celle des transformations infinitésimales $\mathrm{A}f$ échangeables avec celles de G. On obtient aisément les formes de différentielles invariantes vis-à-vis de G, en exprimant ces formes au moyen des expressions de Pfaff $l(dx)$ de l'un des systèmes précédents.

Je montre ensuite que l'on peut adjoindre à tout groupe G, et à tout système $l(dx)$ correspondant, un ensemble de substitutions linéaires permettant de réduire à des types plus simples les formes de différentielles invariantes vis-à-vis de G.

Dans le Chapitre V, je détermine des *types canoniques pour les* ds^2 *à trois variables admettant un groupe continu.* En d'autres termes, je cherche une forme simple pour les ds^2 à trois variables analogues aux ds^2 de révolution. Pour cette dernière Partie, j'ai pris comme guide un beau Mémoire de M. Bianchi [2], où ce géomètre a donné la solution complète du problème pour les ds^2 définis positifs. J'ai laissé cette restriction de côté.

Soit Γ le groupe de transformations d'un ds^2 à trois variables en lui-même. On voit aisément que Γ admet un sous-groupe G de l'espèce considérée au Chapitre IV. Je suis ainsi conduit : 1° *à déterminer les types possibles de groupes* G, *et les* ds^2 *correspondants;* pour cela j'applique les méthodes du Chapitre IV; 2° *à classer les résultats obtenus,* c'est-à-dire à reconnaître ceux des ds^2 obtenus admettant un groupe Γ plus grand que G. Pour ce dernier point j'ai eu recours aux méthodes du Chapitre II.

La première partie de cette recherche s'étendrait à un nombre quelconque de variables, sans autres difficultés que celles des intégrations à effectuer. Par contre, la classification des résultats paraît compliquée dès qu'il y a plus de trois variables. Il faudrait d'abord étudier les propriétés des groupes Γ possibles, plus complètement que l'on ne l'a fait jusqu'ici.

Pour le cas de trois variables, j'ai ajouté aux types canoniques connus un certain nombre de types nouveaux que M. Bianchi n'avait pas eu à considérer. En outre, les formules générales dont j'ai fait usage me paraissent commodes pour retrouver les résultats de M. Bianchi.

Les divers problèmes traités au cours de ce Travail trouvent une application dans la théorie des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre, si fréquentes en Physique mathématique (le cas de trois variables est alors particu-

---

(1) *Comptes rendus,* 20 février 1899.

(2) *Sugli spazi a tre dimensioni, etc.* (*Mémoires de la Société italienne des Sciences,* série III, t. XI, p. 267.)

lièrement intéressant). Dans un Mémoire ultérieur, je montrerai que le problème : *Reconnaître si deux équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre sont transformables l'une dans l'autre par un changement de variables,* se ramène, suivant les cas, au problème de l'application ou à celui de la représentation conforme de deux variétés. J'établirai également que les méthodes des Chapitres IV et V permettent de former des équations à trois variables analogues aux équations d'Euler et de Poisson. Ces résultats seront la généralisation de ceux que j'ai indiqués antérieurement [1] pour le cas de deux variables.

CHAPITRE I.

INVARIANTS, COVARIANTS, PARAMÈTRES DIFFÉRENTIELS D'UNE VARIÉTÉ.

1. Nous rappellerons d'abord la définition des invariants différentiels d'un groupe de transformations fini ou infini [2]. Considérons des variables x_1, x_2, $\ldots$, x_n; z_1, z_2, $\ldots$, z_q exprimées en fonction de nouvelles variables x'_1, x'_2, $\ldots$, x'_n; z'_1, z'_2, $\ldots$, z'_q par certaines formules de transformation formant un groupe. Supposons z_1, z_2, $\ldots$, z_q fonctions de x_1, x_2, $\ldots$, x_n; z'_1, z'_2, $\ldots$, z'_q sont de même fonctions de x'_1, x'_2, $\ldots$, x'_n. Les dérivées partielles des z, prises par rapport aux variables x, s'expriment en fonction des x', des z' et des dérivées partielles des z' par rapport aux x'. Ceci posé, nous dirons qu'une fonction des x, des z et de leurs dérivées

$$\Omega\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, z_1, z_2, \ldots, z_q, \frac{\partial z_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial^2 z_i}{\partial x_k\, \partial x_m}, \ldots\right)$$

est un *invariant différentiel du groupe,* si l'on a identiquement en vertu des formules de transformation

$$\begin{aligned}&\Omega\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, z_1, z_2, \ldots, z_q, \frac{\partial z_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial^2 z_i}{\partial x_k\, \partial x_m}, \ldots\right)\\ &= \Omega\left(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n, z'_1, z'_2, \ldots, z'_q, \frac{\partial z'_1}{\partial x'_1}, \ldots, \frac{\partial^2 z'_i}{\partial x'_k\, \partial x'_m}, \ldots\right).\end{aligned}$$

On sait que les invariants différentiels d'un ordre déterminé sont fonctions d'un nombre limité d'entre eux, ces derniers pouvant se déduire, à l'aide de

(1) *Comptes rendus,* 30 novembre 1896 et 5 avril 1897.

(2) LIE, *Ueber Differentialinvarianten* (*Mathematische Annalen,* t. XXIV, p. 538).

différentiations et d'éliminations seulement, des équations de définition du groupe [1].

On peut aussi obtenir les invariants différentiels comme solutions de systèmes complets, si l'on connaît seulement les symboles des transformations infinitésimales du groupe.

2. Soit

$$ds^2 = \sum_{ij} a_{ij}\, dx_i\, dx_j, \tag{1}$$

le ds^2 d'une variété à n dimensions. Effectuons le changement de variables

$$x_i = \varphi_i(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$

nous obtenons

$$ds'^2 = \sum_{ij} a'_{ij}\, dx'_i\, dx'_j. \tag{3}$$

Les équations donnant l'expression des a en fonction des a' jointes aux formules (2) donnent les équations d'un groupe G. Nous appellerons *invariants du* ds^2 les invariants différentiels de G.

Considérons maintenant des fonctions U_h des variables x, se transformant en U'_h par la substitution (2). Les équations

$$U_h = U'_h, \tag{4}$$

ajoutées aux équations de G, forment les équations d'un groupe K. On appelle *paramètres différentiels du* ds^2 ceux des invariants de K qui contiennent effectivement les dérivées des fonctions U. On peut aussi considérer les paramètres différentiels comme des opérations invariantes permettant de déduire de tout invariant de ds^2 un invariant nouveau.

Désignons par d_α différents symboles de différentiation que nous distinguerons par leurs indices $\alpha (\alpha = 1, 2, \ldots, r)$. En adjoignant aux équations de G les équations

$$d_\alpha x_i = \sum_p \frac{\partial \varphi_i}{\partial x'_p} d_\alpha x'_p \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, r;\ i, p = 1, 2, \ldots, n), \tag{5}$$

nous obtenons les équations d'un groupe $G^{(1)}$. On appelle *covariants du* ds^2 les invariants de $G^{(1)}$ contenant effectivement les différentielles.

En adjoignant à ds^2 des formes $F_l(x, dx)$ des différentielles des variables x.

---

(1) TRESSE, *Acta mathematica*, t. XVIII, p. 1; 1894.

formes dont les coefficients sont fonctions des x, on définirait d'une manière analogue les *covariants de l'ensemble* $ds^2 F_l$.

3. Christoffel [1] a montré que les covariants d'un ds^2 se déduisent de l'un d'entre eux que l'on obtient de la façon suivante. Soit Δ le discriminant du ds^2 (1); A_{ij} le coefficient de a_{ij} dans Δ. Nous poserons

$$\begin{bmatrix} gh \\ k \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{gk}}{\partial x_h} + \frac{\partial a_{hk}}{\partial x_g} - \frac{\partial a_{gh}}{\partial x_k}\right), \tag{6}$$

$$\begin{Bmatrix} il \\ r \end{Bmatrix} = \sum_k \frac{A_{rk}}{\Delta} \begin{bmatrix} il \\ k \end{bmatrix}, \tag{7}$$

les lettres i, h, g, k, l, r représentent des indices inférieurs ou égaux à n, d'ailleurs quelconques. Nous utiliserons également les symboles à quatre indices

$$\begin{aligned}(gk, hi) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 a_{gi}}{\partial x_h\, \partial x_k} + \frac{\partial^2 a_{hk}}{\partial x_g\, \partial x_i} - \frac{\partial^2 a_{gh}}{\partial x_i\, \partial x_k} - \frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial x_g\, \partial x_h}\right) \\ + \sum_{\alpha\beta} \frac{A_{\alpha\beta}}{\Delta}\left\{\begin{bmatrix} gi \\ \alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} hk \\ \beta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} gh \\ \alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ik \\ \beta \end{bmatrix}\right\}.\end{aligned} \tag{8}$$

Le premier covariant du ds^2 est alors

$$G_4 = \sum_{(gk)\,(hi)} (gk, hi)(dx_g\, \delta x_k - dx_k\, \delta x_g)(Dx_h\, \Delta x_i - Dx_i\, \Delta x_h) \tag{9}$$

comprenant quatre systèmes de différentielles, d, δ, D, Δ. La sommation s'étend, pour gk comme pour hi, aux combinaisons sans répétition des indices $1, 2, \ldots, n$ pris deux à deux.

Christoffel [2] a donné une méthode régulière permettant de déduire de ds^2 et de G_4 toute une série de covariants

$$ds^2, \quad G_4, \quad G_5, \quad \ldots, \quad G_p, \quad G_{p+1}, \quad \ldots. \tag{10}$$

Chacun d'eux se détermine à partir du précédent de la façon suivante. Soit

$$G_p = \sum_{i_1, \ldots, i_p} (i_1, i_2, \ldots, i_p)\, d_1 x_{i_1}\, d_2 x_{i_2} \ldots d_p x_{i_p} \tag{11}$$

---

(1) Christoffel, *Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrucke zweiten grades* (*Journal de Crelle*, t. 70, p. 46). Les notations employées ici sont, à très peu près, celles de Christoffel.

(2) Mémoire cité, p. 56.

un covariant dépendant de p systèmes de différentielles $d_1, d_2, \ldots, d_p$. Les relations

$$(12)\qquad (i, i_1, \ldots, i_p) = \frac{\partial(i_1, i_2, \ldots, i_p)}{\partial x_i} - \sum_\lambda \left[\begin{Bmatrix} ii_1 \\ \lambda \end{Bmatrix} (\lambda, i_2, \ldots, i_p) + \begin{Bmatrix} ii_2 \\ \lambda \end{Bmatrix} (i_1, \lambda, i_3, \ldots, i_p) + \ldots \right]$$

définissent, à partir des coefficients $(i, i_1, \ldots, i_p)$ de G_p, les coefficients du covariant

$$(13)\qquad G_{p+1} = \sum_{i, i_1, \ldots, i_p} (i, i_1, \ldots, i_p)\, dx_i\, d_1 x_{i_1} \ldots d_p x_{i_p}$$

dépendant de $p+1$ systèmes différents de différentielles $d, d_1, \ldots, d_p$.

Il est bien évident que les invariants absolus (1) des formes ds^2, $G_4, \ldots, G_p \ldots$ considérées comme fonctions des différentielles sont des invariants de ds^2.

Considérons, par exemple, la forme de différentielles suivante, covariant de ds^2

$$F = \begin{vmatrix} \sum_{ij} a_{ij}\, dx_i\, Dx_j & \sum_{ij} a_{ij}\, dx_i\, \Delta x_j \\ \sum_{ij} a_{ij}\, \delta x_i\, Dx_j & \sum_{ij} a_{ij}\, \delta x_i\, \Delta x_j \end{vmatrix},$$

qui est, comme G_4, une forme bilinéaire des binomes $dx_g\,\delta x_k - dx_k\,\delta x_g$ et $Dx_h\,\Delta x_i - Dx_i\,\Delta x_h$. Considérons la forme $\lambda F + G_4$; c'est une forme bilinéaire des mêmes binomes (2). Égalons à zéro le discriminant de cette forme; les racines de l'équation en λ obtenue sont des *invariants* du ds^2. On les appelle quelquefois *invariants principaux* de la variété correspondante.

On trouvera des détails plus complets sur les invariants d'un ds^2 dans les Mémoires de M. Ricci (3).

4. On a vu le procédé par lequel Christoffel a obtenu la suite des covariants successifs d'une variété. Comme l'a montré M. Ricci (4), on obtient d'une façon

---

(1) Ce mot est ici employé dans le sens qu'il a dans la théorie des formes.

(2) Le quotient $-\frac{1}{2}\frac{G_4}{F}$ représente la *courbure* de la variété au point considéré, telle que l'a définie Riemann.

(3) Ricci, *Résumé de quelques travaux*... (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. XVI; 1892).

(4) Voir la note précédente. Les locutions de M. Ricci : *dérivation covariante* ou *contre-variante*... ne nous ont pas paru indispensables pour le présent travail.

tout à fait analogue les covariants du système formé en adjoignant à ds^2 une ou plusieurs fonctions des variables x et de leurs différentielles.

Ainsi, en adjoignant à ds^2 une seule fonction U des variables x, et remplaçant dans les formules (11) et (12) G_p par la différentielle dU [et, par suite, les coefficients $(i_1, i_2, \ldots, i_p)$ par $\frac{\partial U}{\partial x_i}$], on obtient un covariant bilinéaire de l'ensemble ds^2, U. Ce covariant bilinéaire est la forme polaire du covariant quadratique équivalent

$$\varphi(U, dx) = \sum_{rs} U_{rs}\, dx_r\, dx_s, \tag{14}$$

où

$$U_{rs} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_r\, \partial x_s} - \sum_\lambda \begin{Bmatrix} rs \\ \lambda \end{Bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x_\lambda}.$$

M. Ricci a montré que les invariants simultanés des formes dU et ds^2 d'une part, $\varphi(U, dx)$, ds^2 d'autre part, donnaient précisément les paramètres différentiels de M. Beltrami [1]. Nous utiliserons surtout le *paramètre différentiel du premier ordre* d'une fonction U

$$\Delta U = \sum_{ij} \frac{A_{ij}}{\Delta} \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial x_j}, \tag{15}$$

et le *paramètre différentiel mixte* de deux fonctions U et V

$$\Delta(U, V) = \sum_{ij} \frac{A_{ij}}{\Delta} \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial V}{\partial x_j}, \tag{16}$$

qui se déduit facilement du précédent.

De la même façon, une expression de Pfaff

$$l(dx) = \sum_i l_i\, dx_i,$$

donne un covariant bilinéaire

$$\psi(dx, \delta x) = \sum l_{ij}\, dx_i\, \delta x_j,$$

$$l_{ij} = \frac{\partial l_i}{\partial x_j} - \sum_\lambda \begin{Bmatrix} ij \\ \lambda \end{Bmatrix} l_\lambda.$$

La somme $\psi(dx, \delta x) + \psi(\delta x, dx)$ donnerait une forme quadratique analogue

[1] Pour ce qui concerne ce point, *voir* le Chapitre II de l'Ouvrage de M. Bianchi : *Lezioni di Geometria differenziale.*

à la précédente; la différence $\psi(dx, \delta x) - \psi(\delta x, dx)$ donne le covariant bilinéaire bien connu de l'expression de Pfaff $l(dx)$.

Si l'on adjoint à ds^2 une forme quadratique de différentielles

$$\lambda(dx) = \sum \Lambda_{pq}\, dx_p\, dx_q, \tag{17}$$

on obtient de même un covariant cubique

$$\sum \Lambda_{kij}\, \mathrm{D}x_k\, dx_i\, \delta x_j \tag{18}$$

à trois systèmes différents de différentielles, étudié par M. Bianchi à l'endroit précédemment cité. Nous utiliserons ce covariant dans la suite.

5. On peut simplifier les résultats précédents, lorsque le nombre des variables est deux ou trois. S'il y a deux variables, G_4 ne comporte qu'un seul terme. Le coefficient de ce terme est, avec les notations précédentes, $(12, 12)$. Le quotient

$$\frac{(12, 12)}{\Delta^2}$$

donne la *courbure* totale du ds^2 considéré. Les paramètres différentiels de la courbure totale donnent d'ailleurs tous les invariants utiles pour le problème de l'application des variétés à deux dimensions [1].

Dans le cas de trois variables, on peut remplacer G_4 par un paramètre différentiel du premier ordre. Avant d'établir ce point, simplifions un peu les notations. Désignons par α et β deux indices que nous ferons correspondre aux combinaisons ik, gh du n° 3, de façon que αik et βgh soient des permutations positives des indices 1, 2, 3. On peut ainsi, comme l'a fait Christoffel, substituer aux symboles à quatre indices (ik, gh) une seule lettre affectée de deux coefficients. Nous prendrons

$$\mathcal{A}_{\alpha\beta} = (ik, gh). \tag{19}$$

Christoffel [2] a montré qu'il revenait au même de dire que G_4 est un covariant de ds^2, ou d'énoncer la proposition suivante :

Les deux formes quadratiques

$$\Gamma = \sum_{\alpha\beta} \mathcal{A}_{\alpha\beta} \frac{\partial U}{\partial x_\alpha} \frac{\partial U}{\partial x_\beta},$$

$$\Phi = \sum_{\alpha\beta} \mathrm{A}_{\alpha\beta} \frac{\partial U}{\partial x_\alpha} \frac{\partial U}{\partial x_\beta},$$

(1) Darboux, *Leçons sur la Théorie des surfaces,* t. III, Livre VII, Chap. II.

(2) Page 66 du Mémoire cité.

(U *désigne une fonction arbitraire des variables*) *et* Δ *se reproduisent, par un changement de variables, multipliées par une même puissance du déterminant fonctionnel de la substitution.*

Or le quotient $\frac{\Phi}{\Delta}$ est le paramètre différentiel ΔU de la fonction U. Nous pouvons de la même façon déduire un paramètre différentiel de Γ et dire :

L'expression

$$DU = \sum_{\alpha\beta} \frac{\mathcal{A}_{\alpha\beta}}{\Delta} \frac{\partial U}{\partial x_\alpha} \frac{\partial U}{\partial x_\beta} \tag{20}$$

est un paramètre différentiel de ds^2.

On démontre facilement que si l'on remplace dans DU les dérivées $\frac{\partial U}{\partial x_\alpha}$ par les expressions $\frac{\partial\, ds^2}{\partial\, dx_\alpha}$ on obtient un covariant quadratique de ds^2. Ce covariant, signalé par M. Ricci, peut également remplacer G_4.

CHAPITRE II.

APPLICATION DES VARIÉTÉS A TROIS DIMENSIONS.

6. On dit que deux variétés à n dimensions [1] x, ds^2; x', ds'^2 sont *applicables* si l'on peut déterminer les x en fonction des x', de telle sorte que la substitution correspondante transforme ds^2 en ds'^2. On dit aussi que ds^2 et ds'^2 sont *équivalents*.

Pour reconnaître si deux variétés sont applicables il faut étudier le système S_1 de $\frac{n(n+1)}{2}$ équations du premier ordre

$$\sum_{ij} a_{ij} \frac{\partial x_i}{\partial x'_r} \frac{\partial x_j}{\partial x'_s} = a'_{rs} \qquad (i, j, r, s = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

que doivent vérifier les x considérés comme fonctions des x'. Christoffel a montré que l'on peut donner aux équations obtenues par dérivation des équations (1) la

(1) Nous désignerons toujours par les mêmes lettres, accentuées ou non, les éléments homologues construits à partir des deux variétés.

forme simple

$$(2)\quad \frac{\partial^2 x_r}{\partial x'_\alpha \partial x'_\beta} + \sum_{ik} \left\{ {ik \atop r} \right\} \frac{\partial x_i}{\partial x'_\alpha} \frac{\partial x_k}{\partial x'_\beta} = \sum_\lambda \left\{ {\alpha\beta \atop \lambda} \right\}' \frac{\partial x_r}{\partial x'_\lambda} \qquad (i, k, r, \alpha, \beta, \lambda = 1, 2, \ldots, n).$$

Égalant les diverses valeurs des dérivées troisièmes que l'on peut obtenir par dérivation des équations (2), nous obtenons de nouvelles équations que l'on peut réduire au premier ordre au moyen de (2). Aux équations du premier ordre ainsi obtenues ajoutons les équations (2), nous obtenons un système S_3. En dérivant S_3, et ajoutant à S_3 les équations obtenues réduites au premier ordre nous obtenons un système S_4. Continuons ainsi, nous obtenons une suite de systèmes différentiels S_p. Chacun de ces systèmes S_p se déduit du précédent S_{p-1} en ajoutant à S_{p-1} les équations que l'on obtient en dérivant une fois S_{p-1} et tenant compte de (2).

On forme ainsi la suite des systèmes S_p, et l'on s'arrête :

1° Si l'on rencontre un système d'équations *algébriquement incompatible* entre les x', les x et leurs dérivées, il y a alors *impossibilité;*

2° Si les équations obtenues étant compatibles, *en passant d'un système* S_p *au suivant* S_{p+1}, *on n'ajoute aucune équation qui ne soit conséquence algébrique des précédentes*. Le problème est alors *possible, sa solution dépend de* $n^2 + n - q$ *constantes arbitraires,* q désignant le nombre des relations indépendantes comprises dans S_p. Le nombre q est au moins égal à $\frac{n(n+1)}{2}$ nombre des équations (1).

La proposition précédente est une simple application des théorèmes généraux sur les systèmes différentiels dont la solution dépend d'un nombre fini de constantes arbitraires (1). On sait, d'ailleurs, que lorsque le problème est possible, on obtient la solution par l'intégration de *systèmes complets*. Nous montrerons, en effet, plus loin comment *on peut substituer aux systèmes* S_p, *dans le cas de* $n = 3$, *des systèmes d'équations linéaires du premier ordre, où les deux variétés jouent un rôle symétrique*.

Ajoutons enfin qu'il résulte des calculs de Christoffel que les équations de S_p s'obtiennent en écrivant qu'une même substitution linéaire

$$(3)\qquad dx_i = \sum_p \frac{\partial x_i}{\partial x'_p}\, dx'_p,$$

effectuée sur les diverses différentielles des variables x, transforme ds^2, G_4, ..., G_{p-1} respectivement en ds'^2, G'_4, ..., G'_{p-1}.

(1) Lie-Engel, *Transformationsgruppen*, t. I, p. 179. — Bourlet, *Annales de l'École Normale*, 3e série, t. VIII; 1891.

7. On peut obtenir toutes les transformations de passage relatives à deux variétés applicables x, ds^2; x', ds'^2, en combinant l'une d'entre elles avec les transformations de passage de l'une des variétés (x, ds^2 par exemple) en elle-même. Ces dernières forment un groupe fini admettant au plus (d'après le numéro précédent) $\frac{n(n+1)}{2}$ paramètres arbitraires. Ce nombre maximum est atteint pour les variétés à courbure constante. On sait [1] que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une variété soit *à courbure constante* K est que le rapport $-\frac{1}{2}\frac{G_4}{F}$ des formes définies au n° 3 soit égal à K. Si K est nul, la variété est dite *euclidienne*. On voit aisément, d'après le n° 6, que *deux variétés à même courbure constante sont applicables*. Les systèmes S_p se réduisent alors à S_2, c'est-à-dire aux équations (1) et (2), et l'intégration des équations (1) et (2) se ramène à celle d'équations différentielles ordinaires.

8. Nous supposerons maintenant que les variétés données sont à *trois dimensions* et *ne sont pas à courbure constante.*

Soient f et ρ deux fonctions des variables x, f' et ρ' ce qu'elles deviennent par la transformation de passage supposée possible. Considérons le paramètre différentiel du premier ordre Δf défini au n° 4, et le paramètre différentiel Df défini au n° 5 qui peut remplacer G_4. Soient $\Delta' f'$, $D' f'$ les expressions correspondantes construites à partir de f' et ds'^2.

Les deux expressions

$$\Theta f = \rho \Delta f + D f, \qquad \Theta' f' = \rho' \Delta' f + D' f' \tag{4}$$

doivent se transformer l'une dans l'autre par la transformation de passage, quels que soient ρ, f.

Nous pouvons *considérer Θf, $\Theta' f'$ comme deux formes quadratiques ternaires; les variables de la première étant les dérivées de f, celles de la seconde les dérivées de f'.* On doit passer des premières variables aux secondes par une substitution linéaire à déterminant non nul. Par suite, les racines de l'équation en ρ, obtenue en égalant à zéro le discriminant de Θf, doivent se transformer par la transformation de passage dans les racines de l'équation en ρ' relative à $\Theta' f'$. Égalons les fonctions symétriques homologues des racines des deux équations, nous obtenons des relations de la forme

$$I_h(x_1, x_2, x_3) = I'_h(x'_1, x'_2, x'_3). \tag{5}$$

Si ces relations sont incompatibles, l'application est impossible. Supposons

---

(1) LIPSCHITZ, *Analyse de six Mémoires, etc.* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1re série, t. IV, p. 152; 1873.) Le résultat avait été indiqué d'abord par Riemann.

qu'il n'en soit pas ainsi, et établissons une correspondance [1] entre les racines ρ_1, ρ_2, ρ_3 de la première équation et les racines ρ'_1, ρ'_2, ρ'_3 de la seconde, en ayant soin de vérifier que les racines homologues se comportent de la même façon vis-à-vis des mineurs des discriminants de Θ et Θ'.

Ces conditions remplies, nous pouvons ramener par les procédés connus [2] la forme Θf à l'une des formes canoniques

I. $$(\rho-\rho_1)(L_1 f)^2+(\rho-\rho_2)(L_2 f)^2+(\rho-\rho_3)(L_3 f)^2,$$

II. $$(\rho-\rho_1)[(L_1 f)^2-(L_2 f)^2]+2(\rho-\rho_2)L_1 f L_3 f,$$

III. $$(\rho-\rho_2)[(L_2 f)^2+(L_3 f)^2]+(\rho-\rho_1)(L_1 f)^2,$$

IV. $$(\rho-\rho_1)[(L_1 f)^2+2L_2 f L_3 f]+2L_1 f L_2 f,$$

V. $$(\rho-\rho_1)[(L_3 f)^2+2L_1 f L_2 f]+(L_1 f)^2,$$

VI. $$(\rho-\rho_1)\Delta f.$$

Les expressions $L_1 f$, $L_2 f$, $L_3 f$ désignent des formes linéaires des dérivées de f formes linéairement indépendantes.

Dans les cas I, II, IV les formes Lf sont déterminées (au signe près). Dans les cas II et V la détermination de ces formes peut se faire d'une infinité de manières. Enfin, dans le cas VI on a manifestement une variété du type *spécial* [3] de M. Lipschitz.

La forme $\Theta' f'$ donne lieu à une décomposition analogue, et les deux décompositions de Θf et de $\Theta' f'$ appartiennent nécessairement au même type canonique.

Ceci posé, nous examinerons successivement les trois hypothèses suivantes : 1° La décomposition de Θf appartient aux types I ou II ou IV; 2° au type III ou au type V; 3° au type VI.

9. Dans la première hypothèse la transformation de passage doit satisfaire aux équations (5) et aux équations [4]

$$L_i f = L'_i f' \tag{6}$$

et réciproquement toute transformation satisfaisant à ces conditions est transfor-

---

(1) Il peut y avoir plusieurs hypothèses possibles pour la correspondance entre les racines ρ et ρ', comme plus loin pour les signes à choisir pour les $L_i f$, lorsque ceux-ci sont déterminés au signe près. On examine successivement les diverses hypothèses.

(2) Darboux, *Sur la théorie algébrique des formes quadratiques* (*Journal de Liouville*, 2e série, t. XIX; 1874).

(3) Lipschitz, *Extrait de six Mémoires, etc...* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, t. IV, p. 152; 1873).

(4) *Voir* la note 1.

mation de passage. On interprète les équations (6) de la façon suivante, en donnant aux symboles $L_i f$ le nom de *transformations infinitésimales : La transformation de passage transforme les transformations infinitésimales* $L_i f$ *dans les transformations infinitésimales* $L'_i f'$. La recherche de la transformation de passage est ainsi ramenée à un problème connu ([1]). Rappelons sommairement la solution. Les relations

$$L_i I_h = L'_i I'_h$$

donneront de nouvelles relations de la forme (5) que l'on adjoindra aux relations (5). On appliquera encore les symboles $L_i f$ aux invariants obtenus, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on n'obtienne par ce procédé aucun invariant I qui ne soit fonction des précédents. On formera ensuite les crochets

$$(L_i L_k) = \sum u_{iks} L_s f, \qquad (L'_i L'_k) = \sum u'_{iks} L'_s f';$$

ce qui donnera de nouvelles relations de la forme (5), savoir

$$(7) \qquad u_{iks} = u'_{iks},$$

que l'on traitera comme les précédentes. On aura soin de s'assurer, au cours des calculs, que les relations de la forme (5) sont compatibles; dans le cas contraire le problème serait impossible. S'il n'en est pas ainsi, *on arrivera au bout d'un nombre fini d'opérations à un système de la forme*

$$(8) \qquad J_h = J'_h,$$

comprenant $r\,(r \leqq 3)$ *équations indépendantes, et tel que toutes les équations possibles de la forme* (5) *soient des conséquences des précédentes.*

Si $r = 3$ la transformation de passage est entièrement déterminée par les relations (8); si $r < 3$ on considérera le système *complet*

$$(9) \qquad L_i F + L'_i F = 0,$$

dont on connaît déjà r solutions, à savoir $J_h - J'_h$. On détermine alors $3 - r$ autres solutions de la forme $F_k(x_1, x_2, x_3, x'_1, x'_2, x'_3)$ et les équations (8) jointes aux équations

$$(10) \qquad F_k(x, x') = c_k,$$

donneront la solution du problème. Cette solution dépend de $3 - r$ constantes arbitraires c_k.

([1]) LIE-ENGEL, *Transformationsgruppen*, t. I, p. 364.

10. Examinons maintenant le cas où la décomposition canonique de Θf est de la forme III ou de la forme V. Dans ce cas, la forme $L_1 f$ seule est entièrement déterminée et il y a une infinité de systèmes possibles pour les formes $L_2 f$, $L_3 f$. Choisissons alors trois formes $L_1 f$, $L_2 f$, $L_3 f$ *bien déterminées,* donnant lieu à la décomposition canonique de Θf, et de même trois formes $L'_1 f'$, $L'_2 f'$, $L'_3 f'$ *déterminées,* correspondant à la seconde variété. La transformation de passage doit satisfaire évidemment : 1° à des équations de la forme (5); 2° à des équations de la forme suivante :

$$(11)\qquad \begin{cases} \Lambda_1 f = \qquad L_1 f = L'_1 f', \\ \Lambda_2 f = \sum \alpha_{2i} L_i f = L'_2 f', \\ \Lambda_3 f = \sum \alpha_{3i} L_i f = L'_3 f', \end{cases}$$

où les α_{ij} représentent des fonctions bien déterminées d'une seule lettre α [1]. Nous *considérerons α comme une fonction des x que nous chercherons d'abord à obtenir.*

Pour cela nous combinerons, comme précédemment, les équations (5) et (11), de manière à obtenir des relations nouvelles. Les équations obtenues pourront se diviser en trois catégories : 1° équations contenant les x et les x' seuls; 2° équations contenant les x, les x' et α; 3° équations contenant les x, les x', α et ses dérivées. Nous éliminerons les x' entre les seconds membres de ces diverses équations et nous obtiendrons ainsi *un système* S *d'équations aux dérivées partielles entre α et les x seuls.* Si l'on ne rencontre aucune incompatibilité, on intégrera ce système, l'on portera la valeur trouvée dans (11), et l'on sera ramené à intégrer un système analogue au système formé par (8) et (9).

Si S contient une équation d'ordre zéro, α est déterminé, on est ramené au cas précédent; sinon α dépend de constantes arbitraires et la solution dépendra d'un plus grand nombre de constantes arbitraires que précédemment. On conçoit d'ailleurs que l'examen des types canoniques possibles pour les variétés applicables d'une infinité de façons sur elles-mêmes donne des renseignements sur le système S. L'examen de ces types canoniques indiqué au Chapitre V montre que la solution générale dépend, au plus, de quatre constantes arbitraires.

Si la variété donnée est telle que Θf appartienne au type VI, on procède différemment. La racine triple de l'équation en ρ ne se réduit pas à une constante, sinon on aurait, contrairement à l'hypothèse du début, une variété à courbure

---

[1] En considérant les lettres $L_i f$ et $\Lambda_i f$ comme des variables indépendantes, les relations (11) sont les équations (sous forme finie) du groupe de transformations des deux formes Df, Δf en elles-mêmes.

constante. Nous aurons donc certainement une équation de la forme

$$I(x_1, x_2, x_3) = I'(x'_1, x'_2, x'_3).$$

Nous remplacerons alors Df *par le carré* de $\Delta(I, f)$, paramètre différentiel mixte de I et f, et nous serons ramenés à l'un des cas précédents. Il est évident d'ailleurs que $\Delta(I, f)$ n'est pas identiquement nul, puisque I dépend effectivement des variables x.

11. On détermine les *transformations d'une variété x, ds^2 en elle-même* par la méthode précédente. Il suffit de prendre, pour seconde variété x', ds'^2, celle qui se déduit de x, ds^2 par la substitution identique $x = x'$. Ces transformations d'une variété en elle-même forment un groupe; nous le désignerons par G.

Les propositions précédentes permettent de donner quelques propriétés du groupe G. Ainsi la forme des équations (6) et (11) montre que, pour *toute variété non à courbure constante, il existe au moins une transformation infinitésimale* Lf inaltérée par les transformations de G, ou, ce qui revient au même (¹), *échangeable avec les transformations infinitésimales de* G. On peut compléter cette proposition lorsque la forme Θf conduit à trois transformations infinitésimales $L_1 f$, $L_2 f$, $L_3 f$ bien déterminées. *Ces trois transformations infinitésimales sont alors échangeables avec celles de* G. Si l'on suppose, de plus, que les invariants I se réduisent tous à des constantes, les trois transformations Lf sont les transformations infinitésimales d'un groupe fini H, puisque les u_{iks} sont des constantes. Le groupe H est d'ailleurs transitif, puisque les Lf sont des formes linéaires indépendantes des dérivées de f. De plus G, ayant toutes les transformations infinitésimales échangeables avec celles du groupe simplement transitif H, est, lui aussi, simplement transitif. En résumé :

Lorsque la forme Θf conduit à trois formes Lf *et que tous les invariants se réduisent à des constantes, le groupe* G *de la variété est simplement transitif et les formes* Lf *sont les transformations infinitésimales du groupe réciproque* (²).

Cette proposition peut être établie d'une autre façon, à l'aide des considérations du Chapitre V.

12. Nous allons donner un exemple de détermination du groupe d'une variété.

(¹) LIE-ENGEL, *Transformationsgruppen*, I. Abschnitt, p. 259.

(²) Pour la définition de ce groupe, *voir* LIE-ENGEL, *Transformationsgruppen*, Abs. I, p. 380.

Indiquons d'abord *la forme simple que prend le paramètre différentiel* Df *lorsque les coefficients du* ds^2 *de la variété sont fonctions d'une seule variable* x_1.

En posant

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{4\Delta}\left[\left(\frac{da_{23}}{dx_1}\right)^2 - \frac{da_{22}}{dx_1}\frac{da_{33}}{dx_1}\right],\\ b_{22} &= \frac{1}{4\Delta^2}\frac{d\Delta}{dx_1}\frac{da_{33}}{dx_1} - \frac{1}{2\Delta}\frac{d^2a_{33}}{dx_1^2},\\ b_{33} &= \frac{1}{4\Delta^2}\frac{d\Delta}{dx_1}\frac{da_{22}}{dx_1} - \frac{1}{2\Delta}\frac{d^2a_{22}}{dx_1^2},\\ b_{23} &= \frac{-1}{4\Delta^2}\frac{d\Delta}{dx_1}\frac{da_{23}}{dx_1} + \frac{1}{2\Delta}\frac{d^2a_{23}}{dx_1^2}. \end{aligned}\right.$$

Les formules du Chapitre précédent donnent alors

$$(13)\quad \mathrm{D}f = \theta\,\Delta f + b_{22}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 + 2b_{23}\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_3} + b_{33}\left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)^2.$$

L'une des racines de l'équation en ρ relative à Θf (n° 8) est alors égale à $-\theta$; θ est fonction de x_1 seul; il en est évidemment de même de tous les invariants de la théorie précédente.

Cherchons maintenant le groupe de transformations de la variété x_1, x_2, x_3,

$$(14)\quad ds^2 = 2e^{hx_1}dx_1\,dx_3 + (ce^{hx_1}dx_3 + e^{x_1}dx_2)^2$$

en elle-même; h, c sont des constantes. On trouve, tous calculs faits,

$$\Delta f = -2ce^{-x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_1} + 2e^{-hx_1}\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_3} + e^{-2x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2,$$

$$\mathrm{D}f - \theta\,\Delta f = (h-1)\left[c^2e^{-2x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 + e^{-2hx_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)^2\right],$$

θ est une constante contenant $h-1$ en facteur, qu'il est d'ailleurs inutile d'écrire.

Dans le cas général, où $(h-1)c$ est différent de zéro, la décomposition canonique conduit à trois transformations infinitésimales réductibles à

$$(15)\quad \mathrm{L}_1f = e^{-hx_1}\frac{\partial f}{\partial x_3},\qquad \mathrm{L}_2f = e^{-x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2},\qquad \mathrm{L}_3f = \frac{\partial f}{\partial x_1}.$$

Ce sont les trois transformations d'un groupe simplement transitif.

Le groupe réciproque, c'est-à-dire *le groupe des transformations de la variété en elle-même,* se détermine par des opérations connues; on peut prendre, pour transformations infinitésimales de ce groupe,

$$(16)\qquad X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x_2}, \qquad X_2 f = \frac{\partial f}{\partial x_3}, \qquad X_3 f = -\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + h x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}.$$

La conclusion précédente tombe en défaut dans les cas suivants :

1° $h - 1 = 0$. On a alors une variété euclidienne.

2° $c = 0$. Les transformations de la variété en elle-même ne laissent alors invariantes que les expressions

$$L_1 f = e^{-hx_1} \frac{\partial f}{\partial x_3}, \qquad \Delta f = (L_2 f)^2 + 2 L_1 f\, L_3 f,$$

les $L_i f$ représentant toujours les expressions (15). En d'autres termes, une transformation de la variété en elle-même remplace $L_1 f$, $L_2 f$, $L_3 f$ respectivement par

$$\Lambda_1 f = L_1 f, \qquad \Lambda_2 f = L_2 f + \alpha L_1 f, \qquad \Lambda_3 f = L_3 f - \alpha L_2 f - \frac{\alpha^2}{2} L_1 f,$$

où α désigne *une expression que l'on détermine en écrivant que la structure du groupe engendré par les Λf est identique à celle du groupe engendré par les* Lf. On a ainsi

$$\alpha = C e^{(h-1)x_1},$$

C désignant une constante. Le groupe de transformations de la variété peut alors être considéré comme engendré par les transformations infinitésimales (16) et par une quatrième transformation infinitésimale donnant un groupe à un paramètre remplaçant les $L_i f$ par les $\Lambda_i f$. En désignant par Xf cette transformation infinitésimale et observant qu'à une transformation infiniment petite du groupe à un paramètre Xf correspond une valeur de C très petite, on voit que Xf doit donner lieu aux identités

$$(XL_1)f = 0, \qquad (XL_2)f = e^{(h-1)x_1} L_1 f, \qquad (XL_3)f = -e^{(h-1)x_1} L_2 f,$$

qui donnent un système complètement intégrable pour déterminer les coefficients de Xf. On trouve ainsi que *la transformation*

$$X_4 f = \frac{e^{(h-2)x_1}}{h-2} \frac{\partial f}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial f}{\partial x_3},$$

ajoutée aux transformations (16), *donne un groupe à quatre paramètres qui est le groupe cherché*. Il est d'ailleurs aisé de vérifier directement que ces transformations infinitésimales laissent bien invariant le ds^2 considéré.

13. On peut remplacer, comme on sait, les équations linéaires aux dérivées

partielles par des équations linéaires aux différentielles totales. Il est intéressant, pour l'extension de la méthode aux variétés à plus de trois dimensions, de construire directement un système d'équations linéaires aux différentielles totales qui donnerait encore la solution du problème de l'application. On y parvient par une méthode que nous allons indiquer rapidement, et qui présente de grandes analogies avec la précédente.

Nous avons vu (n° 5) que l'on peut substituer à G_4, dans le cas d'une variété à trois dimensions, un covariant quadratique. Soient $d\sigma^2$ et $d\sigma'^2$ les covariants quadratiques qui correspondent ainsi aux variétés x, ds^2 et x', ds'^2. En désignant toujours par ρ une fonction arbitraire des x, par ρ' ce qu'elle devient par la transformation de passage, nous réduirons (comme précédemment) à une forme canonique l'expression $\rho\, ds^2 + d\sigma^2$ considérée comme forme quadratique des différentielles dx. En opérant de même pour $\rho'\, ds'^2 + d\sigma'^2$ et comparant les résultats obtenus, nous obtiendrons d'abord un système de la forme

$$\mathrm{I}(x) = \mathrm{I}'(x'), \tag{17}$$

et, en outre, trois équations

$$l_i(dx) = l'_i(dx'), \tag{18}$$

les $l_i(dx)$ désignant trois expressions de Pfaff correspondant à la multiplicité x_1, x_2, x_3; les $l'_i(dx')$, trois expressions analogues relatives aux x'. [Dans certains cas, il peut être nécessaire d'introduire une arbitraire α dans les premiers membres des équations (18) : cette arbitraire sera considérée comme une fonction à déterminer des variables x.] Avant de voir comment on exprime que les équations précédentes sont compatibles, montrons rapidement comment, *en général, on obtiendrait un système analogue dans le cas de variétés à n dimensions.*

On chercherait une décomposition canonique pour les formes F et G_4 (*voir* n° 3), et les formes F' et G'_4 relatives aux deux variétés. En général, on obtiendrait d'abord des équations de la forme

$$\mathrm{I}_h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathrm{I}'_h(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n), \tag{19}$$

puis des équations de la forme

$$\sum_{ij} b_{ij}(dx_i\,\delta x_j - dx_j\,\delta x_i) = \sum_{ij} b'_{ij}(dx'_i\,\delta x'_j - dx'_j\,\delta x'_i), \tag{20}$$

dont le nombre dépendrait de la nature algébrique des formes considérées. On chercherait alors à ramener simultanément à une forme canonique l'une des formes bilinéaires précédentes

$$\sum b_{ij}(dx_i\,\delta x_j - dx_j\,\delta x_i),$$

et la forme bilinéaire

$$\sum_k \delta x_k \frac{\partial\, ds^2}{\partial\, dx_k},$$

ce qui donnerait n équations de la forme (18), où pourraient cette fois figurer plusieurs fonctions α, β, ... des lettres x, fonctions qui resteraient à déterminer. On simplifierait, bien entendu, les équations obtenues en tenant compte des équations (19) et des équations de la forme (20) laissées de côté.

En résumé, des opérations algébriques, plus ou moins compliquées suivant les cas, et des dérivations ramènent la recherche de la transformation de passage à l'étude d'un système composé : 1° de n équations linéaires aux différentielles totales

$$l_i(dx) = l'_i(dx');$$

2° d'équations de la forme

$$\mathrm{I}_h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathrm{I}'_h(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n).$$

Pour étudier la compatibilité d'un pareil système sans rien lui enlever de sa symétrie par rapport aux deux multiplicités, on pourrait utiliser les covariants bilinéaires des $l_i(dx)$ et des $l'_i(dx')$. Mais il serait plus simple de ramener l'étude de ce système à celle d'un système d'équations linéaires aux dérivées partielles (où la symétrie serait conservée) en se servant d'une notion qui sera expliquée plus loin : la notion de systèmes associés d'expressions de Pfaff et de transformations infinitésimales (*voir* Chap. IV, n° 23).

CHAPITRE III.

REPRÉSENTATION CONFORME DES VARIÉTÉS A TROIS DIMENSIONS.

14. Étant données deux variétés à n dimensions, x, ds^2; x', ds'^2, nous dirons qu'il est possible d'effectuer une *représentation conforme* de l'une de ces variétés sur l'autre, s'il est possible de déterminer un facteur $\rho(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, de telle sorte que les variétés x, $\rho^2\, ds^2$; x', ds'^2 soient applicables. En se reportant aux formules qui servent à définir les angles relatifs à une forme quadratique de différentielles ([1]), on vérifie sans peine que la transformation de passage de la

([1]) Cette notion est due à M. Beltrami. *Voir* Darboux, *Leçons sur la Théorie des surfaces*, t. II, p. 500.

variété x, $\rho^2\, ds^2$ à la variété x', ds'^2 transforme les angles relatifs à ds^2 dans les angles des éléments homologues de la variété x', ds'^2. On peut dire encore que la transformation de passage conserve la similitude des éléments infiniment petits des variétés x, ds^2 et x', ds'^2, ce qui explique le mot de représentation conforme.

Nous allons donner le moyen de reconnaître s'il est possible d'effectuer une représentation conforme de deux variétés *à trois dimensions* l'une sur l'autre, et la manière d'obtenir alors la transformation de passage. Nous examinerons d'abord le cas où l'une des variétés données est euclidienne. Cela nous conduit à certains covariants qui permettent de ramener le problème général de la représentation conforme à celui de l'application.

15. Dire que la variété définie par x_1, x_2, x_3 et

$$ds^2 = \sum a_{ij}\, dx_i\, dx_j \tag{1}$$

est susceptible d'une représentation conforme *sur l'espace euclidien,* c'est dire qu'il est possible de déterminer un facteur $\rho(x_1, x_2, x_3)$, de telle sorte que la variété x_1, x_2, x_3, $\rho^2\, ds^2$ soit à courbure totale nulle. Nous poserons

$$d\sigma^2 = \rho^2\, ds^2.$$

Nous aurons un système S d'équations aux dérivées partielles pour déterminer ρ en écrivant que le covariant G_4 de la variété x, $d\sigma^2$ est identiquement nul. La condition nécessaire et suffisante pour que le problème soit possible est que le système S soit compatible.

Il est aisé de voir que, *de toute solution du système* S, *on peut déduire une nouvelle solution dépendant de quatre constantes arbitraires.* En effet, la variété x, $d\sigma^2$ est applicable sur la variété x'_1, x'_2, x'_3, $dx'^2_1 + dx'^2_2 + dx'^2_3$. Cette dernière variété est susceptible d'une infinité de représentations conformes sur elle-même. D'une façon plus précise, posons

$$\Theta(x') = \frac{k^2}{[(x'_1 - a_1)^2 + (x'_2 - a_2)^2 + (x'_3 - a_3)^2]^2},$$

a_1, a_2, a_3 et k désignant des constantes arbitraires. Les variétés

$$x', \quad \Theta(x')(dx'^2_1 + dx'^2_2 + dx'^2_3) \qquad \text{et} \qquad y', \quad dy'^2_1 + dy'^2_2 + dy'^2_3$$

sont applicables [1]. Remplaçons dans $\Theta(x')$ les x' à l'aide d'une transformation

[1] *Voir,* à ce sujet, un Mémoire de M. Darboux (*Annales de l'École Normale,* 2e série, t. VII; 1878).

de passage de la variété x', $dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2$ à la variété x, $d\sigma^2$; désignons par $\Theta(x)$ la fonction obtenue. Il est évident que $\rho\Theta^{-\frac{1}{2}}$ dépend de quatre constantes arbitraires et se trouve, comme ρ, solution du système S.

Du moment que la solution générale du système S, supposé compatible, doit dépendre de constantes arbitraires, on doit pouvoir tirer de S et des équations obtenues par dérivation, l'expression des dérivées d'un certain ordre μ de la fonction ρ, en fonction des dérivées d'ordre moindre. On peut prévoir d'ailleurs que μ est égal à 2. C'est ce que nous allons constater directement.

16. Désignons par $\mathfrak{A}_{ij}$ les coefficients du covariant G_4 attaché à $d\sigma^2$ (la lettre $\mathcal{A}_{ij}$ étant réservée, comme au n° 5, aux coefficients du covariant G_4 de ds^2).

Développons $\mathfrak{A}_{ij}$ en mettant en évidence les termes contenant les dérivées secondes de ρ; il vient

$$(2)\quad \begin{cases} \mathfrak{A}_{11} = -a_{33}\rho\dfrac{\partial^2\rho}{\partial x_2^2} - a_{22}\rho\dfrac{\partial^2\rho}{\partial x_3^2} + 2a_{23}\rho\dfrac{\partial^2\rho}{\partial x_2\,\partial x_3} + \ldots, \\ \mathfrak{A}_{23} = \quad a_{23}\rho\dfrac{\partial^2\rho}{\partial x_1^2} + a_{11}\rho\dfrac{\partial^2\rho}{\partial x_2\,\partial x_3} - a_{12}\rho\dfrac{\partial^2\rho}{\partial x_3\,\partial x_1} - a_{13}\rho\dfrac{\partial^2\rho}{\partial x_1\,\partial x_2} + \ldots, \end{cases}$$

les termes non écrits contenant au plus les dérivées premières de ρ. Les autres expressions $\mathfrak{A}_{ij}$ se déduisent des précédentes par permutations circulaires des indices 1, 2, 3. On peut former des combinaisons linéaires et homogènes des $\mathfrak{A}_{ij}$ ne contenant chacune qu'une dérivée seconde de ρ. Conservons, en effet, les notations du Chapitre I et ajoutons-leur les suivantes :

$$(3)\qquad P = \sum_{ij} \mathfrak{A}_{ij} a_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, 3),$$

$$\Lambda_{23} = \frac{1}{\rho^2\Delta}\left[\frac{a_{23}}{2}P + A_{23}\mathfrak{A}_{11} + A_{11}\mathfrak{A}_{23} - A_{12}\mathfrak{A}_{31} - A_{13}\mathfrak{A}_{12}\right],$$

$$\Lambda_{11} = \frac{1}{\rho^2\Delta}\left[\frac{a_{11}}{2}P - A_{33}\mathfrak{A}_{22} - A_{22}\mathfrak{A}_{33} + 2A_{23}\mathfrak{A}_{23}\right].$$

Définissons d'une manière analogue Λ_{31}, Λ_{12} et Λ_{22}, Λ_{33}, en effectuant une permutation circulaire des indices 1, 2, 3 dans les formules précédentes. Il est aisé de vérifier que

$$\Lambda_{ij} = \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial^2\rho}{\partial x_i\,\partial x_j} + \ldots,$$

les termes non écrits ne contenant pas les dérivées secondes de ρ.

Le système S est composé, par définition, des six équations

$$(4)\qquad \mathfrak{A}_{ij} = 0.$$

Mais il résulte de ce qui précède que ces équations peuvent être remplacées par les suivantes

$$\Lambda_{ij} = 0, \tag{5}$$

et nous avons bien le résultat annoncé au numéro précédent.

Nous allons effectuer un changement de fonction dans le système S. Remarquons, à cet effet, que les $\mathfrak{A}_{ij}$ sont fonctions homogènes de ρ et de ses dérivées des deux premiers ordres, le degré d'homogénéité étant 2. Par suite, les Λ_{ij} sont fonctions homogènes de degré zéro de ρ et de ses dérivées; en d'autres termes, ρ ne figure dans lès Λ_{ij} que par des combinaisons telles que $\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x_i}$ et $\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2\rho}{\partial x_i\,\partial x_j}$.

Nous prendrons, comme nouvelle fonction inconnue,

$$R = \log\rho,$$

ce qui donne

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x_i} = \frac{\partial R}{\partial x_i}, \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2\rho}{\partial x_i\,\partial x_j} = \frac{\partial^2 R}{\partial x_i\,\partial x_j} + \frac{\partial R}{\partial x_i}\frac{\partial R}{\partial x_j};$$

nous *désignerons encore par les mêmes lettres* Λ_{ij} *le résultat de cette substitution dans les expressions* (3). La fonction inconnue R ne figure dans les équations (5) que par ses dérivées partielles des deux premiers ordres.

Le système (5) doit admettre une solution dépendant de quatre paramètres arbitraires; par suite, en vertu de théorèmes connus sur les systèmes différentiels, il ne doit donner, par dérivation, aucune équation nouvelle. *Les conditions de compatibilité de ce système s'expriment donc par des relations entre les coefficients de ds^2 et de leurs dérivées.* Si ces conditions sont remplies, on aura R et par suite ρ, par l'intégration d'un système d'équations différentielles ordinaires. Une fois que l'on connaîtra une valeur de ρ, on déterminera la transformation de passage de la variété correspondante x, $d\sigma^2$ à la variété x', $dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2$, d'après les méthodes connues.

17. Nous allons donner, sous forme explicite, les conditions de compatibilité du système (5). Nous examinerons d'abord un cas particulier, le résultat s'étendra ensuite au cas général.

Supposons que ds^2 soit de la forme

$$ds^2 = B_1^2\,dx_1^2 + B_2^2\,dx_2^2 + B_3^2\,dx_3^2. \tag{6}$$

En d'autres termes, imaginons que les *surfaces*

$$x_1 = \text{const.}, \qquad x_2 = \text{const.}, \qquad x_3 = \text{const.}$$

forment un système triple orthogonal relativement à ds^2.

Signalons d'abord les expressions suivantes des symboles à trois indices de Christoffel :

$$(7) \qquad \begin{cases} \begin{Bmatrix} ik \\ \nu \end{Bmatrix} = 0 \qquad \text{(si les trois indices sont différents)}, \\ \begin{Bmatrix} \nu k \\ \nu \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k\nu \\ \nu \end{Bmatrix} = \dfrac{1}{B_\nu}\dfrac{\partial B_\nu}{\partial x_k}, \\ \begin{Bmatrix} ii \\ \nu \end{Bmatrix} = -\dfrac{B_i}{B_\nu^2}\dfrac{\partial B_i}{\partial x_\nu} \qquad (i \neq \nu). \end{cases}$$

On trouve ensuite les formules suivantes :

$$(8) \qquad \begin{cases} \mathcal{A}_{11} = -B_2B_3\left[\dfrac{\partial}{\partial x_3}\left(\dfrac{1}{B_3}\dfrac{\partial B_2}{\partial x_3}\right) + \dfrac{\partial}{\partial x_2}\left(\dfrac{1}{B_2}\dfrac{\partial B_3}{\partial x_2}\right) + \dfrac{1}{B_1^2}\dfrac{\partial B_2}{\partial x_1}\dfrac{\partial B_3}{\partial x_1}\right], \\ \mathcal{A}_{23} = B_1\left(\dfrac{\partial^2 B_1}{\partial x_2\,\partial x_3} - \dfrac{1}{B_2}\dfrac{\partial B_1}{\partial x_2}\dfrac{\partial B_2}{\partial x_3} - \dfrac{1}{B_3}\dfrac{\partial B_1}{\partial x_3}\dfrac{\partial B_3}{\partial x_2}\right); \end{cases}$$

les formules donnant les autres $\mathcal{A}_{ij}$ se déduisent de celles-ci par permutation circulaire des indices 1, 2, 3. On retrouve bien les équations classiques de Lamé [1] en égalant à zéro les expressions précédentes.

On obtient les $\mathfrak{A}_{ij}$ en remplaçant dans les formules (8) B_i par ρB_i, et les formules des Λ_{ij} donnent alors, tous calculs faits,

$$(9) \qquad \begin{cases} \Lambda_{11} = \dfrac{\partial^2 R}{\partial x_1^2} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial R}{\partial x_1}\right)^2 + \dfrac{1}{2}\dfrac{B_1^2}{B_2^2}\left(\dfrac{\partial R}{\partial x_2}\right)^2 + \dfrac{1}{2}\dfrac{B_1^2}{B_3^2}\left(\dfrac{\partial R}{\partial x_3}\right)^2 \\ \qquad - \dfrac{1}{B_1}\dfrac{\partial B_1}{\partial x_1}\dfrac{\partial R}{\partial x_1} + \dfrac{B_1}{B_2^2}\dfrac{\partial B_1}{\partial x_2}\dfrac{\partial R}{\partial x_2} + \dfrac{B_1}{B_3^2}\dfrac{\partial B_1}{\partial x_3}\dfrac{\partial R}{\partial x_3} + \dfrac{\alpha_1}{2}\dfrac{B_1}{B_2B_3}, \\ \Lambda_{23} = \dfrac{\partial^2 R}{\partial x_2\,\partial x_3} - \dfrac{\partial R}{\partial x_2}\dfrac{\partial R}{\partial x_3} - \dfrac{1}{B_2}\dfrac{\partial B_2}{\partial x_3}\dfrac{\partial R}{\partial x_2} - \dfrac{1}{B_3}\dfrac{\partial B_3}{\partial x_2}\dfrac{\partial R}{\partial x_3} + b_{23}, \end{cases}$$

où l'on a posé, pour plus de simplicité,

$$a_1 = -\frac{\mathcal{A}_{11}}{B_2B_3}, \qquad b_{23} = \frac{\mathcal{A}_{23}}{B_1},$$

$$\alpha_1 = -a_1B_1 + a_2B_2 + a_3B_3.$$

Les autres Λ_{ij} ont des expressions analogues. Les conditions de compatibilité

---

[1] *Coordonnées curvilignes*, p. 76.

du système

$$(5) \qquad \Lambda_{ij} = 0$$

s'obtiennent en égalant les diverses valeurs des dérivées troisièmes de R obtenues en dérivant les équations (5), puis en remplaçant, dans les relations obtenues, les dérivées secondes à l'aide des équations (5). Les conditions obtenues peuvent être mises sous la forme suivante :

$$(10) \qquad \Lambda_{r(st)} = 0 \qquad (r, s, t = 1, 2, 3),$$

en posant

$$(11) \qquad \Lambda_{r(st)} = \frac{\partial \Lambda_{rs}}{\partial x_t} - \frac{\partial \Lambda_{rt}}{\partial x_s} + \sum_{\mu} \begin{Bmatrix} rs \\ \mu \end{Bmatrix} \Lambda_{t\mu} - \sum_{\mu} \begin{Bmatrix} rt \\ \mu \end{Bmatrix} \Lambda_{s\mu}.$$

Il est facile de vérifier que les expressions $\Lambda_{r(st)}$ ne dépendent plus de R. En résumé, *les relations* (10) *sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que la variété proposée soit susceptible d'une représentation conforme dans l'espace euclidien.*

18. Avant d'aborder le cas général, observons que, *dans une variété à trois dimensions, il existe toujours des systèmes triples orthogonaux par rapport à la forme fondamentale.* En effet, on peut toujours, par un changement de variables, ramener le ds^2 à ne contenir l'une des différentielles que par son seul carré ([1]). Par un raisonnement analogue à celui de M. Darboux pour l'espace euclidien ([2]), on peut alors appliquer les théorèmes de Cauchy aux équations aux dérivées partielles des systèmes triples orthogonaux de la variété considérée et établir l'existence de pareils systèmes. *On pourra donc toujours ramener par un changement de variables le ds^2 d'une variété à trois dimensions à la forme* (6).

Désignons toujours par

$$(1) \qquad ds^2 = \sum a_{ij}\, dx_i\, dx_j$$

les ds^2 de la variété donnée, que nous supposons maintenant de forme quelconque. Conservons, d'une façon générale, les notations précédemment adoptées à une exception près : la lettre R représentera maintenant une fonction *arbitraire* des

---

([1]) DARBOUX, *Leçons sur la Théorie des surfaces*, t. II, p. 505. Le raisonnement fait à cet endroit suppose le ds^2 défini positif, mais on peut démontrer la proposition pour un ds^2 quelconque, à discriminant non nul.

([2]) *Leçons sur les systèmes triples orthogonaux et les coordonnées curvilignes*, t. I, Chap. I.

variables x. Nous emploierons les lettres accentuées x', a'_{rs}, A'_{rs}, $\mathfrak{A}'_{ij}$, Λ'_{pq}, R', ..., pour désigner les éléments homologues de x, a_{rs}, A_{rs}, $\mathfrak{A}_{ij}$, Λ_{pq}, R, ..., *dans une variété x', ds'^2 déduite de x, ds^2 par un changement de variables quelconque.*

Les Λ_{pq} s'expriment linéairement en fonction des $\mathfrak{A}_{ij}$; ceux-ci s'expriment linéairement en fonction des $\mathfrak{A}'_{ij}$ et, par suite, des Λ'_{pq}. Donc les Λ_{pq} se déduisent des Λ'_{pq} par une substitution linéaire homogène dont il est facile de déterminer les coefficients. En effet, R étant *arbitraire,* les coefficients des Λ'_{pq}, dans les expressions des Λ_{rs} en fonction des Λ'_{pq}, sont visiblement ceux des dérivées secondes $\dfrac{\partial^2 \mathrm{R}'}{\partial x'_p\, \partial x'_q}$ dans l'expression de $\dfrac{\partial^2 \mathrm{R}}{\partial x_r\, \partial x_s}$ en fonction des dérivées premières et secondes de R'. On peut énoncer ce résultat sous la forme suivante :

La forme quadratique (¹) *de différentielles*

$$\lambda(dx) = \sum_{p,q} \Lambda_{pq}\, dx_p\, dx_q \tag{12}$$

est un covariant de ds^2.

Nous avons vu (n° 4) que tout covariant de différentielles attaché à ds^2 donne, par dérivation, un covariant nouveau (²). Appliquons ce résultat à $\lambda(dx)$. En posant

$$\Lambda_{k(ij)} = \frac{\partial \Lambda_{ki}}{\partial x_j} - \frac{\partial \Lambda_{kj}}{\partial x_i} + \sum_\mu \begin{Bmatrix} ik \\ \mu \end{Bmatrix} \Lambda_{j\mu} - \sum_\mu \begin{Bmatrix} kj \\ \mu \end{Bmatrix} \Lambda_{i\mu}, \tag{13}$$

le nouveau covariant obtenu est

$$\mathrm{C}(dx, \delta x, \mathrm{D}x) = \sum_{k(ij)} \Lambda_{k(ij)}\, \mathrm{D}x_k (dx_i\, \delta x_j - dx_j\, \delta x_i), \tag{14}$$

La sommation s'étend aux valeurs 1, 2, 3 de l'indice k, et aux combinaisons sans répétition

$$(ij) = (23), \quad (31), \quad (12),$$

des indices 1, 2, 3 pris deux à deux.

Dans le cas de la forme (6) les coefficients de ce covariant C coïncident entièrement avec les fonctions $\Lambda_{r(st)}$ définies au n° 17. Mais nous pouvons supposer que ds'^2 a la forme (6). Les fonctions $\Lambda'_{r(st)}$ et le covariant C' ne dépendent pas de R'. La transformation de passage de x', ds'^2 à x, ds^2 change R' en R, et le covariant C' dans le covariant C. Donc :

Le covariant $\mathrm{C}(dx, \delta x, \mathrm{D}x)$ *ne dépend pas de la fonction arbitraire* R.

(¹) La relation $\Lambda_{pq} = \Lambda_{qp}$ résulte immédiatement des équations (3) de définition de Λ_{pq}.

(²) Pour le cas particulier qui nous occupe, *voir* Bianchi, *Lezioni di Geometria differenziale,* Chap. II, p. 53.

Les propriétés d'invariance de C et les résultats du n° 17 nous permettent d'énoncer encore la proposition suivante :

La condition nécessaire et suffisante pour que la variété proposée puisse être représentée conformément sur l'espace euclidien est que le covariant $C(dx, \delta x, Dx)$ *soit identiquement nul.*

Le premier problème que nous nous étions proposé est donc résolu.

19. Soit ρ une fonction des variables x; posons, comme précédemment,

$$d\sigma^2 = \rho^2\, ds^2.$$

Il résulte de ce qui précède que le covariant C est le même pour les variétés x, ds^2 et x, $d\sigma^2$. Admettons, pour un instant, que l'on puisse former à l'aide de C un *invariant de* $d\sigma^2$ *qui, exprimé en fonction des coefficients de* ds^2 *et de* ρ, *contienne en facteur une puissance de* ρ. *Nous pourrons disposer de* ρ *de façon que cet invariant, supposé différent de zéro, devienne égal à l'unité. A cette valeur de* ρ *correspond une variété* x, $d\sigma^2$ *bien déterminée, que nous désignerons par* x, dS^2, *et que nous appellerons* VARIÉTÉ PRINCIPALE.

Soient maintenant x, ds^2; x', ds'^2 deux variétés *données* [1], pour lesquelles nous supposerons possible le problème de la représentation conforme. Soit r un facteur tel que les variétés x, $r^2\, ds^2$; x', ds'^2 soient applicables. Désignons par $h^2 r^2\, ds^2$ le dS^2 de la variété principale attachée à x, ds^2; par h' ce que devient h par la transformation de passage de x, $r^2\, ds^2$ à x', ds'^2. Cette même transformation de passage transforme la variété principale x, dS^2 dans la variété x', $h'^2 r'^2\, ds'^2$; et, comme la valeur de l'invariant qui a servi à définir la variété principale ne change pas, la seconde variété x', $h'^2 r'^2\, ds'^2$ est aussi principale. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Si deux variétés sont représentables conformément l'une sur l'autre, leurs variétés principales sont applicables et réciproquement.

Ce dernier point est évident.

20. Il nous reste à établir l'existence d'un *invariant de* $d\sigma^2$ *différent de zéro contenant en facteur une puissance de* ρ. Nous supposerons pour cela ds^2 défini positif.

Nous montrerons d'abord que *le covariant* $C(dx, \delta x, Dx)$ *peut être remplacé par un covariant bilinéaire équivalent.*

---

[1] On remarquera que ds'^2 a une autre signification qu'au numéro précédent.

En posant

$$u_1 = dx_2\,\delta x_3 - dx_3\,\delta x_2, \qquad u_2 = dx_3\,\delta x_1 - dx_1\,\delta x_3, \qquad u_3 = dx_1\,\delta x_2 - dx_2\,\delta x_1$$

et

$$C_{k1} = A_{k(23)}, \qquad C_{k2} = A_{k(31)}, \qquad C_{k3} = A_{k(12)},$$

on peut écrire

$$C(dx, \delta x, Dx) = \sum_{ki} C_{ki}\,Dx_k\,u_i.$$

On vérifie aisément que les deux expressions

$$\sum_i u_i(\rho^3\sqrt{\Delta}\,Dx_i),$$

$$\sum_i \frac{1}{\rho^3\sqrt{\Delta}}\,\frac{\partial\,d\sigma^2}{\partial\,dx_i}(\rho^3\sqrt{\Delta}\,Dx_i)$$

sont des covariants de $d\sigma^2$. (Rappelons que Δ représente le discriminant de ds^2.) Nous pouvons en conclure que les expressions $\frac{1}{\rho^3\sqrt{\Delta}}\,\frac{\partial\,d\sigma^2}{\partial\,dx_i}$ subissent, par un changement de variables, la même substitution linéaire que les u_i, et que, par conséquent, la *forme bilinéaire*

$$\frac{1}{\rho}\,\Psi(dx, Dx) = \sum_{ki} \frac{1}{\rho^3\sqrt{\Delta}}\,C_{ki}\,Dx_k\,\frac{\partial\,d\sigma^2}{\partial\,dx_i}$$

est un covariant de $d\sigma^2$. Le covariant analogue, relatif à ds^2, est manifestement $\Psi(dx, Dx)$. Il est évident d'ailleurs que Ψ ne *s'annule identiquement que lorsque* C *est identiquement nul.*

Les deux séries de variables dx, Dx, de la forme Ψ subissant, par un changement de variables, la même substitution linéaire, nous sommes conduits à considérer les formes suivantes, que l'on obtient en échangeant les variables dx, Dx, ajoutant et retranchant les résultats obtenus :

$$\frac{1}{\rho}\,F(dx, Dx) = \frac{1}{2\rho}\,\Psi(dx, Dx) + \frac{1}{2\rho}\,\Psi(Dx, dx),$$

$$\frac{1}{\rho}\,G(dx, Dx) = \frac{1}{2\rho}\,\Psi(dx, Dx) - \frac{1}{2\rho}\,\Psi(Dx, dx).$$

Si l'on pose

$$\Psi = \sum_{ik} \gamma_{ik}\,dx_i\,Dx_k,$$

on aura

$$F(dx, Dx) = \sum_{ik} \frac{1}{2}(\gamma_{ik} + \gamma_{ki})\, dx_i\, Dx_k,$$

$$G(dx, Dx) = \sum_{ik} \frac{1}{2}(\gamma_{ik} - \gamma_{ki})\, dx_i\, Dx_k.$$

Nous voyons ainsi que F *est la forme polaire de la forme quadratique*

$$\Phi(dx) = \sum_{ik} \frac{1}{2}(\gamma_{ki} + \gamma_{ik})\, dx_i\, dx_k,$$

et que l'on a l'identité

$$G(dx, Dx) + G(Dx, dx) = 0.$$

Enfin l'identité

$$\Psi = F + G,$$

montre que F et G ne sont identiquement nuls que lorsque Ψ et, par suite, C sont identiquement nuls.

21. Nous pourrons donc *remplacer* C *par l'ensemble de la forme quadratique* $\frac{1}{\rho}\Phi(dx)$ *et de la forme bilinéaire* $\frac{1}{\rho}G(dx, Dx)$.

Les fonctions symétriques élémentaires des racines de l'équation en λ obtenue en annulant le discriminant de $\lambda\, d\sigma^2 + \frac{1}{\rho}\Phi(dx)$ sont des invariants de la variété x, $d\sigma^2$.

Chacune de ces fonctions contient en facteur une puissance de $\frac{1}{\rho^3}$, d'exposant égal à son poids. Observons, de plus, que $d\sigma^2$ *étant défini positif* ($d\sigma^2$ et Φ sont nécessairement à coefficients réels), les racines et les *fonctions symétriques de ces racines ne sont toutes nulles que dans le cas où* Φ *est identiquement nul.*

Si Φ est différent de zéro, nous aurons au moins un invariant répondant à la question. Si Φ est nul, nous aurons recours à la forme $\frac{1}{\rho}G(dx, Dx)$. Combinons cette forme avec la forme polaire de $d\sigma^2$; nous obtenons une nouvelle équation en λ, en annulant le discriminant de

$$\frac{\lambda}{2}\sum_i Dx_i \frac{\partial\, d\sigma^2}{\partial\, dx_i} + \frac{1}{\rho}G(dx, Dx).$$

Les fonctions symétriques des racines de cette équation présentent les mêmes propriétés d'invariance que celles de la précédente; elles contiennent aussi en facteur une puissance de $\frac{1}{\rho^3}$. Il reste à voir dans quelles conditions ces fonctions symétriques sont toutes nulles. Pour cela, supposons $d\sigma^2$ ramené, par un changement de variables, à la forme $\sum \rho^2 B_i^2\, dx_i^2$, l'équation en λ est alors

$$\rho^6\lambda^3 B_1^2 B_2^2 B_3^2 + \frac{\lambda}{4}\left[B_1^2(\gamma_{23}-\gamma_{32})^2 + B_2^2(\gamma_{31}-\gamma_{13})^2 + B_3^2(\gamma_{12}-\gamma_{21})^2\right] = 0.$$

Pour que les racines de cette équation soient toutes nulles, il faut que $\gamma_{23}-\gamma_{32}$, $\gamma_{31}-\gamma_{13}$, $\gamma_{12}-\gamma_{21}$ le soient, c'est-à-dire *que* G *soit identiquement nul*. Or, si Φ et G sont nuls tous deux il en est de même de $C(dx, \delta x, Dx)$.

En résumé :

Étant donnée une variété à trois dimensions et à ds^2 défini positif, il est toujours possible, soit de la représenter conformément sur l'espace euclidien, soit de lui adjoindre une variété principale.

22. Le problème de la représentation conforme paraît se compliquer dès que l'on suppose les variétés données à plus de trois dimensions, ainsi que nous allons l'indiquer sur un cas particulier.

Supposons que l'on ait une variété à n dimensions $(n > 3)$ x, ds^2 dont le ds^2 ait la forme particulière

$$ds^2 = \sum_i B_i^2\, dx_i^2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{15}$$

étudiée par M. Darboux (¹). Si l'on veut chercher les conditions pour que la variété précédente soit représentable conformément sur l'espace euclidien à n dimensions, c'est-à-dire sur l'espace x'_1, x'_2, ..., x'_n, ds'^2

$$ds'^2 = \sum_i dx_i'^2, \tag{16}$$

on procède de la façon suivante : On considère la variété x, $d\sigma^2$, en posant

$$d\sigma^2 = \rho^2\, ds^2. \tag{17}$$

M. Darboux, dans le Mémoire cité, a donné les conditions pour qu'une variété dont le ds^2 a la forme (15) soit euclidienne. On peut appliquer ces conditions à la variété x, $d\sigma^2$, puisque $d\sigma^2$ est de la forme voulue. On obtient ainsi un système $\sum$ d'équations aux dérivées partielles du second ordre qui doit donner la fonction ρ. On peut encore prendre $R = \log\rho$ comme fonction inconnue dans le système $\sum$.

(¹) *Annales de l'École Normale*, 2ᵉ série, t. VII; 1878.

Ce système $\sum$ est alors analogue au système S du n° 15; mais il en diffère, *si n est supérieur à trois,* par le fait suivant : *On peut résoudre $\sum$ de différentes façons par rapport aux dérivées secondes de* R. *En égalant les valeurs trouvées, on obtient une première série de conditions de compatibilité où ne figurent que les coefficients du ds^2 et leurs dérivées d'ordre inférieur ou égal à deux.* Il est inutile d'écrire ici ces conditions.

Si ces conditions se trouvent satisfaites, $\sum$ donne un système de valeurs bien déterminées pour les dérivées secondes de R. Égalant alors les diverses valeurs des dérivées troisièmes de R, obtenues par dérivation des valeurs trouvées pour les dérivées secondes, tenant compte des équations précédentes, on obtient une *seconde série* de conditions de compatibilité où figurent les dérivées des trois premiers ordres des coefficients de ds^2. Les deux séries de conditions sont nécessaires et suffisantes pour que la variété donnée soit représentable conformément sur l'espace euclidien à n dimensions.

Considérons maintenant un ds^2 de la forme (15) pour lequel les premières des conditions précédentes sont seules satisfaites. Il est évident que l'on pourrait, comme précédemment, définir un covariant cubique, à trois systèmes de différentielles, commun à toutes les variétés x, $\rho^2\,ds^2$, ρ étant fonction quelconque des variables x. Il est probable que ce covariant permettrait de définir encore une variété principale; mais l'étude algébrique du problème devient évidemment plus compliquée que pour le cas de $n=3$. *A fortiori,* en serait-il de même pour les variétés quelconques dont le ds^2 peut prendre la forme (15); et plus encore pour les variétés à ds^2 *absolument quelconque.* En effet, le théorème du n° 18 ne peut pas se généraliser pour une variété à plus de trois dimensions. Il faudrait alors commencer par étudier directement les équations obtenues en égalant à zéro les coefficients du covariant G_4 de Christoffel relatif à la variété x, $d\sigma^2$, ce dont nous avons pu nous dispenser dans le cas de trois variables.

CHAPITRE IV.

FORMES DE DIFFÉRENTIELLES INVARIANTES VIS-A-VIS DE CERTAINS GROUPES.

23. Considérons, dans la multiplicité $x_1, x_2, \ldots, x_n$, n expressions de Pfaff

$$(1)\qquad l_i(dx)=\sum_j l_{ij}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_j \qquad (i, j=1, 2, \ldots, n).$$

Nous supposerons que ces expressions considérées comme formes linéaires des différentielles dx_j sont *linéairement indépendantes*. On peut alors résoudre les relations (1) par rapport aux différentielles dx_j et, par suite, exprimer la différentielle df d'une fonction quelconque des variables x en fonction linéaire et homogène des $l(dx)$, et cela d'une seule façon. Soit

$$(2) \qquad df = \sum_i l_i(dx)\Lambda_i f.$$

Les $\Lambda_i f$ sont des *formes linéaires indépendantes* des dérivées de f; nous les considérerons comme *les symboles de n transformations infinitésimales ainsi* ASSOCIÉES *aux expressions de Pfaff données*.

Inversement, on peut se donner à l'avance n transformations infinitésimales, dont les symboles soient des formes linéaires indépendantes des dérivées de f, et leur *associer*, par la relation (2), n expressions de Pfaff $l_i(dx)$.

Il est bien évident que *deux systèmes associés d'expressions de Pfaff et de transformations infinitésimales restent associés après un changement de variables quelconque*.

Nous ferons deux applications particulières de cette remarque.

En premier lieu, nous compléterons une proposition établie à la fin du Chapitre II (n° 13). Nous avons démontré, à cet endroit, que la transformation de passage d'une variété x, ds^2, en une autre x', ds'^2, devrait satisfaire à un système d'équations aux différentielles totales de la forme

$$(3) \qquad l_i(dx) = l'_i(dx') \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

que l'on obtient par des opérations algébriques et des dérivations. Désignons par f et f' deux fonctions dépendant la première des variables x, la seconde des variables x'; supposons que f et f' se correspondent par la transformation de passage. Soient $\Lambda_i f$ et $\Lambda'_i f'$ les systèmes d'expressions de Pfaff associés respectivement aux $l_i(dx)$ et aux $l'_i(dx')$. La transformation de passage doit satisfaire au système d'équations linéaires aux dérivées partielles

$$(4) \qquad \Lambda_i f = \Lambda'_i f',$$

équivalent au système (3). On remarque bien, comme nous l'avions annoncé, que le système (4) est symétrique par rapport aux deux variétés. On compléterait l'étude du système (4) comme dans le cas de trois variables.

Imaginons, en second lieu, que nous ayons un *changement de variables transformant en elles-mêmes les expressions de Pfaff : il transformera aussi en elles-mêmes les transformations infinitésimales associées*. Si le changement de variables correspond à une transformation infinitésimale d'un groupe à un paramètre, la proposition précédente prend une forme intéressante, que nous allons établir analytiquement au numéro suivant.

24. Soit

$$\mathrm{X}f = \sum_i \xi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial f}{\partial x_i} \tag{5}$$

une transformation infinitésimale quelconque de la multiplicité $x_1, x_2, \ldots, x_n$. *Prolongeons* (¹) $\mathrm{X}f$, la transformation obtenue

$$\mathrm{X}^{(1)}\mathrm{F}(x, dx) = \sum_i \xi_i \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_i} + d\xi_i \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial\, dx_i} \tag{6}$$

est relative à la multiplicité à $2n$ dimensions x_i, dx_i.

Dans l'identité

$$d\mathrm{X}f(x) = \mathrm{X}^{(1)}\, df(x), \tag{7}$$

exprimons les différentielles $d\mathrm{X}f$ et df au moyen de (2), l'identité obtenue peut s'écrire

$$\sum_h l_h(dx)(\Lambda_h \mathrm{X})f = \sum_k \Lambda_k f \mathrm{X}^{(1)}\, l_k(dx). \tag{8}$$

Supposons tous les $\mathrm{X}^{(1)}\, l_k(dx)$ *nuls;* autrement dit, supposons que *les* $l_k(dx)$ *admettent la transformation* $\mathrm{X}^{(1)}\mathrm{F}$ (*on dit aussi admettent la transformation* $\mathrm{X}f$), le second membre de l'identité précédente se réduit à zéro, et, par suite, tous les crochets $(\Lambda_h \mathrm{X})f$ sont nuls. En résumé :

Si les expressions de Pfaff $l(dx)$ admettent la transformation $\mathrm{X}f$, les transformations infinitésimales associées sont échangeables avec $\mathrm{X}f$ et réciproquement.

(La réciproque est vraie parce que tous les Λf ne peuvent être nuls en même temps.)

La proposition précédente ramène la recherche des systèmes (1) d'expressions de Pfaff invariantes vis-à-vis des transformations d'un groupe G donné, à celle des transformations infinitésimales échangeables avec celles du groupe G. Ce dernier problème est bien connu (²) et nous conduit aux propositions suivantes :

Soient $\mathrm{X}_i f$ les transformations infinitésimales d'un groupe G, *nous suppo-*

(¹) Lie-Engel, *Transformationsgruppen,* I, Ch. 25.

(²) Lie-Engel, *Transformationsgruppen,* I, p. 376.

serons qu'il n'existe entre elles aucune relation de la forme

$$\sum_i \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\mathrm{X}_i f = 0. \tag{9}$$

Il existe alors une infinité de transformations infinitésimales échangeables avec celles de G. Choisissons n de ces transformations de façon que leurs symboles $\Lambda_k f$ soient formes linéaires indépendantes des dérivées de f. Les expressions de Pfaff $l_k(dx)$ associées aux $\Lambda_k f$ à l'aide de (2) sont invariantes vis-à-vis des transformations de G.

Il y a une infinité de systèmes de n transformations infinitésimales $\mathrm{L}_i f$, formes indépendantes des dérivées de f et échangeables avec celles de G. L'un quelconque de ces systèmes se déduit du système choisi $\Lambda_k f$ par une substitution linéaire à déterminant non nul, les coefficients de la substitution étant des invariants de G. D'ailleurs, à toute substitution linéaire effectuée sur les $\Lambda_k f$ correspond une substitution linéaire effectuée sur les expressions de Pfaff associées. Par suite :

Il existe une infinité de systèmes de n expressions de Pfaff invariantes vis-à-vis des transformations d'un groupe G *de l'espèce indiquée. Tous ces systèmes s'obtiennent à partir de l'un d'entre eux par des substitutions linéaires à déterminant non nul, dont les coefficients sont des invariants de* G.

Nous dirons que ces divers *systèmes* sont *équivalents*.

Inversement, en effectuant, sur un système d'expressions de Pfaff $l_k(dx)$ invariantes vis-à-vis de G, une pareille substitution, on obtient encore un système de n expressions de Pfaff invariantes vis-à-vis de G.

25. Considérons une *forme* de différentielles $\mathrm{F}(x, dx)$ invariante par les transformations du groupe G. Nous pouvons y prendre comme nouvelles variables les expressions de Pfaff $l(dx)$ précédemment définies. Il suffit de résoudre les équations (1) par rapport aux différentielles (ce qui est possible puisque les $l(dx)$ sont linéairement indépendantes) et de porter les valeurs trouvées dans $\mathrm{F}(x, dx)$. On obtient ainsi une forme

$$\Phi[x, l(dx)] = \sum_{i,j,\ldots,p} \mathrm{A}_{i,j,\ldots,p}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, l_i(dx)\, l_j(dx) \ldots l_p(dx).$$

La condition nécessaire et suffisante pour que Φ soit invariante vis-à-vis de G s'obtient en écrivant que $\mathrm{X}^{(1)}\Phi$ est nul, $\mathrm{X}^{(1)}\mathrm{F}$ étant la transformation prolongée d'une transformation *arbitraire* $\mathrm{X}f$ du groupe G. Or, $\mathrm{X}^{(1)}\, l_k(dx)$ est nul quel que soit k. De plus, les A ne contenant pas les différentielles, les deux expressions $X^{(1)}A$ et XA sont identiques. On doit donc avoir

$$X^{(1)}\Phi = \sum_{i,j,\dots,p} XA_{i,j,\dots,p}\, l_i(dx)\, l_j(dx)\dots l_p(dx) = 0.$$

Cette identité ne peut avoir lieu que si tous les XA sont nuls, c'est-à-dire si les A sont invariants de G. Donc :

Toute forme de différentielles invariante vis-à-vis de G *est une forme des variables* $l(dx)$, *les coefficients de cette dernière forme étant des invariants de* G.

La réciproque de cette proposition est évidemment vraie.

On démontrerait, d'une manière analogue, qu'une forme $F(x, dx, \delta x, \dots)$ de plusieurs systèmes $d, \delta, \dots$ de différentielles des variables x, invariante vis-à-vis de G, s'exprime en fonction des systèmes correspondants $l(dx)$, $l(\delta x)$, ... et des invariants de G.

On établit aisément, d'une façon directe, la proposition suivante, en quelque sorte corrélative de la précédente :

Un paramètre différentiel du groupe G *s'exprime en fonction des transformations infinitésimales* $\Lambda_k f$ *échangeables avec celles de* G *et des invariants de* G.

Remarquons enfin que, si G est *transitif* (il est alors simplement transitif) les invariants précédents sont des constantes.

26. Le groupe G satisfaisant aux conditions du n° **24**, étant ramené à une forme choisie comme forme canonique, on déterminera les formes $l(dx)$. Il est naturel de prendre ces formes aussi simples que possible; mais, ce choix fait, on peut encore, par un changement de variables convenable, modifier les formes de différentielles invariantes vis-à-vis de G, et cela *sans changer la forme adoptée pour les transformations de* G, ainsi que nous allons l'expliquer.

Désignons par

$$(10) \qquad X_i f = \sum_j \xi_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_n)\frac{\partial f}{\partial x_j}$$

les transformations infinitésimales de G, et par $l_i(dx)$ les expressions de Pfaff choisies, invariantes vis-à-vis de G. Il existe des changements de variables

$$(11) \qquad x_i = \varphi_i(x'_1, x'_2, \dots, x'_n),$$

transformant le groupe G en un groupe G′ relatif à la multiplicité x' et admettant pour transformations infinitésimales

$$X'_i f' = \sum_j \xi_{ij}(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) \frac{\partial f'}{\partial x'_j}, \tag{12}$$

les fonctions ξ_{ij} *étant les mêmes que plus haut.* Les transformations (11) jouissant des propriétés précédentes forment un groupe (fini ou infini) que nous appellerons H. H est le plus grand groupe admettant G comme sous-groupe invariant (¹); et l'on sait que les équations finies (11) de H s'obtiennent par l'intégration de systèmes complets.

La substitution (11) transforme les expressions $l_h(dx)$ en des expressions de Pfaff $\lambda_h(dx')$ invariantes vis-à-vis de G'. Et il est bien évident alors que les $\lambda_h(dx')$ sont fonctions linéaires des $l'_h(dx')$ déduits des $l_h(dx)$ par le changement de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$. Nous aurons donc

$$l_i(dx) = \lambda_i(dx') = \sum_h \alpha_{ih}(\mathrm{I}')\, l'_h(dx'). \tag{13}$$

Les α_{ij} sont fonctions des invariants I' de G' et restent, dans une certaine mesure, arbitraires tant que la transformation (11) n'est pas complètement déterminée. On peut, dans tous les cas, obtenir les α par l'intégration de systèmes complets; puisque l'on peut obtenir ainsi les transformations (11). Mais, si l'on veut simplement obtenir les α indépendamment des équations (11), on peut, dans certains cas, procéder algébriquement.

Cette circonstance se présente si G *est transitif.* Aux systèmes d'expressions de Pfaff $l(dx)$, $\lambda(dx')$, $l'(dx')$ invariantes vis-à-vis de G ou de G', sont *associés* des systèmes bien déterminés de transformations infinitésimales Λf, $\mathrm{L} f'$, $\Lambda' f'$ des groupes $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ réciproques de G et G'; et à la substitution

$$l_i(dx) = \lambda_i(dx') = \sum_h \alpha_{ih}\, l'_h(dx') \tag{14}$$

correspond une substitution relative aux Λf

$$\Lambda_k f(x) = \mathrm{L}_k f'(x') = \sum_h \mathrm{A}_{kh} \Lambda' f'(x') \tag{15}$$

[f' désigne ce que devient f par la substitution (11)]. Dans les formules (14) et (15) les α et les A représentent des constantes (²). On peut déterminer directe-

(¹) Lie-Engel, *Transformationsgruppen*, Ab. I, p. 361.

(²) Les substitutions (14) et (15) se déduisent facilement l'une de l'autre, en observant que les $l_i(dx)$ et les $\Lambda_k f$ sont, en quelque sorte, des variables *contragrédientes*.

ment les A, d'après un théorème de M. Lie (1) : *Les* A *sont les constantes les plus générales telles que les constantes de structure soient les mêmes pour les* $L_k f'$ *et pour les* $\Lambda'_k f'$. La détermination des A se fait bien algébriquement.

27. Les équations (13) peuvent être considérées comme *les équations d'un groupe linéaire et homogène* S (dont les variables sont $l(dx)$). Donnons-nous maintenant une forme de différentielles $F[l(dx)]$ invariante vis-à-vis de G. Nous pourrons toujours disposer des arbitraires contenues dans les formules (13), de manière à transformer $F[l(dx)]$ en une autre forme plus simple $\Phi[l'(dx')]$. Il faut alors distinguer deux cas : ou bien on peut choisir Φ de sorte que la substitution ramenant F à Φ soit déterminée entièrement; ou bien cela n'est pas possible. Dans ce dernier cas, quelle que soit la forme Φ choisie, la substitution (13) ramenant F à Φ contient encore des arbitraires. Il est bien évident alors que F *admet les substitutions d'un groupe linéaire et homogène* T

$$l_i(dx) = \sum_j \beta_{ij}(\mathrm{I}')\, l'_j(dx'),$$

détaché du groupe S. A ce groupe T correspond manifestement un groupe K, détaché du groupe H précédemment considéré. Le groupe G est alors un *sous-groupe invariant* du groupe K.

28. Les propositions précédentes suffisent pour la détermination des variétés à trois dimensions admettant un groupe continu, problème qui nous occupera plus loin. Nous indiquerons auparavant comment on peut utiliser ces propositions à la détermination des formes de différentielles invariantes vis-à-vis de groupes ne satisfaisant plus à la restriction du n° 24. Soit Γ un pareil groupe. On peut toujours trouver un sous-groupe G de Γ, satisfaisant à la condition du n° 24 (on prendra pour G un groupe aussi grand que possible). Désignons par Xf la transformation infinitésimale la plus générale de Γ, par I_h les invariants de G supposés déterminés; supposons, en outre, que l'on ait un système d'expressions de Pfaff $l_k(dx)$ invariantes vis-à-vis de G. Une forme de différentielles $F[I_h, l_k(dx)]$, invariante vis-à-vis de G, le sera aussi vis-à-vis de Γ si l'on a

$$X^{(1)} F[I_h, l_k(dx)] = \sum_h \frac{\partial F}{\partial I_h} X I_h + \sum_k \frac{\partial F}{\partial l_k} X^{(1)} l_k(dx) = 0,$$

en désignant par $X^{(1)} \varphi(x, dx)$ la transformation obtenue en prolongeant la transformation infinitésimale arbitraire Xf du groupe Γ.

(1) Lie-Engel, *Transformationsgruppen*, Ab. I, p. 338 et 381.

Il est alors facile de voir que la détermination des formes invariantes vis-à-vis de Γ se ramène à l'intégration d'un système complet, dont les variables sont I_h et $l_k(dx)$.

CHAPITRE V.

VARIÉTÉS A TROIS DIMENSIONS ADMETTANT UN GROUPE CONTINU.

29. Nous allons appliquer les résultats précédents à la *détermination de types canoniques pour les variétés admettant un groupe continu de transformations en elles-mêmes*. Nous ne traiterons entièrement le problème que pour les variétés à *trois dimensions*. Dans ce cas particulier, M. Bianchi (¹) a donné une solution complète pour les variétés à groupe réel, et à ds^2 défini positif. Nous laisserons de côté ces restrictions; il serait, d'ailleurs, aisé de voir directement quelles modifications elles apporteraient aux résultats obtenus.

Considérons d'abord une variété quelconque $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ds^2, admettant un groupe continu. Soit

$$\mathrm{X}f = \sum_i \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

une transformation infinitésimale de ce groupe, $\mathrm{X}^{(1)}\mathrm{F}(x, dx)$ la transformation prolongée correspondante. On doit avoir l'identité

$$\mathrm{X}^{(1)} ds^2 = 0,$$

qui conduit à $\frac{n(n+1)}{2}$ équations du premier ordre auxquelles doivent satisfaire les ξ : équations données par M. Killing (²). Ce sont les *équations de définition* (³) du groupe de la variété. En les dérivant on peut obtenir des équations du second ordre que l'on peut résoudre par rapport aux dérivées secondes de ξ. Nous n'écrirons pas les formules de Killing; mais nous utiliserons les propositions suivantes qui en résultent immédiatement :

Le groupe de transformations d'une variété en elle-même n'admet jamais de transformation infinitésimale d'ordre égal ou supérieur à deux (⁴).

(¹) BIANCHI, *Sugli spazi a tre dimensioni, etc.* (*Mémoires de la Société italienne des Sciences,* série III, t. XI, p. 267.)

(²) KILLING, *Ueber die Grundlagen der Geometrie* (*Journal de Crelle,* t. 109, p. 121).

(³) LIE-ENGEL, *Transformationsgruppen,* I, p. 184.

(⁴) *Ibid.,* p. 191.

Deux transformations infinitésimales du groupe de transformations d'une variété en elle-même ne peuvent avoir leurs trajectoires communes (¹).

30. La première de ces remarques permettrait de simplifier la détermination des types possibles pour les groupes de transformations d'une variété en elle-même. On sait (²) qu'à tout groupe G d'une multiplicité $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et qu'à tout *point* $P(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ de cette multiplicité est attaché un groupe linéaire et homogène Γ, indiquant comment G transforme les éléments linéaires passant par P. Si G est le groupe de transformations d'une variété en elle-même, Γ laisse invariante une forme quadratique à coefficients constants (P est fixé). On peut donc déterminer les formes possibles du groupe Γ. Cela fait, si G est transitif, un nombre fini d'opérations effectuables et l'intégration d'équations différentielles ordinaires donneraient les symboles des transformations infinitésimales de G. Ce cas particulier de la détermination d'un groupe transitif est plus simple que le cas général, parce que l'on n'a pas à considérer de transformations infinitésimales d'ordre supérieur à un. C'est d'ailleurs la méthode employée par M. Lie dans ses recherches sur le problème de Riemann-Helmholtz (³). Nous pourrons nous dispenser de la recherche précédente dans le cas de trois variables.

Une fois connus les divers types possibles pour les transformations infinitésimales d'un groupe de transformations d'une variété en elle-même, on obtient les variétés correspondant à l'un de ces groupes de la façon suivante. On écrit que les équations de définition du groupe de la variété sont vérifiées par les transformations infinitésimales du groupe donné. En considérant les relations obtenues comme des équations aux dérivées partielles, où les fonctions inconnues sont les coefficients du ds^2, on obtient un système différentiel qu'il ne reste plus qu'à intégrer. C'est la méthode qu'a suivie M. Bianchi, en faisant usage, en outre, de considérations géométriques qui simplifient beaucoup l'étude du système différentiel précédent. M. Bianchi recherche d'abord les variétés correspondant aux groupes dont les transformations infinitésimales Xf sont formes linéaires indépendantes des dérivées de f. Dans ce cas, comme nous l'avons vu précédemment, l'intégration du système différentiel revient à la recherche des transformations infinitésimales échangeables avec celles du groupe donné.

31. Limitons-nous maintenant au cas de trois variables. Nous allons examiner les diverses hypothèses possibles (⁴) pour le groupe de transformations de la va-

(¹) Bianchi, *Mémoire cité*, p. 272.

(²) Lie-Engel, *Transformationsgruppen*, I, p. 603.

(³) Lie-Engel, *Transformationsgruppen*, III, Chap. 17.

(⁴) *Voir* les § 5 et 36 du Mémoire cité de M. Bianchi.

riété en elle-même. Rappelons que ce groupe est nécessairement fini et comprend au plus six paramètres.

Si le groupe en question, que nous désignerons par G, n'est pas continu (se réduit, par exemple, à la transformation identique) les coefficients du ds^2 peuvent être des fonctions quelconques des variables x_1, x_2, x_3; mais on peut toujours, et d'une infinité de façons, trouver un changement de variables ramenant le ds^2 à ne contenir que les carrés des différentielles (¹).

Si G est à *un* paramètre, on a, de suite, un type canonique pour la transformation infinitésimale G et la méthode du Chapitre IV (n° 25) est applicable.

Si G est à *deux paramètres,* on peut le considérer comme engendré par deux transformations infinitésimales $X_1 f$, $X_2 f$. Ces deux transformations infinitésimales ne peuvent avoir leurs trajectoires communes, et, par suite, $X_1 f$, $X_2 f$ sont formes linéaires indépendantes des dérivées de f. Ayant choisi des formes canoniques pour $X_1 f$, $X_2 f$, on aura les ds^2 des variétés correspondantes par la méthode du n° 25.

Si G est à *trois paramètres,* il faut distinguer deux cas. Si G est *intransitif,* on considère un sous-groupe à deux paramètres de G (on sait qu'il existe toujours). On est alors conduit à rechercher dans quels cas les ds^2 précédemment trouvés, donnés par un groupe à deux paramètres, admettent un groupe plus grand. Si G est *transitif,* il est *simplement transitif;* on détermine des types canoniques auxquels on peut ramener de pareils groupes; et à chacun de ces types on applique la méthode précédemment indiquée (n° 25).

Enfin le cas où G est à plus de trois paramètres se ramène aux précédents. En effet, tout groupe à plus de trois paramètres admet des sous-groupes à trois paramètres. On cherchera donc dans quels cas les ds^2 précédemment trouvés admettent des groupes à plus de trois paramètres.

Nous avons conservé cet ordre pour l'exposition des résultats trouvés. Pour tous les groupes dont les transformations infinitésimales Xf sont formes linéaires indépendantes des dérivées de f, nous indiquons le système choisi pour les formes $l(dx)$ et la substitution S correspondante. (*Voir* Chapitre précédent, n^{os} 26 et 27.)

Groupes intransitifs.

32. On peut prendre pour forme canonique de la transformation infinitésimale d'un groupe à un paramètre

$$\mathrm{T}_1 \qquad X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x_1}.$$

Le groupe correspondant laisse invariantes les fonctions des variables x_2, x_3 et

(¹) *Voir* Chap. III, n° 18.

les formes

$$\mathrm{L}_1 \qquad l_i(dx) = dx_i.$$

Les ds^2 correspondants sont donc réductibles à la forme canonique

$$\mathrm{I} \qquad \sum a_{ij}(x_2, x_3)\, dx_i\, dx_j,$$

que l'on pourrait simplifier encore à l'aide de la substitution (1)

$$\mathrm{S}_1 \qquad l_1, \quad l_2, \quad l_3; \qquad cl_1 + d\varphi_1, \quad d\varphi_2, \quad d\varphi_3,$$

les φ étant fonctions quelconques de x_2, x_3, c une constante arbitraire.

Les groupes intransitifs à deux paramètres n'admettant qu'un seul invariant sont semblables (2) soit au groupe engendré par

$$\mathrm{T}_2 \qquad \mathrm{X}_1 f = \frac{\partial f}{\partial x_2}, \qquad \mathrm{X}_2 f = \frac{\partial f}{\partial x_3},$$

soit au groupe engendré par

$$\mathrm{T}_3 \qquad \mathrm{X}_1 f = \frac{\partial f}{\partial x_2}, \qquad \mathrm{X}_2 f = e^{x_2} \frac{\partial f}{\partial x_3}.$$

Les deux groupes précédents admettent x_1 comme invariant.

A T_2 on peut faire correspondre les formes

$$\mathrm{L}_2 \qquad l_i(dx) = dx_i,$$

et la substitution

$$\mathrm{S}_2 \qquad l_1, \quad l_2, \quad l_3; \qquad \varphi_1 l_1, \quad \varphi_2 l_1 + \alpha_{22} l_2 + \alpha_{23} l_3, \quad \varphi_3 l_1 + \alpha_{32} l_1 + \alpha_{33} l_3;$$

les φ sont fonctions arbitraires de x_1 seul; les α sont des constantes arbitraires. Une forme quadratique des variables l_1, l_2, l_3, dont les coefficients sont fonction de x_1 seul constitue le ds^2 d'une variété admettant le groupe T_2. Les substitutions S_2 permettent de réduire une pareille forme à l'un des types canoniques suivants :

$$\mathrm{II} \qquad dx_1^2 + a_{22}\, dx_2^2 + 2 a_{23}\, dx_2\, dx_3 + a_{33}\, dx_3^2,$$

$$\mathrm{II}' \qquad a(dx_3 + b\, dx_2)^2 + 2\, dx_1\, dx_2;$$

les lettres a et b désignent des fonctions de x_1.

On s'assure, de même, que l'on peut faire correspondre à T_3 les formes inva-

(1) Nous écrirons toujours de cette façon abrégée les substitutions S; nous supprimons, en outre, les accents des seconds membres des équations (13) du n° 26.

(2) *Voir* Lie-Engel, *Transformationsgruppen,* Ab. I, Chap. XIX.

riantes

$$\mathrm{L}_3 \qquad l_1(dx) = dx_1, \qquad l_2(dx) = dx_2, \qquad l_3(dx) = dx_3 - x_3\,dx_2,$$

et la substitution (¹)

$$\mathrm{S}_3 \qquad l_1, \quad l_2, \quad l_3; \qquad \varphi l_1, \quad l_2 + \psi' l_1, \quad e^{\psi}(l_3 + \chi l_2 + \chi' l_1);$$

φ, χ, ψ désignent des fonctions arbitraires de x_1; φ', χ', ψ', leurs dérivées. On vérifie aisément que le ds^2 d'une variété correspondant au groupe étudié peut être ramené à l'une des formes canoniques

$$\text{III} \qquad dx_1^2 + a_{22}\,dx_2^2 + 2\,a_{23}\,dx_2(dx_3 - x_3\,dx_2) + a_{33}(dx_3 - x_3\,dx_2)^2,$$

$$\text{III}' \qquad a(dx_3 - x_3\,dx_2)^2 + 2\,dx_1[dx_2 + b(dx_3 - x_3\,dx_2)],$$

$$\text{III}'' \qquad a\,dx_2^2 + 2\,dx_1(dx_3 - x_3\,dx_2 + b\,dx_1);$$

les lettres a et b désignent des fonctions de x_1.

33. Il nous faut maintenant rechercher dans quels cas les ds^2 donnés par les deux groupes précédents admettent un groupe intransitif à plus de deux paramètres. Nous observerons, pour cela, qu'un groupe laissant invariants à la fois x_1 et ds^2 laisse aussi invariants dx_1 et le covariant quadratique $\varphi(x_1, dx)$, attaché à x_1 et ds^2 (défini au Chap. I, nº 4.) De l'ensemble de formes ds^2, $\varphi(x_1, dx)$, dx_1 nous pourrons, *en général,* tirer un système de trois expressions de Pfaff invariantes, équivalent au système L_2 ou au système L_3 suivant le ds^2 dont on est parti. Il est alors aisé de voir que le groupe dont on est parti est le groupe le plus général, laissant x_1 et ds^2 invariants. Si, au contraire, l'ensemble ds^2, $\varphi(x_1, dx)$, dx_1 ne donne pas un système de trois expressions de Pfaff, il peut arriver que l'on ait un groupe à plus de deux paramètres laissant invariants x_1 et ds^2.

Le calcul des formes $\varphi(x_1, dx)$ n'offre aucune difficulté et conduit aux résultats suivants.

Pour le ds^2 désigné par II, on a

$$(1) \qquad \varphi(x_1, dx) = a'_{22}\,dx_2^2 + 2\,a'_{23}\,dx_2\,dx_3 + a'_{33}\,dx_3^2,$$

les lettres accentuées désignant les dérivées des fonctions correspondantes de x_1.

(¹) Pour déterminer S_3, on a cherché directement les changements de variables de la forme $x_1 = \varphi_1(x'_1)$, $x_2 = \varphi_2(x'_1, x'_2, x'_3)$, $x_3 = \varphi_3(x'_1, x'_2, x'_3)$, transformant $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, $e^{x_2}\frac{\partial f}{\partial x_3}$ en des combinaisons linéaires à coefficients constants de $\frac{\partial f}{\partial x'_2}$, $e^{x'_2}\frac{\partial f}{\partial x'_3}$.

Considérons, avec cette forme, l'expression

$$(2)\qquad ds^2 - dx_1^2 = a_{22}\,dx_2^2 + 2a_{23}\,dx_2\,dx_3 + a_{33}\,dx_3^2.$$

L'ensemble des deux formes (1), (2) et de dx_1 donne un ensemble de trois expressions de Pfaff équivalent [1] à l'ensemble L_2, *sauf* dans le cas où a'_{22}, a'_{23}, a'_{33} sont proportionnels à a_{22}, a_{23}, a_{33}, c'est-à-dire *lorsque les rapports mutuels des a sont des constantes*. On peut alors, par une substitution convenable S_2, ramener ds^2 à la forme

$$\text{IV}\qquad dx_1^2 + a(x_1)(dx_2^2 + dx_3^2),$$

qui admet manifestement le groupe à trois paramètres engendré par

$$T_4\qquad X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x_2},\qquad X_2 f = \frac{\partial f}{\partial x_3},\qquad X_3 f = x_2\frac{\partial f}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial f}{\partial x_2}.$$

On trouve, pour le ds^2, II',

$$\varphi(x_1, dx) = ab'(dx_3 + b\,dx_2)\,dx_1,$$

et l'on en conclut aisément que si b' n'est pas nul, II' n'admet que le groupe T_2. Si b' est nul, b est une constante que l'on réduit à zéro par une substitution S_2; on ramène alors, par un changement de variables, ds^2 à la forme

$$\text{V}\qquad a(x_1)(dx_3^2 + 2\,dx_1\,dx_2),$$

admettant le groupe engendré par

$$T_5\qquad X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x_2},\qquad X_2 f = \frac{\partial f}{\partial x_3},\qquad X_3 f = x_1\frac{\partial f}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial f}{\partial x_2}.$$

Pour le ds^2, III,

$$\varphi(x_1, dx) = a'_{22}\,dx_2^2 + 2a'_{23}\,dx_2(dx_3 - x_3\,dx_2) + a'_{33}(dx_3 - x_3\,dx_2)^2.$$

Dans ce cas encore, ds^2 n'admet un groupe à plus de deux paramètres que si les rapports mutuels des a sont des constantes. Dans ce cas, une substitution S_3 ramène ds^2 à la forme

$$\text{VI}\qquad dx_1^2 + a(x_1)[dx_2^2 + (dx_3 - x_3\,dx_2)^2],$$

admettant le groupe

$$T_6\quad X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x_2},\qquad X_2 f = e^{x_2}\frac{\partial f}{\partial x_3},\qquad X_3 f = x_3 e^{-x_2}\frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{e^{-x_2}}{2}(1 + x_3^2)\frac{\partial f}{\partial x_3}.$$

---

[1] Voir Chap. IV, n° 24.

Pour les ds^2, III' et III'', on a respectivement

$$\varphi(x_1, dx) = a(dx_3 - x_3\, dx_2)^2 + b(dx_3 - x_3\, dx_2)\, dx_1,$$
$$\varphi(x_1, dx) = dx_2\, dx_1,$$

et l'on s'assure aisément que les ds^2 considérés ne peuvent jamais admettre un groupe intransitif à plus de deux paramètres.

Groupes transitifs.

34. Avant d'examiner les différents types de groupes G *simplement transitifs,* indiquons une méthode pour déterminer les substitutions S (n° 27) correspondantes. Tout revient, comme on sait, à trouver les substitutions linéaires à coefficients constants, qui, effectuées sur les transformations infinitésimales $\Lambda_i f$ du groupe réciproque Γ, n'altèrent pas les constantes de structure.

En désignant par c_{iks} ces constantes, on a

$$(\Lambda_i \Lambda_k) = \sum_s c_{iks} \Lambda_s f.$$

Le groupe Γ étant à trois paramètres, on peut considérer, avec M. Lie [1], la forme bilinéaire

$$\mathrm{F}(u, v) = \sum_s (c_{23s} u_1 + c_{31s} u_2 + c_{12s} u_3) v_s.$$

Soient

$$\mathrm{L}_1 f = \sum_i \alpha_i \Lambda_i f, \qquad \mathrm{L}_2 f = \sum_i \beta_i \Lambda_i f,$$

deux transformations infinitésimales de Γ, on a

$$(\mathrm{L}_1 \mathrm{L}_2) = \sum_s \frac{\partial\, \mathrm{F}(u, v)}{\partial v_s} \Lambda_s f = \mathrm{F}(u, \Lambda f),$$

en remplaçant u_1, u_2, u_3 respectivement par $\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2$, $\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3$, $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$.

Exprimons les $\Lambda_i f$ en fonction de trois autres transformations infinitésimales $\Lambda'_i f$ de Γ,

$$\Lambda_i f = \sum_j h_{ij} \Lambda'_j f, \tag{3}$$

et faisons correspondre aux constantes α et β des constantes α', β' telles que

---

[1] LIE-ENGEL, *Transformationsgruppen,* Ab. III, p. 718.

l'on ait

$$\sum_i \alpha_i \Lambda_i f = \sum_i \alpha'_i \Lambda'_i f, \qquad \sum_i \beta_i \Lambda_i f = \sum_i \beta'_i \Lambda'_i f.$$

Soit $\Phi(u', v')$ la forme bilinéaire correspondant aux Λ'. En remplaçant les u comme précédemment, et, d'une façon analogue, u'_1 par $\alpha'_2 \beta'_3 - \alpha'_3 \beta'_2$, ..., on a évidemment

$$(4) \qquad F(u, \Lambda f) = \Phi(u', \Lambda' f).$$

Mais il est facile de déterminer la substitution linéaire exprimant les u en fonction des u' et de remplacer alors l'identité (4) par la suivante,

$$F(\Lambda \varphi, \Lambda f) = \Phi(\Lambda' \varphi, \Lambda' f)\,|h|,$$

en désignant par $|h|$ le déterminant de la substitution (3), par φ une fonction quelconque différente de f. On conclut de là le résultat suivant : Les substitutions cherchées sont celles qui, effectuées simultanément sur les deux séries de variables de la forme $F(\Lambda\varphi, \Lambda f)$, reproduisent cette forme multipliée par le déterminant de la substitution. De là résulte la règle suivante :

On détermine d'abord les substitutions (3) *qui, effectuées sur les* Λf *et les* $\Lambda\varphi$, *transforment en elle-même* $F(\Lambda\varphi, \Lambda f)$. *La substitution cherchée est alors*

$$\Lambda_i f = \sum_j \frac{h_{ij}}{|h|} \Lambda'_j f.$$

Remarquons encore que si le discriminant de $F(\Lambda\varphi, \Lambda f)$ n'est pas nul, $|h|$ est égal à ± 1, et que les substitutions cherchées transforment en elle-même, au signe près, la forme $F(\Lambda\varphi, \Lambda f)$.

35. Les transformations infinitésimales d'un *groupe simplement transitif* à trois variables peuvent être ramenées à l'un des types (5), (7), T_7, T_8, T_9 examinés plus loin.

Pour chacun de ces types, nous indiquons les transformations infinitésimales Λf choisies pour le groupe réciproque et la forme correspondante $F(\Lambda\varphi, \Lambda f)$.

Le groupe

$$(5) \qquad X_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \qquad (X_i X_k) = 0$$

laisse invariantes les différentielles dx_i. Les coefficients de la substitution S sont des constantes quelconques. On peut toujours ramener les ds^2 correspondants à la forme euclidienne

$$(6) \qquad ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2.$$

Le groupe

$$(7) \qquad X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x_2}, \qquad X_2 f = \frac{\partial f}{\partial x_3}, \qquad X_3 f = -\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_2},$$

$$(X_1 X_2) = (X_1 X_3) = 0, \qquad (X_2 X_3) = X_1 f$$

conduit à

$$\Lambda_1 f = \frac{\partial f}{\partial x_2}, \qquad \Lambda_2 f = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \qquad \Lambda_3 f = -\frac{\partial f}{\partial x_3} + x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2},$$

$$(8) \qquad l_1(dx) = dx_2 + x_1\, dx_3, \qquad l_2(dx) = dx_1, \qquad l_3(dx) = -dx_3,$$

$$F(\Lambda\varphi, \Lambda f) = \Lambda_1 f \Lambda_1 \varphi,$$

$$(9)\ \mathrm{S} \qquad l_1, \quad l_2, \quad l_3; \qquad \alpha_{11} l_1 + \alpha_{12} l_2 + \alpha_{13} l_3, \quad \alpha_{22} l_2 + \alpha_{23} l_3, \quad \alpha_{32} l_2 + \alpha_{33} l_3.$$

Les α sont des constantes et α_{11} est égal à $\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{23}\alpha_{32}$. On a deux types possibles pour ds^2,

$$(10) \qquad C[dx_1^2 + dx_2^2 + 2x_1\, dx_2\, dx_3 + (1 + x_1^2)\, dx_3^2],$$

$$(11) \qquad C[dx_3^2 + 2\, dx_1 (dx_2 + x_1\, dx_3)],$$

C désignant une constante quelconque.

Au groupe

$$\mathrm{T}_7 \quad X_1 f = 2\frac{\partial f}{\partial x_2}, \qquad X_2 f = \frac{\partial f}{\partial x_3}, \qquad X_3 f = -2\frac{\partial f}{\partial x_1} + (x_2 + 2x_3)\frac{\partial f}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3},$$

$$(X_1 X_2) = 0, \qquad (X_1 X_3) = X_1 f, \qquad (X_2 X_3) = X_1 f + X_2 f$$

correspondent

$$\Lambda_1 f = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \qquad \Lambda_2 f = e^{-\frac{x_1}{2}} \frac{\partial f}{\partial x_2}, \qquad \Lambda_3 f = e^{-\frac{x_1}{2}} \left(\frac{\partial f}{\partial x_3} - x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2}\right),$$

$$\mathrm{L}_7 \qquad l_1(dx) = dx_1, \qquad l_2(dx) = e^{\frac{x_1}{2}}(dx_2 + x_1\, dx_3), \qquad l_3(dx) = e^{\frac{x_1}{2}}\, dx_3,$$

$$F(\Lambda\varphi, \Lambda f) = \Lambda_2 \varphi\, \Lambda_2 f + \frac{1}{2}(\Lambda_2 \varphi\, \Lambda_3 f - \Lambda_3 \varphi\, \Lambda_2 f),$$

$$\mathrm{S}_7 \qquad l_1, \quad l_2, \quad l_3; \qquad l_1, \quad \alpha_{21} l_1 + \alpha_{22} l_2 + \alpha_{23} l_3, \quad \alpha_{31} l_1 + \alpha_{22} l_3.$$

On peut alors ramener les ds^2 correspondants à l'une des formes

$$\text{VII} \qquad C[dx_1^2 + ce^{x_1}(dx_2 + x_1\,dx_3)^2 + e^{x_1}\,dx_3^2],$$

$$\text{VII}' \qquad C[dx_1^2 + 2ce^{x_1}(dx_2 + x_1\,dx_3)\,dx_3],$$

$$\text{VII}'' \qquad e^{x_1}(dx_2 + x_1\,dx_3)^2 + 2ce^{\frac{x_1}{2}}\,dx_1\,dx_3,$$

$$(12) \qquad e^{x_1}\,dx_3^2 + 2ce^{\frac{x_1}{2}}\,dx_1(dx_2 + x_1\,dx_3).$$

Le groupe

$$\text{T}_8 \qquad X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x_2}, \qquad X_2 f = \frac{\partial f}{\partial x_3}, \qquad X_3 f = -\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + hx_3\frac{\partial f}{\partial x_3},$$

$$(X_1X_2) = 0, \qquad (X_1X_3) = X_1 f, \qquad (X_2X_3) = hX_2 f$$

(h désigne une constante) donne

$$\Lambda_1 f = e^{-hx_1}\frac{\partial f}{\partial x_3}, \qquad \Lambda_2 f = e^{-x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2}, \qquad \Lambda_3 f = \frac{\partial f}{\partial x_1},$$

$$\text{L}_8 \qquad l_1(dx) = e^{hx_1}\,dx_3, \qquad l_2(dx) = e^{x_1}\,dx_2, \qquad l_3(dx) = dx_1,$$

$$F(\Lambda\varphi, \Lambda f) = \Lambda_1\varphi\,\Lambda_2 f - h\Lambda_2\varphi\,\Lambda_1 f,$$

$$\text{S}_8 \qquad l_1, \quad l_2, \quad l_3; \qquad \alpha_{11}l_1 + \alpha_{13}l_3, \quad \alpha_{22}l_2 + \alpha_{23}l_3, \quad l_3.$$

On peut ramener ds^2 à l'une des formes

$$\text{VIII} \qquad C(dx_1^2 + e^{2x_1}\,dx_2^2 + 2ce^{(h+1)x_1}\,dx_2\,dx_3 + e^{2hx_1}\,dx_3^2),$$

$$\text{VIII}' \qquad C(dx_1^2 + 2e^{(h+1)x_1}\,dx_2\,dx_3 + ce^{2x_1}\,dx_2^2),$$

$$\text{VIII}'' \qquad (e^{x_1}\,dx_2 + ce^{hx_1}\,dx_3)^2 + 2e^{hx_1}\,dx_1\,dx_3,$$

C et c sont des constantes.

Le dernier groupe à étudier est

$$\text{T}_9 \quad X_1 f = e^{-x_3}\frac{\partial f}{\partial x_1} - x_2^2 e^{-x_3}\frac{\partial f}{\partial x_2} - 2x_2 e^{-x_3}\frac{\partial f}{\partial x_3}, \qquad X_2 f = \frac{\partial f}{\partial x_3}, \qquad X_3 f = e^{x_3}\frac{\partial f}{\partial x_2},$$

$$(X_1X_2) = X_1 f, \qquad (X_1X_3) = 2X_2 f, \qquad (X_2X_3) = X_3 f.$$

Nous prendrons

$$\Lambda_1 f = x_1^2\frac{\partial f}{\partial x_1} + (1 - 2x_1x_2)\frac{\partial f}{\partial x_2} - 2x_1\frac{\partial f}{\partial x_3},$$

$$\Lambda_2 f = -x_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial x_3},$$

$$\Lambda_3 f = \frac{\partial f}{\partial x_1},$$

et

$$\mathrm{L}_9 \qquad \begin{cases} l_1(dx) = dx_2 - x_2\,dx_3, \\ l_2(dx) = dx_3 + 2x_1(dx_2 - x_2\,dx_3), \\ l_3(dx) = dx_1 + x_1\,dx_3 + x_1^2(dx_2 - x_2\,dx_3). \end{cases}$$

La forme bilinéaire $F(\Lambda\varphi, \Lambda f)$ est la forme polaire de la forme quadratique

$$\Lambda_1 f \Lambda_3 f - (\Lambda_2 f)^2,$$

et l'on voit alors aisément que *les substitutions* S_9 *sont celles qui transforment en elle-même la forme* $4l_1 l_3 - l_2^2$. Nous prendrons

$$\text{IX} \qquad ds^2 = \sum_{ij} c_{ij}\, l_i(dx)\, l_j(dx),$$

les coefficients c_{ij} étant des constantes. On réduirait le nombre de ces constantes à l'aide des substitutions S_9; mais, comme nous n'aurons pas de calculs à effectuer avec les ds^2 de ce type, nous n'effectuerons pas cette réduction.

36. On obtient des types canoniques pour les ds^2 admettant des groupes plus étendus que les précédents, en complétant l'étude des ds^2 donnés par les groupes à trois paramètres. Examinons d'abord ceux de ces ds^2 dont le groupe est intransitif, c'est-à-dire les ds^2, IV, V, VI.

La méthode du Chapitre II, nos 11 et 12, conduit sans difficulté au résultat suivant. Pour que le ds^2

$$\text{IV} \qquad dx_1^2 + a(x_1)(dx_2^2 + dx_3^2)$$

admette un groupe à plus de trois paramètres, il faut que $\frac{1}{a}\frac{da}{dx_1}$ soit une constante; mais la variété correspondante est alors une variété euclidienne ou une variété à courbure constante. Les types canoniques de ds^2 de ces variétés sont bien connus (*voir* n° 39).

La même méthode appliquée au ds^2, V, conduit à différentes hypothèses que nous allons indiquer. Pour plus de simplicité, nous désignerons par des accents les dérivations relatives à la variable x_1.

Le paramètre différentiel Df du ds^2

$$\text{V} \qquad ds^2 = a(x_1)(dx_3^2 + 2\,dx_1\,dx_2)$$

se réduit à $\beta^2\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2$ en posant

$$\beta^2 = \frac{2aa'' - 3a'^2}{4a^4}.$$

Donc, si β^2 *est nul,* c'est-à-dire si a est de la forme $\frac{1}{(cx_1+d)^2}$ (c et d étant des constantes), on a une *variété euclidienne.*

Si β *est différent de zéro,* la condition nécessaire et suffisante pour que le ds^2 considéré admette un groupe à plus de trois paramètres est la suivante : *L'expression*

$$\frac{1}{a\beta}\frac{\beta'}{\beta}$$

est une constante. On peut déduire de là la forme que doit avoir a, en déterminant d'abord $\frac{1}{a\beta}$ au moyen d'une équation du second ordre facile à intégrer. Mais on vérifie directement, en suivant la marche indiquée au Chapitre II, que la variété considérée est applicable sur la variété dont le ds^2 est

$$e^{2x_1}\,dx_2^2 + 2\,e^{hx_1}\,dx_1\,dx_3.$$

Ce dernier ds^2 a déjà été étudié (Chap. II, n° **12**); nous le retrouverons plus loin (XIII).

Il reste à examiner le ds^2, VI. Un changement de variables permet de le ramener à la forme plus simple

$$dx_1^2 + a(x_1)(dx_2^2 + e^{2x_2}\,dx_3^2).$$

L'étude directe des équations de définition du groupe correspondant est ici plus simple que l'application de la théorie générale. Cette étude a été faite par M. Bianchi (1), qui a obtenu ainsi les résultats suivants : *Le groupe du ds^2 précédent est à plus de trois paramètres si l'expression $a''a - a'^2$ est une constante;* les ds^2 correspondants ou bien sont à courbure constante, ou bien sont réductibles à un type canonique examiné plus loin (XI).

37. Examinons maintenant les ds^2 donnés par les groupes simplement transitifs. On applique sans difficulté la méthode et les formules (2) du Chapitre II aux ds^2 correspondant aux groupes autres que T_9. Voici les résultats obtenus :

Le ds^2 (10) ou

$$\text{X} \qquad C[dx_1^2 + dx_2^2 + 2\,x_1\,dx_2\,dx_3 + (1 + x_1^2)\,dx_3^2]$$

admet toujours un groupe à quatre paramètres; il est aisé de voir d'ailleurs que la substitution T définie au n° **27** ne se réduit pas à la substitution identique.

(1) Paragraphes 10 et 11 du Mémoire cité.

(2) Voir les formules au n° 12.

Le groupe correspondant est engendré par les transformations infinitésimales

$$
\mathrm{T}_{10} \quad \left\{ \begin{array}{l} X_1 f = \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \qquad X_2 f = \dfrac{\partial f}{\partial x_3}, \qquad X_3 f = -\dfrac{\partial f}{\partial x_1} + x_3 \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \\ X_4 f = x_3 \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \dfrac{1}{2}(x_1^2 - x_3^2)\dfrac{\partial f}{\partial x_2} - x_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_3}, \end{array} \right.
$$

$$
\begin{array}{ll} (X_1 X_2) = (X_1 X_3) = (X_1 X_4) = 0, & (X_2 X_3) = X_1 f, \\ (X_2 X_4) = -X_3 f, & (X_3 X_4) = X_2 f. \end{array}
$$

Le ds^2 (11) est euclidien;

Les ds^2, VII, VII′, VII″ n'admettent jamais de groupe à plus de trois paramètres;

Le ds^2 (12) est euclidien;

Le ds^2, VIII, admet un groupe à plus de trois paramètres dans les cas suivants :

1° $h = 1$; la variété correspondante est alors à courbure constante;

2° $h = 0$; le ds^2, VIII, devient alors

$$
\text{XI} \qquad C(dx_1^2 + e^{2x_1} dx_2^2 + 2ce^{x_1} dx_2\, dx_3 + dx_3^2)
$$

admettant le groupe à quatre paramètres correspondant à

$$
\mathrm{T}_{11} \quad \left\{ \begin{array}{l} X_1 f = \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \qquad X_2 f = \dfrac{\partial f}{\partial x_3}, \qquad X_3 f = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} - x_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \\ X_4 f = x_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{e^{-2x_1}}{1-c^2} - x_2^2\right)\dfrac{\partial f}{\partial x_2} - \dfrac{ce^{-x_1}}{1-c^2}\dfrac{\partial f}{\partial x_3}, \end{array} \right.
$$

$$
\begin{array}{ll} (X_1 X_2) = (X_2 X_3) = (X_2 X_4) = 0, & (X_1 X_3) = -X_1 f, \\ (X_1 X_4) = X_3 f, & (X_3 X_4) = -X_4 f. \end{array}
$$

Le ds^2, VIII′, admet un groupe à plus de trois paramètres si $h = 1$, ou si $h = 0$. Dans le premier cas, on a un ds^2 à courbure constante; dans le second cas, on a le ds^2

$$
\text{XII} \qquad C(dx_1^2 + 2e^{x_1} dx_2\, dx_3 + ce^{2x_1} dx_2^2)
$$

admettant le groupe à quatre paramètres :

$$
\mathrm{T}_{12} \quad \left\{ \begin{array}{l} X_1 f = \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \qquad X_2 f = \dfrac{\partial f}{\partial x_3}, \qquad X_3 f = -\dfrac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \\ X_4 f = x_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_1} - \dfrac{x_2^2}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x_2} + e^{-x_1}\dfrac{\partial f}{\partial x_3}, \end{array} \right.
$$

$$
\begin{array}{ll} (X_1 X_2) = (X_2 X_3) = (X_2 X_4) = 0, & (X_1 X_3) = X_1 f, \\ (X_1 X_4) = -X_3 f, & (X_3 X_4) = X_4 f. \end{array}
$$

Enfin, le ds^2, VIII″, admet un groupe à plus de trois paramètres lorsque $h=0$ (on a alors un ds^2 euclidien), ou lorsque $c=0$, ce qui donne

XIII $$e^{2x_1}dx_2^2+2e^{hx_1}dx_1\,dx_3,$$

admettant le groupe (¹)

$$\mathrm{T}_{13}\left\{\begin{array}{l} \mathrm{X}_1 f=\dfrac{\partial f}{\partial x_2},\qquad \mathrm{X}_2 f=\dfrac{\partial f}{\partial x_3},\qquad \mathrm{X}_3 f=-\dfrac{\partial f}{\partial x_1}+x_2\dfrac{\partial f}{\partial x_2}+hx_3\dfrac{\partial f}{\partial x_3},\\ \mathrm{X}_4 f=\dfrac{e^{(h-2)x_1}}{h-2}\dfrac{\partial f}{\partial x_2}-x_2\dfrac{\partial f}{\partial x_3},\end{array}\right.$$

$$\begin{array}{lll}(\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2)=0, & (\mathrm{X}_1\mathrm{X}_3)=\mathrm{X}_1 f, & (\mathrm{X}_2\mathrm{X}_3)=h\mathrm{X}_2 f,\\ (\mathrm{X}_1\mathrm{X}_4)=\mathrm{X}_2 f, & (\mathrm{X}_2\mathrm{X}_4)=0, & (\mathrm{X}_3\mathrm{X}_4)=(1-h)\mathrm{X}_4 f.\end{array}$$

38. Examinons enfin les ds^2 du type IX. Supposons le groupe Γ d'un pareil ds^2 plus grand que le groupe T_9; le nombre des paramètres de Γ est 4, 5 ou 6.

Supposons Γ *à quatre paramètres.* Γ admettant un sous-groupe *simple* à trois paramètres, le groupe T_9, ce sous-groupe est *sous-groupe invariant* (²) de Γ. D'après le n° 27, la substitution T ne se réduit pas alors à la substitution identique, la réduction canonique de la forme ds^2 indiquée au n° 27 est alors possible d'une infinité de façons. Il serait aisé, par suite, de former des types canoniques pour les ds^2 (IX) admettant un groupe Γ à quatre paramètres; mais cela est inutile. En effet, il n'existe pas de groupes à quatre paramètres n'admettant comme sous-groupes à trois paramètres que des sous-groupes simples, et, par suite, *tous les* ds^2 *admettant des groupes à quatre paramètres sont réductibles à l'un des types canoniques précédemment trouvés.*

Si le groupe Γ *est à six paramètres,* on a une variété à courbure constante; le ds^2 est réductible à un type canonique connu. Cette circonstance se présente évidemment lorsque les formes ds^2 et $4l_1l_3-l_2^2$ ne diffèrent que par un facteur constant.

Démontrons enfin qu'il *n'existe pas de* ds^2 *admettant un groupe* Γ *à cinq paramètres.* En effet, il existerait alors (Chap. II, n° 11) une transformation infinitésimale échangeable avec celles de Γ; le groupe Γ serait *systatique* (³). Considérons alors le sous-groupe γ de Γ, laissant invariant un point x_1^0, x_2^0, x_3^0 de situation quelconque. D'après un théorème de M. Lie (⁴), ce sous-groupe serait sous-groupe invariant d'un sous-groupe γ' de Γ, plus grand que γ. Or, γ étant à

(¹) Si $h=2$, on remplace $\dfrac{e^{(h-2)x_1}}{h-2}$ par x_1 dans $\mathrm{X}_4 f$.

(²) Lie-Scheffers, *Vorlesungen über continuierliche Gruppen,* p. 572.

(³) Lie-Engel, *Transformationsgruppen,* Ab. I, p. 510.

(⁴) Lie-Engel, *Transformationsgruppen,* Ab. I, p. 520.

deux paramètres, on peut supposer γ' à trois paramètres. Comme γ' admet un sous-groupe invariant, il est réductible à l'un des types entièrement étudiés et qui ne donnent jamais, d'après ce que nous avons vu, des variétés admettant un groupe à cinq paramètres (1).

39. Rappelons enfin les formes canoniques connues des ds^2 à courbure constante (2).

Le ds^2 *euclidien*

$$\text{XIV} \qquad dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$$

admet le groupe à six paramètres engendré par

$$\mathrm{T}_{14} \quad \begin{cases} X_1 f = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \quad X_2 f = \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \quad X_3 f = \dfrac{\partial f}{\partial x_3}, \quad X_4 f = x_3 \dfrac{\partial f}{\partial x_2} - x_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_3}, \\ X_5 f = x_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_3} - x_3 \dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \quad X_6 f - x_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_1} - x_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \end{cases}$$

Le ds^2 à courbure constante $-\frac{1}{c}$,

$$\text{XV} \qquad c \frac{\sum_i dx_i^2 \left(1 - \sum_h x_h^2\right) + \left(\sum_k x_k\, dx_k\right)^2}{\left(1 - \sum_h x_h^2\right)^2},$$

admet le groupe donné par

$$\mathrm{T}_{15} \quad \begin{cases} X_1 f = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} - x_1 \mathrm{U}, \quad X_2 f = \dfrac{\partial f}{\partial x_2} - x_2 \mathrm{U}, \quad X_3 f = \dfrac{\partial f}{\partial x_3} - x_3 \mathrm{U}, \\ X_4 f = x_3 \dfrac{\partial f}{\partial x_2} - x_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_3}, \quad X_5 f = x_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_3} - x_3 \dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \quad X_6 f = x_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_1} - x_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \end{cases}$$

$$\mathrm{U} = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}.$$

En résumé :

Les ds^2 à trois variables admettant un groupe continu sont réductibles à l'un des types canoniques I, II, III', III, ..., XV.

Ces types canoniques admettent respectivement les groupes engendrés par $\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2, \ldots, \mathrm{T}_{15}$.

---

(1) Voir le Mémoire de M. Bianchi, § 36, 37.

(2) Lie-Engel, *Transformationsgruppen*, Ab. III, Chap. XVIII.

Nous avons conservé à très peu près les notations de M. Bianchi. Il est aisé, dès lors, de voir que *les* ds^2 *de M. Bianchi correspondent aux types canoniques désignés par les chiffres romains non accentués* (en écartant toutefois le ds^2, V). La transformation de passage des ds^2 de M. Bianchi aux ds^2 précédents pourrait d'ailleurs introduire des imaginaires, puisque nous n'avons fait aucune distinction entre les éléments réels et imaginaires.

Observons enfin que l'*on obtiendrait sans difficulté des types canoniques pour les variétés à trois dimensions à* ds^2 *défini positif admettant un groupe continu de représentation conforme sur elles-mêmes*.

Le problème de la représentation conforme se ramenant, d'après le Chapitre II, à celui de l'application, il suffirait de chercher la variété principale correspondant à chacun des types canoniques de M. Bianchi. On voit d'ailleurs aisément que plusieurs des variétés considérées sont susceptibles d'une représentation conforme sur l'espace euclidien.