SUR LES

COURBES DE DÉFORMATION DES FILS,

PAR M. H. BOUASSE,

Professeur à l'Université de Toulouse.

DEUXIÈME PARTIE.

CHAPITRE I.

SUR LA DÉFINITION DES CONSTANTES DE TRACTION ET DE TORSION.

Le sujet qui va nous occuper renferme de nombreux résultats contradictoires qu'on doit attribuer au manque de méthode.

1° On ne prend pas la peine de définir les constantes dont on parle. On peut donner par exemple plusieurs définitions expérimentales distinctes du coefficient de Poisson : elles conduisent à des nombres qui n'ont aucun rapport entre eux et représentent des qualités essentiellement différentes de la matière.

2° On choisit une définition, mais la technique n'y correspond pas. Ainsi les expériences analogues à celles de Wertheim, pour déterminer le coefficient de traction, n'ont absolument aucun sens.

3° On prend comme définition le résultat brut et complexe d'une expérience. Ainsi, Tomlinson appelle *coefficient de torsion* le couple déduit de la durée des oscillations, quand on suppose que les forces se réduisent à deux, l'une proportionnelle à l'écart, l'autre à la vitesse. Sa constante de torsion est une quantité mal définie et sur la valeur de laquelle on ne peut baser aucun raisonnement.

De ces errements découle une grande confusion : nous chercherons à les éviter sans crainte de nous appesantir sur des discussions trop subtiles. Il serait préférable de faire moins d'expériences et de savoir un peu mieux ce qu'on fait. Nous choisirons les définitions des constantes de torsion et de traction, puis nous chercherons une expérience telle que la valeur numérique de la quantité définie en résulte : rien *a priori* ne prouve qu'il soit possible d'y parvenir.

Sur un fil, il est seulement possible de faire deux expériences distinctes et, par conséquent, de déterminer deux constantes caractéristiques.

Soient l la longueur du fil, P sa tension : faisons varier d'une manière quelconque P entre les limites P_1 et P_2, ou bien l entre les limites l_1 et l_2; si toutes les courbes représentatives de l en fonction de P sont une seule et même droite, nous appellerons CONSTANTE DE TRACTION *le rapport*

$$\Phi = l\frac{dP}{dl};$$

elle sera ainsi définie entre les limites P_1, l_1 et P_2, l_2.

Soit α l'angle de deux diamètres pris sur deux sections droites du fil distantes de 1^{cm} et C le couple; faisons varier d'une manière quelconque C entre les limites C_1 et C_2, ou bien α entre les limites α_1 et α_2; si toutes les courbes représentatives de α en fonction de C sont sur une seule et même droite, nous appellerons CONSTANTE DE TORSION *le rapport*

$$\Gamma = \frac{dC}{d\alpha};$$

elle sera ainsi définie entre les limites C_1, α_1 et C_2, α_2.

Ces définitions sont parfaitement nettes : elles coïncident avec les anciennes, quand ces dernières ont un sens. Nous insistons sur ce fait que rien ne prouve qu'on pourra toujours, et dans toutes conditions, obtenir ce cycle rectiligne imposé par la définition, et, par conséquent, déterminer par une expérience directe, en tous les points du plan, un coefficient de torsion ou un coefficient de traction.

Comme l'expérience montre qu'assurément les conditions imposées par la définition ne peuvent être réalisées que pour de très petits cycles, nous sommes conduits à en étudier de tels : parmi tous les petits cycles étudiés, si nous en rencontrons de rectilignes, nous en déduirons immédiatement les valeurs des constantes correspondantes. Toutes les méthodes propres à étudier de petits cycles sont propres à déterminer les constantes, pourvu qu'elles nous permettent de constater s'ils sont réellement rectilignes et quelle est alors leur inclinaison qui en est la caractéristique.

Il est possible qu'on ne puisse pas décrire de petits cycles rectilignes dans tout le plan et, par suite, en certains points, déterminer directement la valeur des constantes. Cela ne prouve pas que les causes auxquelles correspondent ces constantes n'existent pas alors; on veut dire simplement par là qu'elles sont mélangées à d'autres phénomènes qui les masquent plus ou moins. Nous sommes, au contraire, sûrs que ces causes agissent seules, si le cycle est rectiligne, et c'est pourquoi nous avons choisi notre définition.

Même quand le cycle n'est plus rectiligne, l'expérience montre que sur un des parcours du cycle, et généralement en certains points de ce cycle, les causes auxquelles correspondent les constantes sont plus isolées; on peut s'arranger même pour que leur action soit absolument prédominante. Mais ce ne peut être là qu'une loi secondaire qui n'a de sens que si l'on connaît par ailleurs, et sans contestation possible, la valeur des constantes strictement déterminée.

Méthodes statiques pour déterminer les constantes.

Les méthodes statiques de détermination des constantes reviennent à appliquer la définition : la technique prend des formes différentes suivant qu'il s'agit de Γ ou de Φ; dans le premier cas, on impose les limites α_1 et α_2; dans le second, les limites P_1 et P_2.

On doit, d'après la définition, pouvoir faire varier P ou C, α ou l d'une manière quelconque par rapport au temps. Mais l'expérience prouve que si le cycle est véritablement rectiligne pour une loi de variation, il l'est encore pour une autre quelconque. On choisira donc une loi déterminée de variation périodique et, naturellement, ce sera la loi sinusoïdale dans le temps, parce que c'est la plus simple à réaliser et, mathématiquement, la plus facile à traiter.

Détermination de Γ.

Pour déterminer Γ, on impose donc au fil une torsion périodique sinusoïdale d'amplitude constante, par un procédé tel que celui qui est décrit dans un Mémoire publié dans les *Ann. de Chim. et de Phys.* pour 1898. Sans revenir sur les détails de l'installation, qu'il me suffise de rappeler qu'on utilise les propriétés de l'excentrique. Le fil est attaché à un dynamomètre de torsion dont on détermine les indications extrêmes C_1 et C_2. On est assuré que les conditions spécifiées dans la définition sont satisfaites :

1° Quand les couples C_1 et C_2 restent invariables;

2° Quand, en diminuant l'amplitude $\alpha_2 - \alpha_1$, il y a proportionnalité entre cette amplitude et la différence des couples $C_2 - C_1$.

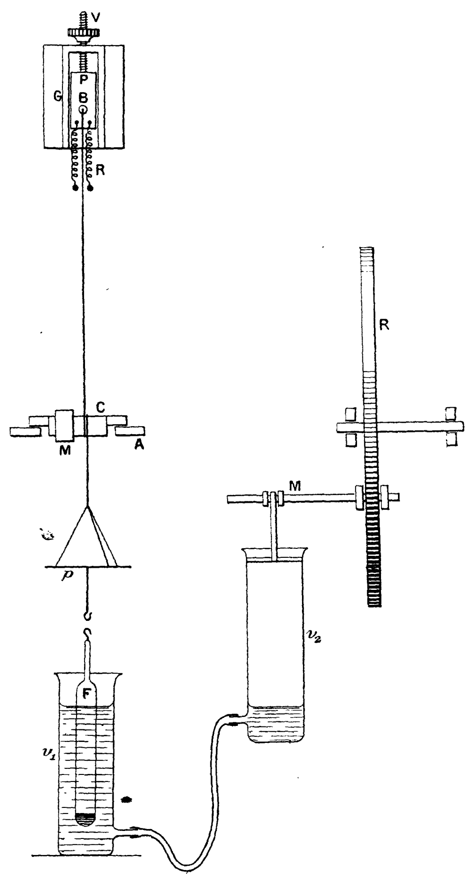
La méthode porte avec soi sa vérification; *elle doit être seule appliquée pour les matières très molles, comme les métaux à température élevée, et ne peut être simplifiée sous aucun prétexte;* il est absurde de remplacer la torsion périodique par une torsion unique : on ne peut avoir aucune confiance dans des expériences à haute température qui n'auraient pas été faites avec ces précautions.

Déjà, vers 200°, sur du platine, on s'aperçoit de la nécessité d'une technique rigoureuse.

Détermination de Φ par traction.

La méthode qui permet de déterminer Φ par traction doit être calquée sur la précédente. Cette méthode présente tant de difficultés presque insurmontables

Fig. 1.



et, sous une forme incorrecte, a été si souvent employée, que nous sommes tenus à une discussion complète (1).

On impose au fil une charge périodiquement et sinusoïdalement variable dans le temps, entre les limites constantes P_1 et P_2. On détermine la variation corres-

(1) On comparera ce qui est dit dans ce paragraphe au Mémoire de M. Brillouin, *Écarts à la loi de Hooke* (*Ann. de Chim. et de Phys.*, 1898), où il discute savamment les difficultés inhérentes à l'expérience.

pondante de la distance comprise entre deux repères situés aux extrémités du fil (généralement les points d'attache).

On ne fait la mesure que lorsque les conditions suivantes sont réalisées :

1° Les longueurs limites l_1 et l_2 sont constantes;

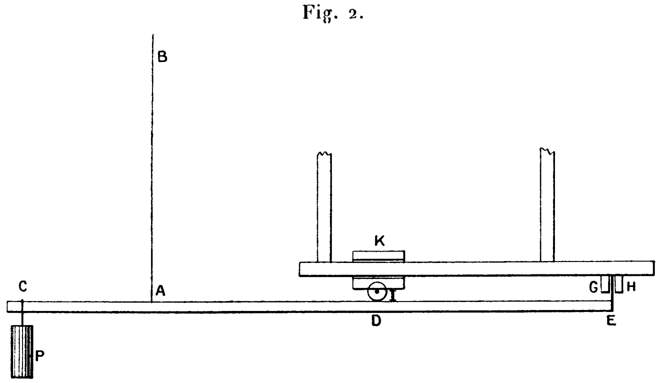
2° Quand on diminue l'intervalle $P_2 - P_1$, la différence $l_2 - l_1$ diminue dans le même rapport.

Pour la traction des fils, la seconde condition est toujours réalisée si la première l'est, parce que le cycle est tout entier d'un même côté de la traction nulle.

Ici encore, il est absurde de simplifier et, comme nous le verrons plus loin, *même quand ces conditions sont réalisées, on n'est pas sûr d'avoir une valeur exacte de la constante de traction.*

Occupons-nous d'abord des procédés qui permettent de faire varier la charge : le principe est toujours le même, l'excentrique. On peut réaliser deux dispositifs qui présentent des avantages spéciaux. Lorsque l'intervalle $P_2 - P_1$ est assez petit, on utilise le principe d'Archimède et les vases communiquants sous la forme suivante (*fig.* 1). On suspend au fil un flotteur cylindrique qui plonge dans un vase cylindrique v_1 où l'on fait varier le niveau de l'eau. Un second vase cylindrique v_2, communiquant avec le premier, est suspendu à une manivelle MM fixée sur la roue RR. On obtient le mouvement lent de la roue au moyen d'un petit moteur par l'intermédiaire d'un train d'engrenages. Dans nos expériences, on s'arrangeait pour que le cycle durât trois minutes environ. Ce procédé est très facilement appli-

Fig. 2.



cable lorsque l'intervalle $P_2 - P_1$ est inférieur à 1^{kg} par exemple; il ne faut pas oublier cependant que le poids à mouvoir est toujours très supérieur à $P_2 - P_1$, et qu'il doit être soigneusement équilibré si l'on veut que le mouvement rotatoire de la roue RR soit bien uniforme : on emploiera avantageusement un volant lourd fixé aux premières roues (roues rapides) du train.

Si l'on tient à opérer avec des barres d'énorme section, cette technique est inadmissible, parce qu'elle conduirait à dépenser en pure perte un travail considérable; mais on peut, de bien des manières, tourner la difficulté. Nous n'avons pas eu à étudier ces procédés; nous ne ferons donc qu'en citer un, pour montrer que la question n'est pas insoluble. Imaginons (*fig.* 2) que le fil AB en expérience supporte le fer à T, CADE, chargé en C par un poids P et venant s'appuyer en D sur le galet I. Un arrêt G, H, empêche les mouvements longitudinaux. Il suffit de déplacer périodiquement le chariot K et, par conséquent, le point d'appui I, pour obtenir une variation périodique de poids qui s'exerce en A; la variation n'est plus sinusoïdale, mais l'inconvénient est minime. On n'a donc pas employé les variations périodiques de charge parce qu'elles sont difficiles à obtenir, mais parce qu'on ne l'a pas voulu.

Revenons aux fils fins : l'appareil de mesure des allongements est disposé comme suit :

Le fil est attaché à un bouton B soudé à une plaque P que meut verticalement entre les guides GG la vis micrométrique V. Deux forts ressorts RR la rappellent vers le bas. Le fil s'enroule sur le cylindre d'acier CC, de 2^{cm} de diamètre, et enfin il supporte le plateau *pp*. Le cylindre CC porte un miroir M; il est entaillé à ses extrémités et forme deux couteaux qui reposent sur des plans d'agate AA. On conçoit que les changements de longueur du fil se traduiront par une rotation du miroir qu'on mesure par la méthode de Poggendorff sur une règle de verre verticale éclairée par transparence. Les couteaux peuvent être soulevés au-dessus de leurs plans d'agate par un mécanisme simple qui permet de ramener le cylindre toujours dans la même orientation.

Sous le plateau *pp* s'accroche le flotteur F lesté avec du mercure et dont nous avons décrit le rôle précédemment. Les deux vases communiquent par un gros tube de caoutchouc; les échanges d'eau se font instantanément et sans secousse. L'appareil, tel que nous l'avons employé, permet d'obtenir un cycle d'une centaine de grammes, à partir d'un poids arbitraire placé sur le plateau *pp*. Le fil étudié a 1^{m} de long; l'échelle sur laquelle on lit est à $1^{m},50$. Un allongement de 1^{mm} de fil se traduit donc par un déplacement à 30^{cm} du point de l'échelle visé. Comme on lit le $\frac{1}{10}$ de millimètre, on peut donc mesurer le $\frac{1}{3}$ de μ. La vis micrométrique V sert à ramener le point visé dans la partie choisie de l'échelle. Le miroir M est monté sur un bout de tube dans lequel le cylindre CC entre à frottement doux, il est équilibré par derrière. Le cylindre CC est noirci sur la surface sur laquelle s'enroule le fil, pour que l'adhérence soit plus grande. L'appareil a été construit fort habilement par M. Pellin.

Détermination de Φ *par flexion.*

La méthode se présente avec deux techniques qui la rapprochent soit de la détermination de Γ, soit de la détermination de Φ par traction.

A. *Méthode du spiral.* — On enroule le fil en un spiral dont on détermine la constante de torsion : la méthode est identique avec celle qui permet de déterminer les constantes de torsion : on impose le cycle en azimuts, et l'on détermine les couples extrêmes à l'aide d'un dynamomètre de torsion. Nous aurons l'occasion de revenir plus tard sur cette méthode.

B. *Méthode de la verge.* — Une verge est encastrée par un des bouts, on fait agir sur l'autre un poids périodiquement variable : on détermine le cycle parcouru, en mesurant la flèche, c'est-à-dire le déplacement linéaire de l'extrémité de la verge.

Ces méthodes présentent un inconvénient : la déformation n'est pas homogène ; mais d'énormes avantages, qui les rendent incomparablement préférables dans le cas des petits cycles, sous les réserves qui seront formulées plus loin.

1° Le fil ou la verge n'a pas besoin d'être rectifié : sa forme initiale n'intervient pas : on n'a à tenir compte que des variations de courbure. On évite du coup les causes d'incertitude que nous allons discuter ci-dessous ;

2° On peut opérer au voisinage de la déformation nulle, et le couple peut être à cheval sur l'axe des allongements ;

3° Elles sont applicables à de gros fils et à des barres de diamètres tels, qu'il faut des poids énormes pour les allonger sensiblement ;

4° Elles sont très sensibles : des déplacements énormes correspondent à des déformations insignifiantes ;

5° La matière occupe un volume petit (méthode du spiral) : on peut la chauffer aisément.

Discussion plus complète de la méthode de détermination de Φ par traction.

Pour déterminer Φ, on doit faire parcourir au fil des cycles de traction très petits, déterminés par la différence des charges $\Delta P = P_2 - P_1$ et la charge moyenne $P = \frac{P_1 + P_2}{2}$. On ne peut évidemment pas, comme pour la torsion, satisfaire à la condition $P = 0$: P doit nécessairement être supérieur à $\frac{\Delta P}{2}$. Le cycle est caractérisé au point de vue des allongements par la variation $\Delta l = l_2 - l_1$ de la distance comprise entre les repères.

Il s'agit donc de chercher dans quels cas on obtient un Δl constant par les répétitions du cycle ΔP, et quel peut être l'effet sur cette limite de la position du cycle caractérisée par la valeur moyenne P. Nous nous limitons ici au cas où les déformations permanentes sont toujours très petites ; nous ne cherchons d'ailleurs pas sous quelles influences la constante $\Phi = l\frac{\Delta P}{\Delta l}$ peut varier d'une manière permanente, mais simplement quelle est la valeur de la méthode et si les résultats qu'elle semble donner ont véritablement le sens qu'on leur attribuerait à première vue.

L'expérience conduit avec une netteté parfaite aux résultats suivants :

Lorsque P est suffisamment petit, le cycle tend vers la forme rectiligne ; ce qu'on reconnaît aux deux caractères suivants : 1° les extrémités sont fixes ; 2° le maximum l_2 et le minimum l_1 de la longueur se produisent au moment où la charge passe par son maximum et son minimum. La variation Δl *dépend de la charge moyenne* P *et diminue quand cette charge augmente ;* d'où l'on conclurait à première vue que *le coefficient* Φ *croît avec la charge moyenne* P.

Lorsque P croît au-dessus d'une certaine valeur, le cycle n'est plus rectiligne ; on le reconnaît à ce que les extrémités ne sont plus fixes ; le cycle rampe vers la droite, il y a retard des maximum et minimum de longueur sur les maximum et minimum de charge. Le coefficient Φ ne peut plus se déterminer par expérience directe.

Voici à titre d'exemple et en unités arbitraires pour un fil de 150^{μ} d'argent raide et un cycle invariable d'une cinquantaine de grammes, la valeur Δl pour des charges moyennes P variant de 50^{gr} en 50^{gr} :

P =	50	100	150	200	250	300
	944	932	929	930	926	925

Au delà, le cycle n'est plus rectiligne et ne le devient pas par la répétition.

A quelle cause devons-nous attribuer cette croissance apparente du coefficient Φ, et aussi les conditions dans lesquelles le cycle se ferme pour de petites valeurs de P, alors qu'il semblait qu'il dût atteindre immédiatement une position fixe dans le plan? La réponse à ces questions nous éclairera sur la valeur de la méthode.

La cause de la croissance de Φ paraît due à la rectification du fil : celui-ci semble d'abord s'allonger plus qu'il ne devrait, parce qu'une part de son allongement est due à cette rectification. Sous ce mot : *rectification,* nous entendons tout ce qui tend, non seulement à amener le fil à la forme rectiligne, mais à assurer la bonne définition des points entre lesquels on mesure la longueur, par exemple des points d'attache. Le problème expérimental actuel est donc identique à celui que M. Brillouin s'était posé.

Imaginons qu'au début le fil présente une forme irrégulière : quand on le tend, il se rectifie. Il est d'abord évident que, *s'il ne l'allonge pas d'une façon permanente,* la rectification ne peut être complète que pour une charge infinie. Imaginons que la courbe qu'il présente en un point soit un cercle de rayon ρ_0, et soit P la torsion ; elle produit, en un point dont la distance au fil supposé rectifié est y, un couple Py. La rectification entraîne un changement de courbure; si ρ est le nouveau rayon, le couple dû au changement est proportionnel à $\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho}$. A mesure que le fil se rectifie, Py diminue et $\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho}$ augmente : la position d'équilibre ne correspond certainement pas à $y = 0$, puisque P est fini.

Mais, si le fil n'est pas rectiligne, la tension ne s'exerce plus uniformément sur toute la section : on peut atteindre une charge de déformation permanente pour certains points, quand la charge moyenne serait incapable d'un tel effet. On s'explique ainsi que, pour de telles charges, le cycle ne se ferme pas immédiatement et s'allonge sensiblement.

Laissons, cependant, agir un poids faible quelque temps; comme il y a nécessairement de petits cycles de température parcourus, comme on ne peut pas empêcher l'appareil de vibrer, ce qui produit de petits cycles de tension, peu à peu le fil se rectifie, les points d'attache se déterminent, et la constante Φ semble croître, en même temps que le cycle se ferme par la répétition. L'effet n'est pas dû à *une modification permanente de l'ensemble de la matière du fil;* car, si on le réinstalle, tout est à recommencer; mais bien à *une modification du système formé par le fil et ses points d'attache.*

On s'explique aussi que les phénomènes soient différents suivant que le fil a été préalablement tendu par des poids grands, étant en place, c'est-à-dire disposé dans l'appareil même où l'on mesure Φ, ou s'il l'a été en dehors de l'appareil. Dans ce dernier cas, la constante Φ semble beaucoup plus variable que dans le premier.

On s'explique enfin comment des allongements insignifiants modifient beaucoup, en apparence, la constante Φ, tandis que des allongements plus considérables, mais effectués au préalable, la modifient relativement peu.

Ceci posé, que devons-nous prendre pour vraie valeur de Φ?

Le Φ apparent pour de faibles charges moyennes est trop petit; quand le cycle n'est plus rectiligne, l'expérience ne fournit plus de valeur pour Φ d'après la définition même de cette quantité. Faut-il prendre la dernière valeur de Φ pour laquelle le cycle est encore rectiligne? Pour préciser, le ΔP ayant été choisi aussi petit que possible, pour que, cependant, les mesures conservent une précision suffisante, faut-il prendre pour calculer Φ le $\frac{l}{\Delta l}$ qui correspond à la plus grande valeur moyenne P pour laquelle le cycle est encore rectiligne? *A priori,* nous n'en savons absolument rien. Cela pourra dépendre du mode d'attache, de la perfection du fil, de sa raideur, etc., conditions qu'il est bien difficile de préciser.

La mesure de Φ par traction ne présente donc aucune sécurité; le résultat de cette analyse est curieux, si l'on veut se rappeler que cette méthode a été généralement suivie, dans sa forme la plus incorrecte.

Évite-t-on ces difficultés en prenant des barres rigides? C'est fort douteux.

Est-il, d'ailleurs, étonnant qu'on n'ait pas signalé déjà bien des fois ces causes d'erreur? Quand Wertheim, sur un fil d'argent de $1^{mm},77$ de diamètre, trouvait dans deux déterminations successives 6649 et 8229, il ne pouvait guère tenir compte de ces perturbations qui ne sont que de quelques unités pour 100. Avec notre méthode, les erreurs deviennent manifestes.

Mais ne pourrait-on pas conclure que la valeur réelle de Φ dépend de la position du petit cycle employé pour la déterminer? La réponse risque d'être un cercle vicieux; car aucune méthode directe ne permet de tenir compte de la rectification. Cependant la manière même dont se produisent ces variations semble permettre la conclusion suivante sur laquelle, d'ailleurs, nous reviendrons : la constante de traction Φ serait indépendante de la position du cycle ou de la charge moyenne P, si l'on pouvait tenir compte de la rectification du fil.

Nous sommes maintenant en état de juger les expériences faites, d'ailleurs incorrectement, par cette méthode. *Elles consistent à mesurer la longueur d'un côté d'un cycle qu'on ne décrit même pas une seule fois en entier.* La soi-disant constante ainsi déterminée ne signifie absolument rien; elle dépend d'une foule de conditions dont la vraie constante est totalement indépendante, comme le prouve l'expérience. On a mélangé des phénomènes qui n'ont aucun rapport entre eux, au lieu de dégager le phénomène purement élastique qu'on se proposait d'étudier.

Ce manque de précision dans la définition de ce qu'elles mesurent est particulièrement déplorable quand par elles-mêmes les expériences inspireraient confiance. C'est le cas de celles de Tomlinson (*Phil. Trans.*, p. 1; 1883). Tout ce qu'elles annoncent doit être vrai : je laisse à de plus habiles le soin de discerner ce qui, dans les résultats, se rapporte à la constante de traction telle que nous l'avons définie. Il y a de tout dans les phénomènes observés, mais en partie seulement des phénomènes purement élastiques.

Méthodes dynamiques pour déterminer les constantes.

Détermination de Γ.

Les méthodes dynamiques basées sur la mesure de la durée des petites oscillations sont d'une application commode, mais d'une interprétation délicate.

Pour déterminer Γ, on suspend librement au fil un corps admettant au repos ce fil pour un des axes de l'ellipsoïde d'inertie. Soient M le moment d'inertie correspondant à cet axe; L la longueur du fil; T la durée d'oscillation; on a, en admettant que les couples sont proportionnels aux angles

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ML}{\Gamma}}.$$

La méthode, théoriquement imparfaite (parce qu'une erreur relative sur T entraîne une erreur relative double sur Γ), est très pratique : M peut être déterminée une fois pour toutes, on peut installer l'appareil de manière que L ait une valeur connue et même automatiquement constante; il suffit de déterminer T pour avoir Γ.

La formule permet de déterminer Γ, non pas comme le fait Tomlinson par définition, mais seulement si l'on est certain d'ailleurs que les conditions de la définition de Γ sont satisfaites, ou au moins si les choses se passent comme si elles l'étaient. Tâchons donc de préciser les données du problème.

D'une manière générale, l'équation du mouvement est de la forme

$$M\frac{d^2\alpha}{dt^2}+\frac{\Gamma}{L}\alpha+G\left(\alpha^n,\,\alpha^m,\,\ldots,\,\frac{d\alpha}{dt},\,\frac{d^2\alpha}{dt^2},\,\ldots\right)=0.$$

A la seule condition que les exposants n, m, ... de α dans la fonction inconnue G *soient positifs et* > 1, *on* PEUT *trouver la valeur de* Γ *par la détermination de la limite vers laquelle tend la durée d'oscillation lorsque l'amplitude tend vers zéro.*

Mais, pour qu'il en soit ainsi, il y a toute une série de conditions à réaliser.

1° Tant pour supprimer les termes en $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$ dans la fonction G que pour rendre négligeables les causes d'irrégularités provenant des courants d'air inévitables, il faut donner à l'oscillateur, aussi rigoureusement que possible, une forme de révolution. Or, sous prétexte de pouvoir changer et mesurer facilement son moment d'inertie, *tous* les physiciens l'ont formé d'un fléau sur lequel glissent des masses; c'est une disposition déplorable. En imposant la forme de révolution :

a. On diminue l'action des termes en $\frac{d\alpha}{dt}$, $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2$, ..., qui produisent l'amortissement.

b. On supprime les termes en $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$ qui changent le moment d'inertie.

c. On ne donne aucune prise aux courants d'air que produisent inévitablement les moindres variations de température dans l'enceinte où est l'oscillateur : ce qui est une condition essentielle pour que la durée des oscillations de faible amplitude conserve une signification.

2° Pour qu'on puisse admettre que l'équation différentielle ci-dessus est celle du mouvement, déterminer la limite de la durée des oscillations, quand l'amplitude tend vers zéro et lui conserver sa signification, il faut que le milieu de l'oscillation ne se déplace pas sensiblement, sinon on ne peut pratiquement pas mesurer la durée et d'ailleurs cette durée n'a plus aucun sens précis.

On s'assure que cette condition est satisfaite, en déterminant trois azimuts consécutifs d'arrêt de l'oscillateur, x_1, x_2, x_3; l'azimut $\frac{(x_1+x_3+2x_2)}{4}$ doit être invariable. Si l'azimut x n'est pas invariable, on ne sait plus à partir du passage de quel point déterminer la durée d'oscillation.

On pourrait théoriquement la compter à partir des temps de vitesse nulle, mais, outre que pratiquement la mesure est peu précise, il n'y a plus aucun rapport entre la durée T ainsi mesurée et la durée T de la formule

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ML}{\Gamma}}.$$

On mesure un effet complexe et plus du tout la constante de torsion.

C'est donc par une étrange méprise que Tomlinson, après avoir ainsi procédé dans un cas où le milieu de l'oscillation se déplace (il s'agit d'un fil qui vient de subir une torsion permanente considérable), croit avoir déterminé la constante de torsion. Que penserait-on d'un physicien qui mesurerait la constante de la gravité avec un pendule dont l'axe d'oscillation se déplacerait suivant une loi inconnue?

Il est donc nécessaire de connaître à chaque instant l'azimut x, ce qui entraîne l'emploi, soit d'un cercle solidaire de l'oscillateur; soit d'un miroir fixé sur l'oscillateur et d'une échelle. On peut à la rigueur se passer de repères continus et vérifier la fixité de l'azimut x en appliquant la remarque suivante : Les passages sur le réticule dans les deux sens de l'azimut x doivent être équidistants dans le temps, si la condition ici étudiée est satisfaite. Cette méthode pour déterminer l'azimut x est peu précise et n'est pas à recommander.

3° Non seulement le milieu de l'oscillation ne doit pas se déplacer, mais il faut déterminer les durées à partir des passages sous le réticule de ce milieu qui correspond à la position d'équilibre statique. Toutefois, l'erreur qui provient de ce qu'on ne prend pas cette précaution est généralement négligeable, tandis que l'erreur qui provient du déplacement de la position d'équilibre ne l'est généralement pas.

Soit $\alpha = Ae^{-kt}\sin\omega t$ la loi de l'oscillation. Cherchons les temps de passage sur le réticule d'un repère distant de $+\varepsilon$ de la position d'équilibre, ε étant petit.

La vitesse au voisinage de $\alpha = 0$ est $v_0 = \omega\mathcal{E}$, en appelant $\mathcal{E}$ l'amplitude actuelle.

Posons $\tau = \frac{\varepsilon}{v_0} = \frac{\varepsilon}{\omega\mathcal{E}}$. Les passages se font aux temps

$$\tau_1, \quad \frac{T}{2}-\tau_2, \quad T+\tau_3, \quad \frac{3T}{2}-\tau_4, \quad \dots$$

Il y a donc deux sortes de durées.

a. La position d'équilibre vraie passe sur le réticule avant le repère : la durée entre deux passages est $T + (\tau_{n+2} - \tau_n)$; elle est plus grande que la durée vraie.

b. La position d'équilibre vraie passe sur le réticule après le repère; la durée entre deux passages est $T - (\tau_{n+2} - \tau_n)$: elle est plus petite que la durée vraie.

Évaluons la parenthèse. Appelons $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ deux amplitudes comptées à partir de la position d'équilibre et du même côté, $\mathcal{E}$ leur moyenne.

On a

$$\tau_n = \frac{\varepsilon}{\omega}\,\frac{1}{A e^{-kt}}, \qquad \tau_{n+2} = \frac{\varepsilon}{\omega}\,\frac{1}{A e^{-kt} e^{-kT}},$$

$$\frac{\tau_{n+2} - \tau_n}{T} = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\varepsilon}{\mathcal{E}}\,\frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{\mathcal{E}}.$$

On peut s'arranger aisément pour que $\frac{\varepsilon}{2\pi\mathcal{E}}$ soit très inférieur à $\frac{1}{100}$: l'erreur est donc certainement négligeable quand l'amortissement n'est pas très grand.

La formule précédente permet toujours de se faire une idée de la grandeur de l'erreur à redouter. On peut aussi l'évaluer par l'expérience en déterminant les temps de passage du repère quand l'échelle, dans son déplacement apparent dans la lunette, marche d'abord dans un sens, puis dans l'autre. La moyenne des nombres trouvés pour les durées est le nombre vrai, leur différence donne le double de l'erreur.

Si la position d'équilibre se déplace de ε pendant une oscillation, l'erreur est de l'ordre de τ et non plus de $\Delta\tau$.

4° Si la condition énoncée au 3° est satisfaite, ce qu'il est facile de constater, l'expérience montre que la durée tend effectivement vers une limite, c'est-à-dire que les paramètres m, n, ... de l'équation différentielle sont > 1. Il n'y a plus de difficultés lorsque les coefficients des termes α^m, α^n sont petits, car la durée devient pratiquement constante pour des amplitudes relativement grandes. Il n'en est plus de même quand les coefficients sont grands, c'est-à-dire quand le fil est mou; car alors on n'atteint jamais pratiquement une amplitude assez petite pour que la durée soit indépendante de l'amplitude. On est bien forcé de chercher par extrapolation quelle serait la durée pour une oscillation infiniment petite.

Nous avons étudié théoriquement (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, p. F.33; 1897) un cas simple se rapprochant beaucoup du cas réel dans notre Mémoire sur les oscillations à peu près sinusoïdales. Nous avons montré qu'en appelant μ l'amortissement, β une constante, $\mathcal{E}$ l'amplitude, $\mathfrak{T}_0$ la durée limite, $\mathfrak{T}$ la durée correspondante à l'amplitude $\mathcal{E}$, on peut poser pour les petites amplitudes

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_0\left(1 + \frac{3\mu}{4}\right), \qquad \mu = \beta\,\mathcal{E}.$$

La quantité μ est d'ailleurs définie aux p. 17 et 19 de ce Mémoire.

On ne peut évidemment pas calculer d'après l'amortissement la valeur de β, car l'air intervient dans l'amortissement total, et par des termes en $\frac{d\alpha}{dt}$ qui n'agissent pas sur la durée. Mais l'expérience montre que la formule

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_0(1 + k\mathcal{E}),$$

où k est une constante, s'applique parfaitement. Elle rend possible l'extrapolation nécessaire.

Partant de là, voici comment l'on procède :

On détermine les azimuts d'arrêt x_1 et x_2 immédiatement avant et après le passage sous le réticule de l'azimut x, au moment où l'on commence à compter les durées, puis les azimuts d'arrêt x'_1 et x'_2 avant et après le passage du même azimut x, au moment où l'on finit la mesure des durées. Soient t le temps trouvé, n le nombre d'oscillations; $\frac{t}{n}$ est la durée moyenne correspondante à l'amplitude $\frac{(x_2 - x_1)}{2} + \frac{(x'_2 - x'_1)}{2}$. On peut ainsi construire une courbe qui est sensiblement une droite : l'intersection de cette droite avec l'axe des durées donne la durée de l'oscillation pour une amplitude nulle. En toute rigueur, cette courbe doit s'infléchir pour les amplitudes petites et aboutir normalement à l'axe des durées; mais, pratiquement, cela ne change rien à la valeur limite de la durée dans tous les cas où le fil est assez mou pour que la construction précédente soit nécessaire.

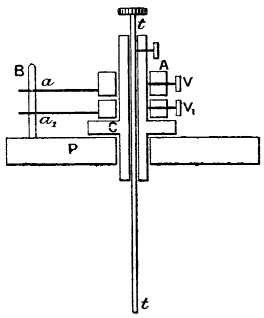
5° La durée d'oscillation ne doit pas être trop grande. La vitesse moyenne en chaque point est inversement proportionnelle à la durée. Si elle est trop grande, les moindres souffles d'air auront des vitesses comparables à celle de l'oscillateur et pourront modifier la loi de l'oscillation. Il vaut mieux faire la mesure sur 10 oscillations de 30^s, que sur une seule de 300. La durée ne doit pas être trop courte, car : (a) on ne pourrait plus faire les lectures dont nous venons de montrer l'importance, (b) comme le nombre d'oscillations utiles est sensiblement le même quelle que soit la durée, on réduirait la précision des mesures.

Il ne faut pas que le déplacement angulaire de l'oscillateur soit trop petit pour des raisons analogues; le fil doit donc être assez long; mais c'est une gêne inutile que de lui donner plusieurs mètres, comme l'ont fait certains expérimentateurs. Il devient difficile à manier, et l'on perd d'un côté ce qu'on gagne de l'autre.

Il semble que le fil doive être d'autant plus long qu'il est plus gros. Si une longueur donne de bons résultats pour un diamètre donné, quelle longueur faut-il prendre pour un fil d'un autre diamètre? L'expérience montre qu'on peut aussi bien prendre la même; et, en effet, si, d'une part, les amplitudes doivent être plus petites, d'autre part, le mouvement reste encore régulier avec de gros fils pour ces petites amplitudes, parce que le couple mis en œuvre est plus grand. On doit seulement augmenter le pouvoir grossissant des appareils de lecture, à mesure que le fil devient plus gros.

6° Il semble enfin que la méthode des oscillations soit moins générale que la méthode statique, puisque le couple doit être toujours voisin de zéro. Le petit

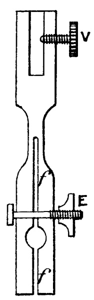
Fig. 3.



cycle que l'on décrit est à cheval sur l'axe des couples nuls et symétrique par rapport à cet axe; mais elle peut se généraliser et permettre d'étudier de petits cycles dans une portion quelconque du plan.

Il suffit d'imaginer que l'oscillateur est entre deux fils : l'un, auquel il est suspendu, préalablement étudié et pratiquement d'une élasticité parfaite pour les

Fig. 4.



couples entre lesquels on opère; l'autre qui y est attaché et dont on détermine les propriétés. On peut ainsi obtenir des oscillations dont le milieu ne corresponde plus au couple nul. On peut de plus, sans changer le moment d'inertie, tendre plus ou moins les fils et répondre à des questions qui ont été jusqu'à présent passablement maltraitées. La méthode ainsi appliquée est moins sensible, puisque le fil en expérience ne produit plus qu'une partie du couple; mais ses avantages compensent largement cette infériorité.

Pour réaliser ces conditions, nous avons appliqué la technique suivante qui ne semble pas pouvoir être simplifiée. Il faut attacher les fils : tant qu'ils sont fins, on emploie les procédés qui nous ont si souvent servi; s'ils sont plus gros ($0^{mm},3$ à 1^{mm} de diamètre) on doit recourir à des pinces dont la *fig.* 4 donne suffisamment la description; elles se fixent avec la vis V sur les tiges qui doivent les supporter; la fente *ff* que serre l'écrou E est proportionnée au diamètre du fil étudié.

La *fig.* 3 montre l'appareil de lancement. Le cylindre C repose sur le disque P dans lequel il tourne. Deux anneaux A peuvent en être rendus solidaires à l'aide des vis V et portent des bras a, a_1 qui buttent contre la pièce B fixée au disque P. On limite ainsi arbitrairement la course angulaire du cylindre C. Le cylindre renferme axialement la tige *tt* qu'on peut fixer à une hauteur convenable et sur laquelle s'adapte une des pinces ci-dessus décrites.

L'oscillateur proprement dit est une tige de laiton sur laquelle est soudé équatorialement un petit disque. On enfile sur la tige des disques d'aluminium. Un bout de tube, entrant à frottement, porte un miroir plan de $2^{cm} \times 2^{cm}$. Les pinces s'adaptent aux deux bouts de la tige. Si l'on opère avec un seul fil, la pince inférieure porte une aiguille qui plonge dans du mercure au moment du lancement : on abaisse la coupelle de mercure quand les oscillations latérales sont amorties. Si l'on opère avec deux fils, la pince inférieure fixe l'extrémité supérieure du second fil : l'expérience montre que les oscillations latérales s'amortissent alors d'elles-mêmes rapidement.

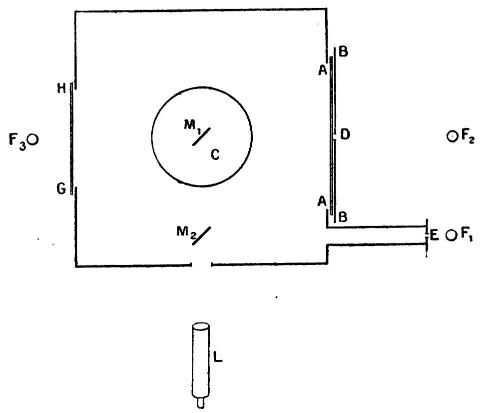
L'oscillateur est dans une caisse en bois d'un mètre cube, placée sur une table percée, et portant en son milieu au-dessus et au-dessous des cheminées verticales qui protègent les fils contre les courants d'air; la cheminée supérieure est fermée et porte sur son fond percé d'un trou l'appareil de lancement; elle s'ouvre latéralement par une porte nécessaire pour l'installation du fil supérieur.

La *fig.* 5 représente l'équateur de cette caisse où se trouve le disque de l'oscillateur C et son miroir M_1. L'échelle en verre AA, placée dans une ouverture ménagée sur le côté de la caisse, est éclairée par la lampe F_2 à travers une lame de verre mobile BB. Cette lame est recouverte de papier ordinaire, excepté suivant une fente fine verticale D. Quand l'appareil oscille on voit donc passer dans la lunette L les traits de l'échelle, faiblement mais uniformément éclairés, et la fente lumineuse D.

Un autre miroir M_2, formé d'une glace sans tain, permet de voir simultanément l'image d'une fente fixe fine et courte E, qu'on fait coïncider avec le réticule. Une partie de ce réticule est donc rendue lumineuse. Voici maintenant comment on procède.

On lance l'oscillateur de manière que les oscillations se fassent symétriquement par rapport à l'échelle. Dès qu'elles sont assez petites, on détermine l'azimut x et l'on constate s'il est invariable. S'il l'est, on amène la fente lumineuse D à coïncider avec lui. Pour cela on éteint les lampes F_1 et F_2 et l'on allume la lampe F_3 qui, à travers la glace GH, donne sur le papier BB une ombre portée de l'échelle. On déplace cette glace BB jusqu'à faire coïncider la fente D avec l'azimut x, ce qu'on obtient facilement au $\frac{1}{10}$ de millimètre. On éteint F_3 et l'on rallume F_1 et F_2. Les mesures de temps se font donc à partir du moment où les fentes lumi-

Fig. 5.



neuses, l'une fixe, l'autre mobile, coïncident. Il est alors extrêmement facile de déterminer les durées au $\frac{1}{10}$ de seconde près, ce qu'on ne pourrait pas faire si l'on essayait de suivre les divisions de l'échelle et de déterminer directement le passage de l'azimut x.

L'échelle est cependant toujours assez éclairée pour qu'on puisse lire les azimuts extrêmes, ce qui est nécessaire pour l'extrapolation étudiée au 4°.

Détermination de Φ par traction.

On peut utiliser la méthode des petites oscillations pour déterminer Φ. Supposons en effet le fil tendu par un corps de masse M libre de se mouvoir verticalement; allongeons le fil, puis lâchons-le. La masse M se met à osciller et la durée d'oscillation est donnée par la formule

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ML}{\Phi}}.$$

Elle est indépendante, au moins en apparence, du poids tenseur Mg et de l'amplitude.

Telle quelle, l'expérience est difficilement réalisable. On peut tourner les difficultés.

Soit un bloc de fonte de masse M pesant une quarantaine de kilogrammes, supporté par un fil d'acier d'une dizaine de mètres. Attachons les extrémités du fil fin à étudier, l'une en un point A du corps M, l'autre en un point fixe B, de sorte que la ligne AB soit horizontale. En déplaçant le point B, nous pourrons tendre convenablement le fil fin. En choisissant le point A, nous pourrons faire en sorte que le fil AB passe par le centre de percussion correspondant à l'axe de suspension du pendule formé par le bloc M et son fil de suspension.

Ces conditions réalisées (et elles le sont aisément), la masse M peut osciller sous l'influence de l'élasticité longitudinale du fil AB, comme si elle était libre dans l'espace. Le fil AB n'est tendu que par une petite fraction du poids Mg du bloc, fraction qu'on peut faire varier à volonté.

C'est là une très jolie expérience de cours; il est curieux de voir une masse de plusieurs dizaines de kilogrammes osciller, par exemple, sous l'influence d'un fil de 100 μ de diamètre avec une légèreté apparente; d'autre part, en disposant sur le fil des cavaliers de papier, il est très amusant de suivre les allongements de ce fil, qui semble être en caoutchouc. En prenant le fil de 3^m ou 4^m de longueur, on peut facilement donner 5^{mm} à 6^{mm} d'amplitude totale à l'oscillation.

Ce n'est qu'une expérience de cours. Il n'y a pas à songer à entretenir électriquement un pareil système, non que ce soit difficile, mais l'entretien change beaucoup la durée, parce que les conditions théoriques sont à peu près impossibles à réaliser pour des oscillations d'aussi faible amplitude. Ce ne serait pas un inconvénient bien grand, puisque, avec des masses M assez lourdes, on peut compter plusieurs centaines d'oscillations ; malheureusement, il est impossible de faire les corrections d'amortissement d'une manière suffisante, et toutes les difficultés qui proviennent de la rectification du fil se rencontrent ici tout comme dans la méthode statique.

Détermination de Φ par flexion.

On peut faire l'expérience de deux manières, comme dans la méthode statique, soit avec des verges, soit avec un spiral. Cette dernière forme est seule vraiment pratique. Elle est due à M. Phillips et consiste à transformer le fil en un ressort spiral cylindrique dont on détermine la constante de traction par une méthode d'oscillation.

Pour cela, l'oscillateur est supporté par un fil aussi fin que possible, qu'on puisse regarder comme parfaitement élastique dans les limites d'amplitude entre lesquelles on l'emploie et dont on détermine préalablement la constante. A l'extrémité inférieure de la tige verticale de l'oscillateur s'adapte un petit disque horizontal auquel on fixe une des extrémités du spiral; l'autre est fixée à un support disposé sous l'oscillateur, support qu'on élève ou abaisse et généralement qu'on déplace, de manière que le spiral cylindrique soit centré et que les spires soient aussi voisines les unes des autres que possible, sans se toucher.

Le spiral s'obtient en enroulant soigneusement le fil autour d'un cylindre de verre de 3^{cm} ou 4^{cm} de diamètre. On le maintient cylindrique jusqu'au bout; on ne gagnerait rien à chercher à construire les courbes terminales théoriques. Il ne s'agit pas, en effet, d'appliquer le spiral à la régulation des chronomètres, mais de mettre en évidence des effets hors de proportion avec les causes d'erreurs dues à la forme du spiral.

Posons $\Phi = \pi R^2 E$. Soient L la longueur du spiral développé, C le couple produit, I le moment d'inertie de la section droite du fil par rapport à un diamètre, on a

$$\alpha EI = CL.$$

Le rayon des spires n'intervient pas; il ne doit pas être trop petit.

Remplaçant les quantités par leurs valeurs, il vient

$$C = \frac{\pi}{4}\frac{ER^4}{L}\alpha.$$

La mesure du couple se fait pour le spiral comme pour le fil rectiligne.

Cette méthode est fort élégante mais ne présente aucune garantie d'exactitude, et ses erreurs systématiques font le plus clair de son intérêt. Opérons, par exemple, sur un fil d'argent raide qui a subi un allongement de 100 pour 100 à la filière; en l'enroulant pour en faire un spiral, il est impossible qu'on ne modifie pas notablement sa structure. La différence des longueurs des fibres intérieures et extérieures d'un cylindre de rayon R enroulé sur un cylindre de diamètre D est $4\pi R$, à la seule condition qu'on admette que le fil ne s'aplatisse pas, ou que la section diamétrale du tore qu'il forme reste une circonférence. Si maintenant on admet que la fibre centrale ne change pas de longueur, les fibres extérieures et intérieures ont subi, l'une un allongement de $2\pi R$, l'autre une contraction égale, soit un allongement ou une contraction relative de $\frac{2R}{D}$. Soit, par exemple, un fil de $0^{mm},5$ de diamètre enroulé sur un cylindre de 3^{cm} de diamètre; l'allongement de la fibre extérieure et la contraction de la fibre intérieure sont de 1,7 pour 100, résultat parfaitement absurde. Quand bien même on admettrait un aplatissement de fil, quand bien même on changerait la position de la fibre dont la longueur ne s'est pas modifiée, on n'avancerait en rien l'explication du phénomène; car le fil raide choisi, tiré longitudinalement, ne peut s'allonger ni de 1,7 pour 100 ni de la moitié de cette quantité ni du quart. Nous sommes donc forcés de conclure : ou bien que par flexion il est possible de produire des allongements permanents qu'on n'obtiendrait pas par traction, et cela sans que la matière cesse d'être continue ; ou bien que la matière a cessé d'être continue, qu'il s'est produit une infinité de failles, invisibles à l'œil et même au microscope, mais dont la variation des constantes peut nous révéler l'existence.

Sans vouloir résoudre en quelques mots une question de cette importance, nous allons citer deux expériences qui montreront au moins quelles précautions il faut apporter dans de semblables discussions.

a. On prend un fil, on détermine sa constante de torsion Γ_1, on l'enroule en un spiral, on le déroule, on détermine à nouveau la constante de torsion Γ_2 : Γ_2 est plus petit que Γ_1 et d'autant plus que le fil était plus raide.

b. On détermine par la méthode du spiral la constante E_1 d'un fil raide ; on le recuit tout enroulé, la nouvelle constante E_2 est beaucoup plus grande que l'ancienne. Pour l'argent et un fil de $0^{mm},5$ de diamètre, trois expériences ont donné pour le rapport

$\frac{E_1}{E_2}$...	0,916	0,889	0,924	Moyenne... 0,910

Pour le même rapport des constantes E d'un fil écroui et recuit, Wertheim avait trouvé directement 1,190. Je ne fais pour l'instant que constater cet écart de 31 pour 100.

EXPRESSION DES CONSTANTES Φ ET Γ DANS LA THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ.

Les équations de l'élasticité pour les corps isotropes sont

$$N_1 = 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\theta\ldots, \qquad T_1 = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\cdots$$

Elles contiennent deux constantes caractéristiques, λ et μ : exprimons les constantes Φ et Γ en fonction d'elles et du rayon du fil.

On a

$$\Phi = \pi R^2 E = \pi R^2 \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}, \qquad \Gamma = \frac{\pi}{2} R^4 \mu.$$

Rien ne prouve que la matière des fils soit isotrope : on en rencontre qui sont anisotropes sans contestation possible, et la question se pose de savoir si ce n'est pas le cas général. La plus grande simplification qu'on puisse faire, et *encore n'est-il pas sûr qu'elle soit légitime,* consiste à les assimiler à un cristal à un axe parallèle aux génératrices du cylindre. On admettra facilement que les propriétés de la matière soient de révolution autour de l'axe de cylindre; mais il est peu probable qu'elles ne soient pas fonction de sa distance à l'axe.

Admettons l'hypothèse, pour ne pas trop compliquer la question. Les équations de l'élasticité ont alors cinq constantes et peuvent s'écrire

$$N_1 = 2\mu_1 \frac{\partial u}{\partial x} + 2\mu_2 \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda_1 \theta,$$

$$N_2 = 2\mu_1 \frac{\partial v}{\partial y} + 2\mu_2 \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda_1 \theta,$$

$$N_3 = 2\mu_3 \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda_1 \theta;$$

$$T_1 = \mu'\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right), \qquad T_2 = \mu'\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right), \qquad T_3 = (\mu_2 - \mu_1)\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

Pour déterminer les paramètres, nous n'avons, en tout, que deux expériences distinctes : il y a donc indétermination, et une infinité d'hypothèses vérifieront numériquement les faits. On passe au corps isotrope en écrivant

$$\mu_1 = \mu_3 = \mu' = \mu, \qquad \mu_2 = 0, \qquad \lambda_1 = \lambda.$$

Calculons les expressions de Φ et de Γ, on trouve facilement

$$E = \frac{(\mu_1 + \mu_2)(2\mu_3 + \lambda_1) + 2\mu_3\lambda_1}{\mu_1 + \mu_2 + \lambda_1},$$

$$\Gamma = \frac{\pi}{2} R^4 \mu'.$$

Appelons σ le rapport de la contraction latérale à la dilatation longitudinale dans le cas d'une traction, on trouve

$$\sigma = \frac{\lambda_1}{2(\mu_1 + \mu_2 + \lambda_1)},$$

expression qui devient $\sigma = \dfrac{\lambda}{2(\mu + \lambda)}$ dans le cas d'une matière isotrope.

Enfin calculons le rapport $\dfrac{E}{2\mu'}$, que nous aurons l'occasion de rencontrer plus loin,

$$\frac{E}{2\mu'} = \frac{\mu_3}{\mu'} + \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu'}\sigma,$$

expression qui devient $\dfrac{E}{2\mu} = 1 + \sigma$ dans le cas d'une matière isotrope.

Nous pouvons discuter maintenant la question dite *du coefficient de Poisson.*

Du rapport des coefficients λ et μ dans les corps isotropes.

A priori, nous savons seulement que λ et μ sont des constantes positives : leur rapport $q = \frac{\lambda}{\mu}$ peut donc prendre toutes les valeurs comprises entre 0 et ∞ ; on admet qu'il est toujours > 1. On énonce souvent, au lieu du nombre q, le nombre σ défini par la relation

$$\sigma = \frac{q}{2q+2} = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}.$$

Pour $q = 1$, $\sigma = 0,25$; pour $q = \infty$, $\sigma = 0,50$. Cette substitution de σ à q est fâcheuse. Le physicien qui détermine σ et trouve, par exemple, des nombres compris entre 0,43 et 0,44, croit avoir une bonne approximation : q varie alors de 6,14 à 7,33 et, en définitive, c'est lui qui intervient dans les formules. De plus, il finit par oublier la signification du nombre σ et admet sans sourciller, pour un corps isotrope, la valeur expérimentale $\sigma = 0,50$, qui est un non-sens ; elle conduit, en effet, à poser $\mu = 0$ ou $\lambda = \infty$, valeur qui ne se rencontre dans aucun solide et que d'ailleurs personne n'aurait l'idée de soutenir.

Voici un Tableau qui facilitera au lecteur la comparaison :

$\sigma = 0,25$	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
$q = 1,00$	1,50	2,33	4,00	9,00	∞

On admet généralement aujourd'hui, plus ou moins implicitement :

1° La théorie de l'élasticité pour les corps isotropes est applicable aux petites déformations des métaux ;

2° Le nombre σ de cette théorie peut prendre toutes les valeurs entre 0,25 et 0,50, et, par conséquent, q toutes les valeurs entre 1 et ∞ ;

3° Ce nombre varie pour un même métal, suivant son état.

Le nombre σ s'appelle *coefficient de Poisson*.

Depuis près d'un siècle qu'on discute sur ce coefficient, on a dit bien des choses surprenantes et que nous n'avons pas l'intention de rappeler. Mais, si naïves qu'elles vont sembler, nous énoncerons quelques propositions dont trop de physiciens ne paraissent pas se douter.

Voici la première : on ne peut parler d'un coefficient σ ou q que si l'on est sûr de la possibilité de décrire un cycle effort-déformation rectiligne ; on n'en peut donner la valeur numérique que si l'on décrit effectivement de tels cycles rectilignes. Car, sans cela, on n'est pas sûr de pouvoir appliquer la théorie de l'élasticité, *qui suppose essentiellement tous les cycles rectilignes.*

Un solide est un vrai solide par rapport à une déformation, quand le cycle effort-déformation est rectiligne, et il ne saurait y avoir d'autre définition expérimentale. Il n'y a pas à discuter, si σ ne pourrait devenir notablement supérieur à 0,25 qu'à partir du moment où les déformations permanentes deviennent sensibles, *simplement parce que cela n'a pas de sens*.

Il est gratuit de dire que la valeur de σ, théoriquement égale à 0,50 pour les liquides, décroît d'un corps à l'autre, au fur et à mesure que ceux-ci se rapprochent de l'état solide, parce que nous n'en savons rien. S'il suffit de faire $\mu = 0$ dans les équations de l'élasticité des corps solides isotropes, pour avoir celles des corps liquides, cela ne prouve pas qu'entre l'état solide et l'état liquide il existe des états intermédiaires continus pour lesquels μ décroît jusqu'à 0, λ conservant une valeur finie.

Enfin, voici une dernière remarque que je n'oserais faire, si le préjugé contraire n'existait pas. On trouve facilement $\sigma = \frac{E}{2\mu} - 1$. On ne peut pas dire, *a priori*, que σ croît parce que μ décroît; il peut se faire que σ croisse, parce que E croît plus vite que μ.

Les résultats expérimentaux abondent : la plupart des physiciens qui se sont occupés d'élasticité, de près ou de loin, ont fait leur détermination du nombre σ; il semble qu'en Allemagne ce soit une épreuve indispensable; mais la première condition, quand on compare deux quantités, c'est de montrer qu'elles existent, et au moins de les définir. Quand nous appliquerons la technique discutée dans les pages précédentes et que nous déterminerons E et Γ, nous aurons le droit de parler de leur rapport. Il est assez rare qu'on ait pris ces précautions.

Il faut remarquer, en outre, que toutes les méthodes employées à déterminer q ne peuvent conduire au même résultat que *si la matière est isotrope;* or il y a généralement présomption pour qu'elle ne le soit pas. Il y a donc autant de coefficients expérimentaux q distincts qu'il y a d'expériences distinctes, et ni les unes ni les autres ne représentent, et pour cause, le rapport $\frac{\lambda}{\mu}$.

Pour montrer à quel point nos critiques sont fondées, nous ajoutons quelques nombres. Dans un Mémoire de M. Amagat (*Ann. de Chim. et de Phys.*, 6e série, t. XXII; 1891) sont donnés les résultats suivants :

Valeurs des coefficients de Poisson.

Acier.	Cuivre.	Laiton.	Plomb.
0,2686	0,3270	0,3275	0,4282

« Les nombres consignés dans ce Tableau montrent que, pour les métaux étudiés, cet ordre est aussi sensiblement celui dans lequel les corps deviennent plus mous, plus susceptibles de subir les déformations permanentes. » Voilà qui va bien.

Mais, dans un grand Mémoire de Tomlinson, je trouve (*Phil. Trans.*, t. I; 1883) :

	Recuit.			Fortement étiré.	
Cuivre	0,315	0,453	0,293	0,733	
Argent	0,367			0,392	
Laiton				0,587	0,504
Platine	0,076			0,051	
Fer	0,281			0,325	0,321

Ces nombres résultent de la comparaison des coefficients de torsion et de traction directement mesurés; ils nous inspirent les réflexions suivantes :

1° Les métaux recuits ont des σ inférieurs à 0,50; les fils écrouis par la filière ont des σ généralement supérieurs à 0,50 : ce qui prouve qu'ils ne sont pas isotropes. Les nombres donnés ne représentent plus le coefficient de Poisson.

2° Le coefficient σ n'augmente pas *certainement* d'un métal à un métal plus mou, puisque nous voyons croître le rapport $\frac{E}{2\mu}$ d'un métal recuit au même métal écroui et que cette analogie en vaut bien une autre.

3° La question du coefficient de Poisson reste entière au point de vue expérimental, car si personne ne prétend que $l = \mu$ ou $l = 2\mu$, tout le monde s'étonnera qu'en passant du platine recuit au cuivre recuit $q = \frac{\lambda}{\mu}$ varie de 0,18 à 9,7, soit de 1 à 54 ($\sigma = 0,076$ pour le platine, $\sigma = 0,453$ pour le cuivre).

Il semble que le nombre σ peut être déterminé très facilement pour les fils dont les diamètres varient de $0^{mm},3$ à 1^{mm}, ou du moins que l'on peut obtenir, sans qu'il soit nécessaire de faire aucune mesure de diamètre ou de longueur, une constante caractéristique de la matière du fil.

Du rapport des constantes Φ *et* Γ.

Nous avons montré que pour les corps isotropes on a

$$\frac{E}{2\mu} = 1 + \sigma.$$

Si le corps n'est pas isotrope, on peut poser arbitrairement $\frac{E}{2\mu'} = 1 + \sigma'$: la quantité σ' est définie par cette équation même. On tire de là, en multipliant haut et bas le premier membre par $\frac{\pi R^4}{2}$,

$$\frac{\Phi R^2}{4\Gamma} = 1 + \sigma'.$$

La valeur de σ' se déduit donc de la connaissance des constantes déjà définies Φ et Γ et du rayon du fil. Si le corps est isotrope, le nombre σ' ainsi défini se confond avec le coefficient σ de Poisson. Il est clair que le calcul de σ' ne préjuge pas l'isotropie, qu'on peut employer telles méthodes que l'on voudra pour déterminer séparément Φ et Γ, et que la seule condition essentielle est d'opérer sur le même échantillon.

Mais on a cherché, soit à faire simultanément les deux mesures, soit à combiner ces mesures de manière que les dimensions du fil disparaissent de la formule. Voici les méthodes qui permettent d'atteindre ce but.

La première est due à Kirchhoff qui l'a proposée en 1859. La barre cylindrique, maintenue horizontalement par l'une de ses extrémités dans un étau, porte, fixée transversalement à l'autre, une tige dont l'extrémité est elle-même chargée d'un poids. Il se produit donc à la fois une flexion et une torsion dont il est facile de calculer la grandeur.

Soient L la longueur de la barre, P le poids qui la fléchit, f la flèche. On a

$$P = E\,\frac{3\pi R^4}{4L^3} f.$$

Soient maintenant C le couple de torsion et α l'angle correspondant

$$C = \frac{\pi}{2} R^4 \frac{\mu'\alpha}{L}.$$

On tire de là

$$\frac{P}{C} = \frac{3f}{L^2\alpha}\,\frac{E}{2\mu'} = \frac{3f}{L^2\alpha}(1+\sigma'),$$

le rayon a disparu.

Les déterminations étaient faites par la méthode de Poggendorff et à l'aide d'un quadrillage sur verre : tout se ramenait à une seule lecture.

Cette méthode est inapplicable s'il s'agit de fils fins. On peut alors combiner la mesure de Γ et celle de E par le ressort spiral, en utilisant la méthode statique ou la méthode dynamique.

La formule qui permet de déterminer E par le ressort spiral est

$$C_1 = \frac{E\pi R^4}{4L}\alpha.$$

L'opération terminée, rectifions le fil *en le déroulant* et déterminons la constante de torsion

$$C_2 = \Gamma\alpha = \frac{\pi}{2}\,\frac{R^4\mu'\alpha}{L};$$

de la comparaison de ces équations on tire

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{E}{2\mu'} = \sigma' + 1.$$

que le corps soit isotrope ou non.

Les conditions expérimentales paraissent excellentes, puisque les mesures des couples se font exactement dans les mêmes conditions. Le fil serait légèrement conique que les formules resteraient les mêmes, puisque chaque partie du fil intervient pour son propre compte et de la même manière dans les deux expériences. Le rapport $\frac{C_1}{C_2}$ aurait donc une signification plus précise que les nombres C_1 et C_2 pris isolément. Enfin on ne doit faire aucune mesure ni de diamètre, ni de longueur. Cette méthode, beaucoup plus commode que celle de Kirchhoff, s'appliquerait à des diamètres variant de $0^{mm},3$ à $0^{mm},6$.

Malheureusement, toutes les critiques, déjà formulées plus haut contre la méthode du spiral, peuvent être répétées ici. Voici une curieuse expérience sur du fil d'argent de 500μ de diamètre. On *enroule* un fil livré *recuit* par le commerce, on détermine la durée d'oscillation sous l'action du ressort spiral, on déroule et l'on mesure le coefficient de torsion. Trois expériences ont donné

$\sigma = 0,328$ 0,292 0,285 Moyenne 0,302

On prend du fil du même argent écroui par la filière, on l'*enroule* raide, on *recuit*, on mesure la constante du ressort spiral, on déroule et l'on mesure le coefficient de torsion. Deux expériences donnent

$\sigma = 0,582$ 0,476 Moyenne 0,529

Nous reviendrons plus loin sur l'explication de ce paradoxe.

CHAPITRE II.

SUR LES PROPRIÉTÉS EN UN POINT D'UNE COURBE DE DÉFORMATION.

On fait décrire à un fil une courbe de déformation. Pour préciser, supposons qu'on le soumette à des poids qui croissent proportionnellement au temps : on mesure à chaque instant l'allongement en fonction de la charge : la courbe obtenue s'appelle *essai de traction*.

Évidemment, elle nous fournit de précieuses indications sur l'état du métal avant la déformation; mais son utilité ne sera complète que si nous connaissons les propriétés du métal en chacun de ses points. Nous nous proposons d'étudier dans ce Chapitre les conditions de cette détermination et le choix des propriétés.

L'essai auquel nous soumettons un corps, en un point d'une courbe de déformation, doit être de telle nature qu'il ne modifie pas l'état auquel ce corps est parvenu.

Arrêter une courbe de traction en un de ses points, soumettre le fil à une autre grande déformation permanente, lui faire décrire, par exemple, une courbe de torsion complète, ne serait pas étudier les propriétés du métal au point d'arrêt sur la courbe de traction, mais superposer les effets de deux déformations permanentes. Au contraire, la détermination, en chaque point de la courbe de traction, de propriétés telles que la densité, la résistance électrique, etc., détermination qui n'entraîne pas de nouvelles modifications permanentes sensibles, permet de mesurer les changements de nature.

Il faut, en un mot, que l'essai ne modifie pas sensiblement la nature actuelle du corps et puisse être fait avec une précision suffisante. Le choix de ces essais soulève des questions sur lesquelles il faut se faire une idée nette avant d'entreprendre les expériences.

De la nécessité d'une vérification.

Ce ne sont pas les constantes du fil qu'il y a intérêt à connaître, mais celles de la matière qui forme le fil : jusqu'à quel point peut-on passer des unes aux autres? Si l'on était sûr que, dans la déformation, le fil restât rigoureusement cylindrique, rien ne serait plus facile : mais c'est une hypothèse gratuite, puisque le fil dans son état primitif n'est ni rigoureusement cylindrique ni rigoureusement homogène. Or toute différence qui se crée ou s'exagère, par la déformation entre la forme réelle et la forme cylindrique, tend à faire varier les constantes du fil, à supposer que celles de la matière restent invariables; nous allons d'abord le montrer sur quelques exemples.

Cherchons la constante $\frac{\Gamma}{l}$ d'un système formé par une série de fils mis bout à bout.

Soient

l_1, l_2 les longueurs des fils,
α_1, α_2 leurs torsions,
Γ_1, Γ_2 leurs constantes,
$\Sigma l_i = l$ la longueur de l'ensemble,

$\Sigma \alpha_i = \alpha$ la torsion totale,
Γ la constante de l'ensemble.

Puisque chaque fil résiste au couple total, on a

$$C = \frac{\Gamma_1 \alpha_1}{l_2} = \frac{\Gamma_2 \alpha_2}{l_3} = \ldots, \qquad \alpha = \Sigma \alpha_i = C \Sigma \frac{l_i}{\Gamma_i}.$$

Or, par définition, on a

$$C = \frac{\Gamma \alpha}{l},$$

d'où

$$\frac{l}{\Gamma} = \Sigma \frac{l_i}{\Gamma_i}$$

et, plus généralement,

$$\frac{l}{\Gamma} = \int_0^l \frac{dx}{\Gamma(x)}.$$

Cherchons de même la constante Φ d'un tel système.
Chaque bout de fil supporte la tension totale, on a

$$dP = \Phi_i \frac{dl_i}{l_i},$$

d'où

$$dl_i = dP \frac{l_i}{\Phi_i}.$$

Additionnons toutes les équations, il vient

$$\Sigma dl_i = dl = dP \Sigma \frac{l_i}{\Phi_i}.$$

Or, par définition, on a

$$dP = \Phi \frac{dl}{l},$$

d'où

$$\frac{l}{\Phi} = \Sigma \frac{l_i}{\Phi_i}$$

et, plus généralement,

$$\frac{l}{\Phi} = \int_0^l \frac{dx}{\Phi(x)}.$$

Supposons maintenant que l'on remplace le cylindre par un tronc de cône sans changer, d'ailleurs, l'état de la matière ni la longueur : le rayon en chaque point est

$$k(1+\rho x):$$

k est un coefficient que nous calculerons en écrivant que le rayon primitif est 1 et que le volume reste constant dans la déformation. Nous avons l'équation

$$l = k^2 \int_0^l (1+\rho x)^2\,dx,$$

d'où

$$k^2 = \frac{1}{1+\rho l + \frac{\rho^2 l^2}{3}}.$$

Cherchons maintenant quelle variation la modification de la forme, qui n'a pas fait varier les constantes de la matière, a produite sur la valeur des constantes du fil. Puisque la constante de torsion est proportionnelle à la quatrième puissance du rayon, si Γ' est la constante pour le fil cylindrique de rayon 1, la nouvelle constante en chaque point du fil conique est

$$\frac{\Gamma'(1+\rho x)^4}{\left(1+\rho l + \frac{\rho^2 l^2}{3}\right)^2}$$

et nous aurons, pour calculer la constante Γ du fil conique, l'équation

$$\frac{l}{\Gamma} = \left(1+\rho l + \frac{\rho^2 l^2}{3}\right)^2 \frac{1}{\Gamma'} \int_0^l \frac{dx}{(1+\rho x)^4}.$$

Résolvant, il vient

$$\frac{1}{\Gamma} = \frac{1}{\Gamma'} \left(\frac{1+\rho l + \frac{\rho^2 l^2}{3}}{1+\rho l}\right)^3,$$

d'où, en négligeant les termes d'ordre supérieur au second,

$$\Gamma = \Gamma'(1-\rho^2 l^2).$$

La constante du fil Γ est donc plus petite que la constante qui *pour la même matière* correspondrait au fil cylindrique; l'erreur relative est le carré de la différence relative des rayons maximum et minimum. Nous avons supposé dans notre démonstration que le cône formé par le fil était unique : le résultat est le même quand il existe un nombre quelconque de cônes le long du fil. Ainsi, dans tous les cas où l'expérience indique un μ décroissant avec l'allongement, on ne peut pas savoir, *a priori,* si l'effet ne tient pas à une déformation géométrique, sans changement de nature.

Le calcul de la variation de Φ peut se calquer sur le précédent.

La constante Φ est proportionnelle au carré du rayon; si Φ' est la constante pour le fil cylindrique de rayon 1, la constante du fil conique est, en chaque point,

$$\frac{\Phi'(1+\rho x)^2}{1+\rho l+\frac{\rho^2 l^2}{3}}$$

et nous avons, pour calculer la constante Φ du fil conique, l'équation

$$\frac{l}{\Phi}=\left(1+\rho l+\frac{\rho^2 l^2}{3}\right)\frac{1}{\Phi'}\int_0^l \frac{dx}{(1+\rho x)^2}.$$

Résolvant, il vient

$$\frac{1}{\Phi}=\frac{1}{\Phi'}\,\frac{1+\rho l+\frac{\rho^2 l^2}{3}}{1+\rho l};$$

d'où, enfin,

$$\Phi=\Phi'\left(1-\frac{\rho^2 l^2}{3}\right).$$

La même formule s'appliquerait encore à la résistance électrique. On a évidemment, en appelant R la résistance par unité de longueur,

$$\mathrm{R}\,l=\int_0^x \mathrm{R}(x)\,dx.$$

Mais $\mathrm{R}(x)$ est en raison inverse de la section; si R' est la résistance du fil supposé cylindrique et de rayon 1, la résistance en chaque point par unité de longueur est

$$\mathrm{R}'\,\frac{1+\rho l+\frac{\rho^2 l^2}{3}}{(1+\rho x)^2},$$

d'où

$$\mathrm{R}\,l=\mathrm{R}'\left(1+\rho l+\frac{\rho^2 l^2}{3}\right)\int_0^x \frac{dx}{(1+\rho x)^2},$$

d'où

$$\mathrm{R}=\mathrm{R}'\left(1+\frac{\rho^2 l^2}{3}\right).$$

La conclusion est générale : si l'on ne peut certifier que la forme est restée cylindrique, les résultats numériques sont douteux, et même les conclusions qualitatives ne sont légitimes que si les variations sont du sens contraire à celui que la discussion précédente fait prévoir.

On est donc conduit à chercher s'il est possible de ramener la matière d'un corps dans un état toujours le même sans modifier les relations géométriques des éléments qui le composent. Admettons qu'il en soit ainsi : la détermination des propriétés en un point d'une courbe de déformation consiste alors à comparer les propriétés actuelles du fil aux propriétés qu'il reprend quand, sans le modifier géométriquement, on ramène sa matière à cet état type. On peut alors conclure l'état de la matière, sans avoir à se préoccuper des irrégularités de la déformation. Il serait de plus souhaitable que cet état type fût isotrope; mais ce n'est pas une condition supplémentaire qu'on impose, car il semble difficile qu'on puisse sûrement ramener toujours à un état anisotrope parfaitement déterminé.

Du recuit des fils.

On est tenté de se faire du recuit une idée schématique qui, malheureusement pour la simplicité des phénomènes, s'éloigne singulièrement de la réalité. On pourrait supposer qu'un recuit, maintenu un temps suffisant à une température T assez voisine du point de fusion, rend aux molécules leur mobilité et que l'état ainsi obtenu est bien déterminé, stable et parfaitement isotrope. Il va de soi que l'on ne devrait pas s'approcher du point de fusion assez pour que le corps risque de se ramollir ou de fondre; car on ne serait plus certain que les relations géométriques des éléments ne se sont pas modifiées.

On appellerait *états types* la série des états par lesquels passerait aux différentes températures la matière qui aurait été une fois chauffée assez longtemps à une température T assez voisine du point de fusion; toute température $T_0 < T$ serait caractérisée par un de ces états.

Le seul problème qu'il resterait à résoudre serait celui-ci : supposons que le corps ait été déformé, portons-le à la température T_0 sans la dépasser; le corps prendra-t-il au bout d'un temps plus ou moins long l'état isotrope caractéristique de cette température T_0? ce qui entraînerait de plus que, porté ensuite à toute température inférieure ou supérieure, il atteigne immédiatement l'état type correspondant à cette nouvelle température.

Les faits contredisent entièrement ces hypothèses trop simples, et nous devons passer en revue les effets généraux du recuit.

Effets généraux du recuit.

1° *Modifications dans la forme géométrique.* — Il n'est pas possible de porter des fils tout près du point de fusion, parce qu'un cylindre liquide très allongé n'est pas stable et tend à se résoudre en sphérules sous l'action des forces capillaires. Au-dessous de la température de fusion, il y a une grande résistance à la transformation, parce que la matière est seulement ramollie ; cependant il est impossible de prévoir à quelle distance de cette température la forme cessera pratiquement d'être stable. La tension superficielle est énorme et l'arrondissement des bouts des fils métalliques chauffés, analogue au bordage des tubes de verre, le montre suffisamment.

Ces effets de capillarité tendent à boucher les petites cavités intérieures qui peuvent exister dans la masse métallique. Les rayons de courbure sont petits, les pressions considérables ; les gaz qui remplissent les cavités sont absorbés et celles-ci se ferment.

La capillarité tend aussi à modifier la forme extérieure, si le fil est enroulé suivant un tore ou généralement plié ; et l'on pourrait trouver là une des causes de l'énorme accroissement du coefficient de traction déterminé par le ressort spiral, quand on recuit le fil enroulé. Supposons la spire horizontale et que la section droite du fil primitivement circulaire ait été transformée en une ellipse dont les axes (vertical et horizontal) soient b et a. Le couple de flexion était primitivement

$$C = \frac{\pi}{4} E \frac{R^4}{L} \alpha;$$

il est devenu

$$C' = \frac{\pi}{4} E \frac{a^3 b}{L} \alpha;$$

la densité étant restée la même, nous devons écrire que les aires du cercle primitif et de l'ellipse sont égales, d'où la condition

$$R^2 = ab,$$

d'où enfin

$$\frac{C'}{C} = \frac{a}{b}.$$

Le couple a augmenté dans le rapport des axes de l'ellipse.

Cette transformation en ellipse de la section circulaire du fil modifie tout différemment le couple de torsion. Il était

$$C_1 = \frac{\pi}{2} \frac{R^4}{L} \mu \alpha,$$

il devient

$$C'_1 = \frac{\pi}{L} \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2} \mu \alpha,$$

d'où

$$\frac{C_1'}{C_1} = \frac{2ab}{a^2 + b^2}.$$

On peut s'expliquer ainsi deux expériences citées au Chapitre précédent.

Ainsi, pour modifier la nature de la matière, sans modifier la forme géométrique (et par là il faut entendre la position des surfaces qui limitent la matière intérieurement ou extérieurement), le recuit doit nécessairement se faire à une température assez basse pour que les forces capillaires ne puissent l'emporter sur la résistance au déplacement.

2° *Retour à l'homogénéité isotrope.* — C'est précisément cet effet qu'on cherche à obtenir par le recuit et à séparer de tous les autres. Nous aurons à étudier dans le Chapitre suivant par quelle technique on parvient à ce résultat.

3° *Cristallisation. Homogénéité anisotrope.* — Un métal recuit assez longtemps à haute température, ou qu'on refroidit lentement à partir de l'état fondu, cristallise : c'est un fait qui paraît général. La description du métal *brûlé,* telle que la font la plupart des auteurs, correspond bien à ce phénomène. Contre cette cristallisation, on ne peut, évidemment, qu'éviter de recuire trop longtemps à trop haute température. Elle se produit même avec des métaux parfaitement purs et dans le vide. Dumas, opérant sur de l'argent pur dans le vide, a trouvé, après refroidissement, un culot bien cristallisé. Le milieu a une influence : Caron dit que l'argent et l'étain, qui ne rochent pas dans l'hydrogène, y cristallisent d'une manière inaccoutumée sous le rapport de la grandeur des cristaux.

Certains alliages cristallisent beaucoup mieux et plus facilement que les métaux avec lesquels ils sont formés.

4° *Liquation. Hétérogénéité.* — Presque tous les alliages soumis à un refroidissement lent tendent à se séparer en plusieurs produits définis, différents entre eux par la composition, la densité, etc. La petitesse de la proportion des métaux n'empêche pas le phénomène de se montrer. La liquation peut encore se produire quand on chauffe longtemps, à une température inférieure à son point de fusion, un alliage obtenu par refroidissement brusque à partir des métaux liquides. Le milieu dans lequel se fait le recuit n'intervient pas.

5° *Stabilité ou instabilité, modification des états obtenus suivant la loi de refroidissement.* — On connaît les effets de la trempe, c'est-à-dire du refroidissement brusque sur l'acier. Sur d'autres métaux, les effets peuvent être opposés, le métal devenir malléable : la trempe adoucit les bronzes riches en étain qu'on peut aplatir au balancier. On admet généralement, dans les usines qui travaillent le cuivre, que l'immersion dans l'eau des cuivres sortant du recuit a pour effet d'adoucir le métal en même temps que de le décaper; mais le fait est très contestable. D'une manière plus générale, il se peut que le métal, refroidi à la température ordinaire, ait des propriétés qui dépendent de la manière dont le refroidissement s'est effectué, de la température jusqu'à laquelle on a refroidi et du temps qui s'écoule depuis le refroidissement : les aciers au nickel étudiés par M. Guillaume sont un exemple de ces phénomènes.

6° *Occlusion des gaz.* — Les métaux peuvent absorber des gaz à température relativement basse et garder à froid les gaz qu'ils ont absorbés à des températures plus élevées. Leurs propriétés mécaniques peuvent en être complètement modifiées. M. Caron fait fondre du cuivre dans l'hydrogène; après quelque temps, il le laisse refroidir. Un peu avant la solidification, le métal roche : refroidi, il est rempli de cavités profondes, la densité a diminué; le rochage est incomplet. Même effet dans l'oxyde de carbone.

Dumas a montré que le rochage de l'argent pour l'oxygène est incomplet, même dans le vide : le gaz retenu se dégage lentement dans le vide de 400° à 600°. A partir du rouge, le dégagement cesse; lorsque l'argent se ramollit, le phénomène se renverse; il y a absorption d'oxygène.

7° *Actions chimiques proprement dites du milieu.* — Le cuivre du commerce contient toujours un peu d'oxyde en dissolution; le recuit dans l'hydrogène commence par le réduire. On supprime ainsi une impureté, mais le grain du métal en est complètement modifié : la masse a servi pour ainsi dire de laboratoire. Si l'action dure plus longtemps, le cuivre absorbe de l'hydrogène; il est cassant. Mais il le devient bien davantage, si alors on le recuit à l'air. Tous ces effets se comprennent aisément.

De même, si l'on recuit l'argent au rouge sombre dans l'hydrogène, on élimine l'oxygène qu'il contient toujours : le métal devient cassant. En recommençant plusieurs fois au rouge sombre — le cycle — recuit dans l'air, recuit dans l'hydrogène, on rend le métal pulvérulent. On recuit du cuivre dans l'air, il se forme une couche d'oxyde noir qui se détache aisément. Mais il se forme aussi une combinaison du sous-oxyde avec le métal, connu sous le nom de *cuivre rosette.* On est plus ou moins averti de ces phénomènes par la couleur que prend le métal; pâle, presque blanc, après un recuit dans l'hydrogène, il rosit par le recuit dans l'oxygène ou l'air.

Par cette énumération rapide des effets généraux du recuit, on voit à quel point la réalité s'éloigne du schéma que nous avions d'abord imaginé. Au point de vue auquel nous nous plaçons, nous chercherons seulement par le recuit à produire l'homogénéité isotrope et définie du 2°, en évitant, autant que possible, tous les autres phénomènes. Nous verrons que le choix d'un métal presque pur, et en particulier du cuivre, facilite singulièrement la solution d'un problème insoluble dans le cas général.

Des propriétés de cohérence et d'élasticité suivant Coulomb.

Coulomb distinguait dans un métal deux groupes de propriétés. Les premières, qu'il appelle *propriétés de cohérence,* ne sont pas des fonctions déterminées des paramètres, température, pression, magnétisme, etc., et se transforment d'une manière continue. Les secondes, les propriétés d'élasticité, non seulement seraient plus stables, mais jouiraient de ce privilège d'être des fonctions déterminées des paramètres, de ne dépendre que de leurs valeurs actuelles et pas du tout de leurs variations antérieures.

En particulier, pour ce qui concerne les constantes λ et μ, son opinion, énoncée en langage moderne et mise au point, revient à soutenir que ni les parcours à température constante des courbes de déformation, ni les cycles de température ne modifient les constantes élastiques proprement dites, pourvu qu'on les mesure dans des conditions toujours les mêmes.

Cette dualité essentielle dans les propriétés des corps se traduit pour lui, sous forme matérielle, par l'attribution des propriétés d'élasticité à des particules intégrantes, des propriétés de cohérence à un ciment qui sert de liaison à ces particules. La confirmation expérimentale d'une vue si profonde présenterait une importance considérable et donnerait une base solide, indépendamment de toute théorie, à l'étude des métaux. Malheureusement, il paraît certain qu'au moins sous cette forme absolue elle ne correspond pas à la réalité.

L'expérience montre de la façon la plus évidente qu'un fil raide ou recuit n'a pas les mêmes constantes élastiques. La question revient à savoir si la variation de densité qui peut exister quand on passe d'un état à l'autre suffit pour expliquer dans les idées de Coulomb le changement des constantes élastiques.

En admettant même une variation de densité assez notable, on se trouve d'ailleurs fort empêché quand on veut traduire analytiquement ses idées.

Faut-il supposer que l'unité de volume, prise dans le corps avant et après la déformation, possède dans les mêmes conditions les mêmes λ et μ? ou bien, pour rester plus fidèles à sa théorie, considérant que le corps, avant et après la déformation, contient le même nombre de particules intégrantes, faut-il admettre que ces particules conservent le même ressort et, dans ce cas, comment faut-il disposer des cinq coefficients que contiennent nécessairement les équations, même comme première approximation? La première hypothèse est écartée par ce fait que la matière des fils est sûrement rendue anisotrope par certaines déformations; la seconde est, elle aussi, écartée par ce fait que les variations de densité sont certainement trop petites pour expliquer tous les phénomènes.

Si l'hypothèse de Coulomb était vérifiée, les constantes de traction et de torsion, qui seraient des constantes absolues, ne pourraient pas nous servir à caractériser les changements d'état du fil aux divers points d'une courbe de déformation. L'expérience montre, au contraire, que leurs variations sont très notables si les déformations sont grandes. Il est important seulement de préciser ce qu'il faut entendre par une grande déformation : c'est ce que nous allons faire.

On trouve dans les Traités d'Élasticité les nombres suivants que nous donnons sous toutes réserves. Fer recuit : coefficient $E = 20000^{kg}$ par millimètre de section, limite d'élasticité $= 5^{kg}$. Or E est la charge nécessaire à produire un allongement de 100 pour 100. Donc le fer cesse de pouvoir être considéré comme parfaitement élastique après un allongement de $\frac{5}{20000} = 0^{m},00025$ par mètre. Si maintenant on allonge ce fer jusqu'à la rupture, soit par exemple de 20 pour 100, il se trouve allongé de 800 fois la quantité pour laquelle il a atteint sa limite d'élasticité : c'est une déformation énorme. De même, si un fil atteint sa limite d'élasticité parfaite de torsion, pour une torsion de un tour-mètre, une torsion de un ou plusieurs tours-centimètre est une déformation énorme : au contraire, une torsion de deux ou trois tours-mètre sera relativement petite. On s'explique donc aisément, par exemple, que nous ayons pu, dans nos recherches sur les courbes de torsion, considérer la constante Γ comme effectivement constante, malgré les déformations permanentes, parce que celles-ci étaient en somme toujours petites (¹).

La question expérimentale de la variation des constantes Φ et Γ se complique en tous cas de celle du changement de la densité; car, si l'on différentie les logarithmes de l'expression générale de ces quantités, on trouve

$$\text{Dans } \frac{d\Phi}{\Phi} \quad \text{un terme en} \quad \frac{2\,dR}{R},$$

$$\text{Dans } \frac{d\Gamma}{\Gamma} \qquad \text{»} \qquad \frac{4\,dR}{R},$$

en supposant, bien entendu, que l'on opère sur une longueur invariable. Il est donc nécessaire de savoir comment varie la densité pendant les déformations permanentes, ne serait-ce que pour faire dans les valeurs de Φ et de Γ la correction nécessaire. Quoi qu'il en soit, les quantités Φ et Γ, ou des quantités de définition peu différentes, seront les premières que nous choisirons pour caractériser l'état du fil en un point d'une courbe de déformation. Elles satisfont parfaitement aux

---

(¹) On trouvera une discussion plus complète des ordres de grandeur des déformations dans un article du *Journal de Physique,* mai 1899.

conditions imposées; leur détermination se fait avec précision, au moins dans certains cas, et sans qu'il en résulte de modification permanente nouvelle pour le métal.

Des dilatations dans les métaux comprimés non uniformément.

Lorsqu'un métal est soumis sur toute sa surface à une pression (ou une traction) uniforme, son volume varie et, au moins pour de faibles actions, il est une fonction bien déterminée de la pression : si la pression revient à sa valeur initiale, il reprend aussi sa valeur initiale. Si la pression uniforme atteint une valeur suffisante, la densité subit peut-être une altération permanente. Mais nous n'avons aucune expérience à citer. Les pressions devraient se chiffrer par milliers d'atmosphères pour que leur influence apparaisse. Certes, on peut en obtenir de telles : Mousson, dans son étude sur l'abaissement du point de congélation, est allé jusqu'à 15000 atmosphères : un canon en supporte au moins 6000 dans des conditions particulièrement défavorables pour sa résistance.

Quel que soit l'intérêt de ce problème, sa solution serait loin de nous apprendre ce qui se passe dans les cas usuels où la matière ne reste plus isotrope, et où il se produit des déformations permanentes non uniformes. Imaginons, par exemple, une plaque circulaire comprimée lentement et uniformément suivant la normale à la base : la déformation est mesurée par la variation relative d'épaisseur. Ce cas correspond en gros à l'action du marteau, du marteau-pilon, à l'écrasement des crushers en balistique. Un corps ainsi déformé ne doit pas rester isotrope : c'est peut-être même une simplification trop grande de l'assimiler à un cristal à un axe parallèle à la pression, car rien ne prouve que ses propriétés soient les mêmes tout le long d'un rayon.

La densité peut varier d'une façon permanente pendant la déformation et reprendre sa valeur par le recuit. Mais, et c'est un point sur lequel nous voulons insister, si la densité pour un corps non isotrope est aussi bien définie que pour un corps isotrope, la variation de la densité est un effet complexe qu'il faut séparer au moins en deux autres : elle est due à des dilatations ou contractions permanentes qui s'opèrent parallèlement et normalement à la direction de compression, dilatations qui peuvent être inégales.

Les corps étirés en fils cylindriques, avec ou sans filière, se rattachent au même genre de symétrie. Il se peut de plus que, au moins dans le passage à la filière, les deux directions de l'axe du cylindre n'aient pas les mêmes propriétés : en d'autres termes, qu'il soit possible de reconnaître laquelle des extrémités d'un bout de fil est entrée première dans la filière.

La complication augmenterait pour les pièces laminées : car, même en les supposant homogènes, les trois directions dirigées normalement à la lame, tangentiellement dans le sens du mouvement, tangentiellement dans le sens normal au mouvement, n'ont pas nécessairement les mêmes propriétés.

Assurément, il pourrait se faire que le corps cessât d'être isotrope pour toutes ses propriétés élastiques et que cependant les contractions principales permanentes soient toutes trois ou très petites ou très peu différentes : il n'en est pas moins utile de poser le problème.

De l'anisotropie matérielle dans les fils.

Nous appelons *anisotropie matérielle* la distribution anisotrope de la matière. Si l'on veut s'en faire une image, on se figurera les particules disposées aux sommets d'un réseau dont les mailles ne seraient pas cubiques.

Soient L la longueur d'un fil, R son rayon, Δ la densité, p le poids de la masse invariable considérée, nous avons

$$p = \pi R^2 L \Delta, \tag{1}$$

que le corps soit isotrope ou non, pourvu qu'il soit homogène.

Pour savoir s'il est isotrope, il faut pouvoir ramener sa matière à un état isotrope de comparaison et déterminer les dilatations pendant cette transformation. Si les dilatations relatives sont égales dans tous les sens, c'est qu'elle était primitivement isotrope. Nous admettrons que le recuit, dans des conditions convenables, ramène à un état certainement isotrope.

Donc, pour savoir si le fil est resté isotrope pendant la déformation, on le recuira et déterminera les variations relatives $\frac{dR}{R}$ et $\frac{dL}{L}$: s'il était isotrope, elles seront égales.

Malheureusement, les mesures directes du rayon et de sa variation sont peu précises et d'ailleurs illusoires, à cause des irrégularités inévitables de la forme géométrique : on peut tourner la difficulté. Différentions (1), il vient

$$\frac{d\Delta}{\Delta} + 2\frac{dR}{R} + \frac{dL}{L} = 0. \tag{2}$$

L'isotropie exige

$$\frac{2\,dR}{R} = \frac{dL}{L}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{d\Delta}{\Delta} = -\frac{3\,dL}{L}.$$

Pour savoir si une déformation a rendu le fil anisotrope, nous sommes conduits à le recuire et à déterminer : 1° la variation relative de densité ; 2° la variation relative de longueur produite par le recuit.

La question de l'anisotropie matérielle des fils serait résolue déjà depuis 1835, si l'on pouvait avoir la moindre confiance dans les résultats de Baudrimont (*Ann. de Chim. et de Phys.*, t. LX). Ce physicien déterminait séparément les variations par le recuit des trois termes de l'équation (2); il ne trouvait pas zéro pour leur somme; ce qui prouve, l'équation étant indiscutable, qu'une des déterminations est illusoire; c'est celle de $\frac{dR}{R}$. Il indique, par exemple, le résultat suivant pour le platine: avant le recuit le fil raide avait $127\,\mu$ de diamètre, il en avait 190 après. Or, en répétant maintes fois l'expérience sur des fils de platine dont les diamètres étaient 100, 150 et $200\,\mu$, il m'a été impossible de distinguer au microscope un accroissement, qu'on ne pourrait pas méconnaître s'il était de 50 pour 100.

Ses mesures de $\frac{dL}{L}$ et $\frac{d\Delta}{\Delta}$ sont si contestables qu'elles ne méritent pas d'être discutées. La mesure de $\frac{dL}{L}$ est d'ailleurs extrêmement difficile malgré les apparences. Car il faut tendre le fil, déterminer la première partie de sa courbe de traction. S'il était rectiligne dès les plus petites charges, ce serait une droite : au contraire, c'est une courbe qui se raccorde plus ou moins loin à la droite théorique, suivant que le fil se rectifie plus ou moins facilement. On n'est même jamais sûr d'arriver à la partie rectiligne, avant que le fil se déforme d'une façon permanente. En somme, on rencontre, dans la mesure de la longueur du fil et de ses variations, les difficultés que nous avons signalées dans le Chapitre précédent à propos de la mesure de la constante de traction. Tout ce qu'il est possible d'affirmer, et ce sont, d'ailleurs, les conclusions de Baudrimont, c'est que les allongements ou raccourcissements par le recuit sont extrêmement faibles, de l'ordre de $\frac{1}{10000}$ par exemple, et qu'on ne fera pas d'erreur sensible en les considérant comme nuls. Cette conclusion, même ainsi réduite, peut avoir, comme nous le verrons, une grande importance.

Passons à la détermination de la variation relative de densité $\frac{d\Delta}{\Delta}$.

Si l'on s'en rapportait aux Tableaux absurdes qui traînent dans tous les livres, on pourrait s'imaginer que la densité est une propriété extrêmement variable de la matière. L'*Annuaire du Bureau des Longitudes* nous apprend, par exemple, que le fer fondu a 7,20 pour densité, tandis que le fer forgé admet 7,79, soit une variation de $\frac{1}{12}$: M. Caron, faisant l'expérience avec beaucoup de soin, trouve pour le fer fondu dans l'hydrogène 7,88 et pour le fer forgé 7,87 : nous voici loin des premiers nombres. Plus on apporte de soin aux déterminations, plus les différences sont petites. Car il faut faire une distinction importante : des impuretés presque inaccessibles à l'analyse chimique peuvent modifier profondément la densité, tandis que des actions mécaniques considérables la laissent presque invariable. Il faut donc étudier un échantillon d'un métal comme s'il était unique au monde, et considérer que les Tables numériques se rapportant à des corps soi-disant purs ne donnent que de grossières approximations.

Voici ce que disent les auteurs qui ont étudié ce sujet le plus récemment et avec le plus de soin, Tomlinson (*Phil. Trans.*, 1833), Gray (*Proceed. of the Royal Soc.*, t. LIV).

Un allongement direct sans filière diminue la densité. D'après Tomlinson, un allongement de 25 pour 100 fait passer la densité du cuivre de 8,820 à 8,781; d'après Gray elle passerait de 8,861 à 8,819.

Le martelage diminue la densité de certains métaux, augmente celle des autres; la densité du cuivre passerait de 8,866 à 8,875.

Pour la torsion permanente, Tomlinson indique une petite diminution, Gray une augmentation notable; pour 2,3 t. c., la densité passerait de 8,850 à 8,896.

Enfin, par le passage à la filière, il y aurait une forte augmentation de 8,85 à 9,00, soit $\frac{1}{60}$.

Ces expériences sont-elles concluantes? Ont-elles la précision que leur prêtent leurs auteurs? Ce n'est guère probable.

Les résultats trouvés ne sont valables que pour l'échantillon employé. Lord Kelvin avait opéré sur du fil de cuivre dont la densité croissait par l'allongement sans filière, et, pour leur cuivre, les auteurs cités ont des conclusions différentes au sujet de l'effet de la torsion permanente.

Tandis que Tomlinson donne des Tableaux indiquant la variation de densité en fonction des déformations (page 108 de son Mémoire) et admet qu'elle peut se représenter par une droite, Gray, qui est plus récent, trouve qu'elle est trop irrégulière pour qu'on puisse donner autre chose que sa valeur initiale et sa valeur finale.

Je ferai aux auteurs des objections plus graves, et pour ainsi dire, de principe:

1° La densité est une propriété de la matière pouvant servir à déterminer son état en tous les points d'une courbe de déformation. Or si les physiciens cités prennent des précautions dans sa mesure, ils n'en prennent aucune dans la définition de la courbe de déformation aux divers points de laquelle ils la font. Le renseignement que le fil a traversé trois trous d'une filière, ou s'est allongé de 10 pour 100 sans filière, ne paraît pas suffisant.

2° Les auteurs ne semblent pas se douter que la matière peut devenir anisotrope. Si, par l'étirage à la filière, la densité augmente de $\frac{1}{60}$ et si la matière reste isotrope, le recuit doit accroître la longueur de $\frac{1}{3}$ de cette fraction soit $5^{mm},5$ par mètre. Ce serait facile à constater expérimentalement, ils n'ont pas cherché à le faire.

3° Enfin, et c'est là l'objection la plus grave, ils ne contrôlent jamais leurs résultats en recuisant le fil. Pour mieux dire, Gray le fait une fois, et la conclusion qu'on doit tirer de cette expérience unique jette le doute sur tout le reste.

(Page 287 de son Mémoire) : « *Recuit.* — Le fil dont on s'était servi dans l'expérience précédente (il s'agit de la torsion permanente qui avait fait varier la densité de 8,850 à 8,896, soit de 0,52 pour 100) était porté au rouge blanc (*sic*) par un courant, pour chercher si, par ce moyen, la densité pourrait être ramenée à sa valeur initiale. Mais le recuit ne semble pas altérer la densité d'une manière appréciable; la différence n'excède pas 0,1 à 0,06 pour 100. »

Si la densité qui a subi une variation par un traitement mécanique ne reprend pas sa valeur par un recuit convenablement fait, on est en droit de se demander si les expériences ne présenteraient pas des causes d'erreurs cachées, de crainte d'être conduit à des conclusions tout à fait inadmissibles.

Dans une autre expérience, Gray trouve que la densité, qui augmente d'abord, comme nous l'avons vu, quand on fait passer le fil à la filière, diminue ensuite quand le nombre des passes augmente. Il attribue ce fait à des gerçures dans le métal. Mais une telle explication s'applique tout aussi bien à la diminution de densité produite par l'étirage sans filière. Ici encore la vérification par le recuit était indispensable.

Quoi qu'il en soit, il est certain que les variations de la densité sont petites et ne dépassent pas quelques millièmes : or la mesure de la densité est une opération très délicate, même par la meilleure méthode que nous ayons, celle de la balance hydrostatique. Si l'on ne dispose que de 2^{gr} ou 3^{gr} de matière, pour obtenir le millième il faut certifier la pesée dans l'eau à $0^{mgr},2$ ou $0^{mgr},3$ près, et cela dans des conditions particulièrement défavorables. Si l'on ne fait pas bouillir l'eau, il faut, pour enlever les bulles, donner au fil une forme géométrique simple (hélice régulière), ce qui limite beaucoup la longueur et, par conséquent, le poids du fil qu'on peut employer. Si on la fait bouillir (ce qui est légitime, car l'expérience directe montre que le cuivre, par exemple, ne se recuit pas sensiblement quand on le porte quarante-huit heures à 100^{o}), l'expérience est d'une longueur insupportable.

Pour ces raisons, tout en reconnaissant l'intérêt de son étude, nous ne croyons pas qu'on puisse prendre la densité pour une des propriétés propres à caractériser l'état du fil aux divers points d'une courbe de déformation. Il semble qu'on ne puisse cependant pas s'en passer pour corriger les valeurs des autres constantes caractéristiques : la difficulté est facile à tourner, comme l'a montré Matthiessen, il y a déjà longtemps.

Introduction dans les constantes de la masse au lieu du volume.

Les constantes physiques sont souvent définies par unité de volume : elles le seraient toujours plus commodément par unité de masse.

Soit, par exemple, la résistance électrique; l est la longueur du fil, ρ la résistance spécifique, R le rayon, δ la résistance totale; on a

$$\delta = \frac{\rho l}{\pi R^2}. \tag{1}$$

Multiplions haut et bas par la densité et posons $\rho\Delta = \rho'$, il vient

$$\delta = \frac{\rho' l}{M}; \tag{2}$$

M est la masse de l'unité de longueur.

Pour une matière donnée ρ' est tout aussi bien défini que ρ, et d'une manière tout aussi rationnelle sinon plus. Matthiessen a fait observer qu'il résulte de l'emploi de la formule (2) des déterminations plus commodes et plus précises que celles que la formule (1) rend nécessaires. Pour déterminer la résistance d'un bout de fil par la formule (2), il suffit, connaissant ρ', de mesurer la longueur l et de prendre par pesée la masse totale Ml.

On élimine ainsi complètement la question de la densité. Déformons un fil : nous aurons à déterminer, d'après la formule (1), à la fois les variations du coefficient ρ et les variations de la densité qui nous est nécessaire pour calculer le rayon; d'après la formule (2) nous n'avons plus à connaître que les variations du coefficient ρ' qui englobe les deux effets; mais la mesure de ces variations n'implique en aucune façon la mesure de la densité.

La même transformation peut être faite pour les constantes élastiques

$$\Phi = \pi R^2 E = \pi R^2 \Delta \frac{E}{\Delta} = M\Phi',$$

$$\Gamma = \frac{\pi}{2}\mu R^4 = \frac{\pi^2 R^4 \Delta^2}{2\pi}\frac{\mu}{\Delta^2} = \frac{M^2}{2\pi}\Gamma'.$$

La détermination des nouvelles constantes Φ', Γ', ρ' n'exige plus qu'une pesée dans l'air.

Il ne faudrait pas croire qu'il y a là une sorte d'escamotage : bien des constantes physiques sont définies dans ce système, comme, par exemple, toutes les chaleurs spécifiques et de transformation.

D'ailleurs, les nouvelles constantes, qui nous serviront uniquement, ne diffèrent des autres que par l'introduction d'un facteur presque constant, mais dont on serait très embarrassé pour donner à chaque instant la valeur exacte.

Détermination de la cohérence.

Outre les constantes élastiques Φ', Γ' et les autres constantes de nature quelconque, mais satisfaisant à la condition que leur détermination n'implique pas un changement d'état, on peut chercher comment caractériser la cohérence. La description de petits cycles de torsion le permet : nous renvoyons pour la définition de la mollesse à un Mémoire antérieur (*Ann. de Chim et de Phys.*, 1898).

Transformations permanentes et déformations temporaires.

Reprenons l'exemple du fil soumis à une charge qui croît proportionnellement au temps. Si l'on étudie le métal pendant la déformation même, ou après avoir ramené la charge à être nulle, les résultats seront différents. Une déformation temporaire se superpose dans le premier cas à une transformation permanente. La première peut être considérée, au moins comme première approximation, comme ne dépendant que de la tension actuelle; la seconde dépend de toutes les tensions antérieures. Il faudra soigneusement distinguer dans l'effet total ce qui est dû à l'une et à l'autre.

Nous étudierons dans le prochain Chapitre la courbe de traction à charge croissant proportionnellement au temps.