SUR LA FORMATION EXPLICITE

DES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE,

DONT L'INTÉGRALE GÉNÉRALE EST UNE FONCTION A UN NOMBRE FINI DE BRANCHES.

PAR M. ARMAND CAHEN.

INTRODUCTION.

1. La théorie des équations différentielles *à points critiques fixes* a fait l'objet de travaux récents et nombreux, dont les principaux sont dus à MM. Fuchs (1) et H. Poincaré (2) pour le premier ordre et à MM. E. Picard (3) et P. Painlevé (4) pour le second ordre.

Généralisant la question, M. Painlevé a étudié les équations différentielles, dont l'intégrale n'acquiert *qu'un nombre fini n de branches,* quand la variable tourne autour des points critiques mobiles (5), sans tourner autour des points critiques fixes.

On dit alors que l'intégrale générale *acquiert seulement n valeurs autour des points critiques mobiles.*

Ces équations comprennent, comme cas particulier, celles dont l'intégrale est

(1) FUCHS, *Sitzungsberichte der Academie der Wissenschaften zu Berlin;* juin 1884.

(2) H. POINCARÉ, *Sur un théorème de M. Fuchs* (*Acta mathematica,* t. VII).

(3) E. PICARD, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées;* 1889).

(4) P. PAINLEVÉ, *Mémoire sur les équations différentielles du premier ordre* (*Annales de l'École Normale;* 1891-1892). — *Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles professées à Stockholm en* 1895. Paris, Hermann; 1897.

(5) Les points critiques *mobiles* sont ceux qui *varient* avec les constantes arbitraires d'intégration et les points *fixes* sont ceux qui sont indépendants de ces constantes. Quand la variable complexe x décrit un contour *fermé,* on dit qu'*elle n'a pas tourné* autour du point $x = x_0$, par exemple, si la *variation totale* de l'argument du vecteur $\overline{x_0 x}$ est *nulle.*

une fonction *analytique* n'admettant que n *branches* dans tout son domaine d'existence.

2. Ce travail est consacré à la détermination *explicite* des équations différentielles du premier ordre dont l'*intégrale générale* n'admet qu'un *nombre fini de branches* ou plus généralement n'acquiert qu'un *nombre fini de valeurs autour des points critiques mobiles.*

Soit

$$F(y', y, x) = 0 \tag{1}$$

une équation différentielle du premier ordre, où F est un polynome en y', y dont les coefficients sont des fonctions analytiques de x.

On peut se proposer de former *toutes* les équations (1) de degrés *donnés* en y' et en y, et dont l'intégrale n'acquiert qu'un nombre *donné* n de valeurs autour des points critiques mobiles.

Pour fixer les idées, supposons que F soit du premier degré en y', et soit

$$y' = \frac{A(y, x)}{B(y, x)} \equiv \frac{\lambda_\alpha(x) y^\alpha + \ldots + \lambda_0(x)}{\mu_\beta(x) y^\beta + \ldots + \mu_0(x)}, \tag{2}$$

l'équation considérée, où A et B sont des polynomes en y de degrés α et β. Appelons *degré en* y de l'équation (2) le plus grand des deux nombres α, $\beta + 2$; après une transformation homographique quelconque, effectuée sur y, α est égal à $\beta + 2$.

Cherchons à déterminer *toutes* les équations (2) de *degré donné* q *en* y (soit $q = 4$) dont l'intégrale $y(x)$ n'acquiert qu'un nombre donné n de branches (soit $n = 3$) autour des points critiques mobiles.

L'intégrale de (2) peut alors recevoir la forme

$$\frac{a(y, x)}{b(y, x)} = \text{const.},$$

où a et b sont des polynomes en y de degré n.

Si l'on exprime que l'équation (2) satisfait à cette condition, on forme évidemment un système de relations *différentielles* algébriques entre les coefficients $\lambda_\alpha, \ldots, \lambda_0, \mu_\beta, \ldots, \mu_0$ de A, B. Mais il serait très pénible de discuter la compatibilité de ces relations et le degré de généralité de leurs solutions. Enfin il resterait à intégrer ces relations pour obtenir les coefficients λ, μ en fonction des *constantes* et des *fonctions arbitraires* qu'ils comportent.

Toute la difficulté du problème consiste donc à déterminer *explicitement* toutes les équations (2) répondant à la question, c'est-à-dire à *déterminer les* λ,

μ *en fonction* ALGÉBRIQUE *des* FONCTIONS *et* CONSTANTES ARBITRAIRES dont elles dépendent.

Ce problème a été entièrement résolu par M. Painlevé pour les équations (2).

3. Mais quand on passe aux équations du second degré en y', la méthode, bien que subsistant en principe, se heurte à des difficultés nouvelles.

Je me propose donc de traiter complètement ce problème pour les équations *du second degré en* y'. D'une façon précise, soit

$$\mathrm{L}y'^2 - 2\mathrm{M}y' + \mathrm{N} = 0 \tag{3}$$

une équation différentielle, où L, M, N sont trois polynomes en y, de degré q_1, q_2, q_3 (analytiques en x). Soit q le plus grand des trois nombres $q_1 + 4$, $q_2 + 2$, q_3. Nous nous proposons de *déterminer* EXPLICITEMENT *toutes les équations* (3) *de degré* DONNÉ q *en* y, *dont l'intégrale générale n'acquiert qu'un nombre* DONNÉ n *de branches autour des points critiques mobiles*.

Par le mot *explicitement,* il faut entendre que les coefficients $\lambda(x)$, ..., $\mu(x)$, ..., $\nu(x)$, ... dont dépendent les polynomes L, M, N doivent être déterminés en *fonction algébrique* de *constantes arbitraires* et de *fonctions arbitraires* de x (et de leurs dérivées).

4. La méthode que nous employons repose sur certaines propriétés établies par M. Poincaré et M. Painlevé sur les équations différentielles du premier ordre, et que nous rappellerons tout d'abord.

En premier lieu, comme l'a montré M. Poincaré, les *équations à points critiques fixes* s'intègrent *algébriquement,* ou par une *quadrature,* ou se ramènent *algébriquement* à une *équation de Riccati.*

D'autre part, d'après un théorème de M. Painlevé, si l'intégrale générale n'acquiert que n valeurs autour des points critiques mobiles, cette intégrale générale

$$y = \varphi(x, y_0, x_0),$$

considérée comme fonction de la constante arbitraire y_0 (x_0 ayant une valeur *numérique,* zéro par exemple), est une fonction *algébrique* de y_0.

M. Painlevé a déduit de ce théorème que, quelle que soit n, l'équation

$$F(y', y, x) = 0 \tag{A}$$

se ramène *algébriquement* aux équations à points critiques fixes. Son intégrale générale s'obtient, par suite, *algébriquement,* ou dépend soit d'une *quadrature,* soit d'une *équation de Riccati.*

5. Enfin, je rappelle encore les deux théorèmes suivants dus à M. Painlevé :

I. *Étant donnée une équation* (A), *on sait reconnaître, à l'aide d'un nombre* FINI *d'opérations, si son intégrale* $y(x)$ *ne prend qu'un nombre* DONNÉ n *de valeurs autour des points critiques mobiles, et, dans ces conditions, l'équation s'intègre* ALGÉBRIQUEMENT, *ou se ramène algébriquement, soit à une équation*

$$\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = \lambda(x)\,dx,$$

soit à une équation de RICCATI.

II. *Soit une équation donnée*

$$(\mathrm{A}_1) \qquad \mathrm{F}_1(y', y, x) = 0,$$

ALGÉBRIQUE *en* y', y, x; *on sait (à l'aide d'un nombre* FINI *d'opérations) reconnaître si l'intégrale générale est une fonction* TRANSCENDANTE *qui ne prend qu'un nombre fini* (INCONNU) [1] *de valeurs autour des points critiques mobiles, ou ramener l'équation aux* QUADRATURES.

6. Cela posé, considérons d'abord une équation du *premier degré* en y',

$$(2) \qquad y' - \frac{a_q(x)y^q + a_{q-1}(x)y^{q-1} + \ldots + a_0}{y^{q-2} + b_{q-3}(x)y^{q-3} + \ldots + b_0} = 0,$$

et cherchons à déterminer *explicitement* toutes les équations de cette forme, de degré q *donné* en y, et dont l'intégrale générale acquiert un nombre *donné* n de valeurs autour des points critiques mobiles.

M. Painlevé a développé une discussion complète, relative à la *compatibilité* des conditions imposées aux coefficients a_j, b_k dans un Mémoire [2] consacré à l'étude plus générale des équations (2) dont l'intégrale générale est de la forme

$$\mathrm{C} = h(x)[y - g_1(x)]^{i_1}[y - g_2(x)]^{i_2}\ldots[y - g_k(x)]^{i_k},$$

où $i_1, i_2, \ldots, i_k$ sont des constantes numériques *données*, et $h, g_1, g_2, \ldots, g_k$ des fonctions inconnues de x.

Je reprends tout d'abord l'exposé de cette méthode, en lui faisant subir certaines modifications, et je l'applique à la formation *explicite* de tous les types

---

(1) Ce nombre est le *même* pour *toutes* les intégrales, sauf pour certaines intégrales *exceptionnelles*.

(2) *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, G.1-35; 1896.

d'équations (2) de degrés 3, 4, 5, 6, 7, 8 en y dont l'intégrale générale prend *deux, trois* ou *quatre* valeurs autour des points critiques mobiles ([1]).

Quant au passage des équations du premier degré aux équations du second degré en y', la méthode montre bien encore que les conditions imposées aux coefficients de l'équation (1) peuvent recevoir une forme *algébrique,* mais la question de *compatibilité* entre ces relations algébriques présente des difficultés nouvelles, où interviennent les *intégrales singulières* et les *lieux des points de rebroussements* des intégrales.

Avant d'exposer en détail la méthode et la discussion à laquelle elle donne lieu, je voudrais, dans cette Introduction, en indiquer rapidement les principes.

7. Lorsque l'intégrale générale de l'équation

$$\mathrm{L}y'^2 - 2\mathrm{M}y' + \mathrm{N} = 0 \tag{3}$$

ne prend qu'un nombre fini n de valeurs autour des points critiques mobiles, elle peut s'écrire

$$\alpha \mathrm{C}^2 - 2\beta \mathrm{C} + \gamma = 0, \tag{4}$$

où α, β, γ sont des polynomes en y de degré n, si le genre ϖ de la relation entre les constantes intégrales ([2]) est *nul* et de *degré* $2n$, si ce genre est égal à *un*.

Quant au cas de $\varpi > 1$, il ne peut se présenter ici ([3]).

([1]) C'est pour moi une occasion de comparer les types ainsi obtenus à d'autres types, formés précédemment par M. Painlevé, à l'aide d'une première méthode développée dans les *Annales de l'École Normale* (1892). Cette méthode, qui donne lieu à des calculs assez simples, ne fournit pas *explicitement* les équations (2), dès que le nombre de *branches* de l'intégrale est supérieur à *trois*, mais astreint les coefficients de (2) à certaines *relations différentielles*.

([2]) Quand l'intégrale générale est de l'espèce indiquée, il existe une classe de courbes *algébriques* de *même module,* dont la courbe (3) en y', y (où x est un paramètre quelconque) est une *transformée* rationnelle d'ordre n, et dont le genre ϖ est dit *genre de la relation entre les constantes intégrales.* On peut choisir deux intégrales premières *rationnelles* en (y', y) : $\mathrm{C} = \mathrm{R}(y', y, x)$, $c = r(y', y, x)$, telles que C et c vérifient la *relation entre les constantes intégrales,* et que toutes les autres intégrales premières *rationnelles* en y', y, soit $\gamma = \rho(y', y, x)$, s'expriment *rationnellement* en C, c.

([3]) En effet, si $\varpi > 1$, il existe au moins deux multiplicateurs *algébriques* de l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{H}(y, x)}{\sqrt{\mathrm{QR}}}$ et $\dfrac{\mathrm{H}_1(y, x)}{\sqrt{\mathrm{QR}}}$, dont le quotient $\dfrac{\mathrm{H}(y, x)}{\mathrm{H}_1(y, x)}$, égalé à une constante, définit l'intégrale générale, qui correspondrait alors à une équation différentielle du premier degré en y'. *Voir* Painlevé, *Annales de l'École Normale,* p. 220 et suiv.; 1892.

Soit d'abord le cas de $\varpi = 0$. Posons

$$(5) \qquad M^2 - LN = P^2QR,$$

P, Q, R étant trois polynomes de degrés i, j, k liés par la relation

$$(6) \qquad 2q - 4 = 2i + j + k,$$

l'équation $Q = 0$ (de degré j) désignant *le lieu des points de rebroussement,* et l'équation $R = 0$ (de degré k), les *intégrales singulières.*

La relation (4) est, par hypothèse, *irréductible* en y et C, sauf pour certaines valeurs *exceptionnelles* de C et, en particulier, pour les valeurs $C = C_r$ (nécessairement en nombre *fini*), dites *valeurs remarquables* de la constante, et telles que l'équation (4) admet, pour $C = C_r$, quel que soit x, des racines multiples $y = g_r(x)$, dont les ordres de multiplicité $a_r, b_r, \ldots, e_r$ sont liés au degré q de l'équation différentielle par la relation

$$(\alpha) \qquad q = 2n + k - \sum [(a_r - 1) + (b_r - 1) + \ldots + (e_r - 1)] \quad (^1).$$

Écrivons que l'équation (3) possède j courbes $y = g(x)$ *lieux de points de rebroussement,* k intégrales *singulières* et p solutions *remarquables*

$$y = g_1(x), \qquad y = g_2(x), \qquad \ldots, \qquad y = g_p(x),$$

respectivement d'ordres $a_1, a_2, \ldots, a_p$, avec la condition

$$a_1 - 1 + a_2 - 1 + \ldots + a_p - 1 = 2n + k - q,$$

nous obtenons

$$2n + k - q + 2j + n - \frac{3j + k}{2}$$

conditions *algébriques;* et, si toutes ces conditions sont *compatibles,* l'équation différentielle dépend de

$$3n + 2 - \left(2j + n - \frac{3j + k}{2}\right) - (2n + k - q) = i + 4$$

fonctions arbitraires et de *p constantes arbitraires.* Par suite, à tout choix des entiers positifs i, j, k, satisfaisant à l'égalité (6), correspondent *un nombre fini de systèmes de conditions algébriques* entre les coefficients de l'équation (4).

Chacun de ces systèmes définit une équation (4) dépendant de $i + 4$ *fonctions arbitraires* et *d'un certain nombre de constantes arbitraires, égal au nombre des solutions remarquables.*

---

(1) P. Painlevé, *Leçons de Stockholm,* p. 167.

Ce nombre atteint son *maximum* $2n + k - q$, quand toutes les solutions *remarquables* sont d'ordre *deux*.

8. Dans ce dernier cas, qui peut être considéré comme *le plus général,* nous faisons la discussion complète des conditions *algébriques* correspondantes, et nous montrons :

1° *Que les conditions précédentes sont* COMPATIBLES *et* DÉTERMINÉES;

2° *Que l'équation* (4) *ainsi obtenue en* y, C *est* IRRÉDUCTIBLE;

3° *Que l'équation différentielle* (3) *correspondante* (*dont le degré est au plus égal à* q) *est* EXACTEMENT DE DEGRÉ q;

4° *Que le nombre des* BRANCHES *de l'intégrale, permutables autour des points critiques mobiles, nombre qui est au plus égal à* n, est BIEN ÉGAL *à* n,

et que, par suite,

5° *Le* GENRE ϖ *de la relation entre les constantes intégrales est* NUL.

La question posée au début est donc résolue dans le cas de $\varpi = 0$, et le type le plus général des équations (3) dépend de $i + 4$ FONCTIONS ARBITRAIRES et de $2n + k - q - 3$ CONSTANTES ARBITRAIRES ([1]) *distinctes, i* étant le *nombre des racines doubles* du discriminant $M^2 - LN$ de l'équation en y', et k le nombre des *intégrales singulières distinctes.*

9. Si l'on passe au cas où le *genre* ϖ est égal à UN et si l'on recherche d'abord directement les équations (3) correspondantes, on remarque qu'il n'y a pas, en général, de courbe $Q = 0$, *lieu des points de rebroussement* ([2]), et que l'équation $R = 0$ (de degré $2p + 2$) désignant les intégrales singulières, l'intégrale générale est donnée par la quadrature de *différentielle totale de première espèce*

$$C = J(y, x) \equiv \int \left\{ \frac{H\,dy}{\sqrt{R}} + \left[\frac{K}{\sqrt{R}} + \lambda(x) \right] dx \right\},$$

où $\lambda(x)$ est une fonction arbitraire de x, et où les polynomes $H(y, x)$, $K(y, x)$, $R(y, x)$ dépendent *de* $p + 2$ *fonctions arbitraires* et *d'une constante*

([1]) Le nombre $2n + k - q$ des constantes arbitraires distinctes peut être réduit à $2n + k - q - 3$ (*ce dernier nombre devant être remplacé par zéro,* s'il est négatif), parce que toutes les formes (4) de l'intégrale générale se déduisent de l'une d'entre elles par le changement de C en $\frac{\lambda C + \mu}{C + \rho}$, λ, μ, ρ désignant des constantes numériques.

([2]) Dans quelques cas *exceptionnels,* on peut, cependant, rencontrer des *lieux* de *points de rebroussement,* pour lesquels les *deux* valeurs de y' deviennent *infinies.*

arbitraire μ, module de la *différentielle elliptique,* dont $\frac{\mathrm{H}\,dy}{\sqrt{\mathrm{R}}}$ est une *transformée rationnelle.*

Si l'on veut que l'équation différentielle correspondante, dont le degré apparent est $2p+2$, s'abaisse au degré q, il faut introduire, comme plus haut, les notions de *solutions remarquables* et de *constantes remarquables;* d'où des relations, qu'on peut écrire sous la forme *transcendante* (¹)

$$\mathrm{C}_\rho = \mathrm{J}(y_\rho, x), \tag{7}$$

où y_ρ est une fonction *algébrique* des $p+2$ fonctions précédentes.

Ces relations sont en nombre $2p+2-q$ pour la solution *la plus générale.*

On trouve ainsi $i+4$ *fonctions arbitraires* et $2p+2-q$ *constantes arbitraires,* en fonction desquelles les coefficients s'expriment *algébriquement.*

Nous conservons aux relations (7) leur forme *transcendante,* nous y ajoutons les conditions *transcendantes,* exprimant que l'intégrale $\int \frac{\mathrm{H}\,dy}{\sqrt{\mathrm{R}}}$ n'a que deux périodes, qui sont des constantes absolues, et nous montrons que l'ensemble de ces deux séries de relations *transcendantes* est *compatible* et *déterminé* (²).

Il y a donc $i+4$ fonctions *arbitraires,* et, comme, d'autre part, les relations peuvent recevoir une forme *algébrique,* on en conclut que les coefficients dépendent *algébriquement* de $i+4$ fonctions *arbitraires* convenablement choisies.

10. Observons, dans ce dernier cas, que, si l'on met l'intégrale générale sous la forme

$$\alpha_1 \mathrm{C}^2 - 2\beta_1 \mathrm{C} + \gamma_1 = 0, \tag{4'}$$

il n'y a pas de *lieux* de *points de rebroussement* ($j=0$) et α_1, β_1, γ_1 sont de *degré* $2n$ en y.

Inversement, si une relation $(4)'$ de *degré* $2n$ définit l'intégrale d'une équation différentielle (3) de *degré* q en y, cette intégrale acquiert $2n$ *valeurs* autour des points critiques mobiles; les coefficients de (3) dépendent de $i+4$ *fonctions arbitraires* et de $4n+2p-q-1$ *constantes arbitraires,* et le *genre* ϖ est *nul.* Mais, comme dans le cas de $\varpi=1$, les constantes arbitraires sont au nombre de $2p+2-q$, il faut en conclure que, dans le cas de $\varpi=1$, les $4n+2p+2-q$ constantes remarquables, ou bien *ne donnent pas lieu chacune* à une seule solution *double,* ou bien sont *liées par* $4n-4$ *relations algébriques.*

(¹) Ces relations pourraient, d'ailleurs, être ramenées à des formes *algébriques.*

(²) Les autres objections, que l'on peut faire au raisonnement, font également ici l'objet d'une discussion complète, mais rapide, analogue à celle que nous développons à propos des équations de genre $\varpi=0$.

Nous montrons qu'il existe alors *quatre constantes remarquables* telles, que le premier membre de $(4)'$ devenant un *carré parfait,* elles donnent lieu respectivement à un *abaissement* de *degré n.*

Ces *quatre constantes* ne sont autres, d'ailleurs, que les quatre *racines* du radical, qui engendre la *différentielle elliptique* dont il a été question un peu plus haut.

11. En définitive, nous obtenons le théorème fondamental suivant :

Théorème. — *Les entiers q et n étant donnés* ($4 \leqq q \leqq 4n$), *appelons* i, j, k *trois entiers positifs satisfaisant à la condition*

$$2i + j + k = 2q - 4,$$

et aux inégalités

$$j + k \geqq 2, \qquad 3j + k \leqq 2n, \qquad k \geqq q - 2n.$$

A chacun de ces systèmes d'entiers i, j, k, *correspondent une infinité d'équations* (3), *dont l'intégrale acquiert* exactement *n valeurs autour des points critiques mobiles. Ces équations, qui forment deux classes distinctes, suivant que le* genre ϖ *de la relation entre les constantes intégrales est égal à* zéro *ou à* un, *dépendent* algébriquement *de* $i + 4$ fonctions arbitraires *et de* constantes arbitraires, *dont le nombre est* $2n + k - q - 3$ *ou* $k - q$ (¹), *selon qu'on se trouve dans l'un ou l'autre de ces deux cas.*

Le théorème n'est en défaut que si l'entier q étant égal à 4, on a $k = 4$, ou $k = 2$, $j = 0$. Dans ces deux cas *exceptionnels*, l'équation (3) correspondante a toujours ses *points critiques fixes*.

12. Un problème intéressant consiste à former les équations différentielles de l'espèce précédente, dont les *coefficients* appartiennent à une *classe donnée de fonctions;* nous avons là encore un genre de questions, où le nombre des *constantes remarquables* joue un rôle des plus importants.

Voici les deux principales questions, que nous résolvons, et qui se rattachent à cet ordre d'idées.

I. *Former les équations* (3) *à coefficients* algébriques, *de degré q* donné *en y, dont l'intégrale générale prend un nombre* donné *n de valeurs autour des points critiques mobiles.*

II. *Former les équations* (3) *à coefficients* algébriques *de degré q* donné,

(¹) Les deux nombres $2n + k - q$ et $k - q$ doivent être remplacés par *zéro*, s'ils sont *négatifs*.

dont l'intégrale est une fonction TRANSCENDANTE *qui ne prend qu'un nombre fini* (NON DONNÉ) [1] *de valeurs autour des points critiques mobiles.*

13. Les principes utilisés précédemment et les méthodes correspondantes s'appliquent à l'étude beaucoup plus compliquée des équations du second degré en y' et de *degré* q en y

$$(3) \qquad Ly'^2 - 2My' + N = 0,$$

ayant pour intégrale générale

$$(8) \qquad \alpha' C^2 - 2\beta' C + \gamma' = 0,$$

où α', β', γ' sont des expressions de la forme

$$h(x)[y - g_1(x)]^{\lambda_1}[y - g_2(x)]^{\lambda_2}\dots[y - g_m(x)]^{\lambda_m},$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ étant des constantes numériques quelconques données, et pour lesquelles nous établissons une formule $(\alpha)'$, qui peut être considérée comme une généralisation de la formule (α) du n° 7.

Nous n'avons pas encore résolu complètement la question, qui consiste à former *explicitement* les équations (3) de *degré* q, dont l'intégrale générale est de la forme (8), mais les quelques développements que nous consacrons à ce problème suffiront à montrer comment les méthodes précitées permettent de le traiter complètement.

Pour terminer, nous consacrons quelques lignes aux équations (3) qui admettent un *facteur intégrant* ALGÉBRIQUE et nous établissons, là encore, une formule $(\alpha)''$, analogue à la formule (α) du n° 7, permettant de traiter le problème de la *formation explicite* de ces équations.

14. Je rappelle aussi les nombreuses applications développées dans le corps de ce Mémoire.

Tout d'abord, comme je l'ai déjà signalé plus haut, je forme *explicitement* toutes les équations du *premier degré* en y', qui correspondent aux valeurs 3, 4, 5, 6, 7, 8 de l'entier q et aux valeurs 2, 3, 4 de l'entier n.

J'insiste longuement sur certains exemples particuliers, afin de bien montrer le but poursuivi en introduisant la méthode en question.

Je forme ensuite *toutes* les équations du *second degré* en y', dont l'intégrale

[1] Ce nombre est toujours supposé le même pour toutes les intégrales, sauf pour des intégrales *exceptionnelles*.

n'acquiert que *deux* branches autour des points critiques mobiles et pour lesquelles l'entier q prend les valeurs 4, 5, 6, 7 et 8.

Enfin, je forme les types les plus intéressants d'équations du *second degré* en y', dont l'*intégrale générale* acquiert *trois valeurs* autour des points critiques mobiles ([1]).

CHAPITRE I.

ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ EN y'.

I. — Généralités et propriétés connues.

1. Étant donnée une équation différentielle

$$y' = \frac{B(y, x)}{A(y, x)}, \tag{1}$$

où B et A sont deux polynomes en y premiers entre eux pour x quelconque, le premier de degré q ([2]), le second de degré $q-2$, si l'intégrale générale ne prend que n valeurs autour des points critiques mobiles, on peut la mettre sous la forme

$$C = \frac{\beta(y, x)}{\alpha(y, x)}. \tag{2}$$

La relation (2) définit, par hypothèse, une fonction $y(x)$, qui, pour une valeur quelconque donnée à la constante C, a n valeurs *distinctes*. L'équation de degré n en y

$$\alpha(y, x)C - \beta(y, x) = 0$$

ne sera réductible que pour certaines valeurs *exceptionnelles* de C, et, en particulier, pour les valeurs $C = C_r$, dites *valeurs remarquables*, de la constante pour lesquelles l'équation (2) admet, quel que soit x, des racines *multiples* $y = g(x)$, dites *solutions remarquables*, et dont les ordres de *multiplicité* sont liés au *degré* q de l'équation par la relation ([3])

$$q = 2n - \sum (a_r - 1) + (b_r - 1) + \ldots + (e_r - 1).$$

([1]) Les principaux résultats contenus dans ce Travail ont été résumés dans une Note présentée à l'Académie des Sciences (séance du 26 décembre 1898).

([2]) D'une façon plus générale, si p_1 et q_1 sont les degrés de B et A, q est le plus grand des deux nombres p_1, $q_1 + 2$.

([3]) P. Painlevé, *Leçons de Stockholm*, p. 146.

2. *Inversement* pour que l'équation (2) définisse l'intégrale générale d'une équation (1) de *degré* q, il faut et il suffit qu'il existe ρ *solutions remarquables* $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_\rho(x)$ de multiplicités $a_1, a_2, \ldots, a_\rho$, telles qu'on ait

$$q = 2n - \sum_{r=1}^{r=\rho} (a_r - 1).$$

Soit donc l'intégrale générale

$$(3) \qquad C = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta_n y^n + \beta_{n-1} y^{n-1} + \ldots + \beta_1 y + \beta_0}{y^n + \alpha_{n-1} y^{n-1} + \ldots + \alpha_0}.$$

Si nous exprimons que $y_r = g_r(x)$ est une racine d'ordre $a_r - 1$ de l'équation

$$D \equiv \alpha \frac{\partial \beta}{\partial y} - \beta \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0,$$

et, de plus, qu'elle rend constant le rapport $\frac{\beta}{\alpha}$,

$$C_r = \frac{\beta(y_r, x)}{\alpha(y_r, x)},$$

nous formons a_r conditions *algébriques* portant sur les $2n+1$ *coefficients* de α, β. Si l'on élimine $g_r(x)$ entre ces conditions, on obtient $a_r - 1$ conditions *algébriques* entre les coefficients α_i, β_j et la constante C_r.

En opérant ainsi pour chaque solution remarquable, on obtient

$$(a_1 - 1) + (a_2 - 1) + \ldots + (a_\rho - 1) = 2n - q$$

conditions algébriques (S). Si toutes ces conditions sont *compatibles,* l'équation (2) dépendra *algébriquement* de $q+1$ *fonctions arbitraires* et d'un nombre de *constantes arbitraires* égal au nombre des solutions remarquables; ce nombre sera *maximum* et égal à $2n - q$, si toutes les solutions remarquables sont d'ordre *deux*.

On peut donc dire que la solution la plus générale dépend de $q+1$ *fonctions arbitraires* (nombre indépendant du nombre n des branches de l'intégrale générale) et de $2n - q$ *constantes arbitraires*.

II. — Compatibilité des relations (S).

3. Les conclusions précédentes ne sont rigoureusement exactes que si les conditions (S) sont *compatibles* et *déterminées*.

Nous allons démontrer directement que, au moins pour la solution *la plus* *générale* (¹), c'est-à-dire pour laquelle toutes les solutions remarquables sont d'ordre *deux*, il y a bien *compatibilité*.

En effet, dans ce cas, les $2n-q$ conditions sont de la forme

$$(\mathrm{S})\qquad \begin{cases} C_1 = \dfrac{\alpha(y_1, x)}{\beta(y_1, x)}, \\ C_2 = \dfrac{\alpha(y_2, x)}{\beta(y_2, x)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ C_{2n-q} = \dfrac{\alpha(y_{2n-q}, x)}{\beta(y_{2n-q}, x)}, \end{cases}$$

où $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_{2n-q}(x)$ sont des fonctions *algébriques* des coefficients inconnus α_i, β_j de α, β.

Les constantes $C_1, C_2, \ldots, C_{2n-q}$ étant entièrement *arbitraires*, le système (S), qui contient *algébriquement* les fonctions α_i, β_j, sera *résoluble* par rapport à $2n-q$ d'entre elles, à moins qu'un des seconds membres de (S), par exemple le dernier, ne soit *identiquement fonction des autres*.

Supposons qu'il en soit ainsi, et exprimons que toutes les autres racines de D, soit

$$y_{2n-q+1}, \quad y_{2n-q+2}, \quad \ldots, \quad y_{2n-2},$$

sont des intégrales de (1), d'où le système

$$(\mathrm{S}')\qquad \begin{cases} C'_1 = \dfrac{\alpha(y_{2n-q+1}, x)}{\beta(y_{2n-q+1}, x)}, \\ C'_2 = \dfrac{\alpha(y_{2n-q+2}, x)}{\beta(y_{2n-q+2}, x)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ C'_{q-2} = \dfrac{\alpha(y_{2n-2}, x)}{\beta(y_{2n-2}, x)}. \end{cases}$$

Pour des valeurs arbitraires données aux $2n-2$ constantes C, C', *a fortiori*, les $2n-2$ seconds membres de (S) et (S') ne sont pas distincts, et, par suite, l'équation (1)' correspondant à ces $2n-2$ valeurs remarquables de la constante dépend au moins de *quatre* fonctions arbitraires; mais c'est une *équation de Riccati;* or, l'intégrale générale d'une équation de Riccati dépendant au plus de *trois* fonctions arbitraires, il y a contradiction et, par suite, les équations (S) sont bien *résolubles* par rapport à $2n-q$ des fonctions α_i, β_j.

(¹) Cf. P. Painlevé, *Leçons de Stockholm*, p. 152. — *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, loc. cit.*

Il résulte de là qu'en faisant abstraction de certaines VALEURS EXCEPTIONNELLES des constantes c, *les conditions* (S) *définissent* $2n-q$ *des* $2n+1$ *fonctions* α_i, β_j ALGÉBRIQUEMENT *à l'aide de* $q+1$ *d'entre elles et de* $2n-q$ *constantes arbitraires.*

III. — Emploi de la transformation homographique.

4. On peut remarquer que, si l'on effectue sur y une *transformation homographique,* dont les coefficients sont des fonctions de x et sur x le changement de fonction $x=\varphi(X)$, les équations (1) et (2) gardent leur *forme* et leur *degré;* donc, à toute solution de la question, pour un système de valeurs données de n, q, en correspondent une infinité dépendant de *quatre fonctions arbitraires.*

Or, nous venons de voir que la solution la plus générale dépendait de $q+1$ fonctions arbitraires.

Si q est plus grand que 2, nous avons bien un *minimum* de quatre fonctions arbitraires; mais si $q=2$, c'est-à-dire si nous sommes en présence d'une *équation de Riccati,* il semble qu'il y ait contradiction, puisqu'en réalité nous ne disposons plus que de trois fonctions arbitraires. Cela tient à ce que l'équation de Riccati admet une transformation en elle-même de la forme

$$y=\frac{h(x)Y+h_1(x)}{k(x)Y+k_1(x)}, \qquad x=\varphi(X), \tag{4}$$

dépendant d'une fonction arbitraire.

En effet, on peut toujours ramener cette équation à la forme $y'=0$, au moyen d'une transformation homographique et, sous cette dernière forme, on voit que l'équation ne change pas quand on remplace x par $\varphi(X)$.

Inversement, *si une équation* (1) *admet une* TRANSFORMATION *en elle-même dépendant d'une fonction arbitraire,* c'est une équation de Riccati.

5. Enfin, on peut se servir de la transformation homographique, suivie du changement de variable, pour ramener l'équation (1) à des formes canoniques intéressantes [1], et alors les équations (1) répondant à la question ne dépendront que de $(q+1)-4=q-3$ fonctions arbitraires; par exemple, on peut supposer que B est seulement de degré $q-3$ et que y' est de la forme

$$y'=\frac{y^{q-3}+a_{q-4}y^{q-4}+\ldots+a_0}{y^{q-2}+b_{q-3}y^{q-3}+\ldots+b_0}.$$

On peut choisir comme fonctions arbitraires les coefficients b_0, b_1, ..., b_{q-3}

(1) *Voir* P. PAINLEVÉ, *Annales de l'École Normale,* p. 21-30 et 101-104; 1892.

du dénominateur, qui dépendent *algébriquement* des coefficients α_j, β_j et non de leurs dérivées; il reste alors *quatre* fonctions arbitraires, lesquelles ne subsistent plus, d'ailleurs, si l'on assujettit le degré du numérateur à être égal à $q-3$, le coefficient de y^{q-3} étant égal à *un*. Alors les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_{q-4}$ s'exprimeront *algébriquement* à l'aide des coefficients b et de leurs dérivées premières.

IV. — Nombre de branches de l'intégrale.

6. Il resterait à démontrer que, si l'on adopte la solution la plus générale des équations (S), le degré q ne s'abaisse pas nécessairement, c'est-à-dire que les équations (S) n'entraînent pas comme conséquence que d'autres racines $y=g(x)$ de $D=0$ soient des solutions remarquables; car, s'il en était ainsi, une des équations (S′) serait conséquence des équations (S), ce qui est impossible, comme nous l'avons vu plus haut.

7. Enfin, montrons que la fonction $y(x)$ ainsi définie a bien *n branches* et *non pas un nombre moindre,* du moment que q est plus grand que *deux*.

En effet, supposons que l'intégrale générale ne prenne qu'un nombre ν de valeurs ($\nu < n$). Elle est alors réductible à la forme

$$C' = \frac{\beta_1(y,x)}{\alpha_1(y,x)}, \tag{6}$$

où β_1 et α_1 sont des polynomes en y de degré ν.

$C = \dfrac{\beta(y,x)}{\alpha(y,x)}$ est alors une fonction rationnelle de C'

$$C = R(C'). \tag{7}$$

Si C'_0 est une racine multiple de l'égalité (7), et il y en aura toujours au moins *une,* du moment que $\nu > 1$, et C_0 la valeur correspondante de C, l'égalité

$$C_0 = \frac{\alpha}{\beta} = R\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)$$

admet des solutions $y=g(x)$ *multiples,* et pour qu'elles soient seulement *doubles,* il faut que C'_0 soit racine *double* de l'égalité

$$C_0 = R(C'),$$

et que, de plus, l'équation

$$C'_0 = \frac{\alpha_1(y,x)}{\beta_1(y,x)}$$

ait ses racines en y *simples*.

Or, du moment que $\nu > 1$, cette dernière équation à plusieurs solutions

$y = g(x)$, $y = h(x)$, ... correspondant à la même valeur C_0 de C; et, comme ce sont des solutions *remarquables,* les valeurs de la constante qui leur correspondent n'auraient pas été prises *arbitrairement,* puisqu'elles sont *toutes* égales à C_0. Il est donc impossible que, pour la solution (2) la plus générale, le nombre des branches soit inférieur à n.

Le raisonnement *n'est en défaut* que si ν est égal à *un,* mais on sait que l'équation (1) correspondante est une *équation de Riccati,* par suite $q = 2$.

Donc, si l'on suppose $q > 2$, n est bien le nombre de *branches* permutables de $y(x)$.

Je n'examinerai pas davantage la discussion ni les applications aux équations à coefficients *algébriques,* pas plus que d'autres questions intéressantes, me bornant à renvoyer au Mémoire de M. Painlevé (¹), où tous ces problèmes sont traités avec les développements qu'ils comportent.

CHAPITRE II.

ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ EN y'. — APPLICATIONS.

I. — Équations a deux branches.

1. Équations de degré quatre. — L'intégrale générale des équations différentielles de cette espèce se met sous la forme

$$C = \frac{\lambda_2 y^2 + \lambda_1 y + \lambda_0}{y^2 + \mu_1 y + \mu_0} \tag{1}$$

et intègre l'équation de *degré* $q = 4$,

$$y' = \frac{\lambda'_2 y^4 + (\lambda'_2 \mu_1 + \lambda'_1 - \mu'_1 \lambda_2) y^3 + (\mu_0 \lambda'_2 - \lambda_2 \mu'_0 + \lambda'_1 \mu_1 - \mu'_1 \lambda_1) y^2 + (\mu_0 \lambda'_1 + \ldots) y + \mu_0 \lambda'_0 - \lambda_0 \mu'_0}{(\lambda_1 - \mu_1 \lambda_2) y^2 + 2(\lambda_0 - \mu_0 \lambda_2) y + \mu_1 \lambda_0 - \lambda_1 \mu_0} \tag{2}$$

où les coefficients des diverses puissances de y s'expriment *rationnellement* à l'aide des *cinq* fonctions *arbitraires* λ_2, λ_1, λ_0, μ_1, μ_0 et de leurs dérivées premières.

2. Équations de degré trois. — Pour former les équations de degré *trois* dont l'intégrale générale acquiert *deux* valeurs autour des points critiques mobiles,

(¹) *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, loc. cit.*

on pourrait exprimer, par exemple, que le numérateur et le dénominateur de y' dans la relation (2) ont un facteur commun $y - K$, d'où une relation *algébrique*

$$(3) \qquad H(\lambda_2, \lambda_1, \lambda_0, \mu_1\, \mu_0, \lambda'_2, \lambda'_1, \lambda'_0, \mu'_1, \mu'_0) = 0,$$

qu'il est facile de former, où H est un polynome entier par rapport aux fonctions λ; μ et leurs dérivées premières; en sorte qu'en supprimant le facteur commun $y - K$ [K est une fonction rationnelle des λ, μ, λ', μ' liés par la relation (3)], on obtiendrait une équation différentielle, de degré *trois* en y, dont les coefficients sont des fonctions *rationnelles* des λ, μ, λ', μ' liés par la relation *différentielle* (3).

L'équation

$$y' = \frac{P(y, x)}{Q(y, x)}$$

ainsi obtenue dépend bien de *quatre* fonctions *indépendantes,* puisque les coefficients des diverses puissances de y sont exprimés de la façon indiquée plus haut; mais comme la relation $H = 0$ contient les dérivées premières λ', μ', ..., on ne peut dire que l'on a exprimé *explicitement* les coefficients à l'aide de quatre fonctions indépendantes, puisque, pour exprimer une des cinq fonctions λ, μ en fonction des quatre autres, il faudrait savoir *intégrer* la relation $H = 0$.

Ainsi donc, pour que la question que nous nous sommes posée fût résolue, il faudrait pouvoir déduire, de la relation $H = 0$, une relation *algébrique* $H_1 = 0$ ne contenant plus les dérivées des fonctions λ, μ.

Or, la méthode employée dans ce travail, ayant précisément pour objet de substituer à la relation $H = 0$, qui contient les dérivées premières des λ, μ, une relation

$$H_1(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \mu_0, \mu_1, C_1) = 0,$$

contenant *algébriquement* les fonctions λ, μ et une constante arbitraire C_1, cette relation $H_1 = 0$ doit être considérée comme intégrant la relation $H = 0$.

Il suffit d'écrire que les deux équations

$$C_1 = \frac{\lambda_2 y^2 + \lambda_1 y + \lambda_0}{y^2 + \mu_1 y + \mu_0},$$

$$(\lambda_1 - \mu_1\lambda_2)y^2 + 2(\lambda_0 - \lambda_2\mu_0)y + \mu_1\lambda_0 - \lambda_1\mu_0 = 0$$

ont une racine commune en y, d'où la relation

$$\begin{aligned}&[(C_1 - \lambda_2)(\mu_1\lambda_0 - \mu_0\lambda_1) - (C_1\mu_0 - \lambda_0)(\lambda_1 - \mu_1\lambda_2)]^2 \\ &\quad - [2(C_1 - \lambda_2)(\lambda_0 - \mu_0\lambda_2) - (\lambda_1 - \mu_1\lambda_2)(\mu_1 C_1 - \lambda_1)][(\mu_1 C_1 - \lambda_1)(\mu_1\lambda_0 - \lambda_1\mu_0) - 2(\mu_0 C - \lambda_0)(\lambda_0 - \mu_0\lambda_0)] = 0.\end{aligned}$$

Quand cette relation est satisfaite, on peut supprimer au numérateur et au dénominateur de (2) le facteur commun

$$y[(\lambda_2-C_1)(\mu_1\lambda_0-\lambda_1\mu_0)-(\mu_0 C-\lambda_0)(\lambda_1-\mu_1\lambda_0)]+(\mu_1 C_1-\lambda_1)(\mu_1\lambda_0-\lambda_1\mu_0)+\mu_0\lambda_1-\lambda_0\mu_1,$$

et l'on obtient l'équation différentielle demandée.

Du reste, on peut supposer $\frac{1}{C_1}=0$; cela revient à remplacer

$$\lambda_0,\quad \lambda_1,\quad \lambda_2,\quad \mu_0,\quad \mu_1$$

respectivement par

$$\lambda_0-C_1\mu_0,\quad \lambda_1-C_1\mu_1,\quad \lambda_2-C_1,\quad \mu_0,\quad \mu_1,$$

et la relation $H_1=0$ se réduit alors à

$$\mu_1^2=4\mu_0,$$

relation qu'on aurait pu d'ailleurs écrire immédiatement; le facteur commun se réduit alors à $2y+\mu_1$, et après l'avoir supprimé il reste

$$(3)\qquad y'=\frac{2\lambda'_2 y^3+(\mu_1\lambda'_2+2\lambda'_1-2\mu'_1\lambda_2)y^2+(2\lambda_0+\mu_1\lambda'_1-2\mu'_1\lambda_1)y+\lambda_0\mu_1-2\mu'_1\lambda_0}{2(\lambda_1-\mu_1\lambda_2)y+4\lambda_0-\mu_1\lambda_1}.$$

3. En écrivant que l'équation différentielle s'abaisse au degré *deux* (auquel cas c'est une *équation de Riccati*), c'est-à-dire que

$$y_1=\frac{4\lambda_0-\mu_1\lambda_1}{2(\mu_1\lambda_2-\lambda_1)}$$

est une solution *remarquable*, on obtient une relation entre λ_2, λ_1, λ_0, μ_0 soit sous forme *différentielle*, en écrivant que le numérateur de (3) s'annule pour $y=y_1$, soit sous forme *algébrique* en écrivant que, pour $C=C_2$, on a

$$C_2=\frac{\lambda_2 y_1^2+\lambda_1 y_1+\lambda_0}{(2y_1+\mu_1)^2},$$

et, par suite, l'intégrale générale se met sous la forme

$$\frac{y+\dfrac{\lambda_1-4C_2\mu_1}{2(\lambda_2-4C_2)}}{2y+\mu_1}\sqrt{\lambda_2-4C_2}=C',$$

où l'on a posé

$$C'=\sqrt{C-C_2},$$

et sur cette forme on vérifie bien que l'équation différentielle est *à points critiques fixes*. C'est le cas *exceptionnel* $q=2$.

II. — Emploi de la transformation homographique suivie du changement de variable indépendante.

4. Nous avons vu que la transformation

$$x = \varphi(X), \qquad y = \frac{a(X)Y + b(X)}{Y + c(X)} \tag{4}$$

conservait le *degré* de l'équation différentielle et le nombre de *branches* de l'intégrale.

Si l'on suppose que $y = 0$, $y = 1$, $y = \infty$ sont des intégrales des équations différentielles, moyennant la transformation (4), on voit que, dans le cas de $q = 4$, l'intégrale générale (1), étant de la forme

$$C = \frac{y - 1}{xy[y - \alpha(x)]},$$

donne lieu à l'équation différentielle

$$y' = y(y - 1)\frac{\alpha'(x) - \frac{1}{x}[y - \alpha(x)]}{y^2 - 2y + \alpha(x)}. \tag{5}$$

Pour le cas de $q = 3$, la quantité α étant nulle, l'intégrale est de la forme

$$C = \frac{y - 1}{xy^2};$$

l'équation différentielle correspondante se réduit alors à

$$y' = \frac{y - 1}{x(2 - y)}. \tag{6}$$

Si l'on part des formes (5) et (6) des équations différentielles, on obtiendra toutes les équations différentielles dont l'intégrale générale a *deux branches*, en effectuant dans (5) et (6) sur x et y, la transformation (4), où $\varphi(X)$, $a(X)$, $b(X)$, $c(X)$ sont des fonctions arbitraires de X.

5. *Remarque.* — On pourra se reporter au Mémoire ([1]) déjà cité de M. Painlevé, qui contient des types d'équations un peu différents de ceux que nous avons introduits. Mais la méthode que nous avons employée permet d'obtenir des types identiques, comme nous allons le montrer rapidement.

([1]) *Annales de l'École Normale;* 1892.

6. Équations de degré quatre. — Pour que l'équation différentielle, dont

$$C = \frac{\lambda_2 y^2 + \lambda_1 y + \lambda_0}{y^2 + \mu_1 y + \mu_0}$$

représente l'intégrale, soit de la forme

$$y' = \frac{a_4 y^4 + a_3 y^3 + a_2 y^2 + a_1 y + a_0}{y},$$

il faut et il suffit que l'on ait

$$\mu_1 \lambda_0 - \lambda_1 \mu_0 = 0, \qquad \lambda_1 - \mu_1 \lambda_2 = 0, \qquad \text{avec} \qquad \lambda_0 - \lambda_2 \mu_0 \not\equiv 0,$$

d'où

$$\lambda_1 = \mu_1 = 0,$$

$$y' = \frac{\lambda'_2 y^4 + (\lambda'_2 \mu_0 + \lambda'_0 - \lambda'_2 \mu'_0) y^2 + \lambda'_0 \mu_0 - \lambda_0 \mu'_0}{2(\lambda_0 - \lambda_2 \mu_0) y}.$$

7. Équations de degré trois. — Pour que q soit égal à *trois*, il faut et il suffit que pour $C = C_1$, $y = 0$ soit solution remarquable, d'où

$$C_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_0},$$

ou bien encore que pour $C = C_2$, $y = \infty$ soit solution remarquable, d'où

$$\lambda_2 = C_2.$$

On obtiendra alors les deux formes

$$y' = \frac{\lambda'_2 y^3 + [\lambda'_2 \mu_0 + \mu'_0 (C_1 - \lambda_2)] y}{2 \mu_0 (C_1 - \lambda_2)},$$

$$y' = \frac{(\lambda'_0 - C_2 \mu'_0) y^2 + \lambda'_0 \mu_0 - \lambda_0 \mu'_0}{2(\lambda_0 - C_2 \mu_0) y},$$

qui se déduisent, d'ailleurs, l'une de l'autre par le changement de y en $\frac{1}{y}$.

Dans chacune de ces deux formes, la constante arbitraire introduite figure d'une façon artificielle, la première de ces deux formes pouvant s'écrire

$$y' = \frac{\frac{d}{dx}(\lambda_2 - C_1) y^3 + \mu_0 \frac{d}{dx}(\lambda_2 - C_1) - \mu'_0 (\lambda_2 - C_1)}{-2 \mu_0 (\lambda_2 - C_1)};$$

si l'on pose

$$\lambda_2 - C_1 = A,$$

il vient

$$y' = \frac{A' y^3 + \mu_0 A' - \mu'_0 A}{-2\mu_0 A},$$

et l'on retombe bien ainsi sur un type très simple obtenu par M. Painlevé.

III. — Équations a trois branches.

8. Équations de degré six. — L'intégrale générale étant de la forme

$$(7) \qquad C = \frac{\lambda_3 y^3 + \lambda_2 y^2 + \lambda_1 y + \lambda_0}{y^3 + \mu_2 y^2 + \mu_1 y + \mu_0},$$

l'équation différentielle correspondante (1) la plus générale est de degré *six*

$$(8) \quad y' = \frac{(\lambda'_3 y^3 + \lambda'_2 y^2 + \lambda'_1 y + \lambda'_0)(y^3 + \mu_2 y^2 + \mu_1 y + \mu_0) - (\mu'_2 y^2 + \mu'_1 y + \mu'_0)(\lambda_3 y^3 + \lambda_2 y^2 + \lambda_1 y + \lambda_0)}{(3y^2 + 2\mu_2 y + \mu_1)(\lambda_3 y^3 + \lambda_2 y^2 + \lambda_1 y + \lambda_0) - (3\lambda_3 y^2 + 2\lambda_2 y + \lambda_1)(y^3 + \mu_2 y^2 + \mu_1 y + \mu_0)}.$$

Nous disposons des coefficients de la transformation homographique, de façon que trois des racines du dénominateur, qui après les réductions est du quatrième degré, soient 0, 1 et ∞, d'où les conditions

$$(9) \qquad \lambda_2 - \mu_2 \lambda_3 = 0, \qquad \mu_1 \lambda_0 - \lambda_1 \mu_0 = 0,$$

$$(10) \qquad 2\lambda_1 + 3\lambda_0 + \lambda_1 \mu_2 + 2\lambda_0 \mu_2 = 0.$$

Le dénominateur D devient alors

$$D = \frac{2\lambda_1}{\lambda_0}(\lambda_0 - \mu_0 \lambda_3)\, y(y-1)\left(y - \frac{\mu_2 \lambda_0}{\lambda_1}\right),$$

et l'on a pour l'équation différentielle

$$y' = \frac{B(y, x)}{A(y, x)},$$

où A et B ont les développements suivants :

$$\begin{aligned}
B \equiv\ & \lambda_0^2 \lambda'_3 y^6 + 2\mu_2 \lambda'_3 \lambda_0^2 y^5 \\
& + [\lambda_0^2(\lambda'_3 \mu_2^2 + \lambda'_1) + \lambda_0 \lambda_1 (\lambda'_3 \mu_0 - \lambda_3 \mu'_0) - \lambda_0 \lambda'_1 \mu_0 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda'_0 \mu_0 \lambda_3]\, y^4 \\
& + [\lambda_0^2(\lambda'_3 \mu_0 + \lambda'_0 - \lambda_3 \mu'_0 + \mu_2 \lambda'_1 - \lambda_1 \mu'_2) \\
& \quad + \lambda_0 \mu_2 \lambda_1 (\lambda'_3 \mu_0 - \lambda_3 \mu'_0) - \lambda_0 \mu_0 \lambda_3 (\mu_2 \lambda'_1 - \lambda_1 \mu'_2) + \mu_0 \lambda_3 \lambda'_0 \lambda_1 \mu_2]\, y^3 \\
& + [-\mu'_2 \lambda_0^3 + \lambda_0^2 \mu_0 (\mu'_2 \lambda_3 + \mu_2 \lambda'_3) + \lambda_0^2 \mu_2 (\lambda'_0 - \lambda_3 \mu'_0) + \lambda_1^2 (\lambda'_0 \mu_0 - \lambda_0 \mu'_0)]\, y^2 \\
& + [2\lambda_0 \lambda_1 (\lambda'_0 - \mu'_0 \lambda_0)]\, y + \lambda_0^2 (\lambda'_0 \mu_0 - \lambda_0 \mu'_0),
\end{aligned}$$

$$A \equiv 2\lambda_1 \lambda_0 (\lambda_0 - \mu_0 \lambda_3)\, y(y-1)\left(y - \frac{\mu_2 \lambda_0}{\lambda_1}\right),$$

les fonctions λ, μ étant liées par les relations (9) et (10).

9. Équations de degré cinq. — Écrivons qu'une des racines de D, par exemple $y = \infty$, est intégrale de (7), d'où

$$\lambda_3 = \text{const.},$$

et comme λ_3 ne figure que dans la combinaison $\mu_0 \lambda_3$, on peut supposer $\lambda_3 = 0$, d'où $\lambda_2 = 0$, et l'équation différentielle correspondante est de la forme

$$y' = \frac{B(y, x)}{A(y, x)},$$

où B et A ont pour expressions

$$\begin{aligned} B \equiv \lambda_0^2 \lambda_1' y^4 &+ \lambda_0^2 (\lambda_0' + \mu_2 \lambda_1' - \lambda_1 \mu_2') y^3 \\ &+ [-\mu_2' \lambda_0^3 + \lambda_0^2 \mu_2 \lambda_0' + \lambda_1^2 (\lambda_0' \mu_0 - \lambda_0 \mu_0')] y^2 \\ &+ 2\lambda_0 \lambda_1 (\lambda_0' \mu_0 - \lambda_0 \mu_0') y + \lambda_0^2 (\mu_0 \lambda_0' - \mu_0' \lambda_0), \end{aligned}$$

$$A \equiv 2\lambda_1 \lambda_0^2 y (y-1)\left(y - \frac{\mu_2 \lambda_0}{\lambda_1}\right),$$

λ_0, λ_1, μ_2 et μ_0 étant liés par la relation

$$2\lambda_1 + 3\lambda_0 + \lambda_1 \mu_2 + 2\lambda_0 \mu_2 = 0.$$

10. Équations de degré quatre. — Deux cas peuvent se présenter, car l'abaissement du degré de l'équation (8) provient de la présence de deux solutions remarquables doubles, ou d'une solution remarquable triple.

Premier cas : *Il existe deux solutions remarquables doubles.* — Soient $y = 0$, $y = \infty$, d'où

$$\lambda_3 = C_3, \qquad \frac{\lambda_0}{\mu_0} = C_0;$$

on peut supposer

$$C_3 = 0, \qquad C_0 = \infty, \qquad \text{d'où} \qquad \mu_0 = 0, \qquad \mu_1 = 0,$$

et, par suite,

$$y' = \frac{y[\lambda_1' y^2 + (\lambda_0' + \mu_2 \lambda_1' - \lambda_1 \mu_2') y + \mu_2 \lambda_0' - \lambda_0 \mu_2']}{2\lambda_1 (y-1)\left(y - \frac{\mu_2 \lambda_1}{\lambda_0}\right)},$$

avec

$$2\lambda_1 + 3\lambda_0 + \lambda_1 \mu_2 + 2\lambda_0 \mu_2 = 0.$$

Deuxième cas : *Il y a une solution remarquable triple.* — Soit $y = \infty$, d'où

$$\lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1 = 0, \qquad \mu_1 = 0, \qquad 2\mu_2 + 3 = 0,$$

$$y' = \frac{-\lambda_0' y^3 + \frac{3}{2} \lambda_0' y^2 + \mu_0' \lambda_0 - \mu_0 \lambda_0'}{3y(y-1)}.$$

11. Équations de degré trois. — Nous devons distinguer deux cas, suivant qu'il y a trois solutions remarquables doubles, ou une solution triple et une solution double.

Premier cas : *Il y a trois solutions doubles.* — Soient o, 1, ∞. Nous n'avons qu'à écrire que, pour l'équation (9), $y = 1$ est en outre une solution remarquable correspondant à la valeur $C = 1$ de la constante, d'où les conditions

$$\lambda_3 = \lambda_2 = \mu_1 = \mu_0 = 0, \qquad 1 + \mu_2 = \lambda_1 + \lambda_0, \qquad \lambda_1 + 2\lambda_0 + 1 = 0,$$

et l'équation différentielle prend la forme

$$y' = \frac{\lambda'_0(1-y)}{(2\lambda_0+1)\left[\dfrac{(\lambda_0+2)(2\lambda_0+1)}{\lambda_0} - y\right]}, \tag{10}$$

dont l'intégrale générale est

$$C = \frac{(2\lambda_0+1)y - \lambda_0}{(\lambda_0+2)y - y^3}. \tag{11}$$

Deuxième cas : *Il y a une solution triple et une solution double.* — Soient $y = \infty$ solution triple et $y = 0$ solution double, d'où

$$\lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1 = \mu_1 = 0, \qquad 2\mu_2 + 3 = 0, \qquad \mu_0 = 0,$$

$$y' = \frac{\lambda'_0 y(-y + \frac{3}{2})}{3(y-1)}. \tag{12}$$

12. *Remarque I.* — Si l'on exprimait qu'il y a un abaissement plus considérable, on obtiendrait une *équation de Riccati.*

On peut vérifier sur les formes correspondantes de l'intégrale générale que l'on se trouve bien en présence d'une équation à *points critiques fixes.*

Pour l'équation (10), par exemple, si l'on exprimait qu'il y a abaissement d'une unité dans le degré, c'est-à-dire que

$$y = \frac{(\lambda_0+2)(2\lambda_0+2)}{\lambda_0}$$

est une solution remarquable *double,* correspondant à une valeur $C = C_1$ de la constante, on obtiendrait une *équation de Riccati,* et, d'autre part, l'intégrale générale se réduisant à la forme

$$\alpha_1 y^3 + \beta_1 y^2 + \gamma_1 y + \delta_1 = 0,$$

où α_1, β_1, γ_1, δ_1 sont des constantes numériques, l'équation différentielle correspondante aurait bien ses *points critiques fixes.*

De même, si l'on exprime que $y=1$ est solution double pour l'équation (12), il vient

$$\lambda'_0=0, \qquad \text{d'où} \qquad y'=0,$$

et l'intégrale générale, se réduisant à

$$2y^3-3y+\alpha_1=0,$$

où α_1 est une constante numérique, a bien encore ses *points critiques fixes*.

Remarque II. — Si l'on avait exprimé tout d'abord que $y=\frac{\mu_2\lambda_0}{\lambda_1}$ est solution remarquable, on aurait rencontré des formes d'équations différentielles, identiques à celles trouvées par M. Painlevé [1] à l'aide de sa première méthode.

13. Signalons enfin les types intéressants d'équations différentielles, obtenus en écrivant que l'équation différentielle admet $y=0$, $y=1$, $y=\infty$ comme solutions *ordinaires* pour les valeurs $C=0$, $C=1$, $C=\infty$ de la constante. Ceci est toujours possible puisque l'équation différentielle dépend au moins des quatre fonctions arbitraires $\varphi(x)$, $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ de la transformation

$$X=\varphi(x), \qquad Y=\frac{a(x)y+b(x)}{y+c(x)},$$

et que toutes les formes de l'intégrale générale (7) se déduisent de l'une d'entre elles par le changement de C en $\frac{\alpha C+\beta}{C+\delta}$.

L'équation de degré *six* s'obtient en partant de

$$C=\frac{y^3+\lambda_2 y^2+\lambda_1 y}{\mu_2 y^2+\mu_1 y+\mu_0},$$

avec

$$\lambda_2+\lambda_1+1=\mu_2+\mu_1+\mu_0;$$

d'où

$$y'=\frac{y(y-1)A}{B},$$

où A et B sont deux polynomes de degrés trois et quatre.

Écrivons que $y=\infty$ est solution remarquable, d'où l'équation de degré *cinq*

$$C=\frac{y^3+\lambda_2 y^2+\lambda_1 y}{\mu_1 y+\mu_0}, \qquad y'=\frac{y(y-1)A}{B},$$

A et B étant du troisième degré; et l'on formera de même les équations de degrés

(1) *Annales de l'École Normale*, 1892, *loc. cit.*

quatre et *trois*

$$C = \frac{y^3 + \lambda_2 y^2}{\mu_1 y + \mu_0}, \qquad y' = \frac{y(y-1)[-\mu'_1 y + \mu'_0 \lambda_2 - \lambda'_2 \mu_0]}{2\mu_1 y^2 + (3\mu_0 + \lambda_2 \mu_1) y + 2\lambda_2 \mu_0},$$

avec

$$\lambda_2 + 1 = \mu_1 + \mu_0,$$

et

$$C = \frac{y^3 + \lambda_2 y^2}{(3 + 2\lambda_2) y - (\lambda_2 + 2)}, \qquad y' = \frac{y(1-y)\lambda'_2}{(2\lambda_2 + 3) y + \lambda_2(\lambda_2 + 2)}.$$

IV. — Équations a quatre branches.

14. Dans tout ce qui suit, nous supposerons qu'on a disposé des coefficients de la transformation homographique, de façon que $y = 0$, $y = 1$, $y = \infty$ soient des *solutions ordinaires* de l'équation différentielle. Il suffira alors, dans tous les types que nous obtiendrons, de remplacer y par $\dfrac{\alpha y + \beta}{y + \delta}$ pour former *toutes* les équations différentielles de l'espèce indiquée. Elles contiendront, par conséquent, *rationnellement* les fonctions arbitraires α, β, δ et leurs dérivées premières.

Le degré de ces équations varie entre *huit* et *trois*. Je vais passer très rapidement sur les équations de degrés *huit, sept, six* et *cinq* dont la formation est analogue à celles des équations du paragraphe précédent, et j'insisterai plus longuement sur les équations du *quatrième* et du *troisième* degrés.

I. Équations de degré huit. — L'intégrale générale est de la forme

$$(1) \quad C = \frac{y(y^3 + \lambda_2 y^2 + \lambda_1 y + \lambda_0)}{\mu_3 y^3 + \mu_2 y^2 + \mu_1 y + \mu_0} \qquad (1 + \lambda_2 + \lambda_1 + \lambda_0 = \mu_3 + \mu_2 + \mu_1 + \mu_0),$$

d'où

$$(1)' \qquad y' = \frac{y(y-1)[\mu'_3 y^5 + \ldots + \mu_0 \lambda'_0 - \lambda_0 \mu'_0]}{4\mu_3 y^6 + 2\mu_2 y^5 + \ldots + \mu_0 \lambda_0}.$$

II. Équations de degré sept. — Écrivons que $y = \infty$ est solution remarquable double pour $C = \infty$, d'où

$$(2) \qquad C = \frac{y(y^3 + \lambda_2 y^2 + \lambda_1 y + \lambda_0)}{\mu_2 y^2 + \mu_1 y + \mu_0} \qquad (1 + \lambda_2 + \lambda_1 + \lambda_0 = \mu_2 + \mu_1 + \mu_0),$$

$$(2)' \quad y' = \frac{y(y-1)[\mu'_2 y^4 + (\mu'_2 + \mu'_1 + \lambda_2 \mu'_2 - \lambda'_2 \mu_2) y^3 + \ldots + \mu_0 \lambda'_0 - \lambda_0 \mu'_0]}{2\mu_2 y^5 + (3\mu_1 + \lambda_2 \mu_2) y^4 + \ldots + \lambda_0 \mu_0}.$$

III. Équations de degré six. — Deux cas peuvent se présenter :

Premier cas : *Il y a deux solutions remarquables doubles.* — Soient $y=\infty$, $y=0$ pour $C=\infty$, $C=0$,

$$(3)\qquad C=\frac{y^2(y^2+\lambda_2 y+\lambda_1)}{\mu_2 y^2+\mu_1 y+\mu_0}\qquad (1+\lambda_1+\lambda_0=\mu_2+\mu_1+\mu_0),$$

$$(3)'\qquad y'=\frac{y(y-1)[\mu'_2 y^3+(\mu'_2+\mu'_1+\lambda_2\mu'_2-\lambda'_2\mu^2)y^2+\ldots+\mu_0\lambda'_0-\lambda_0\mu'_0]}{2\mu_2 y^4+(3\mu_1+\lambda_2\mu_2)y^3+\ldots+2\lambda_1\mu_0}.$$

Deuxième cas : *Il y a une solution remarquable triple.* — Soit $y=\infty$ pour $C=\infty$,

$$(4)\qquad C=\frac{y(y^3+\lambda_2 y^2+\lambda_1 y+\lambda_0)}{\mu_1 y+\mu_0}\qquad (\mu_1+\mu_0=1+\lambda_2+\lambda_1+\lambda_0),$$

$$(4)'\qquad y'=\frac{y(y-1)[\mu'_1 y^3+(\mu'_0+\mu'_1+\lambda_2\mu'_1-\mu_1\lambda'_2)y^2+\ldots+\mu_0\lambda'_0-\lambda_0\mu'_0]}{3\mu_1 y^4+(4\mu_0+2\lambda_2\mu_1)y^3+\ldots+\lambda_0\mu_0}.$$

IV. Équations de degré cinq. — Trois cas peuvent se présenter :

Premier cas : *Il y a trois solutions remarquables doubles.* — Soient $y=0$, $y=1$, $y=\infty$ pour $C=0$, $C=1$, $C=\infty$;

$$(5)\qquad C=\frac{y^2(y^2+Ay+B)}{Dy^2+(3A+2B-2D+4)y-2A-B+D-3}.$$

L'équation différentielle correspondante est

$$M-Ny'=0,$$

où l'on a

$$\begin{aligned}
N\equiv{}& D'y^5+(AD'-DA'+2B'+3A'-2D')y^4\\
&+[BD'-DB'+2(AB'-BA')-2(AD'-DA')-6A'-B'+D']y^3\\
&+[AD'-DA'-2(BD'-DB')-4(AB'-BA')]y^2\\
&+[2(AB'-BA')+BD'-DB'+3B']y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\equiv{}& y(y-1)^2[D'y^2+(3A'+2B'+AD'-DA')y\\
&+2(AB'-BA')+BD'-DB'+3B']
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M\equiv{}& 2Dy^4+(9A+6B-6D+AD+12)y^3\\
&+(6A^2+4AB-4AD-4B+4D-12)y^2\\
&+(-6A^2+3AD-9A+2B^2-2BD+4B)y+2B(-2A-B+D-3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\equiv{}&(y-1)[2Dy^3+(9A+6B-4D+AD+12)y^2\\
&+(9A+2B-3AD+6A^2+4AB)y+2B(2A+B-D+3)],
\end{aligned}$$

d'où

$$(5)'\qquad y'=\frac{y(y-1)[D'y^2+(3A'+2B'+AD'-DA')y+2(AB'-BA')+BD'-DB'+3B']}{2Dy^3+(9A+6B-4D+AD+12)y^2+(9A+2B-3AD+6A^2+4AB)y+2B(2A+B-D+3)}.$$

Deuxième cas : *Il y a une solution remarquable triple et une solution double.* — Soient $y = \infty$ et $y = 0$,

$$(6) \qquad C = \frac{y^2(y^2 + Ay + B)}{Dy + A + B - D + 1},$$

$$(6)' \qquad y' = \frac{y(y-1)[D'y^2 + (AD' - DA' + A' + B')y + AB' - BA' + BD' - DB' + B']}{(4y^2 + 3Ay + 2B)(Dy + A + B - D + 1) - D(y^3 + Ay^2 + B)}.$$

Troisième cas : *Il y a une solution remarquable quadruple.* — Soit $y = \infty$ pour $C = \infty$,

$$(7) \qquad C = Ay^4 + By^3 + Dy^2 + (1 - A - B - D)y,$$

$$(7)' \qquad y' = \frac{y(1-y)[A'y^2 + (A' + B')y + A' + B' + D']}{4Ay^3 + 3By^2 + 2Dy + 1 - A - B - D}.$$

V. Équations de degré quatre. — Dans tous les exemples formés jusqu'à présent, le nombre de valeurs remarquables de la constante n'étant jamais supérieur à *trois,* on pouvait faire en sorte qu'aucune constante arbitraire ne figurât dans l'équation différentielle définitive. En effet, toutes les formes de l'intégrale, se déduisant de l'une d'entre elles par le changement de C en $\frac{\alpha_1 C + \beta_1}{C + \gamma_1}$ (α_1, β_1, γ_1 désignant des constantes numériques), on peut donner à trois des valeurs remarquables de la constante les valeurs 0, 1 et ∞.

Nous allons rencontrer maintenant des équations où une ou deux *constantes arbitraires distinctes* figureront *algébriquement* d'une façon essentielle.

Nous supposerons toujours qu'on a effectué sur y une transformation homographique, telle que 0, 1, ∞ soient des intégrales correspondant aux valeurs 0, 1, ∞ de la constante d'intégration.

Premier cas : *Il y a une solution quadruple* (soit $y = \infty$) *et une solution double* (soit $y = 0$); d'où

$$(8) \qquad C = Ay^4 + By^3 + (1 - A - B)y^2,$$

$$(8)' \qquad y' = \frac{y(1-y)(A'y + A' + B')}{4Ay^2 + 3By + 2(1 - A - B)}.$$

Deuxième cas : *Il y a deux solutions triples.* — Soient $y = \infty$ et $y = 0$,

$$(9) \qquad C = \frac{y^2(y^2 + Ay)}{By + 1 + A - B},$$

$$(9)' \qquad y' = \frac{y(y-1)[B'y + AB' - BA' + A']}{3By^2 + [4(A - B + 1) + 2AB]y + 3A(1 - A - B)}.$$

Troisième cas : *Il y a une solution triple et deux solutions doubles.* —

Soient $y=\infty$, $y=0$, $y=1$, on obtient les formes suivantes :

$$(10)\qquad C=\frac{y^2(y^2+Ay+B)}{(3A+2B+4)y-(2A+B+3)},$$

$$(10)'\qquad y'=\frac{y(y-1)[(3A'+2B')y+3B'+2(AB'-BA')]}{3(3A+2B+4)y^2+(6A^2+9A+4AB+2B)y+2B(2A+B+3)}.$$

Quatrième cas : *Il y a quatre solutions doubles.* — Soient $y=0$, $y=1$, $y=\infty$ les trois premières solutions doubles, correspondant aux valeurs $C=0$, $C=1$, $C=\infty$ de la constante, l'intégrale générale est de la forme (5).

Pour exprimer qu'il existe une solution remarquable *double,* pour la valeur $C=\gamma$ de la constante, il faut écrire que les deux équations

$$(11)\qquad \begin{cases} 4y^3+3Ay^2+2(B-D\gamma)y-\gamma(3A+2B-2D+4)=0,\\ Ay^3+2(B-D\gamma)y^2-3\gamma(3A+2B-2D+4)y+4(2A+B-D+3)\gamma=0,\end{cases}$$

ou, ce qui revient au même, que les deux équations qui s'en déduisent

$$\begin{aligned}&[3A^2+8(D\gamma-B)]y^2+[2A(B-D\gamma)+12\gamma(3A+2B-2D+4)]y\\&\qquad-\gamma A(3A+2B-2D+4)-16(2A+B-D+3)=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&[16(2A+B-D+3)+A\gamma(3A+2B-2D+4)]y^2\\&\quad+[12A(2A+B-D+3)+2\gamma(3A+2B-2D+4)(B-D\gamma)]y\\&\qquad+8(B-D\gamma)(2A+B-D+3)-3\gamma^2(3A+2B-2D+4)^2=0,\end{aligned}$$

et que j'écris

$$(12)\qquad \begin{cases} Uy^2+Vy+W=0,\\ U_1y^2+V_1y+W_1=0,\end{cases}$$

aient une racine commune, d'où une relation *algébrique*

$$(13)\qquad (UW_1-WU_1)^2-4(UV_1-VU_1)(VW_1-WV_1)\equiv H(A,B,D,\gamma)=0,$$

qui permet d'exprimer D, par exemple, en fonction *algébrique* de A, B et de la constante arbitraire γ

$$D=h(A,B,\gamma).$$

L'intégrale remarquable a pour expression

$$y_1(x)=\frac{UV_1-VU_1}{U_1W-UW_1}\equiv\frac{P(A,B,D,\gamma)}{Q(A,B,D,\gamma)},$$

où P et Q sont deux polynomes en A, B, D et γ; et A, B, D, γ étant liés par la relation *algébrique* $H=0$.

Moyennant ces conditions, le numérateur et le dénominateur de l'équation $(5)'$ s'annulent pour $y = y_1(x)$ et l'équation différentielle se réduit à

$$(14)\quad y' \equiv \frac{y(y-1)[D'P(A,B,D,\gamma)y - 3B'Q(A,B,D,\gamma)]}{2DP(A,B,D,\gamma)Q(A,B,D,\gamma)y^2 + [9A+6B-4D+AD+12+2DP(A,B,D,\gamma)]P(A,B,D,\gamma)y - 2B(2A+B-D+3)}$$

avec

$$H(A, B, D, \gamma) = 0.$$

Remarque I. — Si l'on exprimait directement que le numérateur et le dénominateur de l'expression $(5)'$ ont un facteur commun différent de y et de $y-1$, c'est-à-dire que les deux équations

$$D'y^2 + (3A' + 2B' + AD' - DA')y + 2(AB' - BA') + BD' - DB' + 3B' = 0,$$
$$2Dy^3 + (9A + 6B - 4D + AD + 12)y^2 + \ldots + 2B(2A + B - D + 3) = 0$$

ont une racine commune, on obtiendrait

$$K(A, B, D, A', B', D') = 0,$$

relation différentielle algébrique entre les coefficients A, B, D, dont la relation $H = 0$ donne l'intégrale, en exprimant D, par exemple, en fonction *algébrique* de A, de B et de la constante arbitraire γ.

Remarque II. — On peut pousser plus loin les calculs et exprimer les coefficients de l'équation différentielle (13) en fonction RATIONNELLE de deux fonctions *arbitraires* convenablement choisies, de leurs dérivées premières et de la constante arbitraire γ. La relation

$$H(A, B, D, \gamma) = 0$$

exprime, en effet, que les deux équations (12) ont une racine commune T. Prenons cette racine commune T comme *fonction arbitraire,* nous pouvons alors exprimer A et B en fonction rationnelle de D, T et γ en résolvant les équations (12) par rapport à A et B.

On obtient alors A et B sous la forme de deux fractions ayant pour dénominateur commun

$$3(T^2 - \gamma)(T^2 - 3\gamma T + 2) - (T - \gamma)(T^3 - 9\gamma T),$$

et pour numérateurs, la première

$$2D\gamma[(T-1)(T^2 - 3\gamma T + 2) - (T-\gamma)(T-1)(T-2)]$$
$$- 4(T^3 - \gamma)(T^2 - 3\gamma T + 2) - 12(T-1)(T-\gamma),$$

la seconde

$$D\gamma[-(T-1)(T^3 - 9\gamma T) + 3(T-1)(T-2)(T^2-\gamma)]$$
$$+ 2(T^3 - \gamma)(T^3 - 9\gamma T) + 36\gamma(T-1)(T^2-\gamma),$$

et l'équation différentielle correspondante devient, après la suppression du facteur $y - T$ qui figure au numérateur et au dénominateur de $(5)'$,

$$y' = \frac{y(y-1)[TD'y + 2(BA' - AB') + DB' - BD' - 3B']}{2DTy^2 + T(2DT + 9A + 6B - 4D + AD + 12)y - 2B(2A + B - D + 3)},$$

où A *et* B *doivent être remplacés par les fonctions* RATIONNELLES *de* D, T *et* γ *trouvées précédemment; et* A', B' *par leurs dérivées.*

VI. ÉQUATIONS DE DEGRÉ TROIS. — Il y a cinq cas à distinguer :

PREMIER CAS : *Il existe deux solutions triples et une solution double.* — Soient $y = 0$, $y = \infty$, $y = 1$,

$$C = \frac{y^3(y + A)}{(3A + 4)y - (2A + 3)},$$

$$y' = \frac{A'y(y-1)}{(3A + 4)y + A(2A + 3)};$$

DEUXIÈME CAS : *Il existe une solution quadruple et deux solutions doubles.* — Soient $y = \infty$, $y = 0$, $y = 1$,

$$C = y^2[Ay^2 - 2(A + 1)y + A + 3],$$

$$y' = \frac{A'y(y-1)}{2(A+3) - 4Ay};$$

TROISIÈME CAS : *Il existe une solution quadruple et une solution triple.* — Soient $y = \infty$, $y = 0$,

$$C = y^3(Ay + 1 - A),$$

$$y' = \frac{A'y(1-y)}{4Ay + 3(1-A)};$$

QUATRIÈME CAS : *Il existe une solution triple et trois solutions doubles.* — Soient $y = \infty$ la solution triple, $y = 0$, $y = 1$ deux des solutions doubles.

Nous partons de la forme d'intégrale générale (10)

$$C = \frac{y^2(y^2 + Ay + B)}{(3A + 2B + 4)y - (2A + B + 3)}.$$

Exprimons qu'il existe une nouvelle solution remarquable *double* pour la valeur $C = \gamma$ de la constante. Cela reviendra, comme dans le § V, à exprimer que deux équations du second degré

$$Uy^2 + Vy + W = 0,$$
$$U_1y^2 + V_1y + W_1 = 0$$

ont une racine commune, d'où une relation

$$H_1(A, B, \gamma) = 0$$

permettant d'exprimer B en fonction *algébrique* de A et de la constante arbitraire γ; l'intégrale remarquable correspondante sera la racine commune

$$y_1(x) = \frac{P_1(A, B, \gamma)}{Q_1(A, B, \gamma)}$$

aux deux équations précédentes, P_1 et Q_1 étant des polynômes entiers en A, B, γ; l'équation différentielle $(10)'$ s'abaissera au degré *trois* par la suppression du facteur commun $y - y_1$ au numérateur et au dénominateur de y', et il restera

$$(15) \qquad y' = \frac{y(y-1)(3A' + 2B')P_1(A, B, \gamma)}{3(3A + 2B + 4)P_1(A, B, \gamma)y - 2B(2A + B + 3)Q_1(A, B, \gamma)}$$

avec

$$H_1(A, B, \gamma) = 0.$$

Remarque I. — Si l'on écrit que $(10)'$ se réduit au degré *trois*, en exprimant que $y_1 = \dfrac{2(BA' - AB') - 3B'}{3A' + 2B'}$ est une racine du dénominateur, on obtient une relation différentielle *algébrique*

$$\begin{aligned}3(3A + 2B + 4)[2(BA' - AB') - 3B']^2 + 2B(2A + B + 3)(3A' + 2B')^2 \\ - (6A^2 + 9A + 4AB + 2B)[2(AB' - BA') + 3B'](3A' + 2B') = 0,\end{aligned}$$

dont l'intégrale générale est précisément mise sous la forme *algébrique*

$$H_1 = 0.$$

Remarque II. — On peut exprimer les coefficients de l'équation différentielle (14) en fonction RATIONNELLE d'une fonction *arbitraire* $T(x)$, de sa dérivée première et de la constante *arbitraire* γ.

En effet, quand la condition

$$H_1(A, B, \gamma) = 0$$

est satisfaite, les deux équations

$$\begin{gathered}4y^3 + 3Ay^2 + 2By - \gamma(3A + 2B + 4) = 0, \\ Ay^3 + 2By^2 - 3(3A + 2B + 4)\gamma y + 4\gamma(2A + B + 3) = 0\end{gathered}$$

ont une racine commune $T(x)$; on a alors les deux relations

$$\begin{gathered}A(3T^2 - 3\gamma T + 2\gamma) + B(2T - 2\gamma T + \gamma) = -4T^3 + 4\gamma T - 3\gamma, \\ A(T^3 - 9\gamma T + 8\gamma) + 2B(T^3 - 3\gamma T + 2\gamma) = 12\gamma(T - 1),\end{gathered}$$

qui, résolues en A et B, donnent A et B en fonction *rationnelle* de $T(x)$ et de γ.

L'équation différentielle devient alors

$$y' = \frac{y(y-1)(3A'+2B')T}{3(3A+2B+4)Ty - 2B(2A+B-3)},$$

où l'on doit remplacer A et B par les valeurs précédentes, et A' et B' par leurs dérivées.

Cinquième cas : *Il existe cinq solutions remarquables doubles.* — Nous avons vu précédemment que, dans le cas de *quatre* solutions doubles, l'équation correspondante (14) était du quatrième degré.

Pour qu'elle s'abaisse au troisième degré, il faut et il suffit qu'il existe une nouvelle solution remarquable pour une valeur γ_1 de la constante, autrement dit que les deux équations

$$U' y^2 + V' y + W' = 0,$$
$$U'_1 y^2 + V'_1 y + W'_1 = 0$$

qui ne diffèrent des équations (11) que par le changement de γ en γ_1, aient également une racine commune, d'où la relation

$$H(A, B, D, \gamma_1) = 0$$

qui, jointe à la relation

$$H(A, B, D, \gamma) = 0,$$

détermine B et D en fonction *algébrique* de A et des deux *constantes arbitraires* γ et γ_1. De plus, l'intégrale *remarquable* correspondant à γ_1 a pour expression

$$y_2(x) = \frac{U'V'_1 - V'U'_1}{U'_1 W' - W' U'_1} \equiv \frac{P(A, B, D, \gamma_1)}{Q(A, B, D, \gamma_1)},$$

et l'équation différentielle ainsi obtenue s'écrit :

$$(16)\quad y' = \frac{P(A, B, D, \gamma)\, P(A, B, D, \gamma_1)\, D' y (y-1)}{2P(A, B, D, \gamma)\, P(A, B, D, \gamma_1)\, D y + 2B(2A+B-D+3)\, Q(A, B, D, \gamma)\, Q(A, B, D, \gamma_1)},$$

où les coefficients sont des fonctions ALGÉBRIQUES *de* A *et des deux constantes* γ *et* γ_1, ou encore *des fonctions* ENTIÈRES *des quantités* A, B, D, γ, γ_1 *liées par les deux relations* $H = 0$, $H' = 0$.

Remarque I. — Les deux relations *algébriques*

$$H(A, B, D, \gamma) = 0, \qquad H(A, B, D, \gamma_1) = 0$$

donnent précisément l'intégrale des deux relations différentielles *algébriques* obtenues en écrivant que, dans l'équation (5)', le polynôme

$$2Dy^3 + \ldots + 2B(2A+B-D+3)$$

est divisible par

$$D'y^2 + \ldots + 2(AB' - BA') + BD' - DB' + 3B'.$$

Remarque II. — Les coefficients de l'équation différentielle (16), que l'on vient de former, peuvent encore s'exprimer *rationnellement* à l'aide de deux fonctions $\Theta(x)$, $T(x)$ liées par une relation *algébrique*, de leurs dérivées premières et des *deux constantes arbitraires* γ et γ_1.

En effet, en désignant par $T(x)$ et $\Theta(x)$ les deux intégrales *remarquables* correspondant aux valeurs γ et γ_1 de la constante, A, B et D vérifient les relations

$$(17)\quad \left\{\begin{array}{c} 3(T^2 - \gamma)A + 2(T - \gamma)B - 2D\gamma(T - 1) + 4(T^3 - \gamma) = 0, \\ (T^3 - 9\gamma T)A + 2(T^2 - 3\gamma T + 2)B - 2D\gamma(T - 1)(T - 2) - 12\gamma(T - 1) = 0, \\ 3(\Theta^2 - \gamma_1)A + 2(\Theta - \gamma_1)B - 2D\gamma_1(\Theta - 1) + 4(\Theta^3 - \gamma_1) = 0, \\ (\Theta^3 - 9\gamma_1\Theta)A + 2(\Theta^2 - 3\gamma_1\Theta + 2)B - 2D\gamma_1(\Theta - 1)(\Theta - 2) - 12\gamma_1(\Theta - 2) = 0. \end{array}\right.$$

Ces relations seront compatibles, si le déterminant

$$\left|\begin{array}{cccc} 3(T^2 - \gamma) & T - \gamma & \gamma(T - 1) & T^3 - \gamma \\ T^3 - 9\gamma T & T^2 - 3\gamma T + 2 & \gamma(T - 1)(T - 2) & \gamma(T - 1) \\ 3(\Theta^2 - \gamma_1) & \Theta - \gamma_1 & \gamma_1(\Theta - 1) & \Theta^3 - \gamma_1 \\ \Theta^3 - 9\gamma_1\Theta & \Theta^2 - 3\gamma\Theta + 2 & \gamma_1(\Theta - 1)(\Theta - 2) & \gamma_1(\Theta - 1) \end{array}\right|$$

est nul; d'où une relation

$$f(T, \Theta) = 0.$$

Alors les trois premières équations (17) donneront A, B, D en fonction *rationnelle* des quantités T, Θ liées par la relation $f = 0$, et l'on aura l'équation

$$y' = \frac{T\Theta D' y(y - 1)}{2DT\Theta y + 2B(2A + B - D + 3)},$$

où A, B, D *sont remplacés,* au moyen des relations (17), *par leurs valeurs en fonction* RATIONNELLE *de* T, Θ, γ, γ_1 *et* D′ *par la dérivée de* D.

CHAPITRE III.

ÉTUDE DES ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ EN y'.

I. — Établissement d'une formule fondamentale.

1. Soit

$$(1)\qquad Ly'^2 - 2My' + N = 0$$

une équation différentielle algébrique; le premier membre est un polynome *irré-*

ductible du second degré en y' et de degré *donné* en y, dont les coefficients sont des fonctions *analytiques* quelconques de x. Si q_1, q_2, q_3 désignent les degrés en y des polynomes L, M, N, on peut toujours, moyennant une transformation homographique effectuée sur y et dont les coefficients sont des fonctions de x, admettre que L, M, N sont de degrés $q-4$, $q-2$ et q en y, en désignant par q le plus grand des trois nombres q_1+4, q_2+2 et q_3.

C'est ce nombre q que nous appellerons désormais le DEGRÉ de l'équation différentielle.

Nous nous proposons de *former* EXPLICITEMENT toutes les *équations* (1) *de* DEGRÉ q DONNÉ, *dont l'intégrale générale ne prend qu'un nombre* DONNÉ n *de valeurs autour des points critiques mobiles.*

Il s'agit donc, dans les équations que l'on formera, d'exprimer *algébriquement* les coefficients des polynomes L, M, N à l'aide d'un certain nombre de *constantes* et de *fonctions arbitraires* de x (et de leurs dérivées).

2. Si l'intégrale $y(x)$ *acquiert exactement n valeurs autour des points critiques mobiles,* elle peut s'écrire, dans le cas où *le genre ϖ de la relation entre les constantes intégrales est nul* (1)

$$\alpha C^2 - 2\beta C + \gamma = 0, \tag{2}$$

où α, β, γ sont des polynomes en y de degré n.

Différentions l'équation (2), il vient

$$C^2\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}y' + \frac{\partial\alpha}{\partial x}\right) - 2C\left(\frac{\partial\beta}{\partial y}y' + \frac{\partial\beta}{\partial x}\right) + \frac{\partial\gamma}{\partial y}y' + \frac{\partial\gamma}{\partial x} \equiv \Gamma'(C, y, x). \tag{3}$$

L'élimination de C entre (2) et (3) conduit à une équation différentielle de *degré* $4n$,

$$L_1 y'^2 - 2M_1 y' + N_1 = 0, \tag{4}$$

que l'on peut écrire sous les deux formes suivantes :

$$\begin{aligned}&\left[\left(\alpha\frac{\partial\gamma}{\partial y} - \gamma\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)y' + \alpha\frac{\partial\gamma}{\partial x} - \gamma\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right]^2 \\ &\quad - 4\left[\left(\alpha\frac{\partial\beta}{\partial y} - \beta\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)y' + \alpha\frac{\partial\beta}{\partial x} - \beta\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right]\left[\left(\beta\frac{\partial\gamma}{\partial y} - \gamma\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)y' + \beta\frac{\partial\gamma}{\partial x} - \gamma\frac{\partial\beta}{\partial x}\right] = 0,\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}&\left[\left(2\beta\frac{\partial\beta}{\partial y} - \gamma\frac{\partial\alpha}{\partial y} - \alpha\frac{\partial\gamma}{\partial y}\right)y' + 2\beta\frac{\partial\beta}{\partial x} - \gamma\frac{\partial\alpha}{\partial x} - \alpha\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right]^2 \\ &\quad - 4(\beta^2 - \alpha\gamma)\left[\left(\frac{\partial\beta}{\partial y}y' + \frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}y' + \frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y}y' + \frac{\partial\gamma}{\partial x}\right)\right] = 0.\end{aligned} \tag{6}$$

---

(1) Si le genre ϖ de la relation entre les constantes intégrales est égal à *un*, α, β, γ sont de degré $2n$. Le cas de $\varpi > 1$ ne peut pas se présenter ici. (*Voir* l'Introduction.)

Ces deux dernières équations vont nous servir, l'une et l'autre, à établir rapidement une formule, qui n'est d'ailleurs qu'un cas particulier d'une formule beaucoup plus générale, de M. Painlevé [1], relative aux équations différentielles

$$P(y', y, x) = 0$$

de *degrés quelconques* en y', y.

3. Si l'équation différentielle (4) se réduit au degré q, c'est que les polynomes L_1, M_1, N_1 contiennent un facteur commun $H(y, x)$ de degré $4n - q$ en y. Les racines de H jouent, d'ailleurs, un rôle important dans la théorie qui va suivre.

Posons

$$L_1(y, x) = L(y, x)\,H(y, x), \qquad M_1 = MH, \qquad N_1 = NH.$$

$$M^2 - LN = P^2 QR, \tag{7}$$

l'équation $R = 0$ de degré k désignant les *intégrales singulières* et $Q = 0$ de degré j, le *lieu des points de rebroussement* des courbes intégrales. Soit, de plus, i le degré de P; les nombres i, j, k vérifient la relation

$$2q - 4 = 2i + j + k. \tag{8}$$

Si l'on forme le discriminant $\beta^2 - \alpha\gamma$, on a

$$\beta^2 - \alpha\gamma = \Pi^2 Q^3 R, \tag{9}$$

et le degré m de Π est lié à n, j, k par la relation

$$2n = 2m + 3j + k. \tag{10}$$

De l'égalité (8), on déduit

$$2\beta\frac{\partial\beta}{\partial y} - \gamma\frac{\partial\alpha}{\partial y} - \alpha\frac{\partial\gamma}{\partial y} = \Pi Q^2\left(2QR\frac{\partial\Pi}{\partial y} + 3\Pi R\frac{\partial Q}{\partial y} + \Pi Q\frac{\partial R}{\partial y}\right),$$

$$2\beta\frac{\partial\beta}{\partial x} - \gamma\frac{\partial\alpha}{\partial x} - \alpha\frac{\partial\gamma}{\partial x} = \Pi Q^2\left(2QR\frac{\partial\Pi}{\partial x} + 3\Pi R\frac{\partial Q}{\partial x} + \Pi Q\frac{\partial R}{\partial x}\right),$$

et la forme (5) de l'équation différentielle devient

$$\begin{aligned} \Pi^2 Q^3 \Big\{ Q\Big[\Big(2QR\frac{\partial\Pi}{\partial y} + 3\Pi R\frac{\partial Q}{\partial y} + \Pi Q\frac{\partial R}{\partial y}\Big)y' \\ + 2QR\frac{\partial\Pi}{\partial x} + 3\Pi R\frac{\partial Q}{\partial x} + \Pi Q\frac{\partial R}{\partial x}\Big]^2 \\ - 4R\Big[\Big(\frac{\partial\beta}{\partial y}y' + \frac{\partial\beta}{\partial x}\Big)^2 - \Big(\frac{\partial\alpha}{\partial y}y' + \frac{\partial\alpha}{\partial x}\Big)\Big(\frac{\partial\gamma}{\partial y}y' + \frac{\partial\gamma}{\partial x}\Big)\Big]\Big\} = 0, \end{aligned} \tag{11}$$

[1] *Leçons de Stockholm*, p. 169, égalité (9).

ce qui montre que $\Pi^2 Q^3$ entre en facteur dans le premier membre de l'équation (4) et, par suite, que $H(y, x)$ contient les racines *multiples* du *discriminant* $\beta^2 - \alpha\gamma$ *au même degré de multiplicité.*

D'autre part, sur la forme (5), on vérifie que toute racine $y = g(x)$ d'ordre p de (2) pour $C = C_1$ ($C_1 = 0$ par exemple) est racine d'ordre $p - 1$ dans l'équation (5) quel que soit y'. Donc, toute *solution remarquable d'ordre p* figure dans $H(y, x)$ au *degré* $p - 1$.

Inversement toute racine $y = g(x)$ de $H = 0$ vérifiant simultanément les trois relations

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial x}[g(x), x, C(g, x)]\, dx + \frac{\partial \Gamma}{\partial y} dy + \frac{\partial \Gamma}{\partial C} dC(g, x) = 0,$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \Gamma}{\partial y} = 0,$$

vérifie

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial C}[g(x), x, C(g, x)]\, dC(g, x) = 0,$$

c'est-à-dire, soit la relation

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial C}[g(x), x, C(g, x)] = 0,$$

soit la suivante

$$dC(g, x) = 0.$$

Donc, toute racine $y = g(x)$ de H est soit une racine du *discriminant* $\beta^2 - \alpha\gamma$, soit une *solution* (non singulière) de l'équation différentielle.

Le degré $4n - q$ de $H(y, x)$ est égal, par conséquent, à

$$2m + 3j + \sum[(a_r - 1) + (b_r - 1) + \ldots + (e_r - 1)],$$

et comme

$$2n = 2m + 3j + k,$$

on obtient la FORMULE FONDAMENTALE

$$(12) \qquad q = 2n + k - \sum[(a_r - 1) + (b_r - 1) + \ldots + (e_r - 1)],$$

$a_r, b_r, \ldots, e_r$ étant les degrés de multiplicité des racines $y = g_r(x)$ de $\Gamma = 0$ pour la valeur C_r de la constante C, et la somme $\sum$ s'étendant à toutes les *solutions remarquables,* qui sont nécessairement en nombre *fini.*

Nous avons posé précédemment $L_1 = LH$, L_1 est le discriminant de Γ par rapport à y, c'est-à-dire le résultat de l'élimination de C entre $\Gamma = 0$, $\frac{\partial \Gamma}{\partial y} = 0$. On peut donc écrire

$$L_1 = \Pi^2 Q^3 D_1,$$

et si l'on désigne par λ le degré du diviseur D_2 de D_1, telles que toutes les racines de D_2 distinctes ou non soient *solutions* de l'équation différentielle, la somme

$$\sum [(a_r - 1) + (b_r - 1) + \ldots]$$

est égale à λ,

$$q = 2n + k - \lambda,$$

et $q \geqq 4$, puisque

$$\lambda \leqq 4n - 4 - 2m - 3j.$$

II. — Examen d'un cas singulier.

4. Donnons-nous maintenant une équation

$$\alpha C^2 - 2\beta C + \gamma = 0.$$

Si l'on a posé

$$\beta^2 - \alpha\gamma = H^2 Q^3 R,$$

C est une fonction rationnelle de y, y'; c'est-à-dire une fonction à deux valeurs de y, renfermant le radical $\sqrt{QR}$.

Tout ce que nous avons dit précédemment subsiste.

Il y a toutefois un cas *exceptionnel*, que l'on peut rencontrer, *même en supposant la relation* (2) *irréductible*. C'est celui où le premier membre de l'équation en y', déduite de (2), est *carré parfait*.

Quand il en est ainsi, soient $C_1 = \chi_1(y, x)$, $C_2 = \chi_2(y, x)$ les deux racines de (2) correspondant à une même valeur de y. χ_1 est une fonction de χ_2, et, par suite,

$$\chi_1 + \chi_2 = \text{const.}, \qquad \chi_1\chi_2 = \text{const.}$$

sont deux formes de l'intégrale de l'équation (1); autrement dit

$$\frac{\beta}{\alpha} = \text{const.}, \qquad \frac{\gamma}{\alpha} = \text{const.}$$

définissent toutes deux l'intégrale générale de (1). On voit alors immédiatement qu'il existe entre α, β, γ une relation de la forme

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0,$$

a, b, c étant des constantes numériques.

Dans ce dernier cas, les racines $y = g(x)$ du discriminant

$$\beta^2 - \alpha\gamma = 0$$

sont des solutions *ordinaires* de (1), c'est-à-dire qu'elles donnent à la fonction $C(y, x)$, définie par (2), des valeurs constantes.

En effet, s'il en était autrement, la courbe $y = g(x)$ serait soit une *enveloppe*, soit un *lieu de points de rebroussement*, soit un *lieu de points doubles* des intégrales particulières. Or pour une équation différentielle du *premier degré en* y', il ne peut exister de tels lieux.

III. — Position de la question.

5. Arrivons maintenant au problème que nous nous sommes proposé au commencement de ce Chapitre.

On se donne le *degré* q de l'équation différentielle (1) et l'on suppose que cette équation est véritablement du *second degré en* y'. Choisissons un système quelconque d'entiers positifs i, j, k satisfaisant à la relation

$$2q - 4 = 2i + j + k$$

avec les conditions

$$j + k \geqq 2, \qquad 3j + k \leqq 2n, \qquad k \geqq q - 2n.$$

Je dis que, dans ces conditions, il y a une infinité d'équations (1) correspondantes.

En effet, prenons arbitrairement quatre polynomes β, Π, Q, R de degrés n, m, j, k en y, avec la condition

$$2n = 2m + 3j + k.$$

La différence

$$\beta^2 - \Pi^2 Q^3 R$$

est un polynome de degré $2n$ en y, que je puis toujours décomposer en un produit de deux polynomes de degré n, que j'appelle α et γ. Les coefficients de ces derniers polynomes sont ainsi déterminés en *fonction algébrique* des $m + j + k + n + 2$ coefficients *arbitraires* $\lambda(x)$, $\mu(x)$, ... de β, Π, Q, R.

Pour que l'équation (1) dont (2) définit l'intégrale générale *soit de degré* q, il faut et il suffit qu'il existe μ solutions *remarquables* $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_\mu(x)$ de multiplicités $a_1, a_2, \ldots, a_\mu$, telles que l'on ait

$$q = 2n + k - \sum_{r=1}^{r=\mu} (a_r - 1).$$

Exprimons que $y = g_r(x)$ est une intégrale remarquable d'ordre a_r, autrement dit que $y = g_r(x)$ est une racine de $D_1 = 0$ d'ordre $a_r - 1$ et que, de plus, c_r désignant une constante numérique, on a

$$C_r = \frac{\beta(y_r, x) + \sqrt{\beta^2(y_r, x) - \alpha(y_r, x)\gamma(y_r, x)}}{\alpha(y_r, x)};$$

nous obtenons a_r égalités, qui, après l'élimination de y_r, donnent lieu à $a_r - 1$ conditions *algébriques* dépendant de la constante C_r.

Si maintenant je désigne par $a_1 - 1$, $a_2 - 1$, ..., $a_\mu - 1$ un système d'entiers positifs (moindres que n), dont la somme $a_1 - 1 + a_2 - 1 + \ldots + a_\mu - 1$ est égale à $2n + k - q$, et si j'exprime qu'il existe μ solutions remarquables

$$y_1 = g_1(x), \qquad y_2 = g_2(x), \qquad y_\mu = g_\mu(x)$$

de multiplicités a_1, a_2, ..., a_μ, j'obtiens

$$a_1 - 1 + a_2 - 1 + \ldots + a_\mu - 1 = 2n + k - q$$

conditions *algébriques* dépendant de *constantes* C_r, en nombre égal au nombre μ des solutions remarquables.

Il reste donc

$$\begin{aligned} m + j + k + n + 2 - (2n + k - q) &= q + 2 - \frac{j+k}{2} \\ &= i + 4 \end{aligned}$$

fonctions arbitraires.

Pour i, j, k choisis, comme nous l'avons fait plus haut, le nombre des constantes C_r est maximum si tous les a_r sont égaux à 2 ; on a alors $2n + k - q$ constantes C_r, c'est-à-dire $2n + q - 4 - 2i - j$. Si $j = 0$, le nombre des constantes est égal à $2n + q - 4 - 2i$; on peut dire que c'est la solution *la plus générale*.

Nous voyons donc que, *à chaque choix des entiers positifs i, j, k assujettis à la condition $2i + j + k = 2q - 4$* (avec les restrictions indiquées) *correspond un nombre* FINI *de systèmes de conditions* ALGÉBRIQUES *entre les coefficients de l'équation* (2).

Chacun de ces systèmes définit une équation (2) *dépendant de $i + 4$ fonctions arbitraires et d'un certain nombre de constantes arbitraires, égal au nombre des solutions remarquables*. Ce nombre atteint son maximum $2n + k - q$ quand toutes les solutions remarquables sont d'ordre *deux*.

IV. — Résolution des objections que l'on peut faire a la théorie précédente.

6. Plusieurs objections peuvent être faites à la discussion précédente :

1° *Les conditions imposées sont-elles* COMPATIBLES *et* DÉTERMINÉES?

2° *Quand elles sont remplies, n'entraînent-elles pas un* ABAISSEMENT *plus considérable du* DEGRÉ *q de l'équation* (1)?

3° *Quand elles sont remplies, l'*ÉQUATION (2) *est-elle* IRRÉDUCTIBLE?

4° *La relation* (1) *correspondante ne se réduit-elle pas au* PREMIER DEGRÉ?

5° *Enfin, le nombre de* BRANCHES *de l'intégrale, permutables autour des* *points critiques mobiles, est-il* BIEN ÉGAL *à n et ne peut-il pas être* INFÉRIEUR *à n?*

Nous allons montrer que toutes ces objections sont en défaut dans le cas, que l'on peut considérer comme *le plus général,* où toutes les solutions remarquables sont d'ordre *deux*.

Nous traitons en même temps les trois premières objections portant sur l'*incompatibilité,* l'*abaissement de q* et l'*irréductibilité* de l'équation (2),

$$\alpha C^2 - 2\beta C + \gamma = 0.$$

7. Objections I, II et III. — Les conditions qui portent sur les $m+j+k+n+2$ fonctions arbitraires $\lambda(x)$, $\mu(x)$, ... peuvent s'écrire, si tous les a_r sont égaux à *deux*,

$$(\mathrm{S})\quad \begin{cases} C_1 = \dfrac{\beta[y_1(x),x] + \sqrt{\beta^2[y_1(x),x] - \alpha[y_1(x),x]\gamma[y_1(x),x]}}{\alpha[y_1(x),x]}, \\ C_2 = \dfrac{\beta(y_2,x) + \sqrt{\beta^2(y_2,x) - \alpha(y_2,x)\gamma(y_2,x)}}{\alpha(y_2,x)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ C_{2n+k-q} = \dfrac{\beta(y_{2n+k-q},x) + \sqrt{\beta^2(y_{2n+k-q},x) - \alpha(y_{2n+k-q},x)\gamma(y_{2n+k-q},x)}}{\alpha}; \end{cases}$$

les fonctions $y_1 = g_1(x)$, $y_2 = g_2(x)$, ..., $y_{2n+k-q} = g_{2n+k-q}(x)$ désignant $2n+k-q$ racines de $D_1 = 0$.

Les seconds membres de (S) sont donc des fonctions *algébriques* connues des coefficients $\lambda(x)$, $\mu(x)$, ... de β, Π, Q, R.

Tout d'abord les constantes C_r étant *entièrement arbitraires,* pour $x = x_0$ les fonctions $\lambda(x_0)$, $\mu(x_0)$, ... coefficients de β, Π, Q, R sont arbitraires, et, par suite, il en est de même des polynomes

$$\beta(y,x_0),\quad \Pi(y,x_0),\quad Q(y,x_0),\quad R(y,x_0).$$

On peut donc toujours supposer que pour $x = x_0$ la relation

$$\alpha C^2 - 2\beta C + \gamma = 0,$$

est *irréductible* et que, de plus (pour $x = x_0$), les polynomes Π, Q, R ont leurs racines en *y simples* et *distinctes;* par suite, pour $x = x_0$, D_1 a toutes ses racines *simples*.

Ceci posé, si les équations (S) ne sont pas *compatibles* et *déterminées* pour des valeurs des C_r arbitrairement choisies, c'est qu'un des seconds membres de (S), par exemple le dernier, est *identiquement fonction des autres;* autrement dit, que les $2n+k-1$ premières racines de D_1 ne peuvent donner à la fonction

$$C(y, x) \equiv \frac{\beta(y, x)+\sqrt{\beta^2(y, x)-\alpha(y, x)\gamma(y, x)}}{\alpha(y, x)},$$

des valeurs constantes, sans qu'il en soit de même pour la racine suivante de D_1, et, par suite, pour toutes les autres par raison de symétrie.

8. Nous allons voir que cette conclusion est impossible; nous allons démontrer en même temps qu'*il est impossible que les relations* (S), *distinctes ou non, entraînent comme conséquence que d'autres racines de* $D_1=0$, *distinctes de celles qui figurent dans* (S), *rendent nécessairement constantes les valeurs correspondantes de* $C(y, x)$.

Admettons, en effet, que ρ équations (S) ($\rho \leqq 2n+k-q$) entraînent comme conséquence qu'une racine suivante de D_1 et, par suite, toutes les autres soient solutions ordinaires de l'équation (1). Dans ces conditions, le degré *irréductible* q_1 de (1) est nécessairement égal à 4. Ceci n'est possible que si le radical $\sqrt{QR}$ que renferme y' porte sur un polynome du *quatrième degré,* c'est-à-dire si $j+k \leqq 4$; donc $\frac{j+k}{2}$ est égal soit à 2, soit à 1.

Observons tout d'abord que, si l'*entier* q *donné* est égal à 4, ou bien $\rho = 2n+k-4$, et alors, toutes les racines de D_1 sont épuisées dans ce système des ρ relations (S), ou bien $\rho < 2n+k-4$, et alors, si $j+k=4$, le système (S) laisse au moins *cinq* des fonctions λ, μ, ... *arbitraires;* et si $j+k=2$, il laisse au moins *six* fonctions *arbitraires*.

Enfin, si $q>4$, les ρ équations (S) laissent au moins *cinq* fonctions *arbitraires* si $j+k=4$ et six fonctions *arbitraires* si $j+k=2$.

Deux hypothèses sont alors possibles :

Première hypothèse. — *L'équation en* y' *correspondant à* (2) *est bien du second degré en* y'.

Dans cette hypothèse, si $j+k=4$, exprimons qu'une des racines

$$y=g_s(x) \qquad \text{de} \qquad QR=0$$

rend constante la fonction $C(y, x)$, autrement dit, est une *solution ordinaire* de (1), $y-g_s(x)$ doit figurer, comme l'on sait, en avant du radical dans l'équation (1) résolue en y'

$$y' = M+\sqrt{QR} = M+[y-g_s(x)]\sqrt{U(y, x)}.$$

Le radical étant du quatrième degré, ceci est impossible, à moins que l'équation (1) ne se réduise au premier degré.

Mais comme cette équation du premier degré est nécessairement une *équation* *de Riccati* et que, d'autre part, il reste au moins *quatre* fonctions arbitraires, il y a contradiction.

Si, maintenant, $j+k=2$, il reste au moins *six* fonctions arbitraires; si nous disposons de deux de ces fonctions de façon que deux racines de $QR=0$ soient *solutions ordinaires* de (1), c'est-à-dire donnent à $C(y, x)$ une valeur *constante*, il reste *quatre* fonctions arbitraires. D'autre part, l'équation (1) en y' ne peut rester du second degré, car dans l'équation résolue en y', on aurait le facteur du second degré

$$(y-g_s)(y-h_s),$$

en avant du radical, ce qui est impossible puisque $q=4$. Donc, *l'équation se réduirait au premier degré,* et serait, par suite, une *équation de Riccati,* ce qui est absurde, puisqu'elle dépendrait, dans le cas actuel, de quatre fonctions arbitraires.

Seconde hypothèse. — *Le premier membre de l'équation du second degré en y' est carré parfait.*

C'est, par suite, une équation de Riccati, puisque $q_1=4$; or nous aurions au moins cinq fonctions arbitraires, ce qui est absurde.

9. Passons, maintenant, aux deux dernières objections :

Objection IV. — *L'équation différentielle* (1) *qui correspond à l'équation* (2) *la plus générale, est-elle bien du second degré?* autrement dit, les conditions (S) portant sur les fonctions $\lambda(x)$, $\mu(x)$, ... n'entraînent-elles pas comme conséquence que l'équation (1) en y' est carré parfait?

S'il en est ainsi, toutes les solutions $y=h(x)$ de $\Pi QR=0$ sont des *intégrales ordinaires,* c'est-à-dire donnent à $C(y, x)$ une valeur *constante*.

Si nous posons

$$\frac{\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha\gamma}}{\alpha}=f(y, x),$$

la relation

$$\text{(E)} \qquad C'=f[h(x), x]\equiv\varphi(x),$$

est une conséquence des relations (S), que nous récrivons sous la forme

$$\text{(S)} \qquad \begin{cases} C_1 = f(y_1, x) \equiv f_1(x), \\ C_2 = f(y_2, x) \equiv f_2(x), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ C_{2n-q+k} = f(y_{2n-q+k}, x) \equiv f_{2n-q+k}(x). \end{cases}$$

Ceci exige que le second membre de (E) $\varphi(x)$ soit une fonction des seconds membres de (S) $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_{2n-q+k}(x)$.

Inversement, le dernier second membre de (S), soit $f_{2n-q+k}(x)$, est une fonction des seconds membres précédents et du second membre de (E). On peut donc remplacer le système (S) par un système (S′) comprenant l'équation (E), où C′ est une constante arbitraire, et les $2n-q+k-1$ premières équations (S)

$$
(S') \qquad \begin{cases} C_1 = f_1(x), \\ C_2 = f_2(x), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ C_{2n-q+k-1} = f_{2n-q+k-1}(x), \\ C' = \varphi(x); \end{cases}
$$

la dernière équation (S) est alors une conséquence du système (S′).

Le système (S′) entraîne donc comme conséquence, à cause du rôle symétrique des racines restantes $y = g(x)$ de $D_1 = 0$, que toutes les racines $y = g(x)$ de $D_1 = 0$ non employées dans (S′) rendent constant $C(y, x)$.

Donc l'équation différentielle (1) réduite à son degré *minimum* serait de degré *quatre,* et comme son premier membre est un carré parfait, ce serait une équation de Riccati, ce qui est en contradiction avec ce fait que le système (S′) laisse arbitraires au moins quatre des fonctions $\lambda(x)$, $\mu(x)$, ...

10. OBJECTION V. — Je dis tout d'abord que dans le cas *le plus général,* le GENRE ϖ *de la relation entre les constantes intégrales est égal à* ZÉRO.

En effet, tout d'abord si $j+k>4$, pour $x=x_0$ le radical $\sqrt{QR}$ est le radical le plus général de son degré, et, par suite, la courbe

$$z^2 = Q(y, x_0)\,R(y, x_0)$$

n'est pas la *transformée rationnelle* d'une courbe de genre *un,* ce qui a lieu *nécessairement* si $\varpi = 1$.

Si, maintenant, $j+k=4$, le genre de la courbe

$$z = \sqrt{QR},$$

est égal à *un*. Or, nous savons que si $p = \varpi = 1$, l'équation (1) a ses *points critiques fixes* [1]. Alors $j=0$, $k=4$ et le degré *irréductible* de l'équation (1) est égal à *quatre*.

Inversement si l'on a à la fois

$$q=4, \qquad j=0, \qquad k=4.$$

---

[1] P. PAINLEVÉ, *Annales de l'École Normale,* p. 211; 1891.

l'équation a ses *points critiques fixes,* ϖ est égal à *un,* et, par conséquent, le nombre ν des branches de $y(x)$ est égal à *un,* quel que soit n.

Enfin, si $j+k=2$, on a $p=0$ et, par suite, $\varpi=0$.

On voit donc que, si on laisse de côté le cas de $q=4$, $j=0$, $k=4$, *le genre* ϖ *correspondant à l'équation la plus générale est égal à zéro.*

11. Je dis, maintenant, que la *fonction* $y(x)$ *définie par* (2) *prend bien, en général, n valeurs.*

En effet, si elle en prenait seulement un nombre $\nu<n$, on pourrait mettre l'intégrale générale sous la forme

$$\alpha_1 C'^2 - 2\beta_1 C' + \gamma_1 = 0, \tag{2'}$$

où α_1, β_1, γ_1 sont des polynomes en y de degré ν, *ce qui est toujours possible puisque* $\varpi=0$.

On sait que C est nécessairement une fonction rationnelle de C', $C=\Psi(C')$. Soit d'abord $\nu>1$, et C'_r une racine multiple de l'égalité

$$0 = C - \Psi(C'),$$

et C_r la valeur correspondante de C, qui existent toujours, puisque Ψ n'est pas du premier degré. Comme les ordres de multiplicité des solutions remarquables sont égaux à *deux,* la multiplicité de C'_r est seulement égale à *deux* et les ν solutions $y=g_r(x)$ correspondant à la valeur C'_r dans (2') sont *distinctes.*

Dans ces conditions, les valeurs de C_r correspondant aux ν solutions remarquables $y=g_r(x)$ de (2) seraient égales, ce qui est absurde, puisqu'on les a prises *arbitrairement.*

Le *raisonnement n'est en défaut* que si $\nu=1$; mais alors, si $\nu=1$, $p=\varpi$ et, comme $\varpi=0$, p est nul ; $j+k=2$, il faut que j soit nul, $k=2$ et $q=4$.

Inversement si $j=0$, $k=2$, $q=4$, ν est égal à *un,* quel que soit n.

12. Nous pouvons donc énoncer les résultats suivants :

Laissons de côté les deux cas

$$q=4, \qquad j=0, \qquad \begin{cases} k=4, \\ k=2, \end{cases}$$

cas où l'équation différentielle a toujours *ses points critiques fixes.*

Dans tous les autres cas, les conditions imposées aux coefficients de (2) *pour des valeurs de n, q* DONNÉES *et les choix de i, j, k (avec les restrictions indiquées) sont* COMPATIBLES *et* DÉTERMINÉES *et définissent une équation* (2) *dépendant de* $i+4$ FONCTIONS ARBITRAIRES *et de* $2n+k-q=2n+q-4-2i-j$ CONSTANTES ARBITRAIRES.

L'équation (2) *la plus générale, satisfaisant à ces conditions, est* IRRÉDUCTIBLE *en* y *et* C *et intègre une équation différentielle* (1) *vraiment du* SECOND DEGRÉ EN y' *et de* DEGRÉ *irréductible en* y, ÉGAL *à* q.

De plus, la fonction $y(x)$ *définie par* (2) *prend* EXACTEMENT n VALEURS *autour des points critiques mobiles et, par suite, le* GENRE ϖ *de la relation entre les constantes intégrales est égal à* ZÉRO.

13. Les propositions que nous venons de démontrer ne sont vraies, bien entendu, que si l'on a choisi d'une façon tout à fait arbitraire les fonctions et les constantes arbitraires dont dépend l'équation (2). Pour des choix particuliers de fonctions ou de constantes, le nombre des branches de l'intégrale peut être un diviseur de n et le genre ϖ peut être égal à *un*.

Les deux types exceptionnels correspondant aux deux cas $q=4$, $j=0$, $k=4$, 2, qui expriment au fond que *l'équation* (1) *a ses points critiques fixes,* se ramènent par la transformation homographique effectuée sur y et le changement de x en $\varphi(X)$ aux deux équations

$$y'^2=(1-y^2)(1-\mu^2y^2),$$
$$y' = [y-h(x)]\sqrt{y},$$

où μ^2 est une constante; et alors, quel que soit n, on ne trouve que ces deux types d'équations et leurs *transformées homographiques*.

V. — Nombre de constantes et de fonctions arbitraires dont dépend l'équation différentielle.

14. L'équation (2), nous venons de le voir, dépend de $i+4$ *fonctions arbitraires* et de $2n+k-q$ *constantes arbitraires distinctes;* mais en sera-t-il de même pour l'équation (1)? Quel sera le nombre de fonctions et de constantes arbitraires dont dépendra cette équation?

Je dis que l'équation différentielle (1) dépendra de $i+4$ *fonctions arbitraires* et de l *constantes arbitraires,* l désignant le nombre $2n+k-q-3$ si ce dernier nombre est positif et étant égal à zéro dans tous les autres cas. Il suffit, pour le démontrer, de nous appuyer sur la proposition suivante :

Quand l'intégrale d'une équation (1) *prend* EXACTEMENT n *valeurs autour des points critiques mobiles, et que le genre* ϖ *de la relation entre les constantes intégrales est* NUL, *on peut mettre l'intégrale sous la forme* (2) *et* *toutes les formes* (2) *s'obtiennent en effectuant sur* C *une transformation homographique à coefficients constants.*

On pourra donc se servir de cette transformation de façon à donner à trois des valeurs remarquables C_r de la constante des valeurs particulières, soit 0, 1, ∞, et il restera seulement $2n+k-q-3$ constantes arbitraires.

Si le nombre des valeurs remarquables de la constante est seulement égal à *deux,* on donnera à ces constantes les valeurs 0 et ∞ par exemple; si ce nombre est égal à *un,* on donnera à la constante correspondante la valeur ∞; enfin, s'il n'y a pas de constante remarquable, on ne fera rien.

D'autre part, les $i+4$ fonctions arbitraires et les l constantes arbitraires figureront bien dans (1) *d'une façon indépendante.*

En effet, considérons une équation (2) où l'on ferait varier d'une certaine manière les $i+4$ fonctions arbitraires et les l constantes arbitraires; s'il lui correspondait toujours la même équation (1), on devrait, d'après la remarque précédente, passer d'une de ces formes (2) à une autre par une *transformation homographique continue,* puisque la forme (2) varie d'une façon continue; ce qui est impossible, cette transformation devant conserver les valeurs 0, 1, ∞.

15. *Remarque I.* — Dans l'équation (1) les racines $y=g(x)$ de $L=0$ et les racines de $QR=0$ sont données *algébriquement* à l'aide des fonctions indéterminées $\lambda(x)$, $\mu(x)$, sans que les dérivées figurent; par conséquent, on pourra, par exemple, prendre comme $i+4$ fonctions arbitraires, $i+4$ des coefficients de L, Q, R, et les autres coefficients de (1) s'exprimeront *algébriquement* en fonction de ceux-là et de leurs dérivées.

Remarque II. — On pourra se servir de la transformation homographique pour abaisser, par exemple, au degré $q-3$ le coefficient N de (1).

CHAPITRE IV.

FORMATION DES ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ EN y', DONT L'INTÉGRALE A DEUX BRANCHES.

Voici tout d'abord le Tableau des diverses circonstances qui peuvent se présenter dans cette étude (λ désigne ici le nombre de solutions remarquables, k le nombre d'*intégrales singulières* et j le degré en y de la courbe, lieu des *points* *de rebroussement*, q le *degré* de l'équation différentielle.

$$j=0\left\{\begin{array}{ll} k=2 & \left\{\begin{array}{ll}\lambda=0, & q=6,\\ \lambda=1, & q=5;\end{array}\right.\\ k=4 & \left\{\begin{array}{ll}\lambda=0, & q=8,\\ \lambda=1, & q=7,\\ \lambda=2, & q=6,\\ \lambda=3, & q=5;\end{array}\right.\end{array}\right.$$

$$j=1\qquad k=1\quad\left\{\begin{array}{ll}\lambda=0, & q=5,\\ \lambda=1, & q=4.\end{array}\right.$$

I. — Il y a quatre intégrales singulières.

1. $j=0$, $k=4$. L'équation la plus générale correspondante est de degré *huit*. C'est en même temps l'équation la plus générale dont l'intégrale acquiert *deux* valeurs autour des points critiques mobiles.

Pour la former, il suffit de partir de la relation

$$(\alpha_2 y^2+\alpha_1 y+\alpha_0)C^2-2(\beta_2 y^2+\beta_1 y+\beta_0)C+\gamma_2 y^2+\gamma_1 y+\gamma_0=0.$$

Si l'on suppose que $y=0$, $y=1$, $y=\infty$ sont intégrales ordinaires correspondant à $C=0$, $C=1$, $C=\infty$, on aura entre les α_i, β_i, γ_i les relations

$$\alpha_2=\gamma_0=0,\qquad \alpha_1+1-2(\beta_2+\beta_1+\beta_0)+\gamma_2+\gamma_1=0.$$

L'équation différentielle demandée s'écrira

$$\begin{aligned}
&\{(\alpha_1\gamma_2+2\gamma_2 y+\gamma_1)y'+y[(\alpha_1\gamma'_2-\gamma_1\alpha'_2)y^2+(\alpha_1\gamma'_1-\gamma_1\alpha'_1+\gamma'_2)y+\gamma'_1]\}^2\\
&\quad-4[(\alpha_1\beta_2 y^2+2\beta_2 y+\beta_1-\alpha_1\beta_0)y'+(\alpha_1\beta'_2-\beta_2\alpha'_1)y^3\\
&\qquad+(\alpha_1\beta'_1-\beta_1\alpha'_1+\beta'_2)y^2+(\alpha_1\beta'_0-\beta_0\alpha'_1+\beta'_1)y+\beta'_0]\\
&\quad\times\{[(\beta_1\gamma_2-\gamma_1\beta_2)y^2+2\beta_0\gamma_2 y+\beta_0\gamma_1]y'\\
&\qquad+(\beta_2\gamma'_2-\gamma_2\beta'_2)y^4+(\beta_2\gamma'_1-\gamma_2\beta'_1+\beta_1\gamma'_2-\gamma_1\beta'_2)y^3\\
&\qquad\qquad+(\beta_1\gamma'_1-\gamma_1\beta'_1+\beta_0\gamma'_2-\gamma_2\beta'_0)y^2+(\beta_0\gamma'_1-\gamma_1\beta'_0)y\}=0
\end{aligned}$$

ou encore

$$(1)\qquad Ly'^2-2My'+y(y-1)N=0,$$

où L, M, N sont des polynômes de degrés 4, 6 et 5, dont je me dispense d'écrire les développements.

2. Si l'on avait voulu mettre en évidence les quatre intégrales *singulières*, on aurait pu se servir de la transformation homographique et du changement $x = \varphi(X)$ de façon que ces intégrales fussent $y = 0$, $y = 1$, $y = \infty$, $y = x$, en posant

$$\begin{aligned}&(\beta_2 y^2 + \beta_1 y + \beta_0)^2 - (\alpha_2 y^2 + \alpha_1 y + \alpha_0)(\gamma_2 y^2 + \gamma_1 y + \gamma_0)\\ &\quad \equiv y(y-1)(y-x)(2\beta_1\beta_2 - \alpha_1\gamma_2 - \gamma_1\alpha_2)\end{aligned}$$

avec les conditions

$$\beta_2^2 - \alpha_2\gamma_2 = 0, \qquad \beta_0^2 - \alpha_0\gamma_0 = 0,$$

$$2\beta_1\beta_2 - \alpha_1\gamma_2 - \gamma_1\alpha_2 + \beta_1^2 + 2\beta_0\beta_2 - \alpha_2\gamma_0 - \gamma_2 - \alpha_1\gamma_1 + 2\beta_0\beta_1 - \alpha_1\gamma_0 - \gamma_1 = 0,$$

$$(2\beta_1\beta_2 - \alpha_1\gamma_2 - \gamma_1\alpha_2)x^2 + \ldots = 0;$$

mais il vaut mieux, pour ce qui va suivre, s'en tenir à l'équation (3).

3. Équations de degré sept. — Si nous exprimons maintenant qu'il y a une intégrale remarquable $y = \infty$, par exemple, pour $C = \infty$, nous obtenons une équation différentielle de degré *sept*, qu'on déduit de (1) en faisant $\alpha_2 = 0$; d'où

$$L_1 y'^2 - 2M_1 y' + y(y-1)N_1 = 0, \tag{2}$$

L_1, M_1, N_1 étant de degrés 3, 5 et 4 en y.

4. Équations de degré six. — Pour ces équations, il y a *deux* intégrales remarquables, soient $y = \infty$, $y = 0$ pour $C = \infty$ et $C = 0$, par exemple; il suffit de poser, dans (2), $\gamma_1 = 0$; d'où

$$\begin{aligned}0 = -\gamma_2^2 y y'^2 &+ [(2\beta_2 y + \beta_1)y' + \beta_2' y^2 + \beta_1' y + \beta_0']\\ &\times [(\gamma_2\beta_1 y + 2\beta_0\gamma_2)y'\\ &\quad + (\beta_2\gamma_2' - \gamma_2\beta_2')y^3 + (\beta_1\gamma_2' - \gamma_2\beta_1')y^2 + (\beta_0\gamma_2' - \gamma_2\beta_0')y]\end{aligned}$$

ou bien encore

$$\begin{aligned}&[(2\beta_2 y + \beta_1)(\gamma_2\beta_1 y + 2\beta_0\gamma_2) - \gamma_2^2 y]y'^2\\ &\quad + \{(2\beta_2 y + \beta_1)[(\beta_2\gamma_2' - \gamma_2\beta_2')y^3 + (\beta_1\gamma_2' - \gamma_1\beta_2')y^2 + (\beta_0\gamma_2' - \gamma_2\beta_0')y]\\ &\qquad\qquad + (\gamma_2\beta_1 y + 2\beta_0\gamma_2)(\beta_2' y^2 + \beta_1' y + \beta_0')\}y'\\ &\quad + y(y-1)\{\beta_2'(\beta_2\gamma_2' - \gamma_2\beta_2')y^2\\ &\qquad\qquad + [\gamma_2'(\beta_1\beta_2' + \beta_2\beta_1') - 2\gamma_2\beta_1'\beta_2']y - \beta_0'(\beta_0\gamma_2' - \gamma_2\beta_0')\} = 0.\end{aligned}$$

5. Équations de degré cinq. — Il y a ici *trois* valeurs remarquables de la constante, soient $C = \infty$, $C = 0$, $C = 1$ avec $y = \infty$, $y = 0$, $y = 1$, par exemple,

comme solutions remarquables correspondantes; d'où

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \gamma_0 = \gamma_1 = 0,$$
$$2(\beta_2 + \beta_1 + \beta_0) = 1 + \gamma_2,$$
$$2\gamma_2 = 2\beta_2 + \beta_1.$$

L'équation différentielle de degré *cinq*, que l'on obtient, s'écrit

$$\begin{aligned}
&2\beta_1\gamma_2(\beta_2 y - \beta_0)y'^2\\
&\quad + [2\beta_2(\beta_2\gamma'_2 - \gamma_2\beta'_2)y^3 + \beta_3(3\beta_1\gamma'_2 - 3\beta'_1\gamma_2 + 2\gamma_2\beta'_2 - 2\beta_2\gamma'_2)y^2\\
&\qquad\qquad - \beta_0(2\gamma_2\beta'_1 + \beta_1\gamma'_2 + 3\beta'_0\gamma_2)y - 2\beta_0\beta'_0\gamma_2]y'\\
&\quad + y(y-1)\{\beta'_2(\beta_2\gamma'_2 - \gamma_2\beta'_2)y^2\\
&\qquad + [\beta'_2(\beta_2\gamma'_2 - \gamma_2\beta'_2) + \beta_1\gamma'_2 - \gamma_1\beta'_2 + \beta'_1(\beta_2\gamma'_2 - \gamma_2\beta'_2)]y\\
&\qquad\qquad + \beta'_0(\gamma_2\beta'_0 - \gamma'_2\beta_0)\} = 0,
\end{aligned}$$

où l'on doit remplacer β_0 par $\beta_2 + \frac{1-\gamma_2}{2}$ et β_1 par $\gamma_2 - 2\beta_2$.

6. Équations a points critiques fixes. — Il est impossible d'avoir un abaissement plus considérable, sans que l'équation correspondante ait *ses points critiques fixes*.

Pour vérifier cette remarque sur l'exemple que nous venons de former, exprimons que, pour la valeur C_1 de la constante, $y_1 = \frac{\beta_0}{\beta_2} = 1 + \frac{1-\gamma_2}{2\beta_2}$ est une *intégrale remarquable*. L'expression

$$C^2 - C[2\beta_2 y^2 + 2(\gamma_2 - 2\beta_2)y + 1 + 2\beta_2 - \gamma_2] + \gamma_2 y^2$$

devient un carré parfait quand on y remplace C par C_1 et y par y_1.

Posons

$$\gamma_2 = A^2, \qquad 2\beta_2 = B^2,$$

l'intégrale générale s'écrit alors

$$C^2 - C[A^2y^2 - B^2(y-1)^2 + 1] + A^2y^2 = 0. \tag{3}$$

Écrivons que, pour $C = C_1$, l'équation admet la solution remarquable

$$y_1 = \frac{1 - B^2}{A^2 - B^2}.$$

Comme pour $C = C_1$, le premier membre de (3) étant carré parfait, y_1 a également pour expression

$$\frac{-B^2C_1}{C_1(A^2 - B^2) - A^2}$$

et, par suite, on obtient successivement

$$\frac{1-B^2}{A^2-B^2}=\frac{-B^2C_1}{C_1(A^2-B^2)-A^2},$$

$$B^2=\frac{A^2(C_1-1)}{C_1-A^2}.$$

L'équation (3) peut donc s'écrire

$$\begin{aligned}&[(1-C_1)(C_1-A^2)+C(C_1-1)]A^2y^2\\&\quad-2C(C_1-1)A^2y+C[(C_1-A^2)(C-1)+A^2(C_1-1)]=0\end{aligned}$$

ou

$$Ay=\frac{A(C-1)C+\sqrt{(A^2-1)(A^2-C_1)}\sqrt{C(C-1)(C-C_1)}}{C(A^2-1)+C_1-A^2}.$$

C'est une équation *à points critiques fixes,* dont *la relation entre les constantes intégrales,* primitivement du *genre* ZÉRO, s'écrit maintenant

$$C'^2=C(C-1)(C-C_1).$$

Elle est donc devenue *de genre* UN [1], par suite de l'existence de quatre solutions remarquables.

L'équation différentielle s'écrit, d'ailleurs,

$$\begin{aligned}&2\beta_1\gamma_2\beta_2y'^2+[2(\beta_2\gamma'_2-\gamma_2\beta'_2)y^2+\ldots+2\beta'_0\gamma_2]y'\\&\quad+y(y-1)\beta'_2(\beta_2\gamma'_2-\gamma_2\beta'_2)\left[y-\frac{\beta'_0(\gamma_2\beta'_0-\beta_0\gamma'_2)}{\beta'_2(\beta_2\gamma'_2-\gamma_2\beta'_2)}\,\frac{\beta_2}{\beta_0}\right]=0\end{aligned}$$

avec

$$\gamma_2=A^2,\qquad 2\beta_2=\frac{A^2(1-A^2)}{C_1-A^2},\qquad \beta_1=\frac{A^2(C_1-1)}{C_1-A^2},\qquad \beta_0=\frac{C_1(1-A^2)}{C_1-A^2}\quad [2].$$

II. — Il y a deux intégrales singulières.

7. Équations de degré six. — Dans ces conditions, le degré *maximum* de l'équation différentielle est égal à *six*. C'est le cas où il n'y a pas de solution remarquable. Disposons des coefficients de la transformation homographique, de façon que les deux *intégrales singulières* soient $y=0$, $y=\infty$, et que, dans $\beta^2-\alpha\gamma\equiv\Pi^2R$, Π se réduise à l'unité.

L'intégrale générale

$$(\alpha_2y^2+\alpha_1y+\alpha_0)C^2-2(\beta_2y^2+\beta_1y+\beta_0)C+\gamma_2y^2+\gamma_1y+\gamma_0=0$$

---

(1) Sur le *passage* du *genre* ZÉRO au *genre* UN, *voir* les n^{os} 12 et 13 du Chapitre VI.

(2) C_1 désigne, comme nous l'avons dit, une constante *arbitraire*.

peut s'écrire actuellement

$$C = \frac{\beta_2 y^2 + \beta_1 y + \beta_0 + \sqrt{y(y-1)}}{\alpha_2 y^2 + \alpha_1 y + \alpha_0};$$

les coefficients β_2, β_1, β_0, α_2, α_1, α_0 sont liés par les relations, qui expriment que

$$(\beta_2 y^2 + \beta_1 y + \beta_0)^2 - y(y-1)$$

est divisible par

$$\alpha_2 y^2 + \alpha_1 y + \alpha_0.$$

Soit $\gamma_2 y^2 + \gamma_1 y + \gamma_0$ le quotient, on calcule facilement les coefficients $\gamma_2, \gamma_1, \gamma_0$

$$(4) \qquad \gamma_2 = \frac{\beta_2^2}{\alpha_2}, \qquad \gamma_1 = \frac{2\beta_1\beta_2}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1\beta_2^2}{\alpha_2^2}, \qquad \gamma_0 = \frac{\beta_0^2}{\alpha_0}.$$

les α_i, β_j étant liés par les deux relations

$$(5) \quad \left\{\begin{aligned} & 2\beta_0\beta_1 + 1 - \frac{\alpha_0}{\alpha_2}\left(2\beta_1\beta_2 - \frac{\alpha_1\beta_2^2}{\alpha_2}\right) \\ & \quad - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}(2\beta_0\beta_2 + \beta_1^2 - 1) + \frac{\alpha_1\alpha_0\beta_2^2}{\alpha_2^2} + \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\left(2\beta_1\beta_2 - \frac{\alpha_1\beta_2^2}{\alpha_2}\right) = 0, \\ & \beta_0^2 - \frac{\alpha_0}{\alpha_0}(2\beta_0\beta_2 + \beta_1^2 - 1) + \frac{\alpha_0^2\beta_2^2}{\alpha_2^2} + \frac{\alpha_1\alpha_0}{\alpha_2^2}\left(2\beta_1\beta_2 - \frac{\alpha_1\beta_2^2}{\alpha_2}\right) = 0. \end{aligned}\right.$$

L'équation différentielle s'écrit alors

$$\begin{aligned} & [(2y-1)^2 - 4y(y-1)(\beta_1^2 - \alpha_1\gamma_1)]y'^2 \\ & \quad - 4(y-1)y\{[4\beta_2\beta_1' + 2\beta_1\beta_2' - 2(\alpha_2\gamma_1' + \alpha_1\gamma_2') - (\alpha_1'\gamma_2 + \gamma_1\alpha_2')]y^2 \\ & \qquad\qquad + (4\beta_2\beta_0' + 2\beta_1\beta_1' - 2\alpha_2\gamma_0' - \alpha_1\gamma_1' - 2\alpha_0\gamma_2' - \gamma_1\alpha_1')y \\ & \qquad\qquad\qquad + 2\beta_1\beta_0' - \gamma_1\alpha_0' - \alpha_1\gamma_0'\}y' \\ & \quad - 4y(y-1)[(\beta_2' y^2 + \beta_1' y + \beta_0')^2 - (\alpha_2' y^2 + \alpha_1' y + \alpha_0')(\gamma_2' y^2 + \gamma_1' y + \gamma_0')] = 0, \end{aligned}$$

où les γ_0, γ_1, γ_2 doivent être remplacés par les valeurs (4), les α_i, β_j étant liés par les relations (5).

8. Équations de degré cinq. — Il suffit d'exprimer qu'il y a une solution remarquable pour $C = \infty$ par exemple; d'où $\alpha_1^2 = 4\alpha_2\alpha_0$. On vérifiera que le facteur $2\alpha_2 y + \alpha_1$ figure dans le premier membre de l'équation différentielle formée précédemment. C'est là une vérification un peu longue, mais qui ne présente aucune difficulté. On supprimera ce facteur $2\alpha_2 y + \alpha_1$, et l'on obtiendra l'équation de degré *cinq* demandée.

9. Équations a points critiques fixes. — Si nous exprimons que l'abaisse-

ment est plus considérable, c'est-à-dire qu'il y a *deux* solutions remarquables, le degré de l'équation différentielle ainsi obtenu est égal à *quatre*. Mais, comme il y a deux intégrales singulières, sans lieux de points de rebroussement ($j = 0$), nous avons affaire à une équation à *points critiques fixes*. Vérifions qu'il en est bien ainsi.

Pour cela, écrivons l'intégrale générale sous la forme

$$C^2 - 2(\beta_2 y^2 + \beta_1 y + \beta_0 C + \gamma_2 y^2 = 0,$$

$y = 0, y = \infty$ étant les deux solutions remarquables pour $C = 0$ et $C = \infty$.

Soit $(y-1)^2$ le carré parfait Π^2 figurant dans le discriminant $\beta^2 - \alpha\gamma$. Si

$$(\beta_2 y^2 + \beta_1 y + \beta_0)^2 - \gamma_2 y^2$$

est divisible par $(y-1)^2$, on aura entre les α_i, β_i, γ_i les relations

$$(\beta_2 + \beta_1 + \beta_0)(2\beta_2 + \beta_1) - \gamma_2 = 0,$$
$$(\beta_2 + \beta_1 + \beta_0)(2\beta_0 + \beta_1) - \gamma_2 = 0$$

et, par suite,

$$\beta_0 = \beta_2, \qquad \gamma_2 = (2\beta_2 + \beta_1)^2.$$

Il en résulte que l'intégrale générale

$$C^2 - 2[\beta_2(y^2+1) + \beta_1 y]C + (2\beta_2 + \beta_1)^2 y^2 = 0$$

qu'on peut écrire

$$[(2\beta_2 + \beta_1)^2 - 2\beta_2^2](y-1)^2 + (2\beta_2 + \beta_1 - C)^2 = 0$$

devient

$$y = 1 + \frac{2\beta_2 + \beta_1 - C}{\sqrt{(2\beta_2 + \beta_1)^2 - 2\beta_2}}.$$

L'équation a donc bien ses *points critiques fixes*.

III. — Il y a une seule intégrale singulière.

10. Équations de degré cinq. — Dans ces conditions, le degré de l'équation de différentielle est au plus égal à *cinq*. Soient $y = 1$ *l'intégrale singulière*, $y = 0$ le *lieu des points de rebroussement*. Supposons, de plus, que $y = \infty$ soit solution *ordinaire* pour $C = \infty$; d'où $\alpha_2 = 0$,

$$(\alpha_1 y + \alpha_0)C^2 - 2(\beta_2 y^2 + \beta_1 y + \beta_0)C + \gamma_2 y^2 + \gamma_1 y + \gamma_0 = 0,$$
$$(\beta_2 y^2 + \beta_1 y + \beta_0)^2 - y^3(y-1) \equiv (\gamma_2 y^2 + \gamma_1 y + \gamma_0)(\alpha_1 y + \alpha_0);$$

l'intégrale générale prend alors la forme (où $\beta_2 \equiv 1$)

$$C = \frac{y^2 + \beta_1 y + \beta_0 + y\sqrt{y(y-1)}}{\alpha_1 y + \alpha_0},$$

les coefficients sont α_1, α_0, β_1, β_0 sont liés par la relation

$$(6) \qquad \alpha_1(\alpha_0\beta_1-\beta_0\alpha_1)^2-2\alpha_0^2(\alpha_0\beta_1-\beta_0\alpha_1)-\alpha_0^3=0,$$

qui exprime que

$$(y^2+\beta_1 y+\beta_0)^2-y^3(y-1)$$

est divisible par $\alpha_1 y+\alpha_0$.

On déduit de là

$$(7) \qquad \gamma_2=\frac{\beta_0^2}{\alpha_0}, \qquad \gamma_1=\frac{2\beta_1\beta_0}{\alpha_0}-\frac{\beta_0^2}{\alpha_0}, \qquad \gamma_2=\frac{2\beta_1+1}{\alpha_1},$$

et l'équation différentielle correspondante s'écrit

$$\begin{aligned} &y(4y-3)^2y'^2-4(y-1)[(2y+\beta_1)y'+\beta_1'y+\beta_0']^2 \\ &\quad -4(y-1)(\alpha_1 y'+\alpha_1' y+\alpha_0')[(2\gamma_2+\gamma_1)y'+\gamma_2'y^2+\gamma_1'y+\gamma_0']=0 \end{aligned}$$

ou

$$(8) \qquad \begin{aligned} &\{[9-4(\beta_1^2-\alpha_1\gamma_1)+8(\beta_1-\alpha_1\gamma_2)]y+4(\beta_1^2-\alpha_1\gamma_1)\}y'^2 \\ &\quad -4(y-1)[2(\beta_1'y+\beta_0')(2y+\beta_1) \\ &\qquad\qquad -\alpha_1(\gamma_2'y^2+\gamma_1'y+\gamma_0')-(\alpha_1'y+\alpha_0')(2\gamma_2 y+\gamma_1)]y' \\ &\qquad -4(y-1)[(\beta_1'y+\beta_0')^2-(\alpha_1'y+\alpha_0')(\gamma_2'y^2+\gamma_1'y+\gamma_0')]=0, \end{aligned}$$

où γ_2, γ_1, γ_0 ont les valeurs (7), et α_0, α_1, β_1, β_r sont liés par les relations (6).

Dans le cas actuel, nous pouvons exprimer les coefficients de l'équation différentielle, en fonction RATIONNELLE de trois *fonctions arbitraires* A, B, T, et de leurs dérivées A′ B′, T′.

En effet, de la relation (6) on tire

$$\alpha_0\beta_1-\beta_0\alpha_1=\frac{-\alpha_0^2+\alpha_0\sqrt{\alpha_0(\alpha_0+\alpha_1)}}{\alpha_1}.$$

Posons

$$\sqrt{\alpha_0(\alpha_0+\alpha_1)}=\alpha_0\mathrm{T},$$

$$\alpha_0=\mathrm{A}, \qquad \alpha_1=\mathrm{A}(\mathrm{T}^2-1), \qquad \beta_0=\mathrm{B},$$

il vient

$$\beta_1=\mathrm{B}(\mathrm{T}^2-1)+\frac{1}{\mathrm{T}-1},$$

$$\gamma_2=\frac{1}{\mathrm{A}(\mathrm{T}^2-1)}\left[2\mathrm{B}(\mathrm{T}^2-1)+\frac{2}{\mathrm{T}-1}+1\right],$$

$$\gamma_1=\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}\left[\frac{1}{\mathrm{T}-1}+\mathrm{B}(\mathrm{T}^2-1)\right].$$

Il suffira de remplacer dans (8) les α, β, γ par les valeurs que nous venons de calculer.

11. Équations de degré quatre. — Dans ce cas, $y = \infty$ est une solution remarquable (soit pour $C = \infty$); d'où, en tenant compte des calculs précédents,

$$\alpha_2 = \alpha_1 = 0, \qquad 2\beta_1 = -1, \qquad \gamma_0 = \frac{\beta_0^2}{\alpha_0}, \qquad \gamma_1 = -\frac{\beta_0}{\alpha_0}, \qquad \gamma_2 = \frac{1+8\beta_0}{\alpha_0},$$

l'équation (8) devient

$$y'^2 - 4(y-1)(2y-1)\beta'_0 y' + 4(y-1)[\alpha'_0\gamma'_1 y + \alpha'_0\gamma'_0 - \beta'^2_0] = 0$$

ou bien, en remplaçant γ_0 et γ_1 en fonction de β_0 et α_0,

$$y'^2 - 4(y-1)(2y-1)\beta'_0 y'$$
$$+ 4(y-1)\left(\alpha'_0\frac{\beta_0\alpha'_0 - \alpha_0\beta'_0}{\alpha_0^2}y + \alpha'_0\frac{\alpha'_0\beta_0^2 - 2\beta_0\beta'_0\alpha_0}{\alpha_0^2} - \beta'^2_0\right) = 0.$$

Ici les coefficients sont des *fonctions* RATIONNELLES *de* α_0, β_0 *et de leurs dérivées.*

CHAPITRE V.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU SECOND DEGRÉ EN y' DONT L'INTÉGRALE GÉNÉRALE EST UNE FONCTION A TROIS VALEURS, LE GENRE ϖ DE LA RELATION ENTRE LES CONSTANTES INTÉGRALES ÉTANT ÉGAL A ZÉRO.

1. Voici le Tableau des différentes circonstances qui peuvent se présenter dans cette étude; j désigne, comme précédemment, le degré en y du *lieu des points de rebroussement* et k le nombre *d'intégrales singulières :*

		Degré q des équations différentielles correspondantes.
$j=0$	$k=6$,	$q=12,\ 11,\ 10,\ 9,\ 8,\ 7,\ 6,\ 5.$
	$k=4$,	$q=10,\ 9,\ 8,\ 7,\ 6,\ 5,\ 4.$
	$k=2$,	$q=8,\ 7,\ 6,\ 5.$
$j=1$	$k=3$,	$q=9,\ 8,\ 7,\ 6,\ 5,\ 4.$
	$k=1$,	$q=7,\ 6,\ 5,\ 4.$
$j=0$	$k=0$,	$q=6,\ 5,\ 4.$

Comme il serait beaucoup trop long d'exposer, dans ses moindres détails, la formation des soixante-quatre types différents, auxquels donnent lieu les six classes d'équations figurant dans le Tableau ci-dessus, je me bornerai, sans pousser, d'ailleurs, jusqu'au bout certains calculs, à former tous les types de la première et de la sixième classe. Ces derniers types correspondent aux deux cas où l'équation différentielle possède *six intégrales singulières* ou n'en possède *aucune*. Le premier cas nous fournira des exemples d'équations renfermant *algébriquement* et d'une façon ESSENTIELLE, *une, deux, trois* ou *quatre* constantes arbitraires *distinctes*.

I. — Il y a six intégrales singulières.

2. Dans ces conditions, nous supposerons qu'on a disposé des coefficients de la transformation homographique de façon que $y=0, y=1, y=\infty$ soient des *intégrales ordinaires* correspondant aux valeurs $C=0$, $C=1$, $C=\infty$ de la constante d'intégration; en sorte que l'équation différentielle [1] correspondante sera toujours de la forme

$$\text{(1)} \qquad Ly'^2 - 2My' + y(y-1)N = 0,$$

où L, M, N sont des polynomes de degrés respectivement égaux à 8, 10 et 9.

Équations de degré douze. — L'équation la plus générale dont l'intégrale possède *trois* branches est de degré *douze;* L, M, N seront alors de degrés 8, 10 et 9; et si α, β, γ désignent trois polynomes en y de la forme

$$\alpha = \alpha_2 y^2 + \alpha_1 y + 1, \qquad \beta = \beta_3 y^3 + \beta_2 y^2 + \beta_1 y + \beta_0, \qquad \gamma = \gamma_3 y^3 + \gamma_2 y^2 + \gamma_1 y,$$

avec la condition suivante, qui exprime que $y=1$ est *intégrale* pour $C=1$,

$$\alpha_2 + \alpha_1 + 1 + \gamma_3 + \gamma_2 + \gamma_1 = 2(\beta_3 + \beta_2 + \beta_1 + \beta_0),$$

l'équation différentielle (1) s'écrit de la façon suivante :

$$\left[\left(\alpha\frac{\partial\gamma}{\partial y} - \gamma\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)y' + \alpha\frac{\partial\gamma}{\partial x} - \gamma\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right]^2$$
$$-4\left[\left(\beta\frac{\partial\gamma}{\partial y} - \gamma\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)y' + \beta\frac{\partial\gamma}{\partial x} - \gamma\frac{\partial\beta}{\partial x}\right]\left[\left(\alpha\frac{\partial\beta}{\partial y} - \beta\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)y' + \alpha\frac{\partial\beta}{\partial x} - \beta\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right] = 0,$$

et les *coefficients* de L, M, N sont, par suite, des *fonctions rationnelles* des α_i, β_i, γ_i *et de leurs dérivées.*

[1] Pour obtenir *toutes* les équations répondant à la question, il suffira de remplacer dans chacun des types obtenus y par $\dfrac{a(x)Y + b(x)}{Y + l(x)}$ et y' par la dérivée de cette expression; la nouvelle équation renfermera alors *rationnellement* les trois fonctions *arbitraires* $a(x)$, $b(x)$, $l(x)$ et leurs dérivées premières.

Remarque. — L'intégrale et le terme indépendant de y' pouvant s'écrire également

$$\alpha(C-1)^2 - 2(\beta-\alpha)(C-1) + \alpha - 2\beta + \gamma = 0,$$

$$\left[\alpha\frac{\partial(\alpha-2\beta+\gamma)}{\partial x} - (\alpha-2\beta+\gamma)\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right]^2$$
$$-4\left[\alpha\frac{\partial(\beta-\alpha)}{\partial x} - (\beta-\alpha)\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right]\left[(\beta-\alpha)\frac{\partial(\alpha-2\beta+\gamma)}{\partial x} - (\alpha-2\beta+\gamma)\frac{\partial(\beta-\alpha)}{\partial x}\right],$$

le facteur $y-1$ se met aussitôt en évidence dans ce dernier, en vertu de l'identité

$$\alpha - 2\beta + \gamma \equiv (y-1)[(\gamma_3 - 2\beta_3)y^2 + (\gamma_3 - 2\beta_3 + \gamma_2 - 2\beta_2 + \alpha_2)y + 2\beta_0 - 1].$$

3. Équations de degré onze. — En écrivant que $y = \infty$, par exemple, est une intégrale remarquable *double*, d'où $\alpha_2 = 0$, on obtient une équation (1) où L, M, N sont de degrés 7, 9 et 8.

Équations de degré dix. — Deux cas peuvent se présenter, suivant que l'abaissement du degré provient de *deux* solutions *doubles* ou de la présence d'*une* solution *triple*. Dans l'équation (1) correspondante L, M, N sont de degrés 6, 8 et 7.

I. *Il y a deux intégrales remarquables doubles.* — Soient $y = \infty$, $y = 0$, d'où $\alpha_2 = \gamma_1 = 0$. Après suppression du facteur y, il reste une équation (1) du degré indiqué.

II. *Il y a une intégrale remarquable triple.* — On partira de la forme de l'intégrale

$$C^2 - 2(\beta_3 y^3 + \beta_2 y^2 + \beta_1 y + \beta_0)C + \gamma_3 y^3 + \gamma_2 y^2 + \gamma_1 y = 0$$
$$[\gamma_3 + \gamma_2 + \gamma_1 + 1 = 2(\beta_3 + \beta_2 + \beta_1 + 1)],$$

et l'on obtiendra une équation (1) de même forme que tout à l'heure.

Équations de degré neuf. — Ici encore, il y a deux cas à distinguer :

I. *Il y a trois solutions remarquables doubles.* — Soient $y = 0, y = 1, y = \infty$ pour $C = 0, 1, \infty$. On partira de l'intégrale générale et des conditions

$$(\alpha_1 y + 1)C^2 - 2(\beta_3 y^3 + \beta_2 y^2 + \beta_1 y + \beta_0)C + \gamma_3 y^3 + \gamma_2 y^2 = 0,$$
$$\alpha_1 + 1 + \gamma_3 + \gamma_2 = 2(\beta_3 + \beta_2 + \beta_1 + \beta_0), \qquad \alpha_1 + 2\gamma_2 + 3\gamma_3 = 2(3\beta_3 + 2\beta_2 + \beta_1),$$

en remarquant que la relation suivante, conséquence des deux précédentes,

$$(\gamma_3 - 2\beta_3)y^3 + (\gamma_2 - 2\beta_2)y^2 + (\alpha_1 - 2\beta_1)y + 1 - 2\beta_0$$
$$\equiv (y-1)^2[(\gamma_3 - 2\beta_3)y + 1 - 2\beta_0]$$

permet de mettre en évidence le facteur $y-1$ dans les coefficients de y'^2 et y' et le facteur $(y-1)^2$ dans les autres termes en sorte qu'après la suppression du facteur $y(y-1)$, il restera l'équation (1) demandée.

II. *Il y a une solution triple et une solution double.* — Soient $y=\infty$, $y=0$, on partira de

$$C^2-2(\beta_3 y^3+\beta_2 y^2+\beta_1 y+\beta_0)C+\gamma_3 y^3+\gamma_2 y^2=0$$
$$[1+\gamma_2+\gamma_3=2(\beta_0+\beta_1+\beta_2+\beta_3)].$$

4. Équations de degré huit. — Il y a trois cas à distinguer :

I. *Il y a quatre solutions doubles.* — Quand $y=0$, $y=\infty$ sont deux solutions doubles pour $C=0$, $C=\infty$, l'intégrale générale prend la forme

$$(\alpha_1 y+1)C^2-2(\beta_3 y^3+\beta_2 y^2+\beta_1 y+\beta_0)C+\gamma_3 y^3+\gamma_2 y^2=0.$$

Si $y=1$, $y=T_1$ sont deux nouvelles solutions remarquables doubles pour $C=1$ et $C=C_1$, les fonctions γ_3, β_3, β_2, β_1 s'expriment en fonction *rationnelle* de T_1, α_1, γ_2 et de la constante C_1, au moyen des relations *linéaires*

$$(2)\quad\left\{\begin{array}{llllll}
-3\gamma_3 T_1^2+6\beta_3 C_1 T_1^2+4\beta_2 C_1 T_1+2\beta_1 C_1 & =2\gamma_2 T_1+\alpha_1 C_1^2, \\
-3\gamma_3\quad+6\beta_3\qquad+4\beta_2\qquad+2\beta_1 & =2\gamma_2\quad+\alpha_1, \\
\qquad 2\beta_2 C_1 T_1^2+4\beta_1 C_1 T_1 & =\gamma_2 T_1^2\quad+2\alpha_1 C_1^2 T_1+3(C_1^2-2\beta_0 C_1), \\
\qquad 2\beta_2+4\beta_1 & =\gamma_2\quad+2\alpha_1\qquad+3(1-2\beta_0),
\end{array}\right.$$

et le premier membre de l'équation différentielle correspondante, après suppression du facteur $y(y-1)(y-T_1)$, est de la forme (1), où L, M, N sont des polynomes de degrés 4, 6 et 5, *dont les coefficients s'expriment* RATIONNELLEMENT *à l'aide de la constante arbitraire* C_1, *des trois fonctions arbitraires* α_1, γ_2, T_1 *et de leurs dérivées* α'_1, γ'_2 et T'_1.

II. *Il y a une solution triple* $(y=\infty)$ *et deux solutions doubles* $(y=0,\ y=1)$. On partira des formes suivantes de l'intégrale générale et dans le résultat final on supprimera le facteur $y(y-1)$

$$C^2-2(\beta_3 y^3+\beta_2 y^2+\beta_1 y+\beta_0)C+\gamma_3 y^3+\gamma_2 y^2=0,$$
$$1+\gamma_2+\gamma_3=2(\beta_3+\beta_2+\beta_1+\beta_0),\qquad 2\gamma_2+3\gamma_3=2(3\beta_3+2\beta_2+\beta_0).$$

III. *Il y a deux solutions triples* $(y=\infty, y=0)$. — Dans le résultat final, on supprimera le facteur y^2, après être parti de la forme de l'intégrale générale

$$C^2-2(\beta_3 y^3+\beta_2 y^2+\beta_1 y+\beta_0)+\gamma_3 y^3=0\qquad[\gamma_3+1=2(\beta_3+\beta_2+\beta_1+\beta_0)].$$

5. Équations de degré sept. — Il y a trois cas à distinguer :

I. *Il existe cinq solutions remarquables doubles.* — Soient $y=0$, $y=1$, $y=\infty$, $y=T_1$, $y=T_2$ pour les valeurs 0, 1, ∞, C_1, C_2 de la constante. L'intégrale générale s'écrira

$$(\alpha_1 y + 1)C^2 - 2(\beta_3 y^3 + \beta_2 y^2 + \beta_1 y + \beta_0)C + \gamma_3 y^3 + \gamma_2 y^2 = 0,$$

et les fonctions β_0, β_1, β_2, β_3, γ_2, γ_3 s'expriment en fonction *rationnelle* de T_1, T_2, α_1 et des constantes arbitraires C_1, C_2, au moyen des relations *linéaires*

$$(3)\left\{\begin{array}{llllll}
-3T_1^2\gamma_3 - 2T_1\gamma_2 + 6C_1T_1^2\beta_3 + 4C_1T_1\beta_2 + 2C_1\beta_1 & & & & = \alpha_1 C_1^2, \\
-3T_2^2\gamma_3 - 2T_2\gamma_2 + 6C_2T_2^2\beta_3 + 4C_2T_2\beta_2 + 2C_2\beta_1 & & & & = \alpha_1 C_2^2, \\
-3\gamma_3 \quad - 2\gamma_2 \quad + 6\beta_3 \quad + 4\beta_2 \quad + 2\beta_1 & & & & = \alpha_1, \\
\qquad -T_1^2\gamma_2 & + 2C_1T_1^2\beta_2 & + 4C_1T_1\beta_1 & - 6C_1\beta_0 & = 2C_1^2T_1\alpha_1 + 3C_1^2, \\
\qquad -T_2^2\gamma_2 & + 2C_2T_2^2\beta_2 & + 4C_2T_2\beta_1 & - 6C_2\beta_0 & = 2C_2^2T_2\alpha_1 + 3C_2^2, \\
\qquad -\gamma_2 & + 2\beta_2 & + 4\beta_1 & - 6\beta_0 & = 2\alpha_1 + 3.
\end{array}\right.$$

L'équation différentielle correspondante, après suppression du facteur

$$y(y-1)(y-T_2)(y-T_2),$$

est de la forme (1), où L, M, N sont des polynomes de degrés 4, 6 et 5, *dont les coefficients s'expriment* RATIONNELLEMENT *à l'aide des constantes arbitraires* C_1, C_2, *des trois fonctions arbitraires* α_1, T_1, T_2 *et de leurs dérivées premières* α'_1, T'_1, T'_2.

6. II. *Il existe une solution remarquable triple et trois solutions remarquables doubles.* — Soient $y = \infty$ la solution triple pour $C = \infty$ et $y = 0$, $y = 1$, $y = T_1$ pour $C = 0$, 1, C_1. L'intégrale générale est de la forme

$$C^2 - 2(\beta_3 y^3 + \beta_2 y^2 + \beta_1 y + \beta_0)C + \gamma_3 y^3 + \gamma_2 y^2 = 0.$$

Les coefficients β_3, β_2, β_1, γ_3 s'expriment *rationnellement* à l'aide de T_1, γ_2 et de la constante arbitraire C_1, au moyen de relations linéaires qui se déduisent des relations (2) en y faisant $\alpha_1 = 0$. L'équation différentielle qu'on obtiendra, après suppression du facteur $y(y-1)(y-T_1)$, sera de la forme (1) et ses coefficients seront des fonctions rationnelles de C_1, T_1 γ_2, T'_1, γ'_2.

III. *Il existe deux solutions triples* ($y = 0$, $y = \infty$) *et une solution double* ($y = 1$). — L'intégrale générale est de la forme

$$C^2 - 2(\beta_3 y^3 + \beta_2 y^2 + \beta_1 y + \beta_0)C + \gamma_3 y^3 = 0,$$
$$-3\gamma_3 + 6\beta_3 + 4\beta_2 + 2\beta_1 = 0, \qquad \gamma_3 + 1 = 2(\beta_3 + \beta_2 + \beta_1 + \beta_0),$$

et donne lieu à une équation différentielle qui, après la suppression du facteur $y^2(y-1)$, est de la forme (1).

7. Équations de degré six. — Il y a quatre cas à distinguer :

I. *Il existe six solutions remarquables doubles.* — Soient $y=0, y=1, y=\infty$, $y=T_1$, $y=T_2$, $y=T_3$ pour $C=0, 1, \infty, C_1, C_2, C_3$. On peut partir de la forme

$$(4)\qquad (\alpha_1 y+1)C^2-2(\beta_3 y^3+\beta_2 y^2+\beta_1 y+\beta_0)C+\gamma_3 y^3+\gamma_2 y^2=0,$$

et si l'on pose

$$\begin{aligned} f(T,C) &\equiv -3T^2\gamma_3-2T\gamma_2+6CT^2\beta_3+4CT\beta_2+2C\beta_1-\alpha_1 C^2,\\ \varphi(T,C) &\equiv -T^2\gamma_2+2CT^2\beta_2+4CT\beta_1-6C\beta_0-2C^2T\alpha_1-3C^2, \end{aligned}$$

les *sept* coefficients α_i, β_j sont liés par les *huit* relations *linéaires*

$$(5)\qquad \begin{cases} f(T_1,C_1)=0, & f(T_2,C_2)=0, & f(T_3,C_3)=0, & f(1,1)=0,\\ \varphi(T_1,C_1)=0, & \varphi(T_2,C_2)=0, & \varphi(T_3,C_3)=0, & \varphi(1,1)=0, \end{cases}$$

qui ne seront *compatibles* que si le déterminant $\Delta\equiv F(T_1,T_2,T_3,C_1,C_2,C_3)$ est nul.

$$\Delta\equiv\begin{vmatrix} T_1^2 & 2T_1 & C_1T_1^2 & 2C_1T_1 & C_1 & 0 & C_1^2 & 0\\ T_2^2 & 2T_2 & C_2T_2^2 & 2C_2T_2 & C_2 & 0 & C_2^2 & 0\\ T_3^2 & 2T_3 & C_3T_3^2 & 2C_3T_3 & C_3 & 0 & C_2^3 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & T_1^2 & 0 & C_1T_1^2 & 2C_1T_1 & C_1 & 2C_1^2T_1 & C_1^2\\ 0 & T_2^2 & 0 & C_2T_2^2 & 2C_2T_2 & C_2 & 2C_2^2T_2 & C_2^2\\ 0 & T_3^2 & 0 & C_3T_3^2 & 2C_3T_3 & C_3 & 2C_3T_3 & C_3\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix},$$

d'où la relation *algébrique* (où F est un polynome en $T_1, T_2, T_3, C_1, C_2, C_3$)

$$(6)\qquad F(T_1,T_2,T_3,C_1,C_2,C_3)=0,$$

qui permet d'exprimer T_3, par exemple, en fonction *algébrique* des *fonctions arbitraires* T_1, T_2 et des *constantes arbitraires* C_1, C_2, C_3.

Dans ces conditions, on pourra résoudre les sept premières équations (5) par rapport aux α_i, β_j qui seront exprimés ainsi *rationnellement* à l'aide de T_1, T_2, T_3, C_1, C_2, C_3, liés par la relation (6). L'équation différentielle correspondant à la relation (4) (où les fonctions α_i, β_j sont exprimées au moyen des T et des C), après suppression du facteur $y(y-1)(y-T_1)(y-T_2)(y-T_3)$, est de la forme (1), où *les coefficients des polynomes* L, M, N *sont exprimés* RATIONNELLEMENT *à l'aide des trois constantes arbitraires distinctes* C_1, C_2, C_3, *des trois fonctions* T_1, T_2, T_3 *liées par la relation* ALGÉBRIQUE (6) (*et de leurs dérivées*), ou bien encore où *les coefficients sont exprimés* ALGÉBRIQUEMENT *à l'aide des trois constantes arbitraires* C_1, C_2, C_3, *des deux fonctions arbitraires* T_1, T_2 *et de leurs dérivées*.

II. *Il existe quatre solutions remarquables doubles* et *une solution triple*.

Soient $y=\infty$ solution *triple* pour $C=\infty$, et $y=0$, $y=1$, $y=T_1$, $y=T_2$ solutions *doubles* pour $C=0$, $C=1$, $C=C_1$, $C=C_2$. On part de

$$C^2-2(\beta_3 y^3+\beta_2 y^2+\beta_1 y+\beta_0)C+\gamma_3 y^3+\gamma_2 y^2=0,$$

avec des relations qui se déduisent de (3) en faisant $\alpha_1=0$. Ici L, M, N sont de *degrés* 3, 5 et 4, mais les conclusions sont identiques à celles du premier cas du n° 5.

8. III. *Il existe deux solutions triples* ($y=0$, $y=\infty$) et *deux solutions doubles* ($y=1$, $y=T_1$). — On a l'intégrale générale (7) avec les relations (8),

$$C^2-2(\beta_3 y^3+\beta_2 y^2+\beta_1 y+\beta_0)C+\gamma_3 y^3=0, \tag{7}$$

$$\left\{\begin{array}{lllll} -3\gamma_3 T_1^2+6\beta_3 C_1 T_1+4\beta_2 C_1 T_1+2\beta_1 C_1 & & =0, \\ -3\gamma_3 \quad +6\beta_3 \quad +4\beta_2 \quad +2\beta_1 & & =0, \\ \qquad 2\beta_2 C_1 + 4\beta_1 C_1 T_1 & & =3(C_1^2-2\beta_0 C_1), \\ \qquad 2\beta_2 + 4\beta_1 & & =3(1-2\beta_0). \end{array}\right. \tag{8}$$

L'équation différentielle correspondante, après suppression du facteur

$$y^2(y-1)(y-T_1),$$

est de la forme (1), où L, M, N *sont des polynomes en* y *de degrés* 2, 4 et 3, *dont les coefficients sont des fonctions* RATIONNELLES *de la constante arbitraire* C_1, *des deux fonctions arbitraires* T_1 et β_0, *et de leurs dérivées* T'_1, β'_0.

IV. *Il existe trois solutions remarquables triples*. — Soient $y=0$, $y=1$, $y=\infty$ pour $C=0$, $C=1$, $C=\infty$. L'intégrale générale est de la forme

$$C^2-(Ay^3+3By^2-3By+B+1)C+(A+B)y^3=0,$$

et l'équation différentielle correspondante, après suppression du facteur $y^2(y-1)^2$, est de la forme

$$Ly'^2-2My'+y(y-1)N=0,$$

où

$$\left\{\begin{array}{l} L\equiv 9B(A+B)[Ay^2+2By-(B+1)], \\ M\equiv(AB'+BA'+2BB')y-B'(A+B)+(y-1)(AB'-BA')(Ay^3+2By^2-By) \\ \qquad +B(A+B)[A'y^3+3B'y(y-1)+B'], \\ N\equiv(AB'-BA')(A'y^3+3B'y^2-3B'y+B')-B'(A'+B'). \end{array}\right. \tag{9}$$

Ici les coefficients sont des polynomes entiers par rapport aux deux fonctions arbitraires A *et* B *et leurs dérivées premières* A′ *et* B′.

9. Équations de degré cinq. — Nous avons quatre cas à distinguer, suivant le nombre et la multiplicité des solutions remarquables.

I. *Il existe sept solutions doubles.* — Soient o, 1, ∞, T_1, T_2, T_3, T_4 pour les valeurs o, 1, ∞, C_1, C_2, C_3, C_4 de la constante C. Dans l'intégrale générale

$$(\alpha_1 y + 1)C^2 - 2(\beta_3 y^3 + \beta_2 y^2 + \beta_1 y + \beta_0)C + \gamma_3 y^3 + \gamma_2 y^2 = 0,$$

les *sept* coefficients α_1, β_i, γ_j sont liés par les *dix* relations *linéaires* (*voir* § 7)

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{lllll} f(T_1, C_1) = 0, & f(T_2, C_2) = 0, & f(T_3, C_3) = 0, & f(T_4, C_4) = 0, & f(1, 1) = 0, \\ \varphi(T_1, C_1) = 0, & \varphi(T_2, C_2) = 0, & \varphi(T_3, C_3) = 0, & \varphi(T_4, C_4) = 0, & \varphi(1, 1) = 0, \end{array}\right.$$

qui ne seront compatibles que si trois conditions écrites sous forme de déterminant

$$(11)\qquad \Phi_1(T_1, T_2, T_3, T_4, C_1, C_2, C_3, C_4) = 0, \qquad \Phi_2 = 0, \qquad \Phi_3 = 0,$$

sont satisfaites, auquel cas les coefficients α_1, β_i, γ_j seront des fonctions *rationnelles* des T_i et C_i liés par les relations *algébriques* (6), ou encore des fonctions *algébriques* de T_1, par exemple, et de C_1, C_2, C_3, C_4. Après suppression du facteur $y(y-1)(y-T_1)(y-T_2)(y-T_3)(y-T_4)$, l'équation différentielle correspondante est de la forme (1), où L, M, N sont des polynomes en y de degrés *un, trois* et *deux,* dont les coefficients sont des *fonctions* RATIONNELLES des T_i, C_i, *liés par les relations algébriques* (11) *et de leurs dérivées.*

II. *Il existe une solution triple et cinq solutions doubles.* Il suffit dans le calcul fait au I du § 7 de supposer $\alpha_1 = 0$, d'où deux relations

$$(12)\qquad \Psi_1(T_1, T_2, T_3, C_1, C_2, C_3) = 0, \qquad \Psi_2 = 0,$$

qu'on écrit sous forme de déterminant. On a, par exemple,

$$\Psi_1 \equiv \begin{vmatrix} T_1^2 & 2T_1 & C_1T_1^2 & 2C_1T_1 & C_1 & 0 & 0 \\ T_2^2 & 2T_2 & C_2T_2^2 & 2C_2T_2 & C_2 & 0 & 0 \\ T_3^2 & 2T_3 & C_3T_3^2 & 2C_3T_3 & C_3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & T_1^2 & 0 & C_1T_1^2 & 2C_1T_1 & C_1 & C_1^2 \\ 0 & T_2^2 & 0 & C_2T_2^2 & 2C_2T_2 & C_2 & C_2^2 \\ 0 & T_3^2 & 0 & C_3T_3^2 & 2C_3T_3 & C_3 & C_2^2 \end{vmatrix}.$$

On arrive à des conditions analogues à celle du paragraphe précédent, les relations *algébriques* (12) étant ici au nombre de deux.

III. *Il existe deux solutions triples et trois solutions doubles.* — Il suffit de se reporter au II du § 7 et d'y faire $\gamma_2 = 0$.

IV. *Il existe trois solutions triples et une solution double.* — Nous avons vu que, lorsque l'équation possède les trois solutions triples $y=0, y=1, y=\infty$ pour $C=0$, $C=1$, $C=\infty$, cette équation prenait la forme (1) où L, M, N avaient les expressions (9).

Écrivons de plus que $y=T_1$ est solution *double* pour $C=C_1$, d'où

$$B=\frac{C_1-1}{(T_1-1)^3}, \qquad A=\frac{T_1^2-2C_1T_1+C_1}{T_1^2(T_1-1)^2};$$

les polynomes L, M, N, après suppression du facteur commun $y-T_1$, deviennent

$$L\equiv 9B(A+B)\left(Ay+\frac{B+1}{T_1}\right),$$

$$\begin{aligned}M\equiv{}& A(AB'-BA')y^3+[A(T_1-1)(AB'-BA')+BA(A+B)+2B]y^2\\ &+[AT_1(T_1-1)(AB'-BA')+BA'(A+B)T_1+2B(T_1-1)\\ &\quad-B(AB'-BA')+2BB'(A+B)]y+\frac{B'(1-B)}{T_1}(A+B),\end{aligned}$$

$$N\equiv(AB'-BA')\left[A'y^2+(A'T_1+3B')y-\frac{B'}{T_1}\right]+\frac{B'}{T_1}(A'+B').$$

II. — Il n'y a pas d'intégrales singulières.

Nous pouvons toujours disposer des coefficients de la transformation homographique de façon que les courbes $y=g(x)$, *lieux des points de rebroussement* des intégrales, qui dans le cas actuel sont au nombre de *deux*, soient $y=0$, $y=1$, et que de plus $y=\infty$ soit solution *ordinaire* pour $C=\infty$.

Équations de degré six. — Dans ces conditions, l'équation différentielle correspondante est en général de degré *six*. Les coefficients α_i, β_i, dans l'intégrale générale

$$(\alpha_2y^2+\alpha_1y+1)C^2-2(\beta_3y^3+\beta_2y^2+\beta_1y+\beta_0)C+\gamma_3y^3+\gamma_2y^2+\gamma_1y+\gamma_0=0,$$

sont liés par les relations

$$(13)\qquad \left\{\begin{array}{l} 2\beta_2\beta_3-\alpha_2\gamma_3+3\beta_3^2=0, \qquad \beta_2^2+2\beta_1\beta_3-\alpha_2\gamma_2-\alpha_1\gamma_3-3\beta_3^2=0,\\ 2\beta_0\beta_3+2\beta_1\beta_2-\alpha_2\gamma_1-\gamma_2\alpha_1-\gamma_3+\beta_3^2=0, \qquad \beta_0^2=\gamma_0,\\ \beta_1^2+2\beta_0\beta_2-\alpha_2\gamma_0-\alpha_1\gamma_1-\gamma_2=0, \qquad 2\beta_0\beta_1-\alpha_1\gamma_0-\gamma_1=0,\end{array}\right.$$

résultant de l'identité suivante relative aux *lieux des points de rebroussement*

$$(\beta_3 y^3 + \beta_2 y^2 + \beta_1 y + \beta_0)^2 - (\alpha_2 y^2 + \alpha_1 y + \alpha_0)(\gamma_3 y^3 + \gamma_2 y^2 + \gamma_1 y + \gamma_0) \equiv \beta_3^2 y^3 (y-1)^3,$$

et l'on a, pour l'équation différentielle correspondante, après suppression du facteur $y^3(y-1)^3$,

$$\begin{aligned} & y(y-1)[3\beta_3(2y-1)y' + 2\beta'_3 y(y-1)]^2 \\ & - 4[(3\beta_3 y^2 + 2\beta_2 y + \beta_1)y' + \beta'_3 y^3 + \beta'_2 y^2 + \beta'_1 y + \beta'_0]^2 \\ & + 4[(2\alpha_2 y + \alpha_1)y' + \alpha'_2 y^2 + \alpha'_1 y] \\ & \quad \times [(3\gamma_3 y^2 + 2\gamma_2 y + \gamma_1)y' + \gamma'_3 y^3 + \gamma'_2 y^2 + \gamma'_1 y + \gamma'_0] = 0, \end{aligned}$$

qui, en tenant compte des relations (13), est de degré *six* et de la forme

$$L y'^2 + 4 M y' + 4 N = 0, \tag{14}$$

Les polynomes L, M, N ont les développements suivants :

$$L \equiv (8\beta_1\beta_3 - 4\alpha_1\gamma_3 - 3\beta_3^2)y^2 + (8\alpha_1\gamma_2 + 8\alpha_2\gamma_1 - 16\beta_1\beta_2 - 9\beta_3^2)y + 4(\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2),$$

$$\begin{aligned} M \equiv {} & (2\alpha_2 y + \alpha_1)(\gamma'_3 y^3 + \gamma'_2 y^2 + \gamma'_1 y + \gamma'_0) + (\alpha'_2 y^2 + \alpha'_1 y)(3\gamma_3 y^2 + 2\gamma_2 y + \gamma_1) \\ & + 3\beta_3\beta'_3(-5y^2 + 4y - 1) - 6\beta_3 y^2(\beta'_2 y^2 + \beta'_1 y + \beta'_0) \\ & - 2(2\beta_2 y + \beta_1)(\beta'_3 y^3 + \beta'_2 y^2 + \beta'_1 y + \beta'_0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N \equiv {} & \beta'^2_3 y^3 (y-1)^3 - (\beta'_3 y^3 + \beta'_2 y^2 + \beta'_1 y + \beta'_0)^2 \\ & + (\alpha'_2 y^2 + \alpha'_1 y)(\gamma'_3 y^3 + \gamma'_2 y^2 + \gamma'_1 y + \gamma'_0), \end{aligned}$$

où les α_i, β_i, γ_i sont liés par les relations (13).

Équations de degré cinq. — L'équation s'abaisse au degré *cinq*, s'il existe *une* solution remarquable *double*, soit $y = \infty$ pour $C = \infty$, d'où

$$(\alpha_1 y + 1)C'^2 - 2(\beta_3 y^3 + \beta_2 y^2 + \beta_1 y + \beta_0)C' + \gamma_3 y^3 + \gamma_2 y^2 + \gamma_1 y + \gamma_0 = 0$$

avec l'identité

$$(\beta_3 y^3 + \beta_2 y^2 + \beta_1 y + \beta_0)^2 - (\alpha_1 y + 1)(\gamma_3 y^3 + \gamma_2 y^2 + \gamma_1 y + \gamma_0) \equiv \beta_3^2 y^3 (y-1)^3.$$

Les relations qui en résultent

$$2\beta_2 + 3\beta_3 = 0, \qquad \beta_2^2 + 2\beta_1\beta_3 - \alpha_1\gamma_3 - 3\beta_3^2 = 0, \qquad 2\beta_0\beta_1 - \alpha_1\gamma_0 - \gamma_1 = 0,$$

$$2\beta_0\beta_3 + 2\beta_1\beta_2 - \gamma_2\alpha_1 - \gamma_3 + \beta_3^2 = 0, \qquad \beta_1^2 + 2\beta_0\beta_2 - \alpha_1\gamma_1 - \gamma_2 = 0, \qquad \beta_0^2 = \gamma_0.$$

permettent d'exprimer $\gamma_3, \gamma_2, \gamma_1, \gamma_0$ en fonction *rationnelle* des β_0, β_1, β_3, α_0, α_1

liés par les relations

$$\left(\beta_3 - \frac{3\beta_3}{2}\alpha_1 + \beta_1\alpha_1^2 - \beta_0\alpha_1^3\right)^2 - \beta_3^2(1+\alpha_1)^3 = 0, \tag{15}$$

$$\left\{\begin{aligned} &(\gamma_0 = \beta_0^2, \qquad \gamma_1 = 2\beta_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0^2, \qquad \gamma_2 = -\alpha_1(2\beta_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0^2) + \beta_1^2 + 2\beta_0\beta_2, \\ &\quad \gamma_3 = \beta_3(2\beta_0 - 3\beta_1) + \alpha_1^2(2\beta_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0^2) - \alpha_1\beta_1^2 - 2\alpha_1\beta_0\beta_2 + \beta_3^2. \end{aligned}\right. \tag{16}$$

L'équation différentielle a la forme (13) avec

$$L \equiv 3\beta_3(2\beta_1 - 3\beta_3)y - 4\beta_1^2,$$

$$\begin{aligned} M \equiv {} & \alpha_1(\gamma_3' y^3 + \gamma_2' y^3 + \gamma_1' y + \gamma_0') + \alpha_1' y(3\gamma_3 y^2 + 2\gamma_2 y + \gamma_1) + 3\beta_3\beta_3'(4y - 1) \\ & - 6\beta_3 y^2(\beta_1' y + \beta_0') - 4\beta_2 y(\beta_2' y^2 + \beta_1' y + \beta_0') - 2\beta_1(\beta_3' y^3 + \beta_2' y^2 + \beta_1' y + \beta_0'), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N \equiv {} & \alpha_1' y(\gamma_3' y^3 + \gamma_2' y^2 + \gamma_1' y + \gamma_0') \\ & + \beta_3^2(3y^4 - y^3) - 2\beta_3' y^3(\beta_1' y + \beta_0') - (\beta_2' y^2 + \beta_1' y + \beta_0')^2. \end{aligned}$$

$\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ doivent être remplacés par les expressions (16), $\gamma_0', \gamma_1', \gamma_2', \gamma_3'$ par leurs dérivées ; les coefficients de l'équation différentielle sont donc des fonctions *rationnelles* des quantités $\beta_0, \beta_1, \beta_3, \alpha_1$ liées par la relation *algébrique* (15) (et de leurs dérivées), ou bien encore si l'on exprime α_1 *algébriquement* à l'aide de $\beta_0, \beta_1, \beta_3$, ces coefficients sont des fonctions *algébriques* des fonctions *indépendantes* $\beta_0, \beta_1, \beta_3$ et de leurs dérivées.

Équations de degré quatre. — L'abaissement au degré *quatre* peut provenir, soit de l'existence de *deux* solutions remarquables *doubles*, soit de l'existence d'*une* solution remarquable *triple*.

I. *Il existe deux solutions doubles.* — Soient $y = \infty$ et $y = T$ pour $C = \infty$ et $C = 0$. Aux relations (14) et (15), il faut ajouter les relations

$$3\gamma_3 T^2 + 2\gamma_2 T + \gamma_1 = 0, \qquad \gamma_2 T^2 + 2\gamma_1 T + 3\gamma_0 = 0, \tag{17}$$

qui expriment que $y = T$ est solution *double* pour $C = 0$. Alors, après suppression du nouveau facteur $y - T$, il reste une équation (1) où

$$L \equiv 3\beta_3(2\beta_1 - 3\beta_3),$$

$$\begin{aligned} M \equiv {} & (\alpha_1\gamma_3' + 3\alpha_1'\gamma_3 - 6\beta_3\beta_1' - 4\beta_2\beta_2' - 2\beta_1\beta_3')y^2 \\ & + \frac{-\alpha_1\gamma_0' + 3\beta_3\beta_3' + 2\beta_1\beta_0' + T(4\beta_2\beta_0' + 2\beta_1\beta_1' - 12\beta_3\beta_3' - \alpha_1\gamma_1' - \gamma_1\alpha_1')}{T^2} y \\ & + \frac{-\alpha_1\gamma_0' + 3\beta_3\beta_3' + 2\beta_1\beta_0'}{T}, \end{aligned}$$

$$N \equiv (\alpha_1\gamma_3' + 3\beta_3^2 - 2\beta_3\beta_1' - \beta_2'^2)y^3 + \ldots + \frac{\beta_0'^2}{T},$$

les α_i, β_i, γ_i étant liés par les relations *algébriques* (15), (16), (17).

II. *Il existe une solution triple.* — Soit $y=\infty$ pour $C=\infty$. L'intégrale s'écrit

$$C^2-2(\beta_3y^3+\beta_2y^2+\beta_1y+\beta_0)\,C+\gamma_3y^3+\gamma_2y^2+\gamma_1y+\gamma_0=0;$$

on a, comme précédemment,

$$(\beta_3y^3+\beta_2y^2+\beta_1y+\beta_0)-\gamma_3y^3-\gamma_2y^2-\gamma_1y-\gamma_0\equiv\beta_3^2y^3(y-1)^3$$

et, en posant $\beta_0=A$, on met l'intégrale générale sous la forme

$$C^2-2(8y^3-12y^2+3y+A)\,C+16(A-8)y^3+3(3-8A)y+6Ay+A^2=0$$

qui donne lieu à une équation différentielle qu'on peut écrire successivement, après suppression du facteur $y^3(y-1)^3$,

$$64\times 9y(y-1)(2y-1)^2y'^2-4[24y^2-24y+3)y'+A']^2=0,$$

$$9y'^2+6(8y^2-8y+1)A'y'+A'^2=0,$$

$$y'=A'\left[\frac{3(-8y^2+8y-1)+2(2y-1)\sqrt{y(y-1)}}{9}\right].$$

CHAPITRE VI.

FORMATION DES ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ EN y' POUR LESQUELLES LE GENRE ϖ DE LA RELATION ENTRE LES CONSTANTES INTÉGRALES EST ÉGAL A UN.

I. — Démonstration de propriétés générales de ces équations.

1. Je vais établir deux théorèmes relatifs à la forme de l'intégrale générale et au rôle des racines du *discriminant*.

Théorème I. — *Quand le genre ϖ de la relation entre les constantes intégrales est égal à* un, *l'équation différentielle se met sous la forme*

$$\frac{H(y,x)}{\sqrt{QR}}\,y'+\frac{K(y,x)}{\sqrt{QR}}+\lambda(x)=0,$$

où H *et* K *sont des polynomes en y de degrés respectifs $p-1$ et $p+1$ au plus, en désignant par $2p+2$ le degré de* QR, *et λ une fonction arbitraire de x.*

En effet, on sait que, dans les conditions de l'énoncé, l'intégrale générale peut se mettre sous la forme

$$C = \int \left[\frac{H(y, x)}{\sqrt{QR}} dy + L(y, x)\, dx \right],$$

où le second membre est une intégrale de *différentielle totale exacte*. De plus, l'intégrale de *première espèce* (où H est de degré $p - 1$),

$$J(y, x) \equiv \int \frac{H(y, x)\, dy}{\sqrt{QR}}$$

n'a que *deux périodes,* qui sont des *constantes absolues* [1].

Les périodes de $J(y, x)$ étant des *constantes,* l'intégrale

$$G(y, x) \equiv \int \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{H}{\sqrt{QR}} \right) dy$$

une fonction *algébrique* de y, et, par suite, dans la différentielle totale exacte

$$\frac{H(y, x)}{\sqrt{QR}} dy + G(y, x)\, dx,$$

la fonction $G(y, x)$ est déterminée à une fonction d'addition près $\lambda(x)$, et comme $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{H}{\sqrt{QR}} \right)$ change de signe avec $\sqrt{QR}$, on en déduit immédiatement que la fonction G, convenablement choisie, change de signe avec $\sqrt{QR}$.

Posons

$$G = \frac{K}{\sqrt{QR}}.$$

Comme K ne peut devenir infini, sans que H le devienne en même temps, K est un polynome en y; de plus, comme cette dernière remarque s'applique aux valeurs infinies de y, il faut que K soit au plus de degré $p + 1$. Il en résulte que l'équation différentielle prendra bien la forme annoncée.

2. Théorème II. — *Quand le genre ϖ de la relation entre les constantes intégrales est égal à* UN, *les* RACINES *d'ordre* IMPAIR *du* DISCRIMINANT *de l'équation du second degré en y', définissent en général des* INTÉGRALES SINGULIÈRES, *ou, dans certains cas exceptionnels, un lieu de points de rebroussement où y' est* INFINI.

En effet, soit $y = g(x)$ une racine de Q qu'on peut toujours supposer égale à

---

(1) Painlevé, *Leçons de Stockholm*, p. 116-117.

zéro, en changeant y en $y+g(x)$; supposons que $y=0$ n'annule pas K, on pourra, dans le voisinage de $y=0$, développer F et G de la façon suivante

$$G = \frac{1}{y^{\frac{1}{2}}}[\alpha(x)+\ldots] \qquad (\alpha \not\equiv 0),$$

$$F = \frac{1}{y^{\frac{1}{2}}}[\beta(x)+\ldots] \qquad (\beta \not\equiv 0).$$

On en déduira

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{-\frac{1}{2}}{y^{\frac{3}{2}}}[\alpha+\ldots],$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{y^{\frac{1}{2}}}[\beta'(x)+\ldots],$$

ce qui est impossible, puisque

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial G}{\partial y}.$$

Donc $y=0$ annule K, et l'équation

$$\text{(1)} \qquad Hy' + K + \lambda\sqrt{QR} = 0$$

étant vérifiée pour $y=0$, $y=0$ est *solution singulière*.

3. *Remarque.* — Nous avons supposé implicitement que $H(y, x)$ *ne s'annulait pas* pour $y=g(x)$. Si $H(y, x)$ *s'annule* pour $y=g(x)$, on peut toujours supposer que $g(x)\equiv 0$ et le raisonnement précédent montre que K *s'annule* pour $y=0$; y est donc en facteur dans H, K, QR, et figure dans QR nécessairement au premier degré. Si donc on forme l'équation (1), on voit aussitôt que les deux valeurs de y' sont *infinies* pour $y=0$.

II. — Formation explicite des équations de l'espèce indiquée.

4. Problème. — *Cherchons à former les équations du second degré en y', de degré q* donné *en y, telles que n* branches *de l'intégrale se permutent autour des points critiques mobiles, et pour lesquelles le* genre ϖ *de la relation entre les constantes intégrales est égal à* un.

Nous nous donnons un nombre pair $2p+2$, degré de $S=QR$, avec les inégalités $2p+2 \leqq 2q-4$, $p \leqq q-3$, et nous cherchons, parmi les intégrales de première espèce,

$$\frac{H(y, x)\,dy}{\sqrt{S(y, x)}},$$

toutes celles qui se laissent déduire, par une *transformation d'ordre n*, d'une différentielle *elliptique,* par exemple de

$$\frac{d\gamma}{\sqrt{(1-\gamma^2)(1-\mu^2\gamma^2)}},$$

μ^2 désignant une constante numérique.

Étant donné le radical

$$\sqrt{(1-\gamma^2)(1-\mu^2\gamma^2)},$$

si nous posons

$$\gamma = \varphi(y) = \frac{N(y)}{M(y)},$$

M et N étant des polynomes en y de degré n, pour qu'une telle égalité définisse une *correspondance* avec un radical de degré $2p+2$, il faut et il suffit que l'expression

$$(M^2 - N^2)(M^2 - \mu^2 N^2)$$

renferme en facteur un carré parfait en y, de degré $4n - 2p - 2$, d'où $2n - p - 1$ conditions portant sur les $2n+1$ coefficients inconnus de $\varphi(y)$. Donc, une fois μ^2 donné, il reste $p+2$ coefficients *indéterminés*, à l'aide desquels les coefficients de $S(y, x)$ s'expriment *algébriquement*.

D'autre part, la différentielle *abélienne* de première espèce

$$\frac{H\,dy}{\sqrt{S}},$$

correspondant à la différentielle *elliptique*

$$\frac{d\gamma}{\sqrt{(1-\gamma^2)(1-\mu^2\gamma^2)}},$$

et qui est connue, une fois qu'on s'est donné $\varphi(y)$, dépend algébriquement de $p+2$ fonctions arbitraires de x et de la constante arbitraire μ.

Il en résulte que la différentielle totale exacte

$$\frac{H\,dy}{\sqrt{S}} + \left(\frac{K}{\sqrt{S}} + \lambda\right) dx,$$

où λ est une fonction arbitraire de x, dépend *algébriquement* de $p+3$ fonctions arbitraires.

5. Le degré de l'équation différentielle, mise sous forme entière

$$H^2 y'^2 + 2HKy' + K^2 - \lambda^2 S = 0,$$

étant $2p+2$, pour qu'il se réduise à q, il faut et il suffit que les deux polynomes

$$\mathrm{H} \quad \text{et} \quad \mathrm{K}^2 - \lambda^2 \mathrm{S}$$

aient un facteur commun de degré $2p+2-q$; et comme H est de degré $p-1$, il en résulte que, pour une *correspondance* avec un radical de *genre* p, le *degré* q est *au plus* égal à $2p+2$ et *au moins* égal à $p+3$.

Supposons d'abord que H et K n'aient aucun facteur commun, alors tout facteur commun à H et $\mathrm{K}^2 - \lambda^2\mathrm{S}$ est une *solution remarquable* de l'équation différentielle, c'est-à-dire qu'il annule les coefficients de dy et dx dans la différentielle totale

$$\mathrm{C} = \int \left[\frac{\mathrm{H}\,dy}{\sqrt{\mathrm{S}}} = \left(\frac{\mathrm{K}}{\sqrt{\mathrm{S}}} + \lambda\right) dx \right] \equiv \mathrm{J}(y, x).$$

De plus, si $y = g(x)$ est un zéro d'ordre α commun à H et $\mathrm{K}^2 - \lambda^2\mathrm{S}$, $y = g(x)$ est un zéro d'ordre $\alpha + 1$ de l'égalité

$$\mathrm{C}_0 = \mathrm{J}(y_1 x),$$

C_0 étant une constante convenable.

Donc, dans ce cas, pour qu'il y ait abaissement du degré de l'équation (1), il faut qu'il y ait des *solutions remarquables*, et le degré q de l'équation (1) est lié au degré $2p+2$ du radical S et au nombre ρ des solutions remarquables de multiplicité α_s, par la relation

$$q = 2p + 2 - \sum_{s=}^{s=\rho} (\alpha_s - 1).$$

Toutes ces propositions s'établissent par le même procédé que celui que nous avons employé au Chapitre III. Il suffit de répéter presque identiquement les mêmes raisonnements.

Mais dans le cas où H et S ont s *solutions communes,* ces s solutions ne sont pas, en général, intégrales *remarquables* de l'équation, et, pourtant, d'après une remarque faite plus haut, leur présence *abaisse* de s *unités* le *degré* de l'équation.

Il est clair qu'on aura la solution *la plus générale* en supposant que l'abaissement provient uniquement de l'existence de solutions *remarquables* d'ordre *deux*. Car on aura ainsi autant de conditions qu'il y a de *degrés* dans l'abaissement, chacune de ces conditions introduisant *une* constante arbitraire.

De plus, dans ce cas, comme il n'y a pas de *lieu de points de rebroussement*, $\mathrm{Q} \equiv 1$ et, par suite, $\mathrm{S} \equiv \mathrm{R}$; on aura de cette façon $2p+2-q$ relations de la forme

$$\text{(S)} \qquad \mathrm{C}_\rho = \mathrm{J}(y_\rho, x),$$

y_ρ étant une racine de $H(y, x) = 0$ $(q \geqq p+3)$. On trouve ainsi $2p+2-q$ *constantes arbitraires*.

6. En définitive, n et q étant *donnés,* pour avoir les équations (1) *les plus générales* correspondant au cas de $\varpi = 1$, on prendra successivement tous les systèmes d'*entiers positifs* i, p satisfaisant à la relation

$$2q - 4 = 2i + 2p + 2 \qquad \text{ou} \qquad q = i + p + 3. \tag{2}$$

Soit i, p un de ces systèmes, les équations (1) correspondantes dépendront de

$$p + 3 - (2p + 2 - q) = q + 2 - p - 1 = i + 4$$

fonctions arbitraires et de $2p + 2 - q$ *constantes arbitraires*.

Il y aura autant de types d'équations (1) qu'il y a de modes de décomposition du nombre $q - 3$ en une somme de deux entiers positifs i et p.

III. — Résolution rapide des objections qu'on peut faire a la théorie précédente.

7. Nous avons dit que l'intégrale $\int \frac{H\,dy}{\sqrt{R}}$ et la *transformation* de passage $\gamma = \varphi(y) = \frac{N(y)}{M(y)}$ dépendaient *algébriquement* de $p + 2$ fonctions arbitraires, et nous avons admis implicitement que, dans le cas le plus général, H a ses racines *simples*, que H et R n'ont pas de facteur commun et enfin que les conditions (S) étaient *compatibles* et *déterminées*.

Examinons successivement ces différents points.

8. Objections I et II. — *Le polynome* H *a toutes ses racines* simples *et les deux polynomes* H *et* R n'ont pas *de* facteurs communs.

Voici une démonstration rapide de ce fait qui rentre dans l'étude de la réduction des *intégrales hyperelliptiques*.

Si nous laissons arbitraire le *degré* n de la *transformation,* il faut et il suffit que les premiers membres des relations (σ),

$$(\sigma)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int_{y_1(x)}^{Y_1(x)} \frac{H\,dy}{\sqrt{R}} = m_1\omega_1 + n_1\omega_2,\\ &\int_{y_2(x)}^{Y_2(x)} \frac{H\,dy}{\sqrt{R}} = m_2\omega_1 + n_2\omega_2,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ &\int_{y_{2p}(x)}^{Y_{2p}(x)} \frac{H\,dy}{\sqrt{R}} = m_{2p}\omega_1 + n_{2p}\omega_{2p},\end{aligned}\right.$$

où m_1, n_1, m_2, n_2, ..., m_{2p}, n_{2p} sont des nombres *rationnels* quelconques, soient des fonctions *indépendantes* de $3p+2$ coefficients *distincts*.

Pour $x=x_0$, choisissons *arbitrairement* les valeurs de ces coefficients et, par suite, des seconds membres, et soient α_1, α_2, ..., α_{2p} les valeurs des seconds membres. Nous pouvons toujours disposer des nombres rationnels m_j, n_k de façon que les quantités $m_1\omega_1+n_1\omega_2$, $m_2\omega_1+n_2\omega_2$, ..., $m_{2p}\omega_1+n_{2p}\omega_2$ diffèrent aussi peu que l'on veut de α_1, α_2, ..., α_{2p}.

Donc, pour $x=x_0$ et pour ces valeurs des m_j, n_k, les conditions (σ) sont vérifiées par un choix des coefficients de H et R aussi voisins que l'on veut des valeurs *initiales* choisies *arbitrairement;* et, par conséquent, pour $x=x_0$, H et R satisfaisant aux conditions (σ) ont des racines *simples* et n'ont pas de racines communes, *a fortiori* pour *x quelconque* (sauf pour des valeurs *exceptionnelles* de x).

9. Objection III. — *Les relations* (S) *sont* compatibles *et* déterminées.

Pour écrire qu'il existe $2p+2-q$ solutions remarquables d'ordre *deux,* il suffit d'exprimer que pour les $2p+2-q$ fonctions *distinctes* $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_{2p+2-q}(x)$, on a

$$(S)\qquad\left\{\begin{array}{lll} C_1 & = J(y_1, x) & \equiv J_1(x), \\ C_2 & = J(y_2, x) & \equiv J_2(x), \\ \multicolumn{3}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,} \\ C_{2p+2-q} & = J(y_{2p+2-q}, x) & \equiv J_{2p+2-q}(x). \end{array}\right.$$

Les $J_i(x)$ sont des fonctions *transcendantes* de $p+3$ fonctions arbitraires de x.

Si les relations (S) ne sont pas *compatibles* et *déterminées,* c'est qu'un des seconds membres de (S), par exemple le dernier, est *identiquement* fonction des autres, autrement dit que les $2p+2-q-1$ premières racines de H ne peuvent donner à $J(y, x)$ de valeur constante, sans qu'il en soit de même de la racine suivante, et, par suite, de toutes les autres par raison de symétrie. Alors le degré *irréductible* de l'équation est nécessairement égal à $p+3$.

D'autre part, l'équation différentielle primitive de degré $2p+2$ s'écrivant

$$(Hy'+K)^2-\lambda^2 R=0,$$

et son intégrale générale étant de la forme

$$\frac{M(y)}{N(y)}=\operatorname{sn}\left[\int\lambda(x)\,dx+C\right],$$

on voit que si l'on écrit qu'une racine de $R=0$ est une intégrale ordinaire,

$\lambda = 0$, et, par suite, l'équation se réduit à

$$y' + \frac{K}{H} = 0.$$

C'est une *équation de Riccati,* qui dépendrait ici d'au moins *quatre* fonctions arbitraires. Il y a donc contradiction et, par suite, les conditions imposées sont *compatibles* et *déterminées*.

10. Objection IV. — *Le* degré *de l'équation différentielle correspondant à l'intégrale précédente est bien, en général,* égal *à q, et non moindre que q.*

En effet, s'il s'abaissait, c'est qu'il existerait d'*autres solutions remarquables,* car, pour $x = x_0$, les constantes C étant *quelconques,* H et R n'ont pas de solution commune en y; il n'existe donc pas de fonction $y = g(x)$ annulant identiquement H et R.

Il suit de là que, si les $2p + 2 - q$ conditions (S) entraînent comme conséquence qu'une nouvelle racine de H est solution remarquable, il en est de même de *toutes les autres racines* de H, et le raisonnement s'achève comme dans le cas de $\varpi = 0$. (Chapitre III, § 8.)

Objection V. — *L'équation en y' est bien* irréductible, *du* second *degré et de genre* $p \geqq 1$. Autrement la différentielle *abélienne* $\dfrac{H\,dy}{\sqrt{R}}$ s'exprimerait *rationnellement* à l'aide d'une constante d'intégration, ce qui est absurde.

Objection VI. — *L'intégrale a bien* exactement n branches *permutables autour des points critiques mobiles, et non un nombre moindre.*

En effet, supposons que le nombre de branches, au lieu d'être n, s'abaisse à $n'(n' < n)$, en supposant $n' > 1$.

Le raisonnement fait dans le cas de $\varpi = 0$ montre alors que les constantes remarquables ne seraient pas distinctes, ce qui est contre l'hypothèse.

D'autre part, si $n' = 1$, l'équation est nécessairement de degré $q = 4$ et toutes les racines du *discriminant* sont des intégrales *singulières*.

Si donc on excepte ce cas de $q = 4$, $k = 4$, on est certain que n est bien le nombre des branches de $y(x)$ permutables autour des points critiques mobiles.

Si, au contraire, $q = 4$, $k = 4$, l'intégrale obtenue plus haut se réduira à une intégrale à *points critiques fixes,* quel que soit l'entier n.

11. Nous arrivons donc aux conclusions suivantes :

Conclusion. — Si, dans l'intégrale que nous avons appris à former, on donne aux constantes des valeurs *arbitraires distinctes,* et si l'on remplace les fonctions par des *fonctions arbitraires* quelconques, l'intégrale ainsi définie vérifie une *équation différentielle du second degré en* y', *de genre* $p \geqq 2$, *prend exactement* n *valeurs autour des points critiques mobiles et correspond au cas de* $\varpi = 1$.

L'équation différentielle correspondante est de degré $q > 4$, *dépend de* $i + 4$ *fonctions arbitraires et de* $2p + 2 - q$ *constantes arbitraires, en comptant la constante* μ; car on peut toujours supposer qu'une des constantes remarquables est o, en observant qu'on peut toujours effectuer sur C une *transformation algébrique* dépendant d'une arbitraire et d'une seule, et qui conserve la courbe

$$C^2 = (1 - c^2)(1 - \mu^2 c^2).$$

Remarquons enfin que si $p = 1$, comme ϖ est égal aussi à *un,* l'équation a nécessairement *ses points critiques fixes* et, par suite, $q = 4$, $k = 4$.

Inversement, si $q = 4$, p est nécessairement égal à *un* (à moins qu'il ne soit nul, auquel cas ϖ serait nul également) l'équation *a encore ses points critiques fixes,* et R est égal à 4.

Nous voyons donc que, si l'on prend $q = 4$, le cas de $\varpi = 1$ ne peut se présenter que si $n = 1$. Si, au contraire, $q > 4$, on formera une infinité d'équations correspondant à $\varpi = 1$, n étant quelconque et plus grand que *un,* et ces équations dépendront, comme nous l'avons dit, de $i + 4$ *fonctions arbitraires* et $2p + 2 - q$ *constantes arbitraires.*

Si toutefois $2p + 2 - q = 0$, on aura *une seule constante arbitraire,* la constante μ.

IV. — Comparaison avec la forme $\alpha C^2 - 2\beta C + \gamma = 0$ de l'intégrale générale.

12. Revenons maintenant à la forme

$$\alpha C^2 - 2\beta C + \gamma = 0 \tag{4}$$

de l'intégrale générale, où α, β, γ sont de degré n en y.

Dans le cas de $\varpi = 1$, n est toujours pair, soit $n = 2\nu$. Cherchons donc, q étant donné, ainsi que n pair et égal à 2ν, parmi les équations (4) *la généralité de celles qui correspondent à* $\varpi = 1$.

Tout d'abord ces dernières équations ne peuvent se rencontrer que dans la classe qui correspond à $j = 0$ et, par suite, à k pair, soit $k = 2p + 2$. Nous savons que les équations (4) de cette classe dépendent de $i + 4$ *fonctions arbitraires* et $2n - q + k = 2n + q - 4 - 2i$ *constantes arbitraires,* qu'il faut diminuer de 3 si ce dernier nombre est supérieur à 3, et remplacer par o dans le cas contraire.

Nous venons de voir, d'autre part, que q étant *donné,* ainsi que p, le cas de $\varpi = 1$ nous a conduit à une forme d'équation différentielle, dépendant de $i+4$ *fonctions arbitraires* et $2p+3-q$ *constantes arbitraires.*

Nous avons donc, dans le premier cas, $2n-q+k-3-(2p+2-q+1)$ constantes de plus que dans le cas de $\varpi=1$, c'est-à-dire, comme $k=2p+2$, $2n-4$ constantes de plus.

On voit donc que, pour la solution générale, on a $\varpi = 0$, comme nous le savions, et, pour que ϖ soit égal à *un,* il faut que les constantes arbitraires, qui figurent dans chaque solution correspondant à $j=0$, soient liées par $2n-4$ conditions. $2n-4>0$, à moins que n, qui est pair, ne soit égal à 2.

Si $n=2$, on trouve le même nombre de constantes qu'en supposant $\varpi=1$. C'est le cas qui correspond *aux équations à points critiques fixes;* on a, en effet, $q=4$ avec *quatre solutions singulières.*

12. Étudions de plus près la nature des $4n-4$ relations dont nous venons de parler, en formant directement l'équation (4) correspondant à une relation de genre *un.*

L'intégrale générale, en remplaçant $\operatorname{sn} C$ par C et $\operatorname{sn}\left[\int \lambda(x)\,dx\right]$ par $-X$, prend la forme

$$C = \frac{MN\sqrt{(1-X^2)(1-\mu^2X^2)} + X\sqrt{(N^2-M^2)(N^2-\mu^2M^2)}}{N^2-\mu^2X^2M^2}$$

ou

$$(N^2-\mu^2M^2X^2)C^2 - 2\sqrt{(1-X^2)(1-\mu^2X^2)}\,MNC + N^2 - M^2X^2 = 0;$$

on a donc

$$\alpha = N^2-\mu^2M^2X^2,$$

$$\beta = MN\sqrt{(1-X^2)(1-\mu^2X^2)},$$

$$\gamma = N^2 - M^2X^2.$$

Formons l'équation différentielle correspondante

$$\left[\left(\alpha\frac{\partial\gamma}{\partial y} - \gamma\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)y' + \alpha\frac{\partial\gamma}{\partial x} - \gamma\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right]^2$$
$$-4\left[\left(\alpha\frac{\partial\beta}{\partial y} - \beta\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)y' + \alpha\frac{\partial\beta}{\partial x} - \beta\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right]\left[\left(\beta\frac{\partial\gamma}{\partial y} - \gamma\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)y' + \beta\frac{\partial\gamma}{\partial x} - \gamma\frac{\partial\beta}{\partial x}\right] = 0.$$

On a $\left(\text{en posant } X' = \frac{dX}{dx}\right)$

$$\frac{1}{2}\left(\alpha\frac{\partial\gamma}{\partial x} - \gamma\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)$$

$$= MN\left(N\frac{\partial M}{\partial x} - M\frac{\partial N}{\partial x}\right)(1-\mu^2X^4) - XX'(N^4-\mu^2M^4)$$

$$= MN\left(N\frac{\partial M}{\partial x} - M\frac{\partial N}{\partial x}\right)(1-\mu^2X^4) - (N^4-\mu^2M^4)\lambda\sqrt{(1-X^2)(1-\mu^2X^2)},$$

$$\alpha\frac{\partial\beta}{\partial x} - \beta\frac{\partial\alpha}{\partial x}$$

$$= \sqrt{(1-X^2)(1-\mu^2X^2)}\left(N\frac{\partial M}{\partial x} - M\frac{\partial N}{\partial x}\right)(M^2+\mu^2N^2X^2)$$

$$+ (N^2-\mu^2M^2X^2)MN\frac{-(1+\mu^2)XX' + 2\mu^2X^3X'}{\sqrt{(1-X^2)(1-\mu^2X^2)}}$$

$$+ \sqrt{(1-X^2)(1-\mu^2X^2)}\,MN\,2\mu^2M^2XX'$$

$$= \sqrt{(1-X^2)(1-\mu^2X^2)}\left(N\frac{\partial M}{\partial x} - M\frac{\partial N}{\partial x}\right)(M^2+\mu^2N^2X^2)$$

$$+ \lambda MNX[(N^2-\mu^2M^2X^2)(2\mu^2X^2-1-\mu^2) + (1-X^2)(1-\mu^2X^2)2\mu^2M^2],$$

$$\beta\frac{\partial\gamma}{\partial x} - \gamma\frac{\partial\beta}{\partial x}$$

$$= \sqrt{(1-X^2)(1-\mu^2X^2)}\left(N\frac{\partial M}{\partial x} - M\frac{\partial N}{\partial x}\right)(M^2+N^2X^2)$$

$$- 2MN\sqrt{(1-X^2)(1-\mu^2X^2)}N^2XX' + MN(M^2-N^2X^2)\frac{(1+\mu^2)XX' - 2\mu^2X^3X'}{\sqrt{(1-X^2)(1-\mu^2X^2)}}$$

$$= \sqrt{(1-X^2)(1-\mu^2X^2)}\left(N\frac{\partial M}{\partial x} - M\frac{\partial N}{\partial x}\right)(M^2+N^2X^2)$$

$$- MN\lambda X[N^2(1-X^2)(1-\mu^2X^2) + (M^2-N^2X^2)(2\mu^2X^2-1-\mu^2)].$$

De même

$$\frac{1}{2}\left(\alpha\frac{\partial\gamma}{\partial y} - \gamma\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right) = MN(1-\mu^2X^4)\left(N\frac{\partial M}{\partial y} - M\frac{\partial N}{\partial y}\right),$$

$$\alpha\frac{\partial\beta}{\partial y} - \beta\frac{\partial\alpha}{\partial y} = \sqrt{(1-X^2)(1-\mu^2X^2)}\left(N\frac{\partial M}{\partial y} - M\frac{\partial N}{\partial y}\right)(M^2+\mu^2N^2X^2),$$

$$\beta\frac{\partial\gamma}{\partial y} - \gamma\frac{\partial\beta}{\partial y} = \left(N\frac{\partial M}{\partial y} - M\frac{\partial N}{\partial y}\right)(M^2+N^2X^2)\sqrt{(1-X^2)(1-\mu^2X^2)}.$$

On obtient ainsi l'équation différentielle

$$
\begin{aligned}
0 = X^2[M^2(1-\mu^2X^2)+N^2(X^2-1)][\mu^2(1-X^2)M^2+(\mu^2X^2-1)N^2]\\
\times\left\{\left[\left(N\frac{\partial M}{\partial y}-M\frac{\partial N}{\partial y}\right)y'+N\frac{\partial M}{\partial x}-M\frac{\partial N}{\partial x}\right]^2\right.\\
\left.-\frac{X'^2}{(1-X^2)(1-\mu^2X^2)}[(N^2-M^2)(N^2-\mu^2M^2)]\right\}.
\end{aligned}
$$

Le facteur indépendant de y' peut s'écrire

$$
\begin{aligned}
X^2(N\sqrt{1-X^2}+M\sqrt{1-\mu^2X^2})^2(N\sqrt{1-X^2}-M\sqrt{1-\mu^2X^2})^2\\
\times(N\sqrt{1-\mu^2X^2}+\mu M\sqrt{1-X^2})^2(N\sqrt{1-\mu^2X^2}-\mu M\sqrt{1-X^2})^2.
\end{aligned}
$$

Il résulte de ce calcul que $+1$, -1, $+\frac{1}{\mu}$, $-\frac{1}{\mu}$ sont des *valeurs remarquables* de la constante, rendant *carré parfait* le premier membre de l'équation (4), et donnant lieu, par conséquent, à un *abaissement* total de *degré* $4n$.

L'équation différentielle correspondante, de *degré* $4n$ au plus,

$$
\begin{aligned}
\left[\left(N\frac{\partial M}{\partial y}-M\frac{\partial N}{\partial y}\right)y'+N\frac{\partial M}{\partial x}-M\frac{\partial N}{\partial x}\right]^2\\
-\frac{X'^2}{(1-X^2)(1-\mu^2X^2)}[(N^2-M^2)(N^2-\mu^2X^2]=0,
\end{aligned}
$$

n'est autre que l'équation formée au début de ce Chapitre et pour laquelle

$$
\lambda^2=\frac{\left(\dfrac{dX}{dx}\right)^2}{(1-X^2)(1-\mu^2X^2)}.
$$

13. Ces conditions, qui sont *nécessaires* pour que ϖ soit égal à *un*, sont *suffisantes* en général, c'est-à-dire, pourvu qu'aucune des intégrales remarquables correspondant aux valeurs -1, $+1$, $+\frac{1}{\mu}$, $-\frac{1}{\mu}$ de la constante *n'annule* en même temps le *discriminant* $\beta^2-\alpha\gamma$.

En effet, considérons l'expression

$$
\rho\equiv\sqrt{(1-C^2)(1-\mu^2C^2)},
$$

et, supposons qu'on y remplace C en fonction de y, c'est-à-dire, si l'on veut, C en fonction *rationnelle* de y', y (x figurant comme paramètre).

Je dis que le radical ainsi formé est une *fonction rationnelle* de y', y.

S'il en était autrement, c'est que ρ, considéré comme fonction de y, admettrait un point critique $y = g(x)$, tel que, pour $y = g$, C fût égal à ± 1 ou $\pm \frac{1}{\mu}$, soit, par exemple, $C = 1$.

Posons $C - 1 = C'$; l'équation entre C' et y étant carré parfait pour $C' = 0$, on peut l'écrire sous la forme

$$\alpha_1 C'^2 - 2\beta_1 C' + (y-g)^{2s}\gamma_1^2 = 0 \qquad [\gamma_1(g) \neq 0],$$

$\beta_1(y, x)$ ne s'annule pas pour $y = g(x)$, sans quoi la solution remarquable $y = g(x)$ annulerait en même temps le discriminant $\beta^2 - \alpha\gamma$ de l'équation

$$\alpha C^2 - 2\beta C + \gamma = 0.$$

Dans le voisinage de $y = g$, la racine C', qui s'annule avec $y - g$, est de la forme

$$C' = (y-g)^{2s} A + \ldots$$

et, par suite,

$$\rho = (y-g)^s B + \ldots,$$

B étant *holomorphe* dans le voisinage de $y = g$.

ρ est donc *rationnel* en (y, y'); le *genre* de la relation entre les constantes intégrales est donc *au moins* égal à *un*, et, comme il ne peut dépasser *un*, il est EXACTEMENT ÉGAL *à* UN.

V. — FORMATION EXPLICITE DES ÉQUATIONS A DEUX BRANCHES ($\varpi = 1$).

14. Partons de la différentielle elliptique

$$\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-\mu^2 u^2)}}.$$

On peut toujours, moyennant une transformation homographique effectuée sur y, admettre que la *transformation d'ordre deux* est de la forme

$$u = \frac{Ay^2 + B}{y^2 + 1}.$$

Nous avons deux cas à distinguer, suivant que l'équation différentielle possède *huit* ou *six* intégrales *singulières*.

I. IL Y A HUIT INTÉGRALES SINGULIÈRES. — Les équations correspondantes sont de degrés 8, 7 ou 6.

1° *Équations de degré huit.* — Les fonctions A, B et λ étant *arbitraires*, l'équation différentielle de degré 8 a pour intégrale générale

$$(1)\qquad \frac{Ay^2+B}{y^2+1}=\operatorname{sn}\left[\int\lambda(x)\,dx+C\right],$$

ou encore, si l'on fait le changement simultané de *fonction* et de *constantes*

$$\operatorname{sn}C=C',\qquad \operatorname{sn}\left[\int\lambda(x)\,dx\right]=-X,$$

$$(2)\qquad \frac{Ay^2+B}{y^2+1}=\frac{X\sqrt{(1-C'^2)(1-\mu^2C'^2)}+C'\sqrt{(1-X^2)(1-\mu^2X^2)}}{1-\mu^2X^2C'^2},$$

d'où

$$(3)\qquad \begin{aligned}&[2(A-B)yy'+(y^2+1)(A'y^2+B')]^2\\&\quad=\lambda^2[(y^2+1)^2-(Ay^2+B)^2][(y^2+1)^2-\mu^2(Ay^2+B)^2],\end{aligned}$$

ou

$$(3)'\qquad 4(A-B)^2y^2y'^2+4(A-B)y(y^2+1)(A'y^2+B')y'+\ldots=0.$$

On obtiendra l'équation la plus générale de degré 8, en remplaçant y par $\dfrac{hY+h_1}{Y+k_1}$, où h, h_1, k_1 sont des fonctions *arbitraires* de x, et *les coefficients de cette équation seront ainsi exprimés* RATIONNELLEMENT *à l'aide de six fonctions arbitraires de x, et de leurs dérivées.*

2° *Équations de degré sept.* — Écrivons que $y=\infty$ (qui est une des racines du coefficient de y'^2 dans l'équation précédente) est solution *remarquable,* pour $C=0$, d'où

$$(4)\qquad B=\operatorname{sn}\left[\int\lambda(x)\right]=X.$$

Dans l'équation (3) le terme indépendant de y' s'abaisse au *septième* degré, et l'équation différentielle devient

$$\begin{aligned}&[4(A-B)yy'+(y^2+1)(A'y^2+B')]^2\\&\quad=\frac{B'}{\sqrt{(1-B^2)(1-\mu^2B^2)}}[(y^2+1)^2-(Ay^2+B)^2][(y^2+1)^2-\mu^2(Ay^2+B)^2],\end{aligned}$$

et se réduit au degré *sept.*

3° *Équations de degré six.* — Écrivons, en outre, que $y=0$ est solution *remarquable* pour la valeur C_1 de C (où C'_1 de $C'=\operatorname{sn}C$), d'où

$$(5)\qquad A=\operatorname{sn}\left[\int\lambda(x)\,dx+C_1\right]=\frac{B\sqrt{(1-C_1'^2)(1-\mu^2C_1'^2)}+C_1'\sqrt{(1-B^2)(1-\mu^2B^2)}}{1-\mu^2B^2C_1'^2}.$$

L'équation devient alors

$$(6)\qquad 4(A-B)^2 yy'^2+4(A-B)(y^2+1)(A'y^2+B')y'+y(\alpha y^4+\beta y^3+\ldots)=0,$$

α, β, ... étant des coefficients dont je n'écris pas les expressions développées et qui contiennent *rationnellement* A, B et leurs dérivées A', B'; A doit être remplacé, en fonction de B, au moyen de la relation (5). Lorsque, dans (6), on remplace y par $\dfrac{hY+h_1}{Y+k}$, h, h_1, k étant des fonctions quelconques de x, on obtient l'équation la plus générale de *degré* six *avec huit intégrales singulières*. Elle contient *rationnellement* les trois fonctions arbitraires h, h_1, k et *algébriquement* la fonction arbitraire B et la constante arbitraire C_1.

II. Il y a six intégrales singulières. — Les équations différentielles correspondantes sont de *degrés* 6 et 5.

1° *Équations de degré six.* — Dans ces conditions, l'expression

$$[(y^2+1)^2-(Ay^2+B)]^2[(y^2+1)^2-\mu^2(Ay^2+B)^2]$$

contient, en facteur, le carré d'une fonction linéaire, d'où

$$(1-A^2)(1-\mu^2A^2)(1-B^2)(1-B^2\mu^2)=0.$$

Soit, par exemple, $B=+1$.

L'équation différentielle devient

$$[2(A-1)y'+(y^2+1)A']^2-\lambda^2(1-A)[y^2(1+A)+2(1-A)][(y^2+1)^2-\mu^2(Ay^2+1)^2],$$

et l'équation la plus générale de cette espèce contient *rationnellement* les deux fonctions arbitraires A, λ, les trois fonctions arbitraires h, h_1, k de la transformation homographique, et les dérivées A', h', h'_1, k'.

2° *Équations de degré cinq.* — Écrivons que $y=\infty$ est solution remarquable pour $C=0$, d'où

$$A=\operatorname{sn}\left[\int\lambda(x)\,dx\right],$$

$$\lambda(x)=\frac{A'}{\sqrt{(1-A^2)(1-\mu^2A^2)}},$$

$$4(A-1)y'^2+4(A'-1)y(y^2+1)y'+\ldots=0.$$

L'équation la plus générale, où l'on a remplacé y par sa transformée homographique, contient *rationnellement* les *trois* fonctions h, h_1, k, leurs dérivées premières et contient *algébriquement* A et A'.

CHAPITRE VII.

ÉQUATIONS A COEFFICIENTS ALGÉBRIQUES. — ÉQUATION ADMETTANT UN FACTEUR INTÉGRANT ALGÉBRIQUE.

I. — Équations a coefficients algébriques.

1. *Dans le cas où la relation entre les constantes intégrales est de genre zéro,* l'équation

$$(3) \qquad Ly'^2 - 2My' + N = 0$$

se ramène à une équation de Riccati

$$(4) \qquad \frac{du}{dx} = Hu^2 + Ku + P,$$

au moyen de la transformation

$$(5) \qquad \alpha_1 u^2 - 2\beta_1 u + \gamma_1 = 0,$$

α_1, β_1, γ_1 étant des polynomes de degré n en y, dont les coefficients, ainsi que L, M, N, sont des fonctions *algébriques* des coefficients de (3) et, par suite, des fonctions *algébriques,* si les coefficients de (3) sont *algébriques.*

Soit donc à déterminer EXPLICITEMENT *toutes les équations* (3) *de* DEGRÉ q DONNÉ *en y, et à coefficients* ALGÉBRIQUES *dont l'intégrale générale ne prend qu'un nombre* DONNÉ n *de valeurs* $\left(n \geqq \frac{q}{4}\right)$ *autour des points critiques mobiles.*

2. Nous devons distinguer *quatre* cas, suivant que le nombre de valeurs remarquables de la constante est au moins égal à 3, égal à 2, 1 ou 0.

1° *Il y a au moins trois constantes.* — L'équation de Riccati (4), ayant trois intégrales particulières *algébriques,* a son intégrale générale *algébrique* et, par suite, dans

$$\alpha C^2 - 2\beta C + \gamma = 0,$$

les coefficients sont eux-mêmes *algébriques.* Il suffira donc, dans le problème général résolu au Chapitre III, d'astreindre les $i + 4$ fonctions arbitraires à être *algébriques;* l'intégrale générale de l'équation (3) est alors elle-même *algébrique.*

2° *Il y a deux constantes remarquables.* — On peut toujours admettre que ces valeurs remarquables sont o et ∞, et que l'équation (4) se réduit à

$$\frac{du}{dx} = \mathrm{K}\,u.$$

On a la relation

$$q = k + l_1 + l_2,$$

k désignant le nombre des intégrales singulières, l_1, l_2 le nombre d'intégrales *distinctes* $y = g(x)$ pour $\mathrm{C} = 0$ et $\mathrm{C} = \infty$.

L'intégrale générale a pour expression

$$\alpha \mathrm{C}^2 - 2\beta \mathrm{C} + \gamma = 0,$$

avec

$$\alpha = \alpha_1 f, \qquad \beta = \beta_1, \qquad \gamma = \frac{\gamma_1}{f}, \qquad f = e^{\int \mathrm{M}dx},$$

par suite

$$\beta_1^2 - \alpha_1\gamma_1 \equiv \beta^2 - \alpha\gamma = \Pi^2 \mathrm{Q}^3 \mathrm{R}, \tag{6}$$

avec

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= (y - g_{t+1})^{e'_{t+1}} \dots (y - g_{k-q})^{e'_{k-q}} \\ \gamma_1 &= h(y - g_1)^{e_1}(y - g_2)^{e_2}\dots(y - g_t)^{e_t} \end{aligned}\right\} \quad (1 \leqq t \leqq n - 1).$$

Les nombres

$$e_1, \quad e_2, \quad \dots, \quad e_t; \quad e'_{t+1}, \quad e'_{t+2}, \quad \dots, \quad e'_{q+1}$$

sont deux systèmes d'entiers quelconques positifs vérifiant la condition

$$n = e_1 + e_2 + \dots + e_t = e'_{t+1} + \dots + e'_{q-k};$$

de plus, M, h, g_1, g_2, $\dots$, g_t, g_{t+1}, $\dots$, g_{q-k} et les coefficients de β sont des fonctions *algébriques*. Les coefficients de Π, Q, R sont donc eux-mêmes des fonctions *algébriques,* d'après (6).

On pourra exprimer, par exemple, que le polynome de degré $2n$

$$\beta^2 - \Pi^2 \mathrm{Q}^3 \mathrm{R}$$

admet $q - k$ racines g, de multiplicités e_1, e_2, $\dots$, e_t, e'_{t+1}, $\dots$, e'_{q-k}, d'où

$$\sum (e_i - 1) = 2n + q - k,$$

conditions algébriques qui réduisent à

$$(q - k + 1) + \frac{j + k}{2}$$

le nombre des coefficients arbitraires. Les fonctions g s'expriment *algébrique-*

ment, à l'aide de ces coefficients arbitraires; et, si l'on désigne par M une fonction *algébrique* quelconque, on pourra poser

$$\alpha = e^{\int M dx}(y-g_{t+1})^{e_{t+1}}\dots(y-g_{q-k})^{e_{q-k}},$$
$$\gamma = he^{-\int M dx}(y-g_1)^{e_1}\dots(y-g_t)^{e_t},$$

et l'équation correspondante dépendra de

$$i+4 = (q-k+2)+\frac{j-k}{2}$$

fonctions algébriques arbitraires.

Si $j > k$, on pourra prendre comme *fonctions algébriques arbitraires* les $q-k+2$ fonctions g, M, h et $\frac{j-k}{2}$ des coefficients de Q, R par exemple, et les coefficients restants s'exprimeront *algébriquement* à l'aide de ceux-là et de leurs dérivées.

3° *Il y a une seule valeur remarquable.* — Soit $C = \infty$. L'équation de Riccati ramène alors à une équation linéaire; soit

$$\frac{du}{dx} = Ku + P.$$

De plus

$$q = l+n+k,$$

l désignant le nombre de racines distinctes en y de $\alpha = 0$. On a

$$u = Cf+\varphi, \qquad \left(f = e^{\int K dx}, \qquad \varphi = f\int\frac{P}{f}dx\right).$$

Ici

$$\alpha = \alpha_1 \qquad \beta = \frac{\beta_1 - \alpha_1\varphi}{f}, \qquad \gamma = \frac{\gamma_1 - 2\beta_1\varphi + \alpha_1\varphi^2}{f^2};$$

et par suite

$$\beta^2 - \alpha\gamma = \beta_1^2 - \alpha_1\gamma_1 \equiv \Pi^2 Q^3 R.$$

On exprimera que le polynome de degré $2n$

$$\beta_1^2 - \Pi^2 Q^3 R$$

admet que $q-k-n = l$ racines distinctes $g_1, g_2, \dots, g_l$ de multiplicités

$$e_1, \quad e_2, \quad \dots, \quad e_l \qquad (e_1+e_2+\dots+e_l = n);$$

on posera

$$\alpha_1 = (y-g_1)^{e_1}\dots(y-g_l)^{e_l}$$
$$\gamma_1 = \frac{\beta_1^2 - \Pi^2 Q^3 R}{(y-g_1)^{e_1}\dots(y-g_l)^{e_l}},$$

et les équations cherchées s'obtiendront en remplaçant dans

$$\alpha_1 u^2 - 2\beta u + \gamma_1 = 0,$$

u par

$$C e^{\int K\,dx} + e^{\int K\,dx} \int P e^{-\int K\,dx}\,dx,$$

K et P étant *algébriques*.

On prendra comme fonctions *algébriques* $g_1, g_2, \ldots, g_l$, K, P et $n + \frac{k-j}{2}$ autres fonctions parmi les coefficients de Q, R, et les autres coefficients s'exprimeront *algébriquement* à l'aide des précédents et de leurs dérivées.

4° *Il n'y a pas de valeur remarquable.* — La formule fondamentale se réduit à

$$q = 2n + k.$$

Soit

$$u = \frac{cf + \varphi}{c\psi + \chi} \qquad (f\chi - \varphi \equiv 1)$$

l'intégrale générale de l'équation de Riccati (4), on a

$$\beta^2 - \alpha\gamma \equiv (f\chi - \varphi\psi)^2(\beta_1^2 - \alpha_1\gamma_1) \equiv \beta_1^2 - \alpha_1\gamma_1 \equiv \mathrm{H}^2 Q^3 R.$$

Les coefficients de H, Q, R sont des *fonctions algébriques*. On décomposera le polynome

$$\beta_1^2 - \mathrm{H}^2 Q^3 R,$$

dont les $m + j + k + n + 2$ coefficients sont *algébriques*, en un produit de deux facteurs α_1, γ_1 de degrés n, dont les coefficients sont des *fonctions algébriques* des $m + j + k + n + 2$ fonctions *algébriques* précédentes, et l'on remplacera dans l'équation

$$\alpha_1 u^2 - 2\beta_1 u + \gamma_1 = 0$$

ainsi obtenue, u par l'intégrale générale de (4), où H, K, P sont *algébriques*.

3. Dans les trois derniers cas que nous venons d'examiner, le nombre des valeurs remarquables étant inférieur à 3, l'intégrale générale est TRANSCENDANTE, quand on prend *au hasard* les fonctions ALGÉBRIQUES, coefficients de l'*équation de Riccati* (4).

Ainsi, dans le cas où il y a *deux* valeurs remarquables, pour que l'intégrale soit *transcendante*, il faut que la fonction $u(x)$, définie par $\frac{du}{u} = K(x)$, *ne soit pas algébrique*, ce qui a lieu si $K(x)$ est pris au *hasard*.

4. Proposons-nous maintenant le problème suivant :

Former toutes les équations (3) *de degré q donné,* NON INTÉGRABLES ALGÉBRIQUEMENT, *dont l'intégrale générale est une fonction qui ne prend qu'un nombre fini* (NON DONNÉ) *de valeurs autour des points critiques mobiles.*

Ici le nombre des valeurs remarquables de la constante est *nécessairement inférieur à trois.*

La relation

$$q = 2n + k - \lambda$$

montre que n satisfait aux conditions

$$\frac{q+\lambda}{4} \leqq n \leqq \frac{q+\lambda}{2}.$$

1° *Il n'y a pas de constante remarquable.* — Dans ce cas il n'y a pas de solutions remarquables ; par suite $\lambda = 0$, et n est limité par les conditions

$$\frac{q}{4} \leqq n \leqq \frac{q}{2} \tag{7}$$

on est donc ramené au problème suivant, déjà résolu :

Former toutes les équations de DEGRÉ q ($q \geqq 4$), *possédant* $q - 2n_1$ INTÉGRALES SINGULIÈRES *et dont l'intégrale prend n_1 valeurs autour des points critiques mobiles, n_1 étant l'un quelconque des entiers vérifiant la condition* (7).

Par exemple, dans le cas de $q = 6$, on voit immédiatement que n_1 ne peut prendre que les valeurs 2 et 3, et l'on est ramené, par suite, aux deux problèmes suivants :

$$n = 2, \qquad k = 2, \qquad j = 0,$$
$$n = 3, \qquad k = 0, \qquad j = 2,$$

que nous traitons, d'ailleurs, tout au long dans nos applications (Chap. IV et V).

2° *Il y a une seule valeur remarquable.* — Soit $C = \infty$. Considérons un système quelconque d'entiers positifs l_1, n_1, k_1 satisfaisant à l'égalité

$$q = l_1 + n_1 + k_1.$$

Le problème revient à former *les équations de* DEGRÉ q *possédant* $q - l_1 - n_1$ *solutions* SINGULIÈRES, *et dont l'intégrale a n_1 branches.*

Posons

$$\alpha = (y - g_1)^{a_1} \ldots (y - g_{l_1})^{a_l}$$

avec

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{l_1} = n_1.$$

On obtiendra *toutes* les équations correspondant à ce choix particulier d'entiers, en donnant aux entiers $a_1, a_2, \ldots, a_{l_1}$ toutes les valeurs positives possibles vérifiant l'égalité précédente; on obtiendra ensuite toutes les équations possibles correspondant à ce cas, en épuisant les systèmes d'entiers l_1, n_1, k_1 en nombre *fini* vérifiant l'égalité

$$q = l_1 + n_1 + k_1.$$

Dans l'hypothèse où la constante remarquable $C = \infty$ correspond à une seule *solution remarquable* d'ordre *deux,* l'égalité précédente se réduit à

$$q = 2n_1 + k_1 - 2 \qquad \text{si} \quad n_1 > 2$$

et

$$q = 4 + k_1 - 1 \qquad \text{si} \quad n_1 = 2 \qquad (k_1 \leqq 4).$$

Par exemple, si $q = 6$, on se trouvera dans l'un des trois cas suivants :

$$n = 3, \quad l = 1, \qquad k = 2, \qquad j = 0, \qquad m = 2,$$

$$n = 4 \begin{cases} l = 1, & k = 1, \qquad j = 1, \qquad m = 2, \\ l = 2, & k = 0, \qquad j = 0, \qquad m = 1. \end{cases}$$

3° *Il y a deux valeurs remarquables.* — On ne peut plus déterminer d'avance de *limite supérieure* de n, sauf dans le cas que nous allons considérer tout d'abord, où, à chaque valeur remarquable de la constante, correspond une *seule solution remarquable* d'ordre *deux*. Dans ce cas, de la relation

$$q = 2n + k - 2$$

on déduit

$$\frac{q+2}{4} \leqq n \leqq \frac{q+2}{2},$$

et l'on est ramené à un nombre *fini* de problèmes connus.

Dans le cas où les solutions remarquables sont en nombre quelconque et de multiplicités quelconques, n peut prendre des valeurs *aussi grandes qu'on veut.* Il suffit de se reporter à ce que nous avons dit pour les équations à *coefficients algébriques,* quand il y a *deux* valeurs remarquables de la constante, pour avoir une solution quelconque du problème.

5. Enfin, il est bien évident que nous venons de résoudre en même temps le problème suivant :

Former toutes les équations de degré q DONNÉ, *à coefficients* ALGÉBRIQUES, *dont l'intégrale est une fonction* TRANSCENDANTE *qui ne prend qu'un nombre fini* (NON DONNÉ) *de valeurs autour des points critiques mobiles.*

II. — Équations algébriques en y', y,

$$Ly'^2 - 2My' + N = 0,$$

DONT L'INTÉGRALE GÉNÉRALE EST DE LA FORME

$$\alpha C^2 - 2\beta C + \gamma = 0,$$

α, β, γ ÉTANT DES PRODUITS DE LA FORME

$$h(x)[y - g_1(x)]^{\lambda_1}[y - g_2(x)]^{\lambda_2}\ldots[y - g_n(x)]^{\lambda_n},$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ÉTANT DES CONSTANTES NUMÉRIQUES DONNÉES.

6. On peut toujours supposer que l'on a divisé le premier membre par α et, par suite, que $\alpha \equiv 1$; soit donc l'intégrale générale

$$(1)\quad C^2 - 2h_1(x)(y - G_1)^{\mu_1}\ldots(y - G_m)^{\mu_m}C + h(x)(y - g_1)^{\nu_1}\ldots(y - g_{m'})^{\nu_{m'}} = 0.$$

L'expression

$$\frac{dC(y, x)}{C(y, x)}$$

peut s'écrire

$$H(y', y, x)(dy - y'\,dx),$$

où H est une fonction *rationnelle* de y', y, puisque l'équation différentielle dont (1) représente l'intégrale générale est *algébrique* en y', y.

De plus, la fonction *algébrique* $H(y', y, x) \equiv \overline{H}(y, x)$, qui possède les m' pôles $g_1(x)$, $g_2(x)$, $\ldots$, $g_{m'}(x)$, est racine d'une équation du *second degré*, dont les coefficients sont des polynomes de degré m' en y.

Formons cette équation. Posons

$$S = \frac{1}{2}\overline{H}(y, x) = \frac{1}{2C}\frac{\partial C}{\partial y}.$$

S est un *multiplicateur* de $dy - y'\,dx$.

De plus, en différentiant par rapport à y, on obtient

$$-2\frac{\partial\beta}{\partial y}C + \frac{\partial\gamma}{\partial y} + 2(C - \beta)\frac{\partial\beta}{\partial y} = 0,$$

d'où les deux équations

$$C^2 - 2\beta C + \gamma = 0,$$

$$SC^2 - \left(\beta S + 2\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)C + \frac{\partial\gamma}{\partial y} = 0.$$

Par suite, S est racine de l'équation

$$\left(\gamma S - \frac{\partial\gamma}{\partial y}\right)^2 - \left(\beta S - 2\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)\left[\beta\gamma S + 2\left(\gamma\frac{\partial\beta}{\partial y} - \beta\frac{\partial\gamma}{\partial y}\right)\right] = 0,$$

ou

$$S^2 - \frac{2}{\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial y} S + \frac{\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y}\right)^2 + 4\frac{\partial\beta}{\partial y}\left(\gamma\frac{\partial\beta}{\partial y} - \beta\frac{\partial\gamma}{\partial y}\right)}{\gamma(\gamma-\beta^2)} = 0,$$

qui, résolue en S, peut s'écrire

$$S = \frac{1}{\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial y} + \frac{\frac{1}{\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{2}{\beta}\frac{\partial\beta}{\partial y}}{\sqrt{1-\frac{\gamma}{\beta^2}}}.$$

Pour que S soit *algébrique,* il faut et il suffit que $\frac{\gamma}{\beta^2}$ soit *rationnel* en y, c'est-à-dire que si $y = f(x)$ figure dans γ à la puissance λ et dans β à la puissance μ, la différence $2\mu - \lambda$ soit un entier positif ou négatif; en sorte que l'on voit immédiatement que l'intégrale sera de la forme

$$C_1 = (y-g_1)^{\lambda_1}\ldots(y-g_n)^{\lambda_n}(A + B\sqrt{H}),$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ étant des constantes numériques et A, B, H des polynomes en y.

Si A est de degré $p+1$, l'emploi de la transformation homographique montre que l'on peut toujours supposer

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n + p + 1 = 0.$$

7. Inversement, *si l'on se propose de former toutes les équations de* DEGRÉ q *en* y, *du second degré en* y', *dont l'intégrale générale est de la forme* (2), *où* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *sont des constantes numériques* DONNÉES, on remarquera que ces équations admettent un multiplicateur rationnel en y, $\sqrt{H}$ de la forme

$$\frac{\lambda_1}{y-g_1} + \ldots + \frac{\lambda_n}{y-g_n} + \frac{\frac{\partial}{\partial y}(A + B\sqrt{H})}{A + B\sqrt{H}}.$$

On peut toujours vérifier *algébriquement* si une telle équation admet un *multiplicateur* ALGÉBRIQUE de cette forme, où n et p sont *donnés.*

S'il en existe au moins DEUX, leur quotient est une *intégrale première* de l'équation différentielle et, par suite, l'intégrale générale *acquiert un nombre* FINI *de valeurs autour des points critiques mobiles.* C'est le cas que nous avons étudié dans les Chapitres précédents.

Pour se trouver dans le cas où l'intégrale générale est de la forme (2), mais

N'EST PAS RÉDUCTIBLE A LA FORME RATIONNELLE, il faut qu'il n'y ait qu'*un* seul multiplicateur, et, par suite, toutes les formes (2) de l'intégrale s'obtiendront en remplaçant C par lC^b, l et b désignant des constantes numériques.

8. Donnons seulement une idée rapide du problème actuel, qui se traite absolument de la même façon que les problèmes précédents. Supposons $B \equiv 1$ pour simplifier les calculs.

L'équation différentielle correspondante est

$$\left[\frac{\lambda_1}{y-g_1}+\ldots+\frac{\lambda_n}{y-g_n}+\frac{2A\frac{\partial A}{\partial y}-\frac{\partial H}{\partial y}}{2(A^2-H)}+\frac{\frac{\partial H}{\partial y}-2H\frac{\partial A}{\partial y}}{2\sqrt{H}(A^2-H)}\right]y'$$
$$+\left(-\frac{\lambda_1 g'_1}{y-g_1}-\ldots-\frac{\lambda_n g'_n}{y-g_n}\right)+\frac{2A\frac{\partial A}{\partial x}-\frac{\partial H}{\partial x}}{2(A^2-H)}+\frac{\frac{\partial H}{\partial x}-2H\frac{\partial A}{\partial y}}{2\sqrt{H}(A^2-H)}=0.$$

Mise sous forme entière, elle est de degré $4p+2n+4$.

Pour qu'elle s'abaisse au degré q, il faut que $4p+2n+4-q$ racines de l'équation

$$E\equiv\left[\frac{\lambda_1}{y-g_1}+\ldots+\frac{\lambda_n}{y-g_n}+\frac{2A\frac{\partial A}{\partial y}-\frac{\partial H}{\partial y}}{2(A^2-H)}\right]^2-\frac{\frac{\partial H}{\partial y}-2H\frac{\partial A}{\partial y}}{4H(A^2-H)}=0,$$

soient intégrales de (1), c'est-à-dire vérifient les relations

$$C_\rho=(y_\rho-g_1)^{\lambda_1}\ldots(y_\rho-g_n)^{\lambda_n}\left[A(y_\rho,x)+\sqrt{H(y_\rho,x)}\right]\equiv F(y_\rho,x),$$
$$(\rho=1,2,\ldots,4p+2n-p),$$

$y_1(x), y_2(x), \ldots$, étant des racines de (E).

On a, par suite, la relation

$$(\alpha') \qquad q=4p+2n+4-\Sigma(a_r-1),$$

la somme Σ étant étendue à toutes les *solutions remarquables* de multiplicité a_r.

De plus, en désignant par $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_{4p+2n}(x)$ les $4p+2n$ racines de (E), on peut écrire l'identité

$$\left[\frac{\lambda_1}{y-g_1}+\ldots+\frac{\lambda_n}{y-g_n}+\frac{2A\frac{\partial A}{\partial y}-\frac{\partial H}{\partial y}}{2(A^2-H)}\right]^2-\frac{\frac{\partial H}{\partial y}-2H\frac{\partial A}{\partial y}}{4H(A^2-H)}$$
$$\equiv\frac{h(y-y_1)(y-y_2)\ldots(y-y_{4p+2n})}{[(y-g_1)^2\ldots(y-g_n)^2H(A^2-H)^2},$$

qui permet d'obtenir n relations résolues par rapport aux constantes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

On trouve, par exemple :

$$(2) \quad \lambda_i = \frac{1}{[A^2(g_i, x) - H(g_i, x)](g_i - g_1)\dots(g_i - g_n)} \sqrt{\frac{(g_i - y_1)\dots(g_i - y_{4p+2n})}{4}}.$$

Si, de plus, on écrit qu'il y a $4p + 2n - q$ *solutions remarquables,* il en résulte $4p + 2n - q$ relations de la forme

$$(3) \qquad C_\rho = (y_\rho - g_1)^{\lambda_1}\dots(y_\rho - g_n)^{\lambda_n}\left[A(y_\rho, x) + \sqrt{H(y_\rho, x)}\right].$$

En général, ces relations sont *compatibles* et *déterminées,* si les constantes C_j sont *quelconques* et si les constantes *numériques* DONNÉES $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ne vérifient pas certaines conditions *exceptionnelles;* et, par suite, elles définissent les coefficients de l'équation différentielle en *fonction connue* de

$$n + 3p + 5 = q - p + 1 - n = i + 4 \text{ fonctions arbitraires.}$$

III. — ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES POSSÉDANT UN FACTEUR INTÉGRANT ALGÉBRIQUE.

11. Supposons que l'équation différentielle

$$Ly'^2 - 2My + N = 0$$

possède un multiplicateur *algébrique* à un nombre *quelconque* de *branches,* et soient M_1 et M_2 deux quelconques d'entre elles.

Si le quotient $\frac{M_1}{M_2}$ n'est pas une *constante* ABSOLUE, l'*intégrale générale acquiert un nombre fini de valeurs* autour des points critiques mobiles. C'est un cas déjà étudié précédemment.

Sinon, le quotient $\frac{M_1}{M_2}$ est une *constante* ABSOLUE et, par suite, une *racine entière* de l'*unité.* Le multiplicateur *algébrique* est donc de la forme

$$\sqrt[n]{P(y', y, x)},$$

où P est *rationnel* en y', y et n un nombre *entier* positif.

Bornons-nous ici au cas de $n = 1$.

Posons

$$P(y', y, x) = \frac{A + B\sqrt{R}}{D\sqrt{R}},$$

où B et D sont de degré δ en y, R de degré $2p + 2$ et A de degré $\delta + p + 1$.

Écrivons que les *périodes* de l'intégrale

$$\int \frac{A + B\sqrt{R}}{D\sqrt{R}}\,dy$$

sont des *constantes*.

Comme il y a $2\delta + 1$ *périodes polaires distinctes* et $2p$ *périodes cycliques*, nous obtenons $2p + 2\delta + 1$ relations *transcendantes* (T), résolues par rapport à des constantes *arbitraires*.

D'autre part, si l'on désigne par $M(y, x)$ la fonction de y et de x, telle que

$$\int \left[\frac{A + B\sqrt{R}}{D\sqrt{R}}\,dy + M(y, x)\,dx\right]$$

soit une intégrale de *différentielle totale exacte*, l'expression

$$\int \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{A + B\sqrt{R}}{D\sqrt{R}}\right) dy = \int \frac{\partial M}{\partial y}\,dy \equiv M$$

est *algébrique*, puisqu'elle n'a plus de périodes.

M est donc déterminé en fonction *algébrique* des coefficients $\rho(x)$, $\lambda(x)$, $\mu(x)$, ... de A, B, R, D, ces coefficients étant liés par les relations *transcendantes* (T).

Soit

$$\frac{B}{D} = \rho_0(x) + \frac{\rho_1(x)}{y - g_1(x)} + \ldots + \frac{\rho_\delta(x)}{y - g_\delta(x)},$$

$$\frac{A}{D} = \lambda_0(x) + \lambda_1(x)y + \ldots + \lambda_{p+1}(x)y^{p+1} + \frac{\mu_1(x)}{y - g_1(x)} + \ldots + \frac{\mu_\delta(x)}{y - g_\delta(x)}.$$

On voit immédiatement que les $\delta + p$ quantités

$$\lambda_p, \quad \rho_1, \quad \rho_2, \quad \ldots, \quad \rho_\delta$$

sont des *constantes*, et que, de plus, $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\delta$ désignant de nouvelles *constantes*, on a

$$\mu_1 = \omega_1\sqrt{R(g_1)}, \qquad \mu_2 = \omega_2\sqrt{R(g_2)}, \qquad \ldots, \qquad \mu_\delta = \omega_\delta\sqrt{R(g_\delta)}.$$

La quantité M étant de la forme

$$\frac{\alpha + \beta\sqrt{R}}{D\sqrt{R}} + \lambda(x),$$

$\lambda(x)$ étant une fonction arbitraire de x, l'intégrale générale s'écrit

$$(4) \qquad C = \int \left[\frac{A + B\sqrt{R}}{D\sqrt{R}}\,dy + \left(\frac{\alpha + \beta\sqrt{R}}{D\sqrt{R}} + \lambda\right) dx\right] \equiv F(y, x),$$

α, β étant de degrés $\delta + p + 3$ et $\delta + 2$; et l'équation différentielle correspondante est

$$(A + B\sqrt{R})y' + \alpha + \beta\sqrt{R} + \lambda D\sqrt{R} = 0$$

ou

$$(Ay' + \alpha)^2 - R(By' + \beta + \lambda D)^2 = 0.$$

Le degré

$$q_1 = 2\delta + 2p + 6$$

de cette équation s'abaissera, si les deux polynomes en y

$$A^2 - B^2R \quad \text{et} \quad \alpha^2 - (\beta + \lambda D)^2 R$$

ont des facteurs communs : ces facteurs communs, annulant, en général, les coefficients de dy et dx dans la différentielle totale (4), sont *intégrales remarquables*. On aura, en définitive, la formule

$$(\alpha'') \qquad q = 2\delta + 2p + \sigma - \Sigma(a_\rho - 1),$$

en désignant par a_ρ le *degré* de multiplicité de la racine y_ρ de $A^2 - B^2R$, dans l'égalité

$$C_\rho = F(y, x).$$

Cette formule (α) permet inversement de former *explicitement* les équations de degré q *donné* ayant un *multiplicateur rationnel* en y, $\sqrt{R}$ et de *degré* δ en y.