ESSAI

SUR

LES SÉRIES DIVERGENTES,

PAR M. M. SERVANT.

Introduction et analyse des principaux résultats obtenus.

1. Les séries divergentes ont de tout temps attiré l'attention des géomètres; d'abord, ceux-ci les employèrent sans se préoccuper de leur convergence; ils arrivaient ainsi souvent à des résultats exacts, mais cette méthode ne présentait évidemment aucune rigueur.

Sous l'influence d'Abel et de Cauchy, cet emploi des séries divergentes cessa complètement et c'est seulement depuis une quinzaine d'années que cette question vint de nouveau préoccuper les géomètres. Nous citerons d'abord les Mémoires de Stieltjes (1) et de M. Poincaré (2) qui montrèrent l'importance que pouvaient acquérir en Analyse les séries asymptotiques, employées jusqu'alors en Astronomie seulement. Dans une voie différente, plusieurs mathématiciens [Halphen (3), Laguerre (4), Stieltjes (5)] avaient rencontré des exemples singuliers où, une série entière étant divergente, la fraction continue correspondante était convergente; M. Padé (6) reprit cette question et établit la possibilité de définir, dans certains cas, une fonction par une série divergente entière. Il faut rattacher à ces recherches sur les séries divergentes le Mémoire de M. Hadamard (7), sur le calcul des points singuliers d'une fonction définie par une série de Taylor et celui de M. Fabry (8) sur le même sujet.

---

(1) Stieltjes, Thèse de Doctorat; 1886.
(2) Poincaré, *Sur les intégrales irrégulières* (*Acta mathematica;* 1886).
(3) Halphen, *Fonctions elliptiques.*
(4) Laguerre, *Œuvres*, t. I.
(5) Stieltjes, *Mémoire sur les fractions continues* (*Annales de Toulouse;* 1894-1895).
(6) Padé, *Acta mathematica;* 1894.
(7) Hadamard, Thèse de Doctorat; 1892.
(8) Fabry, *Annales de l'École Normale;* 1896.

Le premier de ces Travaux renferme, du reste, un résultat important, au point de vue de la sommation des séries divergentes ; en effet, l'auteur donne une méthode pour calculer la valeur de la fonction sur le cercle de convergence dans des cas étendus.

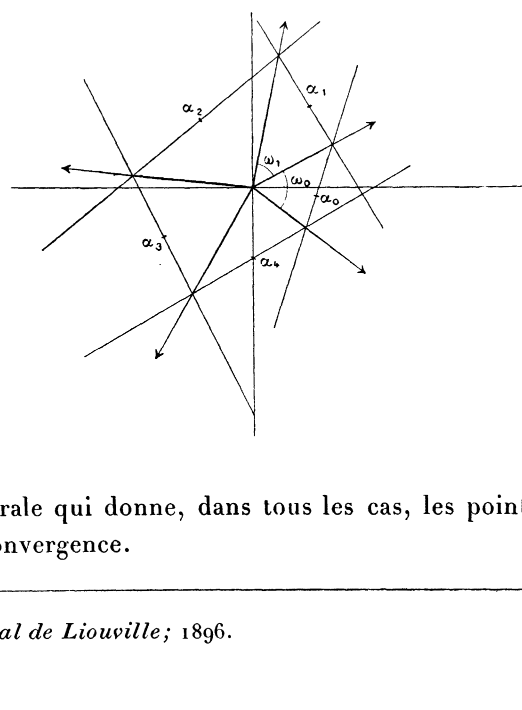
Dans ces dernières années, M. Borel (1) a été plus loin ; il est parvenu à sommer une fonction donnée par un développement de Taylor dans une aire plus étendue, comprenant le cercle de convergence ; et la méthode employée est susceptible de beaucoup d'applications.

2. Dans ce Mémoire, nous nous proposons d'étudier le problème suivant :

Une fonction analytique étant définie par une série convergente dans une certaine aire, étudier les propriétés de cette fonction dans tout son domaine d'existence ; calculer ses points singuliers, ses zéros et la valeur numérique de la fonction en un point quelconque.

3. Nous étudierons d'abord les séries de Taylor et, dans le premier Chapitre, nous chercherons à déterminer leurs points singuliers, à l'aide des coefficients du développement. Nous établissons d'abord une formule pour le calcul des pôles, des points critiques algébriques, des points logarithmiques, etc., puis ensuite,

Fig. 1.



une formule générale qui donne, dans tous les cas, les points singuliers, situés sur le cercle de convergence.

---

(1) Borel, *Journal de Liouville* ; 1896.

Considérons, en effet, une série de Taylor de rayon de convergence fini non nul

$$(1) \qquad f(z) = \sum c_n z^n.$$

Supposons que ses points singuliers α_0, α_1, ... soient disposés sur le *polygone de sommabilité,* comme l'indique la *fig.* 1.

Formons alors l'expression

$$\mathrm{E}(az) = \sum_1 \frac{c_n a^n z^n}{n!}.$$

Si le point z est dans l'angle ω_0, on aura

$$\text{Partie réelle...} \left(\frac{z}{\alpha_0}\right) = \lim_{a=\infty} \frac{\frac{\partial}{\partial a}\mathrm{E}(az)}{\mathrm{E}(az)},$$

formule qui permettra de calculer le point α.

On peut ainsi calculer, en particulier, tous les points singuliers, situés sur le cercle de convergence, et, par conséquent, par la méthode du prolongement analytique, on pourrait calculer de proche en proche tous les points singuliers de la fonction définie par la série (1).

Nous donnons, ensuite, diverses propositions qui permettent, dans bien des cas, d'abréger les calculs et d'éviter le prolongement analytique.

Nous montrons ensuite comment, par une généralisation facile d'un théorème de M. Hadamard, on peut utiliser les résultats obtenus dans le cas des séries entières pour le calcul des points singuliers d'autres développements. Cette généralisation est la suivante :

Si les points singuliers de la série

$$\sum u_n(z)\lambda^n,$$

où λ *est un paramètre, sont donnés par*

$$z = \varphi_\nu(\lambda) \qquad [\nu = (1, 2, \ldots)],$$

les points singuliers dans le plan de la fonction

$$(1) \qquad \sum c_n u_n(z),$$

seront donnés par la formule

$$z = \varphi_\nu\left(\frac{1}{\alpha}\right) \qquad [\nu = (1, 2, \ldots)],$$

où les α sont les points singuliers de la fonction

$$\sum c_n t^n.$$

Dans le cas particulier d'un développement en série de polynomes de Legendre, on a la formule simple pour les points singuliers

$$z = \frac{1}{2}\left(\alpha_i + \frac{1}{\alpha_i}\right).$$

4. Dans le second Chapitre, nous nous occupons de calculer la valeur numérique d'une fonction donnée par un développement de Taylor en un point où la série diverge, en nous servant seulement des valeurs numériques $u_n = a_n z_0^n$ des termes de la série en ce point, et nous étudions, à ce point de vue, des fonctions particulières.

Nous donnons d'abord plusieurs méthodes pour *sommer dans tout le plan une fonction rationnelle,* puis nous étendons la méthode aux *fonctions ayant des points critiques algébriques, des points logarithmiques,* etc.; une proposition, déduite du théorème de M. Hadamard déjà cité, permet d'étendre encore ces résultats; nous montrons enfin comment, par une méthode analogue, on pourrait étudier les séries non entières.

5. Les méthodes développées dans le premier Chapitre permettent de calculer facilement les zéros d'une fonction rationnelle ou même d'une fonction uniforme : par conséquent, si la fonction dont on a à sommer le développement de Taylor est la fonction inverse d'une fonction de cette nature, on aura avantage à calculer d'abord le développement de la fonction inverse, puis, ensuite, les zéros de celle-ci.

C'est cette question que nous étudions dans le troisième Chapitre, et nous montrons que l'*on peut faire ce calcul en connaissant seulement la valeur numérique des termes de la série donnée;* quand la fonction donnée est l'*inverse d'une fonction rationnelle,* on *pourra ainsi calculer toutes ses déterminations en un point donné,* sans employer la méthode du prolongement analytique; cette méthode permet aussi, dans certains cas, de sommer des fonctions de plusieurs variables.

6. Dans un quatrième Chapitre, nous reprenons la méthode de sommation donnée par M. Borel et nous montrons dans quelle aire elle permet de sommer; nous donnons ensuite plusieurs expressions analytiques de la fonction convergeant dans cette aire. Pour certaines fonctions uniformes particulières, on peut étendre beaucoup la région de sommabilité; nous arrivons à ce résultat en mo-

difiant légèrement la méthode de M. Borel, c'est-à-dire en faisant tendre le paramètre a vers $+\infty$ avec un argument quelconque.

7. Dans un cinquième Chapitre, nous cherchons à sommer les développements de Taylor à l'aide de la représentation conforme; cette méthode *permet de sommer la fonction en tous les points où elle peut être prolongée analytiquement,* et elle n'exige, comme les précédentes, *que la connaissance des valeurs numériques des termes de la série.*

8. Enfin, dans un sixième Chapitre, nous montrons comment ces résultats peuvent s'étendre à des séries plus générales et, en particulier, aux séries de polynomes.

CHAPITRE I.

CALCUL DES POINTS SINGULIERS D'UNE FONCTION DONNÉE PAR SON DÉVELOPPEMENT DE TAYLOR.

Dans ce premier Chapitre, nous nous proposons de donner une méthode pour le calcul des points singuliers d'une fonction définie par son développement de Taylor. Cette question a déjà été traitée dans des cas particuliers par MM. Hadamard (1) et Fabry (2); nous la traiterons d'une autre manière en employant une expression analytique introduite par M. Borel (3) et dont nous allons d'abord rappeler quelques propriétés.

1. Soit une fonction

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots,$$

où nous supposons le rayon de convergence fini et non nul.

Considérons l'expression

$$\mathrm{E}(az) = \sum \frac{c_n a^n z^n}{n!},$$

que M. Borel a appelée la *fonction entière adjointe;* c'est une fonction entière de a de genre 0 ou 1 telle que l'expression $e^{-a}\mathrm{E}(az)$ tende vers 0 quand a tend

(1) Hadamard, Thèse de Doctorat; 1891.
(2) Fabry, *Annales de l'École Normale*; 1895.
(3) Borel, *Journal de Mathématiques;* 1896.

vers l'infini par valeurs réelles et positives, toutes les fois que le point z est dans une certaine région nommée *polygone de sommabilité*. Cette région se détermine de la façon suivante :

On joint l'origine O aux différents points singuliers $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ de $f(z)$ et en ces points on élève des perpendiculaires aux droites $O\alpha_1$, $O\alpha_2, \ldots$; on supprime ensuite les régions du plan, limitées par ces droites, qui ne contiennent pas l'origine; la portion du plan restante est le polygone de sommabilité.

De même, si nous considérons la fonction

$$E_p(az) = \sum \frac{c_{pn} a^{pn} z^{pn}}{pn!},$$

on voit, de suite, que l'expression $E_p(az)$ tend vers o pour a, inséré quand z est dans un certain polygone analogue au précédent, mais dont les côtés sont des arcs de courbes que nous étudierons plus loin.

2. Supposons, en premier lieu, que la fonction $f(z)$ n'ait que des pôles sur le cercle de convergence et dans une certaine aire C comprenant celui-ci : on peut alors écrire la fonction

$$f(z) = \sum \frac{A_{m,\nu}}{(\alpha_\nu - z)^{m+1}} + \varphi(z),$$

$\varphi(z)$ étant holomorphé dans l'aire C'; on a alors, de suite, les coefficients c_n du développement de Taylor [1]

$$c_n = \frac{A_{m,0}}{\alpha_0^{n+m+1}}(n+1)\ldots(n+m) + \frac{A_{m-1,0}}{\alpha_0^{n+m}}(n+1)\ldots(n+m-1) + \ldots$$
$$+ \frac{A_{m,1}}{\alpha_1^{n+m+1}}(n+1) + \ldots + b_n,$$

où b_n est le coefficient d'ordre n du développement de $\varphi(z)$ en série de Taylor qui converge, par conséquent, dans un cercle de rayon plus grand; on aura alors facilement

$$E(az) = \frac{A_{m,0}}{\alpha_0} D_m \frac{z^m}{\alpha_0^m} e^{a\frac{z}{\alpha_0}} + \frac{A_{m-1,0}}{\alpha_0} D_{m-1} \frac{z}{\alpha_0^{m-1}} e^{a\frac{z}{\alpha_0}} + \ldots + \frac{A_{m_1}}{\alpha_1} D_m \frac{z^m}{\alpha_1^n} e^{a\frac{z}{\alpha_1}} + \ldots + E'(az),$$

où $E'(az)$ est la fonction entière adjointe de $\varphi(z)$.

Or, on a évidemment

$$D_p \frac{z^p}{\alpha^p} e^{a\frac{z}{\alpha}} = \varphi_p\left(\frac{az}{\alpha}\right) e^{a\frac{z}{\alpha}},$$

[1] Darboux, *Mémoire sur les fonctions* (*Journal de Mathématiques*, 3e série, t. II).

φ_p désignant un polynome de degré p; on peut alors écrire simplement

$$\mathrm{E}(az) = \sum \frac{\mathrm{A}_{m,\nu}}{\alpha_\nu} \varphi_m\left(\frac{az}{\alpha}\right) e^{a\frac{z}{\alpha_\nu}} + \mathrm{E}'(az).$$

3. Considérons alors la limite pour $a = +\infty$ de l'expression

$$\mathrm{E}(az)^{\frac{1}{a}},$$

et supposons pour cela que α soit tel que, dans l'aire C, on puisse déterminer z, de telle sorte que l'on ait les inégalités

(1) Partie réelle de ... $\left|\frac{z}{\alpha_\nu} - \frac{z}{\alpha_0}\right| < 0.$

(2) » » ... $\left|\frac{z}{\alpha_0} - 1\right| > 0.$

Je dis que la limite cherchée est alors $l^{\frac{z}{\alpha_0}}$; en effet, on peut écrire

$$\mathrm{E}(az)^{\frac{1}{a}} = e^{\frac{z}{\alpha_0}}\left[\sum \frac{\mathrm{A}_{m,0}}{\alpha_0}\varphi_m\left(\frac{az}{\alpha_0}\right) + \sum_{\nu=1}^{\nu=p}\frac{\mathrm{A}_{m,\nu}}{\alpha_\nu}\varphi_m\left(\frac{az}{\alpha_\nu}\right)e^{az\left(\frac{1}{\alpha_\nu}-\frac{1}{\alpha_0}\right)} + e^{-a\frac{z}{\alpha_0}}\mathrm{E}(az)\right]^{\frac{1}{a}}.$$

Or, à cause de (1), le second terme de la parenthèse tend vers 0; de même, on sait que $e^{-a}\mathrm{E}(az)$ tend vers 0 dans l'aire C; il en sera de même *a fortiori* de $e^{-a\frac{az}{\alpha_0}}\mathrm{E}(az)$ à cause de (2); il ne reste donc que le premier terme de la parenthèse; mais on voit de suite qu'élevé à la puissance $\frac{1}{a}$, il devient égal à 1 (quand a est très grand); on a donc l'égalité

$$\lim_{a=\infty}[\mathrm{E}(az)]^{\frac{1}{a}} = e^{\frac{z}{\alpha_0}}.$$

Il est à remarquer que cette égalité subsiste *indépendamment de l'inégalité* (2); c'est évident si l'on remarque que $e^{-\frac{az}{\alpha_0}}\mathrm{E}(az)$ est homogène en a et z; la limite ne dépend que de l'argument de z et nullement de son module.

4. Cherchons maintenant à interpréter géométriquement les inégalités (1); on les écrit de suite en séparant la partie réelle

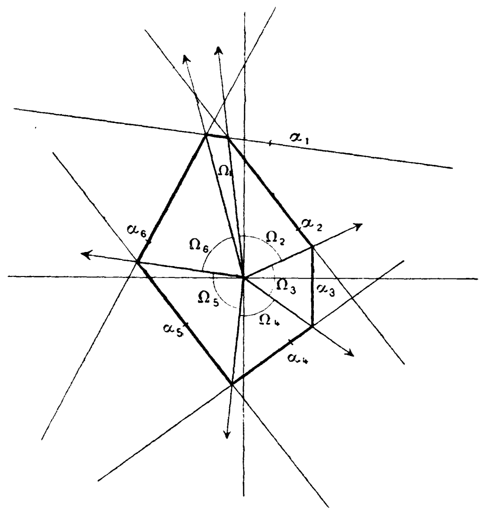
(1′) $\frac{\rho}{\mathrm{A}_i}\cos(\theta - \alpha_1) - \frac{\rho}{\mathrm{A}_0}\cos(\theta - \alpha_0) < 0,$

où l'on a posé

$$z = \rho e^{i\theta}, \qquad \alpha_i = \mathrm{A}_i e^{i\alpha_1}.$$

Pour avoir les lignes limitant les régions, il suffit de résoudre l'équation obtenue en égalant à zéro l'inégalité précédente; ce sont des droites passant par l'origine qu'il est facile de construire; en effet, on voit de suite qu'il suffit de joindre l'origine aux sommets du *polygone de sommabilité* de $f(z)$; si le

Fig. 2.



point z (*fig.* 2) est dans l'angle Ω_1 on obtiendra le point α_1; dans l'angle Ω_2, le point α_2, et ainsi de suite.

On pourra ainsi obtenir les points situés sur les côtés du polygone de sommabilité ou sur leurs prolongements, et ceux-là seuls.

5. La formule devient indéterminée quand on a, pour une ou plusieurs valeurs de ν,

$$\left|\frac{z}{\alpha_\nu} - \frac{z}{\alpha_0}\right| = 0.$$

Ceci arrive quand le point z est sur une des droites limitant les angles Ω.

On voit alors que l'argument de la limite devient indéterminé et l'*on ne peut plus calculer que le module;* on voit que ceci revient à connaître *le cercle passant par l'origine et les deux points singuliers pour lesquels l'égalité a lieu.*

On pourrait éviter cette indétermination en employant la fonction

$$E_p(az) = \sum \frac{c_{pn} a^{pn} z^{pn}}{n!}.$$

Il est facile de voir que l'on aura

$$\lim_{a=\infty}[E_p(az)]^{\frac{1}{a^p}} = e^{\frac{z^p}{\alpha_0^p}}.$$

Le point α_0 étant situé sur *une des courbes composant le polygone de sommabilité,* et z étant dans un des angles, convenablement choisi, défini par l'équation

$$\frac{1}{A_\nu^p}\cos p(\theta - \alpha_\nu) - \frac{1}{A_0^p}\cos p(\theta - \alpha_0) = 0,$$

on obtiendra par la formule précédente *tous les points singuliers situés sur le polygone de sommabilité, et ceux-là seuls;* du reste on n'aura pas ces points eux-mêmes, *mais leurs puissances $p^{\text{ièmes}}$.*

6. Par les formules précédentes, on a une méthode pour calculer les pôles situés sur le polygone de sommabilité; soient $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p$ ces pôles, la fonction

$$\left(1 - \frac{z}{\alpha_0}\right)^{m_1} \cdots \left(1 - \frac{z}{\alpha_p}\right)^{m_p} f(z)$$

n'aura plus ces points pour pôles, si les m ont été convenablement choisis, et alors, en opérant de la même façon, on obtiendra de nouveaux pôles de $f(z)$; il est bien évident que l'on pourra ainsi *obtenir tous les pôles situés dans le domaine de sommabilité de $f(z)$ relatif aux points singuliers qui ne sont pas des pôles;* on généralise ainsi un peu le résultat obtenu par M. Hadamard, qui calculait seulement les pôles contenus dans un cercle concentrique au cercle de convergence et où la fonction est régulière.

On peut évidemment procéder de même si l'on considère une fonction de la forme $E_p(az)$, et l'on a alors de suite la propriété suivante : *on peut calculer les puissances $p^{\text{ièmes}}$ de tous les pôles situés dans le domaine de sommabilité d'ordre p de $f(z)$ relatif aux singularités non polaires de cette fonction.*

On peut encore arriver à ces résultats par une autre méthode qui nous fera connaître en même temps des éléments importants de la fonction : à savoir les coefficients A et les degrés de multiplicité des pôles.

Supposons que le point α_0 soit le pôle de degré de multiplicité le plus élevé situé sur le cercle de convergence et que, de plus, il soit le seul de son degré; les formules données précédemment pour les coefficients donnent alors immédiatement

$$(1) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{2m}{(\alpha+1)\ldots(n+m)} \frac{a_n^2}{a_{2n}} = \frac{A_{m,0}}{\alpha_0^{m+1}},$$

on posera ensuite

$$a'_n = a_n - \frac{A_{m_0}}{\alpha_0^{m+n+1}}(n+1)\ldots(n+m),$$

et l'on trouvera de même

$$\lim \frac{2^{m-1} a_n'^2}{(n+1)\dots(n+m-1)\,a'_{2n}} = \frac{A_{m-1,0}}{\alpha_0^m},$$

si tous les pôles situés sur le cercle de convergence ont un degré de multiplicité inférieur à m. Si α_0 était seul pôle sur le cercle de convergence, on pourrait calculer ainsi de proche en proche tous les $\frac{A_m}{\alpha_\nu^{m+1}}$ ainsi que le coefficient m. Pour ce dernier, on peut le déterminer directement. On trouve, en effet, de suite, la formule

$$m = \lim_{n=\nu} \frac{2\log|a_n| - \log|a_{2n}|}{\log n} = \lim_{n=\nu} \frac{\log|a_n|}{\log n},$$

qui a été donnée par M. Hadamard.

On voit immédiatement, d'une façon analogue, que l'on a

$$\lim_{a=\infty} \frac{2^m \overline{E(a)}^2}{a^m E(2a)} = \frac{A_{m,0} z^m}{\alpha_0^{2m+1}},$$

si le point z est dans l'angle Ω_1, correspondant à α_0; si nous posons alors

$$E'(a) = E(a) - \frac{A_{m,0} z^m}{\alpha_0^{2m+1}} a^m,$$

on aura

$$\lim_{a=\infty} \frac{2^{m-1} \overline{E'(a)}^2}{a^{m-1} E'(2a)} = \frac{m A_{m,0} z^{m-1}}{\alpha_0^{2m}} \quad \frac{A_{m-1,0} z^{m-1}}{\alpha_0^{2m-1}},$$

et ainsi de suite; on voit que l'on pourra calculer de proche en proche les $\frac{A_m}{\alpha^{m+1}}$, pour le degré de multiplicité m; on aura de suite la formule

$$m = \lim_{a=\infty} \frac{2\log E(a) - \log E(2a)}{\log a} = \lim_{a=\infty} \frac{\log E(a)}{\log a}.$$

De ces formules, on peut déduire une méthode pour calculer les pôles situés extérieurement au polygone de sommabilité; en effet, la fonction $E'(a)$ de plus haut ne donne plus le pôle α_0 qu'au degré m; la fonction $E''(a)$, formée d'une façon analogue, ne le contiendra plus qu'au degré $m-1$, et ainsi de suite, on pourra former des fonctions $E^{(p)}(a)$ qui ne contiendront plus aucun des points singuliers $\alpha_0, \dots, \alpha_p$ et l'on aura alors ainsi une expression analytique propre à calculer les pôles situés extérieurement au polygone de sommabilité.

On aurait évidemment des formules et des résultats analogues si l'on considérait une fonction de la forme $E_p(a)$.

7. La formule

$$e^{\frac{z}{\alpha_0}} = \lim_{a=\infty} [\mathrm{E}(az)]^{\frac{1}{a}}$$

n'est pas la seule qui permette de calculer $\frac{z}{\alpha_0}$; on voit, en effet, de suite que l'on aura les formules

$$e^{\frac{z}{\alpha_0}} = \lim_{a=\infty} \frac{\mathrm{E}[(a+1)z]}{\mathrm{E}(az)},$$

$$\frac{z}{\alpha_0} = \lim_{a=\infty} \frac{1}{a} \log \mathrm{E}(az),$$

$$\frac{z}{\alpha_0} = \lim_{a=\infty} \frac{\frac{d\mathrm{E}(az)}{da}}{\mathrm{E}(az)},$$

dont les deux dernières sont d'une application plus simple.

8. Nous allons maintenant considérer d'autres cas où les points singuliers ne sont plus des pôles et nous allons montrer comment on peut généraliser les formules précédentes.

Considérons l'expression donnée par M. Hadamard dans sa thèse :

$$\varphi(z) = \int_0^1 \mathrm{V}(t) f(zt)\, dt,$$

on sait que la fonction $\varphi(z)$ a les mêmes points singuliers que la fonction $f(z)$ (sauf peut-être des coupures rectilignes qui n'influent pas ici). Si l'on pose

$$\Theta_n = \int_0^1 \mathrm{V}(t)\, t^m\, dt,$$

on aura

$$\varphi(z) = \sum c_m \Theta_m z^m,$$

si le développement de $f(z)$ est

$$f(z) = \sum c_m z^m;$$

il est alors bien évident que, si l'on désigne par $\varepsilon(az)$ l'expression

$$\varepsilon(az) = \sum \frac{\theta_m c_m a^m z^m}{m!},$$

on aura

$$\varepsilon(az) = \int_0^1 \mathrm{V}(t)\, \mathrm{E}(azt)\, \partial t.$$

Nous allons d'abord démontrer le théorème suivant :
Si l'on a

$$\lim_{a=\infty} \operatorname{mod} | \mathrm{E}(az) |^{\frac{1}{a}} = e^x, \tag{1}$$

on aura également

$$\lim_{a=\infty} \operatorname{mod} | \varepsilon(az) |^{\frac{1}{a}} = e^x. \tag{2}$$

En effet, si l'on a l'égalité (1), on peut évidemment poser

$$\mathrm{E}(az) = \psi(az)\, e^{ax+iay},$$

ψ étant une fonction telle que

$$\lim_{a=\infty} | \psi(az) |^{\frac{1}{a}} = s,$$

on aura alors

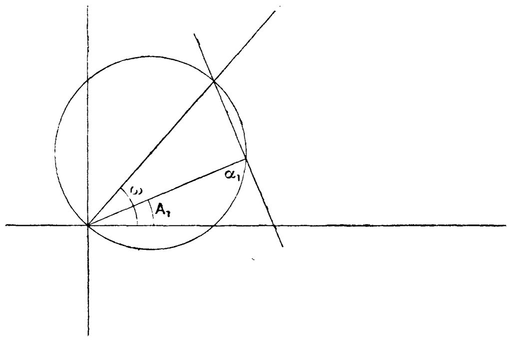
$$\varepsilon(az) = \int_0^1 \mathrm{V}(t)\, \psi(azt)\, e^{iayt}\, e^{axt}.$$

On peut appliquer ici la formule de M. Darboux et l'on aura de suite

$$\varepsilon(az) = \lambda \mathrm{V}(\xi)\, \psi(az\xi)\, e^{2ay\xi}(e^{ax} - s),$$

et l'égalité (2) devient alors évidente. Si la fonction $f(z)$ n'a que des pôles sur

Fig. 3.



le cercle de convergence, on aura évidemment dans les diverses régions Ω des égalités telles que (3) et l'on voit que la formule (2) nous fournira alors les quantités

$$x = \frac{\rho}{\mathrm{A}_1} \cos(\theta - \alpha_1).$$

Cette équation en A_1 et α_1 représente le cercle de la *fig.* 3 ; pour avoir une autre égalité permettant de déterminer complètement le point α_1, il suffit de considérer la limite

$$e^{x'} = \lim_{a=\infty} [(ae^{i\omega} z)]^{\frac{1}{a}},$$

où, ainsi qu'on le voit de suite, on a

$$x' = \frac{\rho}{A_1} \cos(\theta + \omega - \alpha_1),$$

ce qui donne un autre cercle analogue au précédent, sur lequel se trouve également le point $A_1 e^{i\alpha_1}$ et qui achève par conséquent de le déterminer; on voit donc que l'on peut énoncer la proposition suivante :

Si l'on peut calculer les points singuliers de $f(z)$ situés sur le polygone de sommabilité, on peut aussi calculer les points singuliers de la fonction $\varphi(z)$ définie par la formule

$$\varphi(z) = \int_0^1 V(t) f(zt)\, dt.$$

On aurait évidemment un résultat analogue, si l'on considérait une fonction $E_p(az)$; on verrait de même que l'*on pourrait obtenir les puissances $p^{\text{ièmes}}$ des points singuliers de $\varphi(z)$ si l'on peut les obtenir pour $f(z)$.*

9. Il serait facile de voir, en appliquant la formule précédente, que l'on obtiendrait ainsi les points singuliers de la forme

$$\frac{A}{\left(1 - \frac{z}{\alpha}\right)^{\omega_\nu + 1}},$$

ainsi que les points logarithmiques et leurs intégrales; il serait également bien aisé de voir que les formules du n° 6 qui permettent de calculer les A et les m subsistent ici; seulement, dans le premier cas, on trouvera pour ω un nombre fractionnaire, et dans le second un nombre négatif; nous pouvons donc de suite formuler une conclusion analogue à celle que nous avons donnée dans le cas où il n'y avait que des pôles :

On peut calculer les points logarithmiques, ceux qui en dérivent par intégration; les points critiques de la forme

$$\frac{A_\nu}{\left(1 - \frac{z}{\alpha}\right)^{\omega_\nu + 1}},$$

situés dans l'aire de sommabilité relative aux autres points singuliers de la fonction.

10. Examinons quelques autres cas rentrant dans la formule générale de plus haut, et où l'on peut pousser l'étude de la fonction aussi loin que dans le cas où il y a des pôles seulement.

Considérons, en effet, une fonction ayant des points singuliers de la forme

$$\varphi(z) = \int_0^1 \frac{V(t)}{1 - \frac{zt}{\alpha}} dt,$$

où l'on a

$$V(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n,$$

on aura

$$E(az) = \int_0^1 V(t) e^{\frac{azt}{\alpha}} = \sum_{p=0}^{p=n} a_p \int_0^1 t^n e^{\frac{azt}{\alpha}} = \sum_{p=0}^{p=n} a_p \alpha^p D_z^{(p)} \frac{\alpha}{z}\left(e^{a\frac{z}{\alpha}} - 1\right),$$

ou encore, en développant,

$$E(az) = \frac{\alpha}{az} e^{\frac{az}{\alpha}} \sum_{p=0}^{p=n} a_p \left[1 - \frac{p\alpha}{az} + \frac{p(p-1)\alpha^2}{a^2 z^2} + \ldots\right] - \alpha^{p+1} \sum \frac{a_p(-1)^p}{a^{p+1} z^{p+1}}.$$

Il est facile de voir que l'on aura, *en module et argument*,

$$\lim_{a=\infty} [E(az)]^{\frac{1}{a}} = e^{\frac{z}{\alpha}},$$

et de même

$$\sum_{p=0}^{p=n} a_p = \lim_{a=\infty} \frac{az}{2\alpha} \frac{\overline{E(a)}^2}{E(2a)},$$

si l'on pose alors

$$E'(a) - \frac{\alpha}{az} \sum a_p e^{a\frac{z}{\alpha}},$$

on aura d'une façon analogue

$$\sum_{p=0}^{p=n} pa_p = \lim_{a=\infty} \frac{a^2 z^2}{(2a)^2} \frac{\overline{E'(az)}^2}{E(2az)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\sum_{p=0}^{p=n} \frac{p(p-1)\ldots(p-q)}{(q+1)} a_p = \lim_{a=\infty} \left(\frac{\frac{az}{\alpha}}{\frac{2az}{\alpha}}\right)^{q+1} \frac{\overline{E^{(q)}(az)}^2}{E^q(2a)}.$$

On voit que l'on aura ainsi un système d'équations qui permettra de déterminer les a_p et, par conséquent, la fonction $V(t)$; on aurait eu un résultat analogue si la fonction $f(z)$ avait été une fraction rationnelle quelconque, et l'on voit de suite que *dans le cas où la fonction n'a, dans une aire de sommabilité, que des points singuliers de cette forme, on pourra les calculer comme précédemment.*

11. Supposons encore que la fonction $V(t)$ soit de la forme

$$V(t) = \sum a_m e^{mt},$$

on aura

$$\varepsilon(az) = \int_0^1 \frac{V(t)}{1 - \frac{zt}{\alpha}} dt = \sum a_m \frac{e^{m+\frac{az}{\alpha}} - 1}{m + \frac{az}{\alpha}}.$$

On voit de suite que l'on a, *en module et argument,*

$$\lim_{a=\infty} [E(az)]^{\frac{1}{a}} = e^{\frac{z}{\alpha}}.$$

D'autre part, on peut écrire $\varepsilon(az)$ sous la forme

$$\varepsilon(az) = \left(\frac{\alpha}{az} \sum a_m e^m - \frac{\alpha^2}{a^2 z^2} \sum_m a_m e^m + \ldots\right) e^{a\frac{z}{\alpha}} - \frac{1}{m + \frac{az}{\alpha}}.$$

On voit alors de suite que l'on a

$$\lim_{a=\infty} \frac{\overline{\frac{az}{\alpha}\varepsilon(az)}^2}{\frac{2az}{\alpha}\varepsilon(2a)} = \sum a_m l^m.$$

Si l'on pose ensuite

$$\varepsilon'(az) = \varepsilon(az) - \frac{\alpha}{az} \sum a_m l^{m+a\frac{z}{\alpha}},$$

on aura

$$\lim_{a=\infty} \frac{\overline{\left(\frac{az}{\alpha}\right)^2 \varepsilon'(az)}^2}{\frac{4a^2z^2}{\alpha^2}\varepsilon'(2a)} = -\sum m a_m l^m,$$

et ainsi de suite; on voit que l'on pourra former un nombre suffisant d'équations pour déterminer les a_n; elles seront de la forme

$$\left.\begin{array}{l} \sum a_n l^m = B_1 \\ \sum m\, a_n l^m = B_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum m^p a_n l^m = B_p \end{array}\right\} \qquad [m = (1, \dots, p)].$$

On en tirerait de suite en résolvant

$$a_m = \frac{1}{l^m} \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & B_1 & 1 \\ 1 & 2 & B_2 & p \\ 1 & 2^2 & \dots & . \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2^p & B^p & p^p \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & m & p \\ 1 & 2^2 & 3^2 & m^2 & . \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2^p & \dots & m^p & p^p \end{vmatrix}}.$$

On sera assuré que l'on a un nombre suffisant d'équations en écrivant que le déterminant des équations est nul

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & B_1 \\ 1 & 2 & 3 & p & B_2 \\ 1 & 2^2 & . & p^2 & \dots \\ . & \dots & . & \dots & \dots \\ 1 & 2^{p+1} & 3^{p+1} & p^{p+1} & B_{p+1} \end{vmatrix} = 0.$$

On aurait évidemment un résultat analogue en prenant pour $f(z)$ une fonction rationnelle quelconque et l'on voit que, encore dans ce cas, *on peut calculer les points singuliers dans le polygone relatif aux autres singularités.*

12. Considérons plus généralement une fonction

$$\varphi(z) = \sum a_n z^n,$$

et supposons qu'il existe une fonction $V(t)$ telle que si l'on pose

$$\Theta_n = \int_0^1 V(t)\, t^n\, \partial t,$$

la fonction

$$f(z) = \sum \frac{a_n}{\Theta_n}$$

soit dans une certaine aire une fonction n'ayant que des points singuliers de la nature de ceux envisagés précédemment. On pourra évidemment calculer, pour cette fonction $\varphi(z)$, les points singuliers situés sur le polygone de sommabilité, *et, de plus, si l'on peut déterminer* $V(t)$, tous les points singuliers situés dans l'aire où l'on peut calculer les points singuliers de $f(z)$.

En résumé, on voit que l'*on peut, par les méthodes qui précèdent, calculer* TOUJOURS *les points singuliers des fonctions de la forme*

$$\varphi(z) = \int_0^1 V(t) f(zt)\,\partial t$$

[où $f(z)$ est une fonction n'ayant que des pôles, dans une certaine aire comprenant le polygone de sommabilité], *qui sont situés sur les* CÔTÉS *de ce polygone de sommabilité et dans des cas étendus calculer des nombres qui permettent de calculer, de proche en proche, d'autres points singuliers de la fonction; en tous cas, la détermination de ces derniers points se ramène à la recherche de la fonction* $V(t)$.

13. Nous nous proposons maintenant de calculer les points singuliers situés sur le cercle de convergence dans le cas général.

Dans le Mémoire déjà cité, M. Borel a démontré que la condition nécessaire et suffisante pour que le point $z = 1$, situé sur le cercle de convergence, soit singulier était que l'on ait

$$\text{(1)} \qquad \limsup_{a=\infty} . e^{-a} \sum \frac{c_n a^n (1+\varepsilon)^n}{n!} \neq 0,$$

ε étant un nombre positif aussi petit que l'on veut.

Soit alors e^λ la limite supérieure pour a infini,

$$\text{(2)} \qquad e^\lambda = \limsup_{a=\infty} . [E(az)]^{\frac{1}{a}}.$$

Remarquons d'abord que l'on aura évidemment

$$e^{\rho\lambda} = \lim_{a=\infty} [E(a\rho z)]^{\frac{1}{a}},$$

ρ étant une quantité réelle.

Donnons alors à z, dans l'égalité (2), une valeur réelle et positive x, et supposons que l'on trouve alors $\lambda = x$. *Je dis que le point* $x = 1$ *est point singulier* (le rayon de convergence de la série étant l'unité). En effet, puisque ce point est sur le cercle de convergence, il faut et il suffit que l'inégalité (1) soit satisfaite; or, à cause de (2), pour les valeurs très grandes de a, $E(ax)$ se comporte comme e^{ax} et la proposition est alors évidente.

Inversement, je dis que si le point $x = 1$ situé sur le cercle est singulier, on a $\lambda = x$; en effet, supposons qu'il n'en soit pas ainsi et que l'on ait $\lambda = px$; supposons d'abord $p > 1$; on peut alors évidemment trouver un nombre ε tel que l'on ait

$$p(1-\varepsilon) - 1 > 0,$$

ce qui est absurde, car alors le rayon de convergence serait plus petit que 1; de même si $p < 1$, on peut trouver un nombre ε tel que

$$p(1+\varepsilon) - 1 < 0,$$

ce qui est contraire à l'inégalité (1).

Si, le rayon de convergence étant toujours égal à 1, c'est le point $e^{i\theta}$ qui est singulier, on aura un résultat analogue; en effet, pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit évidemment que l'on ait

$$\limsup_{a=\infty} .e^{-a}\,\mathbf{E}(ae^{i\theta}\varepsilon) \neq 0,$$

ε étant positif et plus grand que 1; on démontre alors absolument, comme précédemment, que l'on a

$$e^{\varepsilon} = \limsup_{a=\infty} .[\mathbf{E}(ae^{i\theta}\varepsilon)]^{\frac{1}{a}}.$$

Supposons maintenant que, 1 étant point singulier, nous cherchions la limite

$$\lim_{a=\infty} [\mathbf{E}(az)]^{\frac{1}{z}},$$

où l'on a

$$z = \varepsilon e^{i\theta},$$

l'angle θ étant petit.

Pour que le point 1 soit singulier, il faut et il suffit évidemment que l'on ait

$$\limsup_{a=\infty} .\,e^{-a}\,\mathbf{E}(a\varepsilon e^{i\theta}) \neq 0, \tag{1}$$

quand

$$\varepsilon\cos\theta - 1 > 0, \qquad \varepsilon > 0,$$

et pour les petites valeurs de θ, ainsi qu'on le voit de suite en se reportant au Mémoire de M. Borel. Or on voit facilement, en utilisant une remarque faite au début de ce paragraphe, que la limite cherchée doit être nécessairement de la forme

$$A\varepsilon,$$

A étant indépendant de ε; d'autre part, évidemment à cause de (1), il faudra que

$$A\varepsilon - 1,$$

soit de même signe que

$$\varepsilon \cos\theta - 1.$$

On en conclut de suite que

$$A = \cos\theta.$$

Par un raisonnement absolument analogue, on montrerait que si le point singulier est $e^{i\omega}$, on aura

$$A = \cos(\theta - \omega).$$

Donc, d'une façon générale, on voit que la formule

$$e^{\frac{\varepsilon}{A_i}\cos(\theta-\omega_i)} = \limsup_{a=\infty}.[E(az)]^{\frac{1}{a}}$$

permettra de calculer les points singuliers situés sur le cercle de convergence et même, ainsi qu'il est bien facile de s'en rendre compte, tous les points singuliers situés sur les côtés du polygone de sommabilité : les régions où doit se trouver z pour obtenir les différents points singuliers sont les angles Ω définis dans le cas des pôles.

On pourra également appliquer les formules

$$\frac{\varepsilon}{A_i}\cos(\theta - \alpha_i) = \lim_{a=\infty} \frac{1}{a}\log E(az),$$

$$\frac{\varepsilon}{A_i}\cos(\theta - \alpha_i) = \lim_{a=\infty} \frac{\frac{\partial}{\partial a}E(az)}{E(az)},$$

qui sont d'une application plus pratique.

14. De même, si nous considérons la limite

$$\lim_{a=\infty}[E_p(az)]^{\frac{1}{a^p}},$$

nous verrions de même qu'elle est égale à e^λ avec

$$\lambda = \text{partie réelle}\left|\frac{z^p}{\alpha_2^p}\right| = \frac{\varepsilon^p}{A^p}\cos p(\theta - \alpha),$$

α étant un point singulier situé sur le polygone de sommabilité relatif à la fonction

$$E_p(az);$$

cette formule permet aisément de déterminer les p sommets de la courbe de sommabilité relative au point α_i, c'est-à-dire, en somme, que cette formule nous permet de calculer α_i^p.

En résumé, on voit que l'on peut, par cette méthode, *calculer les points singuliers situés sur le cercle de convergence et sur le polygone de sommabilité relatif à* $E(a)$ *et les puissances* $p^{\text{ièmes}}$ *des points singuliers situés sur les polygones de sommabilité relatifs aux fonctions* $E_p(a)$.

15. Un résultat donné par M. Hadamard ([1]) permet encore de calculer les points singuliers dans quelques cas où ils ne seraient pas fournis par la méthode précédente. Ce résultat est le suivant :

Soient deux séries de Taylor

$$f(z) = \sum c_n z^n,$$

$$\varphi(z) = \sum \partial_n z^n.$$

La fonction

$$F(z) = \sum c_n \partial_n z^n$$

a pour points singuliers les points que l'on obtient en multipliant un point singulier de $f(z)$ par un point singulier de $\varphi(z)$.

Par conséquent, pour calculer les points singuliers d'une série

$$\sum a_n z^n, \tag{1}$$

on pourra commencer par décomposer le coefficient a_n en deux ou plusieurs facteurs c_n^1, c_n^2, ..., et la recherche des points singuliers de (1) sera alors ramenée à celle des points singuliers des diverses séries

$$\sum c_n^p z^n,$$

ce qui peut être plus simple.

16. Nous allons maintenant chercher à étendre les résultats obtenus dans le cas des séries entières, à des séries plus générales.

Considérons d'abord une série de la forme

$$F(z) = \sum_0 c_n \overline{Z(z)}^n, \tag{1}$$

où l'on a posé

$$Z = f(z).$$

([1]) *Comptes rendus;* 1897.

Soient α_0, α_1, α_2, ..., α_ν les points singuliers de la série

$$\sum c_n u^n.$$

Les points singuliers de (1) seront les racines des équations

$$f(z) = \alpha_\nu \qquad [\nu = (1, 2, \ldots)],$$

et l'on voit alors comment on parviendra à les calculer.

17. Plus généralement, considérons une série de fonctions

$$\sum u_n(z), \tag{2}$$

que nous supposons uniformément convergente dans une certaine aire connexe et formons la fonction de deux variables

$$\mathrm{F}(z, t) = \sum u_n(z) t^n.$$

Une telle fonction a pour singularités des lignes (1)

$$f_\nu(z, t) = 0 \qquad [\nu = (1, 2, \ldots)]. \tag{3}$$

Si l'on donne à z une valeur fixe z_0, ces égalités déterminent les points singuliers de la série entière $\mathrm{F}(z_0 t)$ en t ainsi formée; si, au contraire, on donne à t une valeur fixe t_0, on aura les points singuliers de la fonction $\mathrm{F}(z_1 t_0)$ en résolvant les équations précédentes par rapport à z; et en posant ensuite $t = 1$, on aura ainsi les points singuliers de la série (2). Supposons alors les équations (3) résolues par rapport à t,

$$t = \varphi_\nu(z) \qquad [\nu = (1, 2, \ldots)].$$

Si z a une valeur fixe z_0 cette formule fournira les points singuliers de la série

$$\sum u_n(z_0) t^n.$$

Considérons alors la série

$$\sum c_n u_n(z_0) t^n, \tag{4}$$

où les c_n sont tels que la série

$$\sum c_n y^n \tag{5}$$

---

(1) Ce qui suit serait en défaut, dans le cas où les f ne contiendraient que l'une des variables.

ait un rayon de convergence fini non nul, d'après le théorème de M. Hadamard cité précédemment, cette série (4) en t aura pour points singuliers les quantités

$$\alpha_i \varphi_\nu(z_0) \qquad [\nu, i = (1, 2, \ldots)],$$

où les α sont les points singuliers de (5).

On voit alors de suite que la fonction de z et t,

$$F_1(z, t) = \sum c_n u_n(z) t^n,$$

a pour singularités *les lignes*

$$t = \alpha_i \varphi_\nu(z) \qquad [\nu, i = (1, 2, \ldots)],$$

ou bien encore

$$f_\nu\left(z, \frac{t}{\alpha_i}\right) = 0;$$

en particulier, si l'on fait $t = 1$, on voit que l'on a le théorème suivant :

Si les singularités de la série

$$\sum u_n(z)$$

sont données par les équations

$$f_\nu(z, 1) = 0 \qquad [\nu = (1, 2, \ldots)],$$

les singularités de la série

$$\sum c_n u_n(z)$$

sont données par les équations

$$f_\nu\left(z, \frac{1}{\alpha_i}\right),$$

où les α sont les points singuliers de la série

$$\sum c_n y^n.$$

Ce théorème permettra, dans beaucoup de cas, de calculer les points singuliers d'une fonction définie par une série. Nous allons en donner quelques exemples.

18. Considérons une fonction définie par un développement de la forme

$$\sum c_n X_n(z),$$

où les X sont les polynomes de Legendre et supposons que cette série ne soit pas toujours divergente, et cherchons les points singuliers de la fonction $F(z)$ ainsi définie. On sait que l'on a

$$(1-2tz+t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum X_n(z)\,t^n;$$

les équations (3) se réduisent donc ici à

$$1-2tz+t^2=0,$$

si les points singuliers de

$$\sum c_n y^n$$

sont $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots$. On voit donc que l'on aura

$$1-\frac{2z}{\alpha_i}+\frac{1}{\alpha_i^2}=0 \qquad [i=(1, 2, \ldots)],$$

ou

$$z=\frac{1}{2}\left(\alpha_i+\frac{1}{\alpha_i}\right).$$

Ce sont là les points singuliers du développement donné ; donc :

Les points singuliers du développement

$$\sum c_n X_n(z) \tag{1}$$

sont donnés par la formule

$$z=\frac{1}{2}\left(\alpha_i+\frac{1}{\alpha_i}\right),$$

où les α sont les points singuliers de

$$\sum c_n y^n.$$

Cette formule nous amène à une remarque; on sait [1] que si les coefficients c_n de la série précédente sont *quelconques* et assujettis seulement à la condition que la série ait un rayon de convergence fini non nul r, ce cercle de convergence sera une coupure, ou, en d'autres termes, tous les points

$$y=re^{i\theta}$$

seront singuliers; on en conclut immédiatement que la série (1) aura pour points singuliers tous les points

$$z=\frac{1}{2}\left(re^{i\theta}+\frac{e^{-i\theta}}{r}\right),$$

---

[1] Borel, *Comptes rendus;* 1896. — Fabry, *Annales de l'École Normale* et *Comptes rendus;* 1896.

c'est-à-dire que la fonction représentée par cette série aura comme coupure la courbe

$$x = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta,$$

$$y = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta,$$

qui est précisément l'ellipse dans laquelle converge le développement (1). Or cette proposition est évidemment générale et s'applique à tous les développements considérés précédemment et l'on peut, par conséquent, énoncer le théorème suivant :

Si les c_n sont assujettis à la seule condition que la série

$$\sum c_n t^n$$

ait un rayon de convergence fini non nul, la série

$$\sum c_n u_n(z)$$

admettra son domaine de convergence comme coupure.

Toutefois ce théorème n'est pas aussi général que celui de M. Borel relatif aux séries de Taylor, car le théorème de M. Hadamard, ainsi que cela est évident, donne les points singuliers *possibles* de la fonction

$$F(z) = \sum c_n d_n z^n;$$

il peut arriver que les points ainsi trouvés soient des points ordinaires pour $F(z)$. Néanmoins M. Borel a démontré tout dernièrement que tous les points fournis par l'application de la méthode de M. Hadamard étaient, en général, des points singuliers, ce qui justifie donc notre proposition. Il serait facile, en particulier (en s'appuyant sur les résultats donnés par M. Borel dans le Mémoire cité), de montrer que le théorème est exact pour les séries de polynomes de Legendre.

19. Considérons maintenant une série de fonctions uniformes

$$\sum u_n(z).$$

Si les fonctions $u_n(z)$ n'ont aucun rapport entre elles, on verra facilement, par des considérations analogues aux précédentes, que la série admet son domaine de convergence comme coupure; donc, en général, une série de fonctions uniformes définit une fonction uniforme qui n'existe que dans son domaine de convergence, si l'on se borne au point de vue de Weierstrass. Ce fait, bien évident, augmente encore l'intérêt des tentatives faites par M. Borel et, tout dernièrement, par MM. Fabry et Picard, pour prolonger une fonction au delà d'une ligne singulière.

20. Les méthodes exposées précédemment peuvent encore être employées à la recherche des singularités des séries de plusieurs variables. En effet, si l'on ordonne une telle série par rapport aux puissances croissantes d'une des variables, les autres étant considérées comme des paramètres, les formules données précédemment donnent une expression implicite des singularités, et, en tout cas, on peut obtenir autant de points que l'on veut de celle-ci; de plus, le théorème de M. Hadamard peut permettre, dans un grand nombre de cas, de ramener les singularités de deux séries les unes aux autres; signalons, en particulier, les exemples suivants :

$$f(z, t) = \sum c_n z^n t^n,$$

où z est imaginaire, et t réel; on voit de suite que la série converge à l'intérieur de la surface de révolution engendrée par une hyperbole ayant les axes des x et des z comme asymptotes et tournant autour de cet axe des z; on voit aussi que les singularités de cette fonction sont des hyperboles équilatères ayant l'origine pour centre.

On trouverait de même les singularités de la fonction

$$f_1(t, t) = \sum c_n X_n(t) z^n \qquad (t \text{ réel}),$$

où les X_n sont les polynomes de Legendre; ce sont également des coniques.

Le théorème de M. Hadamard permet de ramener le calcul des points singuliers de la série

$$\sum \frac{z^n}{P_n(t)},$$

où les P sont des polynomes de degré fini, à celui du calcul des points singuliers de séries de la forme

$$\sum \frac{t^n}{t - \alpha_n},$$

ce qui est facile dans beaucoup de cas; en particulier, si $\alpha_n = n$, ou $\alpha_n = \alpha n$.

On pourrait, comme dans le cas des séries de Taylor, chercher à pousser plus loin cette étude, en particulier étudier la nature des singularités de la série; on y parviendrait par des méthodes analogues qui exigeraient, du reste, des développements étendus.

CHAPITRE II.

Dans ce Chapitre, nous allons appliquer les résultats obtenus précédemment au calcul de la valeur numérique d'une fonction donnée par un développement de Taylor.

1. Considérons une série

$$f(z) = \sum a_n z^n,$$

et supposons qu'elle n'ait que des pôles dans un certain cercle concentrique au cercle de convergence de rayon ρ. Dans sa Thèse, M. Hadamard a donné une méthode permettant de calculer les coefficients A d'un polynome

$$P_q(z) = 1 + A^{(1)} z + A^{(2)} z^2 + \ldots + A^{(q)} z^q,$$

tel que le produit

$$P_q(z) f(z)$$

soit holomorphe dans le cercle de rayon ρ.

La série

$$P_q(z) f(z) = \sum (a_n + A' a_{n-1} + \ldots + A^q a_{n-q}) z^n$$

est donc convergente dans le cercle de rayon ρ, et, par conséquent, on voit que l'on pourra calculer la valeur de $f(z)$ en un point intérieur à ce cercle de rayon ρ.

On peut remarquer que, pour faire ce calcul, il n'est pas nécessaire de connaître les coefficients a_n et la valeur de z, mais seulement les valeurs numériques $u_n = a_n z^n$. En effet, on voit de suite que, si, dans les formules de M. Hadamard, on remplace partout a_n par $u_n = a_n z^n$, on trouvera, au lieu de $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, ..., A^n, les quantités

$$A_1 = A^{(1)} z, \qquad A_2 = A^{(2)} z^2, \qquad \ldots, \qquad A_q = A^{(q)} z^q.$$

On aura, par conséquent,

$$P_q(z) f(z) = \sum (u_n + A_1 u_{n-1} + \ldots + A_q u_{n-q});$$

d'où l'on aura de suite

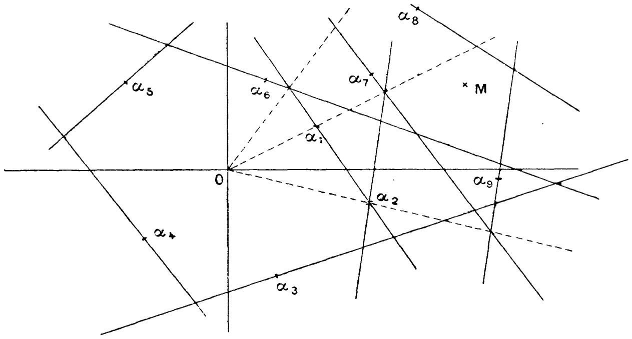
$$f(z) = \sum \frac{(u_n + A_1 u_{n-1} + \ldots + A_q u_{n-q})}{1 + A_1 + A_2 + \ldots + A_q}.$$

Ainsi donc, on a le théorème suivant :

On peut calculer la valeur numérique d'une fonction donnée par une série de Taylor dans tout cercle concentrique au cercle de convergence où cette fonction n'a que des pôles.

2. Nous allons maintenant reprendre cette question par une autre méthode qui nous conduira à un résultat un peu plus général (*fig.* 4).

Fig. 4.



Considérons la fonction $f(z)$; marquons dans le plan ses points singuliers et élevons en ces points des perpendiculaires aux droites qui les joignent à l'origine.

Considérons le point M de la figure; il est bien évident que, si les points singuliers α_1, α_2, α_6 et α_7 n'existaient pas, le point M serait à l'intérieur du polygone de sommabilité relatif à cette fonction, et l'on pourrait, par la méthode de M. Borel, calculer sa valeur en ce point.

Supposons alors que les points α_1, α_2, ..., α_6, α_7 soient des pôles, et formons l'expression

$$(1) \qquad \lim_{a=\infty} \frac{E'(a z_0)}{E(a z_0)},$$

où z_0 est l'affixe du point M. On voit de suite qu'elle est égale à

$$\frac{z_0}{\alpha_1}.$$

On pourra également, par les formules données précédemment, calculer le degré de multiplicité du pôle et les coefficients A; si nous considérons alors la fonction

$$f_1(z) = f(z) - \sum \frac{A_{m-1}}{(a-z)^m},$$

elle ne contiendra plus le pôle α_1.

En procédant de la même façon sur $f_1(z)$, on trouvera une fonction $f_2(z)$ qui n'aura plus α_6 pour pôle, et, en continuant ainsi, on parviendra à une fonction $f_n(z)$ qui n'aura plus aucun des points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_6$ et α_7 comme pôles; on pourra alors sommer cette fonction au point M, et l'on aura alors la valeur de f au point z_0 par la formule

$$f(z_0) = f_n(z_0) + \sum \frac{A_{m,\nu}}{(\alpha_\nu - z_0)^m}.$$

On a donc immédiatement le théorème suivant :

On peut calculer la valeur numérique d'une fonction donnée par son développement de Taylor dans le polygone de sommabilité relatif aux points singuliers de la fonction qui ne sont pas des pôles.

Il est, d'ailleurs, bien évident que, pour faire ce calcul, il n'est pas *nécessaire de connaître la forme analytique de la série,* mais *seulement la valeur numérique u_n des termes.*

Si le point M était sur une des droites Ω définies dans le premier Chapitre, la formule (1) ne donnerait que la partie réelle de $\frac{z}{\alpha_i}$; pour achever de déterminer cette quantité, il suffit de considérer la limite

$$\lim_{a=\infty} \frac{E(ae^{i\omega} z_0)\, e^{i\omega}}{L(a z e^{i\omega})}$$

qui est évidemment égale à

$$\frac{z_0 e^{i\omega}}{\alpha_1}.$$

3. On peut encore employer une autre méthode analogue à celle de M. Hadamard et qui n'exige pas la connaissance des coefficients A.

Remarquons d'abord que, si $E(a)$ est la fonction entière adjointe de $f(z)$, la fonction entière adjointe du produit $P(z)f(z)$ sera

$$P(D^{-1})\,E(az).$$

Calculons, comme précédemment, la quantité $\frac{z}{\alpha_1}$, et faisons la même opération relativement à la fonction $f(z)\left(1 - \frac{z_1}{\alpha_1}\right)$, et ainsi de suite; il arrivera un moment où la fonction ne contiendra plus le pôle α_1, et la formule (1) donnera alors comme limite $\frac{z_0}{\alpha_6}$; en continuant ainsi, on parviendra à *une fonction* $P(z)f(z)$ *qui ne contiendra plus aucun des pôles qui empêchent la fonction* $f(z)$ *d'être sommable au point* M; on pourra alors calculer sa valeur en ce point à l'aide de la méthode de M. Borel, et l'on en déduira de suite la valeur de $f(z)$.

4. Cette dernière méthode se généralise immédiatement au cas où l'on emploie les fonctions entières adjointes de genre p, et où l'on a

$$\lim \frac{1}{a^p} \log E_p(az) = \left(\frac{z_0}{\alpha_1}\right)^p,$$

et l'on a alors le résultat général suivant :

On peut calculer la valeur numérique d'une fonction $f(z)$ définie par son développement de Taylor dans tout polygone de sommabilité d'ordre p relatif aux points singuliers de la fonction qui ne sont pas des pôles.

Il est, d'ailleurs, bien évident que, dans ce calcul, on n'emploie que la valeur numérique des termes de la série.

5. Supposons maintenant que nous ayons à sommer le développement de Taylor d'une fonction $f(z)$ qui, dans une certaine aire C, comprenant le cercle de convergence, puisse s'écrire sous la forme

$$f(z) = \sum \frac{A_{\omega,\nu}}{(\alpha_\nu - z)^{\omega+1}} + \varphi(z),$$

$\varphi(z)$ étant holomorphe dans l'aire C. On pourra raisonner absolument comme au n° 2 dans le cas des pôles, calculer les $\frac{z}{\alpha_\nu}$, les

$$\frac{A_{\omega,\nu}}{\alpha_\nu^{\omega+1}}.$$

On formera alors, de proche en proche, les fonctions

$$f_1 = f - \frac{A_{\omega,\nu}}{(\alpha_\nu - z)^{\omega+1}},$$

$$f_p = f - \sum \frac{A_{\omega,\nu}}{(\alpha_\nu - z)^{\omega+1}},$$

et l'on parviendra ainsi à une fonction $f_p(z)$ *sommable dans le polygone de* *sommabilité relatif aux points singuliers qui ne sont pas de la nature des précédents, et l'on pourra, par conséquent, sommer $f(z)$ dans ce polygone.*

6. De même, considérons une fonction de la forme

$$f(z) = \sum A_\nu \psi_\nu(z) + \varphi(z),$$

où l'on a posé

$$\psi_\nu(z) = D^{-\nu} \frac{1}{\alpha_\nu - z},$$

le symbole $D^{-\nu}$ désignant une intégration répétée ν fois, et $\varphi(z)$ une fonction holomorphe dans une aire comprenant les α. Dans ce cas, on pourra également appliquer la méthode précédente, on calculera les $\frac{z}{\alpha_\nu}$, les A, et *l'on pourra sommer la fonction $f(z)$ dans le polygone de sommabilité relatif aux points singuliers de $f(z)$ autres que les α.*

7. Considérons encore une fonction dont les points singuliers dans une certaine aire soient de la forme

$$\psi_\nu\left(\frac{z}{\alpha}\right) = \int_0^1 \frac{V_\nu(t)}{1 - \frac{zt}{\alpha}},$$

où

$$V(t) = a_0 + a_1 + \ldots + a_p t^p.$$

Nous avons précédemment donné les formules permettant de calculer les a_i et le nombre p; on calculera les $\frac{z}{\alpha_\nu}$ par la formule ordinaire, et l'on voit que l'on peut ainsi *sommer dans toute aire de sommabilité où il n'y a que des points singuliers de cette forme.* On aurait une conclusion absolument analogue si l'on avait

$$V(t) = \sum a_n e^{nt},$$

et il serait facile de multiplier ces exemples.

8. D'une façon plus générale, si l'on sait, par l'un quelconque des procédés précédents, sommer la fonction $f(z)$, on pourra sommer dans la même aire la fonction

$$\varphi(z) = \int_0^1 V(t) f(zt)\, \partial t.$$

En effet, soit

$$\varphi(z) = \sum C_n z_n$$

le développement de cette dernière fonction ; on pourra trouver une fonction $V(t)$ telle qu'en posant

$$\Theta_n = \int_0^1 V(t)\, t^n\, \partial t,$$

la série

$$\sum \frac{C_n}{\Theta_n} z^n$$

soit le développement de $f(z)$. On voit donc que, *si l'on peut, par un procédé quelconque, déterminer* $V(t)$, *on calculera facilement l'intégrale*

$$\varphi(z) = \int_0^1 V(t) f(zt)\, \partial t$$

pour tout point z où l'on sait calculer $f(z)$.

9. Le cas traité dans le numéro précédent n'est qu'un cas particulier du suivant : Soit

$$f(z) = \sum C_n z^n,$$

$$\varphi(z) = \sum \partial_n z^n$$

et

$$F(z) = \sum C_n \partial_n z^n;$$

soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots$ les points singuliers de $f(z)$; $\beta_1, \ldots, \beta_i, \ldots$ ceux de φ; en partant de la formule de Cauchy, on démontre de suite la formule

$$F(z) = \int_c \frac{f(t)}{t} \varphi\left(\frac{z}{t}\right) \partial t,$$

où c est un contour simplement connexe comprenant l'origine et le point z, et tel que les points

$$t = \alpha_i \qquad [i = (1, 2, \ldots)],$$

$$t = \frac{z}{\beta_i} \qquad [i = (1, 2, \ldots)],$$

soient à l'extérieur de ce contour. Par conséquent, on voit de suite que, *si l'on sait trouver un contour répondant aux conditions indiquées et tel que l'on puisse sommer tout le long de ce contour, les fonctions $f(t)$ et $\varphi\left(\frac{z}{t}\right)$, on pourra calculer la valeur de $F(z)$ au point z considéré.*

10. Ces diverses propositions pourraient se généraliser facilement pour les séries non entières, et, à l'aide des propositions démontrées dans le Chapitre précédent, on obtiendrait, pour ces séries, des résultats semblables aux précédents et une méthode de sommation analogue.

CHAPITRE III.

LES RACINES DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES ET DES FONCTIONS ANALYTIQUES.

1. Considérons une fonction algébrique $u(z)$ définie par l'équation

$$f(u, z) = \varphi_0(z)\,u^n + \varphi_1(z)\,u^{n-1} + \ldots + \varphi_n(z) = 0,$$

et développons la fonction $\frac{1}{f}$ en série par rapport aux puissances croissantes de u; on aura

$$\frac{1}{f(u, z)} = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \ldots. \tag{1}$$

Considérons une valeur fixe z_0 de z, et soit $u_0(z_1)$ celle des déterminations de $u(z)$ qui a le plus petit module au point z_0. Si nous supposons que la détermination $u_0(z')$ soit *la seule de son module, la suite*

$$\frac{a_0}{a_1}, \quad \frac{a_1}{a_2}, \quad \ldots, \quad \frac{a_{n-1}}{a_n} \tag{2}$$

converge vers $u_0(z)$. Nous avons donc ainsi formé une série qui représente la plus petite détermination de $u(z)$ quand celle-ci est seule de son module. Or il est facile, connaissant les a_n, de calculer les autres déterminations de $u(z)$ au point z_0; il suffira de calculer les pôles de la série (1), ce que nous savons faire.

Nous voyons donc que *nous pouvons toujours sommer la suite* (2) *à l'aide des valeurs numériques des termes de* (2), *et nous avons ainsi un exemple remarquable de sommation de fonction non uniforme.*

2. Il en serait absolument de même si la fonction $f(u, z)$ était une fonction uniforme quelconque régulière à l'origine; la suite

$$\frac{a_0}{a_1}, \quad \frac{a_1}{a_2}, \quad \ldots, \quad \frac{a_{n-1}}{a_n}$$

représenterait la détermination de $u(z)$ de plus petit module (supposée unique), et, pour avoir les autres déterminations, il suffirait de calculer les pôles de la série

$$(3) \qquad a_0 + a_1 u + \ldots + a_n u^n + \ldots.$$

Si cette fonction n'a que des pôles à distance finie, on peut les calculer tous par les méthodes données précédemment; si cette fonction a des points essentiels, on parviendrait à trouver tous ces pôles en se servant de la méthode donnée et de celle du prolongement analytique.

Il en serait encore de même si la série (3) n'était pas uniforme dans tout le plan; par prolongements analytiques, on parviendrait à calculer tous ses infinis, c'est-à-dire toutes les déterminations de $u(z)$.

3. On est alors amené à la remarque suivante :

Considérons une fonction

$$u = f(z).$$

Calculer les diverses déterminations de u pour une valeur déterminée z_0 de z revient à calculer les zéros de la fonction

$$z_0 - \Phi(u),$$

où $z = \Phi(u)$ est la fonction inverse de

$$u = f(z).$$

Considérons alors un développement de Taylor

$$(1) \qquad u = f(z) = \sum c_n z^n,$$

et cherchons le développement

$$(2) \qquad z = \Phi(u) = \sum b_n u^n.$$

On le calcule aisément, à l'aide de la méthode des coefficients indéterminés. Supposons $c_0 = 0$, ce que l'on peut évidemment toujours faire; car, s'il en était autrement, on poserait

$$z' = z - c.$$

On a alors immédiatement

$$z = \sum b_n (c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots)^n;$$

d'où, en identifiant, en supposant $c_1 \neq 0$,

$$b_0 = 0,$$
$$b_1 c_1 = 1,$$
$$b_1 c_2 + b_2 c_1^2 = 0,$$

équations qui permettent de calculer les b de proche en proche et *d'une façon unique*.

Faisons de suite une remarque; on peut déterminer le développement (2) sans connaître la forme analytique de (1), mais seulement les valeurs numériques

$$u_n = c_n z^n$$

au point considéré. En effet, considérons le système d'équations

$$b'_0 = u_0 = 0,$$
$$b'_1 u_1 = 1,$$
$$b'_1 u_2 + b'_2 u_1^2 = 0.$$

Il est bien évident que l'on aura d'une façon générale

$$b'_i = \frac{b'_i}{z}.$$

Or, il est bien évident qu'au point de vue de la recherche des zéros, les fonctions

$$\sum b'_n z_0^n - 1 = 0$$

et

$$\sum b_n z_0^n - z_0 = 0$$

sont équivalentes.

Si la fonction

$$(1) \qquad z = \Phi(u)$$

est uniforme et n'a que des pôles à distance finie, on peut calculer tous ses zéros, ainsi qu'il a été montré plus haut, et, par conséquent, toutes les déterminations de la fonction

$$u = f(z);$$

si la fonction (2) était uniforme, mais avait des points essentiels ou des lignes singulières, la fonction

$$(3) \qquad \frac{1}{z_0 - \Phi(u)} = d_0 + d_1 u + \ldots + d_n u^n + \ldots$$

aurait ces mêmes singularités; dans ce cas, à l'aide du prolongement analytique, on pourra également parvenir à connaître tous les pôles.

De même, si la fonction $\Phi(u)$ n'était pas uniforme, on pourrait également parvenir à calculer ses zéros en prolongeant analytiquement la série (3). On peut donc énoncer le théorème suivant :

Le calcul des diverses déterminations d'une série de Taylor se ramène au calcul des infinis d'une fonction définie également par une série de Taylor; pour former cette série, il suffit de connaître les valeurs numériques des termes de la série primitive.

Toutefois, il faut remarquer que ce calcul n'est guère pratique que quand la fonction (2) est uniforme : on pourra donc ainsi sommer les séries de Taylor qui développent les intégrales elliptiques, les fonctions inverses des fonctions de Schwartz, etc.

4. Plus généralement, considérons une série de Taylor à plusieurs variables

$$(1) \qquad u = f(x_0 x_1 \ldots x_p) = \sum a_{n_1 n_2 \ldots n_p} x_0^{n_0} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_p^{n_p}.$$

Pour avoir toutes les déterminations de la fonction u en un point donné $x_{0_0} x_{1_0} x_{2_0} \ldots x_{p_0}$, il suffit évidemment de calculer tous les zéros de la fonction

$$(2) \qquad x_{0_0} = \varphi_i(x_{1_0} x_{2_0} \ldots x_{p_0} u)$$

obtenue en résolvant l'équation (1) par rapport à x_{0_0}. Supposons donc que la série (1), étant ordonnée par rapport à x_0, ait pour coefficients des séries convergentes ou que l'on puisse sommer; si la fonction u s'annule avec x_i et si le coefficient de x_i est différent de zéro, on sait que la fonction implicite (2) existe et est holomorphe aux environs de $u = 0$. On est, par conséquent, ramené, pour sommer la série (1), à sommer des séries à $(n-1)$ variables (les coefficients des x_i) et à calculer les infinis d'une série de Taylor; on voit donc facilement que l'on peut énoncer d'une façon générale le théorème suivant :

Le calcul des déterminations d'une série de Taylor à plusieurs variables se ramène au calcul des zéros de séries de Taylor à une variable.

Comme dans le cas d'une variable, ce calcul n'exige que la connaissance des valeurs numériques des termes.

CHAPITRE IV.

SOMMATION D'UNE SÉRIE DE TAYLOR A L'AIDE DE LA MÉTHODE DE M. BOREL GÉNÉRALISÉE.

Dans ce Chapitre, nous nous proposons de calculer la valeur numérique d'une fonction en un point du plan, à l'aide des valeurs numériques des termes de son développement de Taylor et cela dans des régions du plan aussi étendues que possible.

1. La méthode de M. Borel repose sur la considération de l'expression suivante

$$\theta(a) = e^{-a} \sum \frac{a^n S_n}{n!},$$

où S_n est la somme des n premiers termes de la série à sommer et a un paramètre réel; on démontre que la limite pour $a = \infty$ de cette expression coïncide avec la limite de S_n quand celle-ci existe, et avec son prolongement analytique dans le cas contraire. Le *domaine de sommabilité*, c'est-à-dire la région où $\theta(a)$ converge, se forme de la façon suivante :

On joint l'origine aux différents points singuliers de la fonction et l'on élève des perpendiculaires à ces droites à leurs extrémités; on supprime ensuite la partie du plan déterminé par chacune de ces droites qui ne contient pas l'origine; en faisant cette opération pour les différents points singuliers, on forme un polygone convexe à l'intérieur duquel $\theta(a)$ converge.

2. Considérons de même l'expression

$$\theta_p(a) = e^{-a^p} \sum \frac{a^{p_n}}{n!} S_{p_n}.$$

Elle jouira de propriétés analogues à la précédente; seulement son domaine de sommabilité sera différent; on voit de suite, en employant la même méthode [1], que l'aire de sommabilité se déduira de la précédente, en remplaçant les droites

$$\frac{\rho}{\alpha} \cos(\theta - \omega) = 1$$

---

[1] Borel, *Journal de Mathématiques;* 1896.

par les courbes

$$\frac{\rho^p}{\alpha^p}\cos p(\theta-\omega)=1,$$

où α et ω sont les coordonnées d'un point singulier.

On peut encore prendre comme fonction de sommabilité une fonction entière de la forme

$$\sum A_\nu e^{\alpha_\nu a},$$

ou, plus généralement,

$$\sum_{p\nu} A_\nu e^{\alpha_\nu a^{p'}},$$

l'aire de sommabilité est encore fournie par les courbes précédentes.

On peut aussi prendre la fonction

$$e^{\sqrt{a}}+e^{-\sqrt{a}}.$$

On a alors, comme aire de sommabilité, un polygone curviligne limité par les courbes

$$\left(\frac{\rho}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{\theta-\omega}{2}\right)=1,$$

c'est-à-dire par des paraboles ayant leurs sommets aux points α, ω et leurs foyers à l'origine.

Plus généralement, on peut considérer des fonctions de la forme

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=p} e^{C_\nu},$$

où l'on a

$$C_\nu^p - a^q = 0.$$

Le polygone de sommabilité est alors formé par les courbes

$$\left(\frac{\rho}{\alpha}\right)^{\frac{q}{p}}\cos\frac{q}{p}(\theta-\omega)=1.$$

On voit que ce cas comprend tous les précédents et est plus général puisque l'on peut donner à p et q toutes les valeurs entières. On peut trouver encore des fonctions de sommabilité donnant d'autres polygones, mais ce serait de peu d'intérêt.

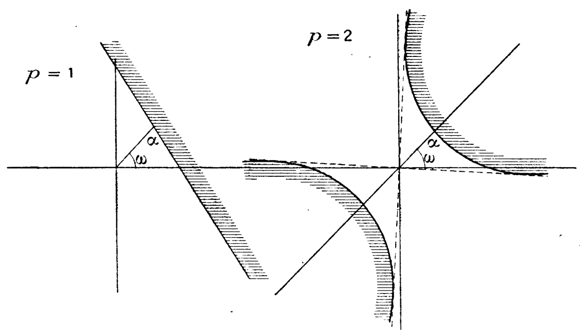
3. Voyons quelle est la forme de quelques-unes de ces courbes et particulière-

ment des courbes

$$\left(\frac{\rho}{\alpha}\right)^p \cos p(\theta - \omega) = 1.$$

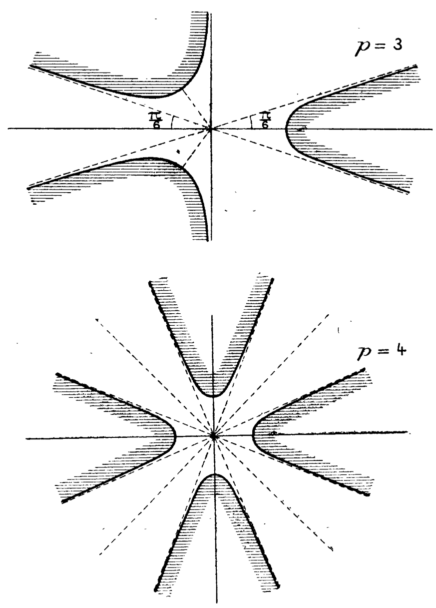
Si $p = 1$, on a une droite; si $p = 2$, on a une hyperbole équilatère de centre O et de sommet (α, ω) (*fig.* 5).

Fig. 5.



Si $p = 3$ ou $p = 4$, on a les courbes dont les formes sont ci-contre (*fig.* 6), et l'on se rend alors facilement compte de la forme générale de ces courbes.

Fig 6.



4. Cherchons maintenant dans quelles régions du plan les fonctions $\theta_1(a)$, $\theta_2(a)$, ..., $\theta_p(a)$, ... permettent de sommer la fonction.

Considérons les inverses de ces fonctions

$$\frac{1}{\theta_1(a)}, \quad \frac{1}{\theta_2(a)}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{\theta_p(a)}$$

et soient $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_p$ leurs polygones de sommabilité.

Si le point z est dans l'aire Γ_p, on aura évidemment

$$\lim_{a=\infty} \frac{1}{\theta_p(a)} = \frac{1}{S}.$$

Si z est en dehors de Γ_p, cette limite est nulle, il y a indétermination si le point z est sur le polygone limite.

Considérons alors l'expression

$$\lim_{a=\infty} \frac{\theta_1^{-1}(a) + \theta_2^{-1}(a) + \ldots + \theta_p^{-1}(a)}{\theta_1^{-2}(a) + \theta_2^{-2}(a) + \ldots + \theta_p^{-2}(a)}.$$

On voit de suite que, si le point z est à l'intérieur d'un ou plusieurs des polygones Γ, cette limite sera précisément égale à S; si, au contraire, z est sur une des courbes limites ou à l'extérieur de toutes ces courbes, la limite sera indéterminée. Nous avons donc ainsi formé une expression analytique qui converge, si seulement un des θ converge.

Il suffit d'examiner la forme des courbes Γ pour voir de suite que l'expression précédente convergera dans tout le plan, sauf dans une aire limitée par ceux des arcs de Γ_p qui passent par les points singuliers ainsi que sur les courbes Γ. On voit de suite, à l'aide de cette proposition, que l'on peut sommer dans tout le plan, sauf sur un ensemble de lignes, une fonction n'ayant que des points singuliers isolés; en effet, à cause de la forme des courbes Γ_p, on pourra toujours déterminer p de telle sorte que l'expression précédente converge au point z; il n'y aura exception que si z est sur les droites qui passent par l'origine et les points singuliers de la fonction ou sur une des courbes Γ. (On pourrait éviter le dernier cas d'exception en prenant d'autres fonctions de sommabilité qui auraient, par conséquent, d'autres courbes limites.)

5. La formule précédente subsiste si l'on prend une infinité de fonctions θ_p, à la seule condition de multiplier chaque terme par le terme correspondant d'une série convergente, la série e, par exemple; on aura donc ainsi

$$f(z) = \lim_{a=\infty} \frac{\sum \frac{1}{p!} \frac{1}{\theta_p}}{\sum \frac{1}{p!} \frac{1}{\theta_p^2}}.$$

Si la fonction $f(z)$ n'a que des points singuliers isolés, cette expression convergera dans tout le plan, sauf sur les courbes Γ. On a donc ainsi le théorème suivant :

Si une fonction n'a que des points singuliers isolés, on peut trouver une expression analytique la représentant et qui converge dans tout le plan sauf sur un ensemble dénombrable de courbes.

Si la fonction admettait des lignes singulières, il y aurait des aires où l'expression précédente divergerait. Il peut encore arriver que les points singuliers de la fonction forment un ensemble parfait discontinu, il y aurait lieu d'étudier à part ce cas.

L'expression précédente peut évidemment se mettre sous la forme du quotient de deux séries doubles; il suffirait de poser

$$U_{p,n} = \frac{1}{p!}[\theta_p^{-1}(n+1) - \theta^{-1}(n)],$$

$$V_{p,n} = \frac{1}{p!}[\theta_p^{-2}(n+1) - \theta_p^{-2}(n)],$$

et l'on aurait évidemment

$$f(z) = \frac{\sum\limits_{p,n} U_{p,n}}{\sum\limits_{p,n} V_{p,n}}.$$

6. Nous allons maintenant montrer que l'on peut d'une façon analogue trouver une expression analytique qui converge aussi sur les courbes Γ; en effet, considérons l'expression

$$\lim_{\substack{n=\infty \\ p=\infty}} \frac{\theta_1^{-1} + \theta_2^{-1} + \ldots + \theta_p^{-1} + \ldots}{p}.$$

Il est facile de voir que cette limite est égale à $\frac{k}{S}$ (k étant un facteur numérique compris entre o et 1) quand le point z est à l'intérieur des courbes Γ_1; si tous les θ_p, sauf un nombre fini d'entre eux, convergent au point z, on aura $k = 1$; si tous divergent, sauf un nombre fini, on aura $k = 1$. Si le point z est sur une des courbes Γ, la fonction correspondante θ_p est infinie ou indéterminée; dans le premier cas, il n'y a rien à dire, car l'expression (1) est convergente; dans le second cas, il est facile de voir qu'il en est de même, car on ne change évidemment pas la limite de (1) en modifiant un nombre fini des θ. On a donc le théorème suivant :

L'expression (1) *est convergente dans tout le plan, sauf :* 1° *sur les droites* α;

2° *aux points où il passe une infinité de courbes* Γ; 3° *aux points où il n'y a qu'un nombre fini de* θ *qui convergent.*

Il serait aisé d'éliminer le dernier cas.

7. On peut aussi considérer l'expression

$$\lim_{\substack{b=\infty \\ a=\infty}} e^{-b} \sum \frac{b^n}{n!} \frac{1}{\theta_n} = \frac{k}{S}.$$

Elle jouira exactement des mêmes propriétés que l'expression (1) et convergera dans le même domaine, on le voit en se reportant au Mémoire de M. Borel.

Il est facile de s'assurer que le nombre k est le même dans les deux cas; ce nombre dépend uniquement de la position des points singuliers de la fonction, et il exprime en quelque sorte (ainsi qu'on le voit de suite par la première définition) la probabilité pour qu'une fonction θ prise au hasard dans l'ensemble de ses analogues converge au point z considéré. On voit ainsi qu'à l'intérieur du cercle de convergence $k = 1$; aux points singuliers et sur les droites (α), $k = 0, \ldots$.

Si, au lieu de la suite θ_p, où les p sont des entiers, on prenait une autre suite, on aurait une définition analogue du coefficient k relatif à cette suite. De la formule (1) il est facile de déduire k et S : il suffit, en effet, de former l'expression analogue

$$\lim_{\substack{a=\infty \\ p=\infty}} \frac{\theta_1^{-2} + \theta_2^{-2} + \ldots + \theta_p^{-2}}{p} = \frac{k}{S^2},$$

on pourra alors calculer S et k.

8. La méthode qui vient de nous servir pour former, à l'aide des fonctions θ_p, une expression analytique convergeant dans une région étendue du plan, peut s'appliquer dans bien d'autres cas pour former des expressions analytiques qui convergent dans des aires étendues.

Ainsi, on peut, par exemple, appliquer cette méthode au cas d'une fonction analytique définie par ses éléments.

Considérons, en effet, une fonction analytique (définie par ses éléments) $f(z)$ que nous supposerons d'abord uniforme dans tout le plan; on sait que l'on peut la définir par une infinité dénombrable d'éléments $P(z - l_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n})$, où α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont des indices entiers prenant toutes les valeurs possibles et où n tend vers l'infini. Cet ensemble d'éléments étant dénombrable, on peut le réduire à un ensemble à un seul indice $P(z - l_\lambda)$.

Considérons alors l'expression

$$\lim_{\substack{n=\infty \\ \lambda=\infty}} \sum \frac{P_n^{-1}(z-l_\lambda)}{\lambda!}$$

où $P_n(z-l_\lambda)$ désigne la somme des n premiers termes de la série. On voit de suite que cette limite est égale à $\frac{k}{f(z)}$ quand le point z est à l'intérieur de un ou de plusieurs des cercles des éléments, et elle est indéterminée si le point z est sur un de ces cercles.

On a donc le théorème suivant :

On peut trouver une expression analytique représentant une fonction uniforme qui converge en tous les points du plan qui peuvent être compris à l'intérieur d'un élément, et qui est indéterminée sur les cercles de convergence de ces éléments, c'est-à-dire sur un ensemble de courbes qui sera dénombrable; il suffira pour cela de former l'expression

$$f(z) = \lim_{\substack{\lambda=\infty \\ n=\infty}} \frac{\sum\limits_{\lambda} \frac{P_n^{-1}(z-l_\lambda)}{\lambda!}}{\sum\limits_{\lambda} \frac{P_n^{-2}(z-l_\lambda)}{\lambda!}},$$

qui peut aussi se mettre sous la forme d'un quotient de deux séries doubles.

On peut également considérer des expressions de la forme

$$\lim_{\substack{\lambda=\infty \\ n=\infty}} \frac{1}{\lambda} \sum_{\nu=0}^{\nu=\lambda} P_n^{-1}(z-l_\lambda),$$

expression qui est égale à $\frac{k}{f(z)}$ (k étant un coefficient réel compris entre o et 1 analogue à celui que nous avons déjà défini), pour tout point compris à l'intérieur d'une infinité d'éléments et qui converge même s'il passe par le point considéré un nombre fini de cercles d'éléments.

9. La méthode donnée précédemment permet de sommer une fonction uniforme dans des régions très étendues, quand celle-ci n'a que des points singuliers isolés, mais si la fonction a des lignes singulières, il y a des aires qui peuvent être considérables où cette méthode ne permet pas de sommer la série. Nous allons voir comment, pour certaines fonctions uniformes particulières, on peut sommer dans ces régions.

Considérons d'abord une progression géométrique

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots,$$

posons

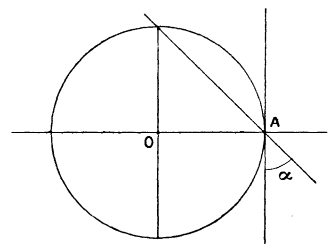
$$S_n = 1 + z + \ldots + z^{n-1}$$

La limite généralisée de la suite S_n sera la limite de l'expression

$$\theta(az) = \frac{1}{1-z}\left[1 - e^{a(z-1)}\right]$$

pour $a = +\infty$. On a supposé, pour établir la notion de limite généralisée, que a

Fig. 7.



était réel et positif; supposons maintenant que a tende vers l'infini suivant un certain argument et cherchons ce qui arrive en ce cas; soit donc

$$a = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha), \qquad z = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

pour que $\theta(az)$ ait une limite finie; il faudra que l'on ait

$$\text{Partie réelle de} \quad [\rho e^{i\alpha}(re^{i\theta} - 1)] < 0$$

ou

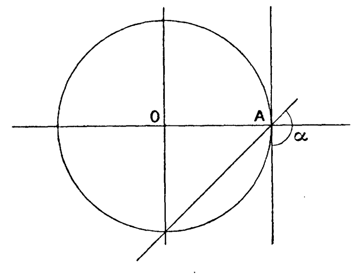
$$\cos\alpha(r\cos\theta - 1) - \sin\alpha\, r\sin\theta < 0,$$

ce qui donne comme courbe séparatrice la droite

$$\cos\alpha(x-1) - \sin\alpha\, y < 0.$$

C'est une droite qui passe au point s et qui fait l'angle α avec la tangente; la

Fig. 8.



région de sommabilité est, comme on le voit de suite, celle où se trouve l'origine dans le cas de la *fig.* 7, c'est celle où n'est pas l'origine dans le cas de la *fig.* 8.

En particulier, si $\alpha = \pi$, on voit que la région de sommabilité est définie par la tangente au point A du cercle et qu'elle est précisément la région où diverge $\theta(az)$ dans le cas où a' croît positivement. On voit donc que, par ce procédé, on peut sommer la progression géométrique *en tout point du plan;* nous allons chercher à voir ce que donne cette méthode pour des séries plus générales.

10. Remarquons d'abord que nous aurions absolument le même résultat pour la fonction

$$\frac{1}{(1-z)^m},$$

ou même pour une fonction de la forme

$$\sum \frac{A_m}{(1-z)^m}.$$

Considérons maintenant une fonction ayant deux points singuliers de la forme

$$\varphi(z) = \sum \frac{A_m}{\left(1-\frac{z}{\beta}\right)^m} + \sum \frac{B_n}{\left(1-\frac{z}{\gamma}\right)^n}.$$

Le domaine de sommabilité, quand a est positif, est l'angle $\beta A \gamma$; si $a = \rho e^{i\alpha}$, c'est l'angle $\beta A' \gamma$ de la figure, et l'on voit aisément dans ce cas que l'on peut sommer en tous points du plan, sauf sur l'arc de cercle $\beta A' A \gamma$.

En effet, soit B' un point de cette aire; on peut toujours déterminer B de telle sorte qu'un point M donné à l'avance soit dans l'angle $\beta B \gamma$ ou dans son opposé par le sommet; on prendra alors l'angle α ou l'angle $\alpha + \pi$ correspondant et $\theta(az)$ convergera au point considéré. Par conséquent, *on peut sommer le développement en série de Taylor d'une fonction de la forme précédente dans tout le plan, sauf sur l'aire de cercle* $\gamma A \beta$.

On voit de suite que le raisonnement n'est nullement changé s'il y a d'autres pôles sur l'arc de cercle $\gamma A \beta$; on en déduit le théorème suivant :

Si une fonction de la forme

$$\varphi(z) = \sum \frac{A_{m,\nu}}{(\alpha_\nu - z)^m}$$

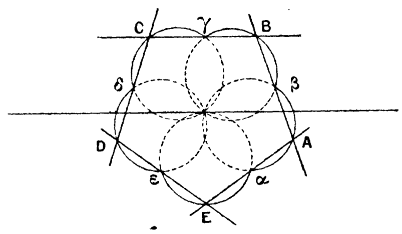
(satisfaisant aux conditions exprimées par M. Borel dans sa Thèse) *a tous ses points singuliers sur un arc de cercle passant par l'origine, on peut sommer la série de Taylor qui développe cette fonction dans tout le plan sauf sur cet arc de cercle.* Les points singuliers peuvent être isolés ou former une ou plusieurs lignes singulières.

Si l'on a, d'une façon générale, une fonction

$$\varphi(z) = \sum \frac{A_{m,\nu}}{(\alpha_\nu - z)^m},$$

les résultats ne sont pas si complets; d'une façon générale, on pourra sommer dans le polygone curviligne (*fig.* 9) formé par les arcs de cercles passant par

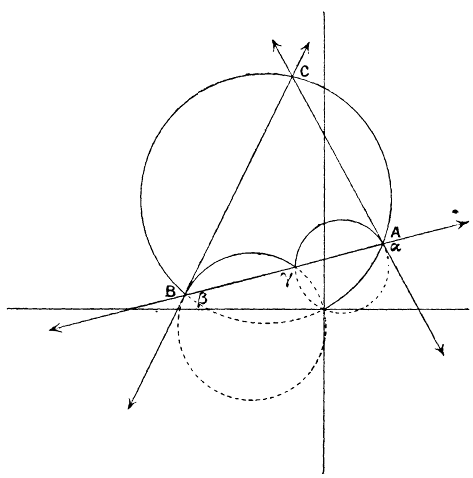
Fig. 9.



deux points singuliers et le sommet du polygone de sommabilité correspondant, ainsi qu'il est facile de s'en assurer.

Dans le cas où tous les points singuliers de la fonction sont du même côté d'une droite passant par l'origine, on peut sommer dans tout le plan, sauf dans une aire curviligne limitée par des arcs de cercle passant par l'origine et deux

Fig. 10.



des points singuliers. La *fig.* 10 ci-jointe est faite pour le cas de trois points singuliers. Rien ne serait évidemment changé si, à l'intérieur de l'aire $\alpha A \beta B \gamma C$, il y avait des points ou des lignes singulières ou même des espaces lacunaires.

11. Si, au lieu de la fonction e^{-a}, on employait, pour sommer la série, une fonction e^{-a^p}, on pourra sommer les fonctions $\varphi(z)$ dans des aires différentes des précédentes; considérons, en particulier, la sommation obtenue en prenant e^{a^2}; on aura

$$\theta_2(az) = \frac{1 - e^{a^2(z^2-1)}}{1-z};$$

pour que cette expression converge, il faudra que l'on ait

$$\text{Partie réelle de} \quad a^2(z^2-1) < 0,$$

c'est-à-dire

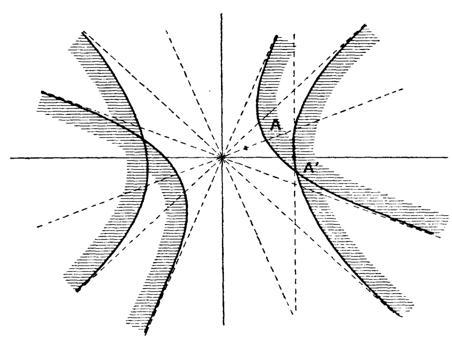
$$r^2\cos 2(\theta+\omega) - \cos 2\omega < 0,$$

où l'on a, comme précédemment,

$$z = re^{i\theta}, \qquad a = \rho e^{i\omega}.$$

La courbe de séparation est l'hyperbole équilatère (*fig.* 11) et recouverte de

Fig. 11.



hachures. On verrait, de même que dans le cas précédent, que l'on peut ainsi sommer dans tout le plan.

Si la fonction de la forme $\varphi(z)$ avait plusieurs points singuliers, on pourrait sommer dans une aire limitée par des aires de la lemniscate ayant leurs points doubles à l'origine et passant par deux points singuliers.

Il est facile de voir que si

$$\rho = A\cos(\alpha+\varphi)$$

est l'équation du cercle qui passe par deux points singuliers et l'origine, l'équation de la lemniscate correspondante sera

$$\rho^2 = A\cos 2(\alpha+\varphi).$$

Plus généralement, si l'on prend la fonction de sommabilité e^{a^k}, les courbes limites seront de la forme

$$r^k \cos k(\theta + \alpha) - \cos k\omega = 0,$$

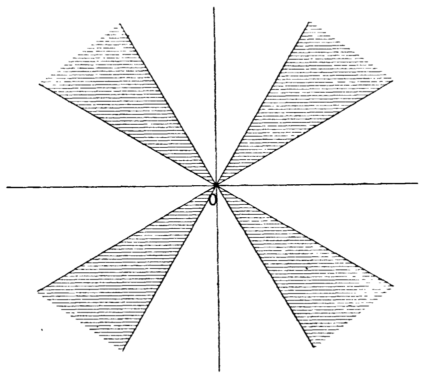
(1) $$\rho^k = \mathrm{A} \cos k(\alpha + \varphi).$$

En particulier, *si la fonction* $\varphi(z)$ *a tous ses points singuliers sur la courbe* (1) *on pourra sommer dans tout le plan, sauf sur un arc de cette courbe.*

Dans tous les cas, la région de sommabilité sera formée par des arcs de courbe tels que (1); cette région pourra être fermée ou bien s'étendre à l'infini.

Considérons un système de k droites passant par l'origine et faisant entre elles des angles égaux à $\frac{\pi}{n}$; supprimons les angles de deux en deux comme sur la *fig.* 12; si en faisant tourner tout le système autour de l'origine on peut trouver

Fig. 12.



une position de celui-ci pour laquelle tous les points singuliers sont dans les angles non ombrés de la *fig.* 12, le domaine de sommabilité s'étendra à l'infini; dans le cas contraire ce sera un polygone fermé simplement connexe.

12. A l'aide des principes précédents, il est très facile de sommer une fonction $\varphi(z)$ en un point quelconque du plan; en effet, considérons la suite

$$\theta_1(-a), \quad \theta_2(a), \quad \theta_3(-a),$$

qui s'obtient simplement en remplaçant, dans la suite considérée plus haut, a par $-a$; il suffit alors d'examiner la forme des courbes Γ pour avoir le théorème suivant :

Si la fonction $\varphi(z)$ *n'a pas deux points singuliers sur une droite quelconque passant par l'origine parmi les fonctions de la suite précédente, il y* *en a toujours une qui converge en un point arbitraire* M *qui n'est pas un point singulier de* $\varphi(z)$.

Si, sur une droite, passant par l'origine et du même côté de ce point, il y avait deux points singuliers, on ne pourrait sommer la fonction sur le segment de droite joignant ces deux points.

Par la même méthode que précédemment on pourrait trouver une expression analytique convergeant dans tout le plan et représentant la fonction; il suffirait d'appliquer la formule donnée précédemment en changeant partout a en $-a$.

Si la fonction à sommer était de la forme

$$F(z) = f(z) + \varphi(z),$$

où $f(z)$ est un polynome en z, on ne pourrait plus sommer pour les valeurs négatives de a, mais il est facile, dans ce cas, de tourner la difficulté; il suffit, α étant, par exemple, un des points singuliers de $\varphi(z)$, de considérer la fonction

$$F_1(z) = \frac{F(z)}{\left(1-\frac{z}{\alpha}\right)^n} = \frac{f(z)}{\left(1-\frac{z}{\alpha}\right)^n} + \frac{\varphi(z)}{\left(1-\frac{z}{\alpha}\right)^n},$$

qui sera alors une fonction de même forme que $\varphi(z)$ et que l'on pourra, par conséquent, calculer comme précédemment; on déduira ensuite facilement $F(z)$ de $F_1(z)$. Par cette remarque, on voit que l'on peut sommer les fonctions uniformes représentables par l'expression de M. Mittag-Leffler, chaque fois que le point à l'infini ne sera pas un point singulier essentiel.

13. Considérons la fonction définie par l'égalité

$$\psi(z) = \int_0^1 \frac{V(t)\,dt}{1-zt},$$

que nous avons déjà considérée; si l'on désigne par $\mathfrak{I}(az)$ la limite généralisée de son développement de Taylor, on aura de suite

$$\mathfrak{I}(az) = \int_0^1 \frac{V(t)}{1-zt}\left[1-e^{a(zt-1)}\right]dt = \psi(z) - \int_0^1 \frac{V(t)}{1-zt}e^{a(zt-1)}\,dt.$$

Il est facile de voir que si $e^{a(z-1)}$ tend vers $\frac{1}{1-z}$ pour $a=\infty$, suivant un argument quelconque compris entre

$$2n\pi - \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad 2n\pi + \frac{\pi}{2}$$

$\mathfrak{I}(az)$ tendra vers $\psi(z)$; en effet, on aura dans ce cas

$$\cos\omega(x-1)-\sin\omega y<0,$$

et si $\cos\omega>0$, on aura évidemment

$$(\cos\omega x-\sin\omega y)t-\cos\omega<0,$$

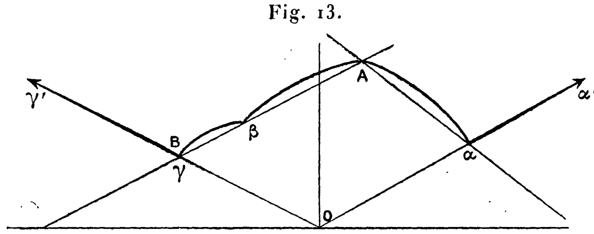
t étant compris entre 0 et 1; par conséquent, l'élément différentiel est nul et la proposition est démontrée.

Par conséquent, si l'on considère une fonction de la forme

$$F(z)=Z\psi_\nu\left(\frac{z}{\alpha_\nu}\right),$$

on voit de suite, par ce qui précède, que l'on peut, en faisant varier ω entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, sommer son développement de Taylor dans un polygone limité par des arcs de cercle passant par deux points singuliers et l'origine. Dans le cas où tous les points singuliers sont du même côté d'une droite passant par l'origine,

Fig. 13.



l'aire s'étend à l'infini et affecte la forme représentée par la *fig.* 13 : les raisonnements que l'on étendrait sans peine aux fonctions de la forme e^{ak} ne nous permettent pas de sommer la fonction dans des régions nouvelles, mais ils peuvent apporter quelquefois des simplifications au point de vue du calcul numérique.

CHAPITRE V.

MÉTHODE DE SOMMATION DES SÉRIES TIRÉE DE LA REPRÉSENTATION CONFORME.

1. Soit A une aire simplement connexe mais pouvant du reste se recouvrir partiellement ou totalement elle-même; on sait que l'on peut toujours trouver une fonction analytique

$$(1)\qquad Z=f(z),$$

qui réalise la représentation conforme de l'aire A sur le cercle de rayon 1 ayant l'origine comme centre. La fonction inverse

$$z = f_1(Z) \tag{2}$$

réalisera alors la représentation conforme du cercle de rayon 1 sur l'aire A.

Considérons alors la série de Taylor

$$\varphi(z) = \sum a_n z^n \tag{α}$$

et faisons le changement de variable défini par (2). Si nous supposons que la formule (2) fait correspondre le point o à lui-même, on s'aperçoit de suite que la fonction

$$\varphi[f_1(Z)]$$

est régulière dans le voisinage de l'origine; si on la développe en série de Taylor,

$$\varphi(z) = \varphi[f_1(z)] = \sum c_n Z^n, \tag{3}$$

cette série convergera dans un certain cercle du plan des z. Si dans l'aire A il n'y a aucun des points singuliers de $\varphi(z)$, mais seulement sur le contour, on voit que ce cercle sera le cercle de rayon 1; remplaçons alors z par sa valeur tirée de (1) et l'on aura

$$\varphi(z) = \sum c_n \overline{f(z)}^n, \tag{4}$$

et l'on voit que l'on a ainsi obtenu un développement en série de $\varphi(z)$ qui converge dans l'aire A si cette aire ne contient pas de point singulier. Si l'aire A contenait des points singuliers, le rayon de convergence de la série (2) serait plus petit que (1) et la série (4) convergerait dans une aire intérieure à A; si, au contraire, il n'y avait pas de points singuliers à l'intérieur et sur le contour de A, la série (4) convergerait dans une aire comprenant A. On voit donc que l'on peut énoncer le théorème suivant :

Une fonction analytique étant définie par une série de Taylor, on peut trouver un développement de la fonction qui converge dans toute aire connexe comprenant l'origine et aucun point singulier de la fonction.

Cette proposition, bien connue dans des cas particuliers, peut servir à sommer la fonction dans des aires où la série ne converge pas.

2. On peut calculer les coefficients de (4) d'une façon plus simple que celle indiquée précédemment; en effet, on devra avoir identiquement

$$\sum a_n z^n = \sum c_n \overline{f(z)}^n,$$

dans la portion commune au cercle de rayon 1 et à l'aire A; si l'on a

$$(5) \qquad f(z) = \partial_1 z + \partial_2 z^2 + \ldots,$$

on devra donc avoir

$$\begin{aligned} a_0 &= c_0, \\ a_1 &= c_1 \partial_1, \\ a_2 &= c_2 \partial_1^2 + c_1 \partial_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

équations qui permettent de calculer de proche en proche les c.

Faisons ici une remarque importante; si nous multiplions les deux membres de la première équation par 1, la seconde par z, la troisième par z^2, et ainsi de suite; on ne changera nullement la valeur des quantités c (z étant supposé différent de 0), on pourra donc écrire

$$\begin{aligned} U_0 &= c_0, \\ U_1 &= c_1 V_1, \\ U_2 &= c_2 V_1^2 + c_1 V_2, \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} U_n &= a_n z^n, \\ V_n &= \partial_n z^n, \end{aligned}$$

et l'on voit ainsi que *pour calculer les* c, *c'est-à-dire le développement* (4) *en un point, il suffit de connaître les valeurs numériques des termes des séries* (α) *et* (5).

La sommation de la série (α) est alors ramenée à la sommation des séries (b) et (4), ce qui peut être plus simple ou même immédiat si les deux séries sont convergentes.

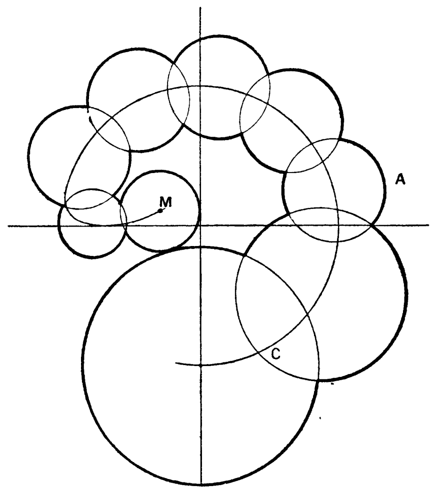
3. Supposons que l'on donne aux coefficients de (5) toutes les valeurs possibles, en assujettissant seulement cette série à converger dans un cercle de rayon non nul. Si l'on forme toutes les séries (4) correspondantes, il est bien évident que, parmi celles-ci, il y en aura toujours au moins une qui convergera en un point donné arbitrairement, ainsi que le chemin qui y conduit, pourvu toutefois que l'on puisse prolonger analytiquement la fonction jusqu'en ce point.

L'ensemble des séries ainsi formé a la même puissance que l'ensemble des fonctions analytiques, mais il est bien évident que l'on peut trouver un ensemble énumérable jouissant des mêmes propriétés au point de vue qui nous occupe; ainsi on pourrait prendre, par exemple, toutes les séries (5) dont les termes sont rationnels; il serait sans doute aisé de montrer que, dans l'ensemble des séries (4) obtenues, *il y en a au moins une qui converge en un point donné quelconque.*

On peut encore, d'une manière simple, former un ensemble dénombrable de séries telles que (4), telles qu'il y en ait au moins une qui converge en un point arbitrairement donné.

En effet, considérons un point M (*fig.* 14) et un chemin C y conduisant; con-

Fig. 14.



sidérons une chaîne quelconque d'*éléments* ayant leurs centres sur la courbe C, il est bien évident que si l'on prend pour aire A l'aire indiquée en gros traits sur la figure, la série (4) convergera au point M. On voit ici de suite que l'on peut ainsi former une infinité dénombrable de séries (5) telles qu'il y en ait au moins une convergeant en un point arbitrairement donné. En effet, M. Poincaré a démontré que l'on peut définir une fonction analytique par un ensemble dénombrable d'éléments (en écartant quelques points particuliers) et la proposition est alors évidente.

4. Nous voyons ainsi que l'on peut, de plusieurs manières, définir un ensemble de séries telles que (4), qui définissent la fonction en tout point de son domaine d'existence (à quelques exceptions près). Or on remarque facilement que l'on peut former ces séries sans connaître la forme analytique de la série donnée, *mais seulement la valeur même de ses termes;* on y parviendrait, par exemple, en prenant pour les séries (5) toutes les séries dont les termes sont rationnels (on caractériserait de même facilement les séries numériques que donne le développe-

ment en un certain point des fonctions qui représentent l'aire définie plus haut). Soient

$$S_{n_0}, \quad S_{n_1}, \quad \ldots, \quad S_{n_p}$$

les sommes des n premiers termes de ces diverses séries; parmi ces suites, il y en a au moins une qui converge au point considéré; on pourra alors raisonner absolument, comme au Chapitre précédent sur les $\theta(a)$ et former des expressions analytiques représentant la fonction dans des aires étendues; si la fonction est uniforme, on pourra trouver une expression analytique qui la représente dans tout son domaine d'existence, sauf sur un ensemble de lignes (les courbes de convergence des diverses séries) formant un ensemble énumérable; si la fonction n'est pas uniforme, on pourra facilement former des expressions qui permettraient de calculer ses diverses déterminations en chaque point du plan.

CHAPITRE VI.

GÉNÉRALISATIONS DIVERSES.

Dans les Chapitres précédents, nous avons considéré presque uniquement des séries de Taylor; nous allons maintenant chercher à montrer brièvement comment les principaux résultats obtenus peuvent s'étendre à des séries de fonctions uniformes.

1. Considérons une série de fonctions uniformes [1]

$$f(z) = \sum u_n(z). \tag{1}$$

Dire que la série précédente converge au point $z = z_0$, c'est dire que la série

$$f_1(z_0 t) = \sum u_n(z_0) t^n \tag{2}$$

converge au point $t = 1$, c'est-à-dire que le rayon de convergence de cette série est supérieur ou au moins égal à 1. D'après la méthode générale donnée par M. Hadamard, on sait calculer le rayon de convergence de (2); soit $R(z_0)$ ce

[1] Nous supposerons qu'elle converge dans une certaine aire connexe.

rayon de convergence ; si

$$|R(z_0)| > 1,$$

la série (1) converge et l'équation

$$(C) \qquad |R(z)| = 1$$

définit la courbe de convergence c de cette série; en dehors de cette courbe, elle diverge et sur la courbe elle peut converger ou diverger; c'est un cas que nous examinerons plus loin.

Considérons maintenant la fonction adjointe

$$E(a) = \sum \frac{u_n(z)a^n}{n!}.$$

La fonction entière adjointe de (2) sera $E(at)$.

Cette fonction permet de calculer les points singuliers de la fonction de t définie par l'équation (2). Soient

$$\begin{array}{l} \alpha_0(z), \\ \alpha_1(z), \\ \ldots\ldots, \\ \alpha_\nu(z) \end{array}$$

ces points. Pour que la série (1) soit sommable en un point $z = z_0$, il suffit que la série (2) soit sommable au point $t = 1$ [1]; or, il faut pour cela que l'on ait

$$\begin{array}{ll} \text{Partie réelle} & |\alpha_0^{-1}(z_0) - 1| < 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \text{Partie réelle} & |\alpha_\nu^{-1}(z_0) - 1| < 0; \end{array}$$

par conséquent, les égalités

$$(3) \qquad \text{Partie réelle} \quad |\alpha_\nu^{-1}(z) - 1| = 0 \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

définissent *la région de sommabilité de la série* (1).

Si le point z_0 était sur une des courbes (3), la série (1) pourrait être sommable ou non en ce point.

Plus généralement, si l'on considère une fonction de la forme $E_p(a)$, on verra de suite que le domaine de sommabilité sera un polygone convexe formé avec les arcs de courbes

$$\text{Partie réelle} \quad \left|\overline{\alpha_\nu(z)}^{\,p} - 1\right| = 0 \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

disposés comme dans le cas des séries de Taylor.

---

(1) Quand z varie dans une aire à un seul tenant ayant une partie commune avec le domaine de convergence.

Posons, d'une façon générale,

$$\frac{1}{\alpha_\nu(z)} = X_\nu(x, y) + i\, Y_\nu(x, y),$$

la courbe de convergence de la série (1) sera donnée par l'équation

$$(\mathrm{C}) \qquad X_0^2 + Y_0^2 = 1,$$

où l'on suppose que le premier membre est le plus petit de ses analogues.

Le polygone de sommabilité relatif à la fonction $E(a)$ sera limité par les arcs des courbes

$$(\mathrm{D}_\nu^1) \qquad X_\nu(x, y) = 1 \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots);$$

d'une façon analogue, on trouve que le polygone de sommabilité relatif à la fonction $E_2(a)$ est limité par les arcs de courbes

$$(\mathrm{D}_\nu^2) \qquad X_\nu^2(x, y) - Y_\nu^2(x, y) = 1 \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots);$$

de même on aura pour la fonction $E^2(a)$

$$(\mathrm{D}_\nu^3) \qquad X_\nu(X_\nu^2 - 3\,Y_\nu^2) = 1 \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

et ainsi de suite.

Les diverses courbes D comprennent toutes, à leur intérieur, *la courbe* C *et l'aire qu'elle renferme;* d'une façon plus générale, la courbe D^n renfermera à son intérieur la courbe $D^{\frac{n}{2}}$; du reste, toutes ces courbes sont tangentes entre elles et à C aux points définis par les équations

$$X_p(x, y) = 1,$$
$$Y_p(x, y) = 0,$$

les p étant les indices pour lesquels l'expression $X_\nu + Y_\nu$ a le plus grand module.

Les fonctions $E_p(a)$ permettent de sommer la série (1) dans des aires où elle ne converge pas; d'une façon générale on pourra sommer la série (1) au point z_0 si l'on peut sommer la série

$$\varphi(t) = \sum u_n(z_0)\, t^n,$$

au point $t = 1$. Or, on déduit facilement des propositions démontrées précédemment que, pour qu'il en soit ainsi, il suffit que la fonction $\varphi(t)$ n'ait pas de point singulier sur le segment 01 (*fig.* 15). Soient

$$\alpha_\nu(z_0) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

les points singuliers. Posons

$$\alpha_\nu(z_0) = A_\nu + B_\nu i.$$

Il faudra que l'on ait

$$B_\nu \neq 0,$$

ou bien

$$B_\nu = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots),$$

$$A_\nu > 1 \quad \text{ou} \quad A_\nu < 0.$$

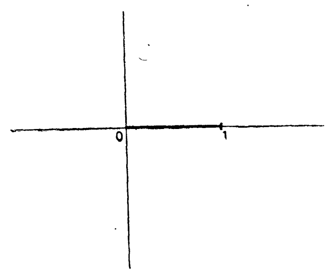
Les équations

$$B_\nu(z) = 0,$$

$$0 < A_\nu(z) < 1,$$

définissent un ensemble de lignes sur lesquelles on ne pourra pas sommer la série (2) par ce procédé.

Fig. 15.



Par conséquent, *on voit que, dans des cas très généraux, on pourra sommer la fonction* (1) *sauf sur un ensemble de lignes.*

Faisons quelques applications; considérons en particulier une série de polynomes de Legendre

$$(1') \qquad F(z) = \sum c_n X_n,$$

on sait que l'on a

$$(1 - 2tz + t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum X_n t^n.$$

Par conséquent le rayon de convergence de cette série sera la plus petite en module des deux fonctions

$$R(z) = z \pm \sqrt{z^2 - 1},$$

et le rayon de convergence de (1′) sera

$$rR(z),$$

où r est le rayon de convergence de la série

$$\sum c_n t^n.$$

La courbe de convergence de (1') s'obtient en posant

$$\text{(C)} \qquad r\mathrm{R}(z) = 1$$

et l'on trouve facilement pour l'équation de cette courbe

$$x = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi,$$

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} - r\right)\sin\varphi,$$

ou bien

$$x = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi,$$

$$y = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi,$$

résultat bien connu.

Les points singuliers de la série

$$\sum c_n \mathrm{X}_n t^n$$

seront

$$\beta_{2\nu} \quad = \alpha_\nu\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right),$$
$$\beta_{2\nu+1} = \alpha_\nu\left(z - \sqrt{z^2 - 1}\right),$$

ainsi qu'il ressort de suite du théorème de M. Hadamard $\left(\text{où les } \alpha \text{ sont les points singuliers de } \sum c_n t^n\right)$. Posons

$$z = \xi e^{2\varphi} + \frac{1}{4\xi e^{2\varphi}},$$

il vient de suite

$$\beta_{2\nu} = 2\alpha_\nu \xi e^{2\varphi} = 2\mathrm{A}_\nu \xi[\cos(\varphi + \alpha_\nu) + i\sin(\varphi + \alpha_\nu)] \qquad (\alpha_\nu = \mathrm{A}_\nu e^{i\alpha_\nu}),$$

$$\beta_{2\nu} = \frac{\alpha_\nu e^{-i\varphi}}{2\xi} = \frac{\mathrm{A}_\nu}{2\xi}[\cos(\alpha_\nu - \varphi) + i\sin(\alpha_\nu - \varphi)];$$

écrivons que $\mathrm{B} = 0$, il vient

$$\alpha_\nu \pm \varphi = k\pi.$$

Les courbes correspondantes seront données par

$$z = \xi e^{\pm(k\pi - \alpha_\nu)} + \frac{e^{\pm(k\pi - \alpha_\nu)}}{4\xi}.$$

On voit de suite que ce sont des trajectoires orthogonales de (C), c'est-à-dire des hyperboles ayant mêmes foyers que C. On verrait facilement de même la signification des inégalités

$$o < A_\nu < 1,$$

et l'on voit que l'on a le théorème suivant :

On peut sommer, par la méthode de M. Borel, une fonction donnée par une série de fonctions sphériques dans tout le plan, sauf sur des arcs d'hyperbole.

Considérons maintenant la série de Lagrange

$$\frac{\pi(z)}{f'(z)} = \sum S_n \alpha^n$$

ou

$$S_n = \frac{1}{2\pi}\int_S \frac{f^n(z)\pi(z)\,\partial z}{(z-x)^n},$$

où z est racine de

$$z - x - \alpha f(z) = o.$$

On sait que, pour que la série converge, il faut que l'on ait sur le contour S

$$\left|\frac{\alpha f(z)}{z-x}\right| < 1,$$

x étant à l'intérieur de S ; il vient de suite

$$e^{-a}E(a\alpha) = \sum \frac{S_n \alpha^n \alpha^n}{n!} = \frac{1}{2\pi}\int_c \frac{\pi(z)}{z-x}\, e^{a\left[\frac{\alpha f(z)}{z-x}-1\right]};$$

pour que cette expression tende vers zéro pour $a = \infty$, il faut et il suffit que l'on ait sur le contour C

$$\text{Partie réelle } \left|\frac{\alpha f(z)}{z-x} - 1\right| < o,$$

ce qui permettra de calculer la valeur de la série dans une aire plus étendue.

Plus généralement, si l'on considère la fonction $E_p(a)$, on voit qu'elle tendra vers zéro dans toute aire où l'on aura

$$\text{Partie réelle } \left[\left(\frac{\alpha f(z)}{z-x}\right)^p - 1\right] < o.$$

Il serait facile de montrer que, à l'aide de ces diverses fonctions, on pourrait calculer la valeur de la série donnée dans tout le plan, sauf sur un ensemble de lignes.

Nous avons supposé que le rayon de convergence $R(z)$ de la série (2) était fonction de (z); il n'en est pas toujours ainsi; il peut se trouver qu'il soit constant; trois cas peuvent alors se présenter : si R est constant et plus grand que 1, la série (2) sera convergente au point $t=1$ quel que soit z et, par conséquent, la série (1) sera convergente dans tout le plan; si, au contraire, $R<1$, la série sera (1) toujours convergente, quel que soit z; si $R=1$, il y a doute; le point 1 est alors sur le cercle de convergence de la série (2), et, pour savoir si la série converge en ce point, il faudra étudier *l'ordre* [1] de la fonction sur le cercle. De même, les points singuliers de (2) peuvent ne pas dépendre de z et les mêmes circonstances que précédemment se présentent; il en est ainsi, en particulier, pour la série de Riemann

$$Z(S)=\sum \frac{1}{n^S}.$$

Pour traiter ces cas, il faudrait définir et étudier, d'une façon analogue à celle qu'a employée M. Hadamard, l'ordre de la série sur une courbe limite du domaine de sommabilité.

---

[1] HADAMARD, Thèse de doctorat.