LES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

ET LA

THÉORIE DES GROUPES,

PAR M. F. MAROTTE,

Agrégé préparateur à l'École Normale supérieure.

INTRODUCTION.

Un des problèmes les plus importants que se propose l'Analyse moderne est l'intégration des équations différentielles. La solution en a été poursuivie dans bien des directions; je n'examinerai ici que celles où la théorie des groupes s'est montrée, jusqu'à présent, le plus féconde.

Une équation différentielle étant donnée, on s'est efforcé d'abord d'en exprimer l'intégrale par des fonctions connues ou des quadratures effectuées sur de telles fonctions. On put ainsi *intégrer* les équations différentielles linéaires à coefficients constants, les équations du premier ordre appartenant aux catégories suivantes : équations à variables séparées, équations homogènes, équations linéaires, équations de Jacobi, etc. Mais les méthodes d'intégration employées étaient spéciales à chaque type d'équations et n'avaient aucun lien commun, jusqu'à ce que M. Lie remarquât que toutes les équations ainsi intégrées restent invariables par les transformations d'un groupe continu; cette observation le conduisit à un procédé général d'intégration s'appliquant à toutes les équations étudiées par les anciens mathématiciens. D'une façon générale, la connaissance d'un groupe de transformations qui laisse invariable un système d'équations différentielles permet d'en simplifier l'intégration; M. Lie (1) se

(1) LIE-SCHEFFERS, *Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen* et les Mémoires de M. Lie (*Mathematische Annalen*, t. XXIV et XXV. *Leipziger Berichte;* 1895).

posa donc le problème suivant : *Intégrer un système d'équations différentielles admettant un groupe connu.*

La notion de groupe conduit ainsi à un principe très général d'intégration. Mais il faut remarquer que les méthodes de M. Lie ne s'appliquent qu'à des systèmes particuliers d'équations différentielles; elles ne donnent aucun moyen de caractériser la difficulté du problème d'intégration pour un système quelconque. Le point de vue auquel s'est placé M. Lie rappelle celui de Lagrange et d'Abel dans l'étude des équations algébriques.

De plus, il n'y a qu'un très petit nombre d'équations différentielles dont l'intégrale s'exprime par des fonctions connues; il fallut donc modifier l'énoncé du problème d'intégration et l'on se proposa l'*étude analytique des fonctions vérifiant les équations différentielles.* Cauchy démontra l'existence des intégrales et en donna les développements en série autour d'un point non singulier; Briot et Bouquet, puis M. Fuchs commencèrent l'étude des singularités. La notion de *groupe discontinu* s'introduisit lorsqu'on voulut étudier les fonctions intégrales dans tout le plan. En ce qui concerne les équations différentielles linéaires pour lesquelles les résultats obtenus se présentent sous la forme la plus simple, nous avons l'énoncé suivant :

Lorsque la variable décrit dans le plan un contour fermé quelconque, les intégrales d'une équation linéaire subissent une substitution linéaire; les substitutions relatives aux divers contours que l'on peut tracer dans le plan forment un groupe discontinu que l'on appelle groupe de monodromie de l'équation.

Cette notion de groupe de monodromie est devenue la base de l'étude analytique des équations linéaires. MM. Jordan, Schwarz, Fuchs, Klein, Painlevé s'en sont servi pour rechercher les intégrales algébriques, M. Poincaré pour étudier les transcendantes qui intègrent les équations linéaires à coefficients algébriques.

Nous poursuivrons ici l'application de la théorie des groupes aux équations différentielles en nous plaçant à un troisième point de vue qui, comme nous le verrons, comprend les deux que nous venons d'indiquer. Il consiste en l'extension aux équations différentielles des idées introduites par Galois dans la théorie des équations algébriques.

M. Picard ouvrit la voie (*Comptes rendus;* 1883. *Annales de la Faculté de Toulouse;* 1887) en énonçant le théorème suivant :

A toute équation différentielle linéaire d'ordre n correspond un groupe algébrique de transformations linéaires à n variables, qui jouit de propriétés analogues à celles du groupe de Galois d'une équation algébrique.

Dans sa Thèse (*Annales de l'École Normale;* 1892), M. Vessiot démontra complètement la double propriété du groupe précédent, que nous nommerons *groupe de rationalité* de l'équation. Il fit voir quelle relation étroite existe entre le problème d'intégration et le groupe de rationalité.

M. Drach, enfin (*Comptes rendus;* 1893, 1895), étendit la théorie de Galois aux équations aux dérivées partielles du premier ordre.

Le travail suivant est divisé en deux Parties, où je résous deux questions distinctes, se rattachant néanmoins toutes deux au point de vue qui nous occupe maintenant.

La première Partie est consacrée à l'étude analytique des singularités des équations différentielles linéaires à coefficients rationnels et à la classification des transcendantes qui les intègrent.

Au Chapitre I, je montre qu'à chaque point singulier a d'une telle équation est attaché un groupe de transformations linéaires qui joue, dans l'étude de la singularité, le même rôle que le groupe de Galois dans la résolution d'une équation algébrique, ou le groupe de rationalité dans l'intégration d'une équation différentielle linéaire. Ce groupe, que nous appelons *groupe de méromorphie,* car ses invariants différentiels s'expriment par des fonctions de x méromorphes au point a, caractérise la nature du point singulier. Il y a, pour une équation d'ordre n, autant de classes de points singuliers qu'il y a de types de sous-groupes dans le groupe linéaire à n variables.

Au Chapitre II, j'établis les relations qui existent entre le groupe de rationalité, le groupe de monodromie et les groupes de méromorphie relatifs aux divers points singuliers d'une équation linéaire.

Au Chapitre III, j'élargis le champ d'application des méthodes de Galois, et je montre comment elles conduisent à la notion de groupe de monodromie. Le groupe de rationalité nous donne la position des intégrales par rapport à l'ensemble des fonctions rationnelles, tout comme le groupe de monodromie donne leur position par rapport à l'ensemble des fonctions uniformes. De la même façon, un autre groupe linéaire donnerait les relations des intégrales avec l'ensemble des fonctions réelles, et il est probable que ce groupe jouera un rôle important dans l'étude des courbes définies par les équations différentielles linéaires. Les méthodes de Galois sont toujours applicables lorsqu'on veut étudier les propriétés des fonctions intégrales analogues à celles dont il est question ici : rationalité, méromorphie, uniformité, réalité, etc.

J'indique aussi, dans ce Chapitre, quelle est, à mon point de vue, la marche à suivre pour l'étude analytique des intégrales.

Le Chapitre IV contient une application des résultats précédents à la classification des transcendantes qui intègrent les équations linéaires à coefficients rationnels. Le dernier terme de la classification est constitué par les équations qui appartiennent à une même *espèce* de Riemann. J'établis quelques propriétés de ces équations, et j'expose une méthode qui permet de reconnaître si deux équations données sont ou non de même espèce.

La deuxième Partie est consacrée à la détermination du groupe de rationalité d'une équation différentielle à coefficients rationnels (ou algébriques).

Le Chapitre V contient l'exposition des généralités, ainsi que la marche à suivre pour la résolution du problème pour une équation d'ordre quelconque.

Je m'occupe ensuite aux Chapitres VI, VII et VIII des équations du deuxième, troisième et quatrième ordre. Grâce à une classification nouvelle des groupes linéaires homogènes, je montre que la détermination du groupe de rationalité est ramenée à la résolution du problème suivant :

Rechercher si une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels admet une intégrale dont la dérivée logarithmique est rationnelle ou algébrique.

On sait toujours résoudre ce problème, et l'on arrive à cette conclusion :

On peut toujours déterminer le groupe de rationalité d'une équation linéaire d'ordre 2, 3 *ou* 4, *ou en ramener la détermination à l'étude d'une intégrale abélienne.*

Nous trouvons ainsi, et par la méthode la plus simple, *tous les cas possibles de réduction d'une équation linéaire du quatrième ordre.* Nous connaissons dans chaque cas les relations algébriques qui existent entre la variable indépendante et les éléments d'un système fondamental.

J'indique enfin comment on peut profiter de ces relations pour simplifier le problème d'intégration et le ramener à sa forme canonique.

La méthode suivie s'étend immédiatement aux équations d'ordre supérieur.

Au Chapitre IX, je ramène le problème de la détermination du groupe de monodromie attaché à un point singulier d'une équation linéaire, à la forme canonique suivante :

Rechercher si une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels admet une intégrale dont la dérivée logarithmique est méromorphe (intégrale normale).

Je montre comment les travaux de M. H. von Koch permettent d'étudier cette question.

Les principaux résultats contenus dans ce travail ont été présentés à l'Académie des Sciences (23 novembre 1896, 22 mars et 12 juillet 1897, 7 mars 1898). Dans une Note parue le 30 novembre 1896, j'ai montré comment les principes exposés dans la première Partie conduisaient aussi à une classification des singularités des équations aux dérivées partielles du premier ordre; les résultats obtenus seront exposés dans un Mémoire qui paraîtra prochainement.

Une bibliographie complète me paraissant très difficile à faire, je me suis borné à citer les Mémoires qui m'ont été utiles.

PREMIÈRE PARTIE.

ÉTUDE DES SINGULARITÉS ET CLASSIFICATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES HOMOGÈNES.

CHAPITRE I.

LES POINTS SINGULIERS D'UNE ÉQUATION LINÉAIRE ET LEURS GROUPES DE MÉROMORPHIE.

---

1. *Équations linéaires du premier ordre.* — Nous allons montrer d'abord comment l'étude des singularités des équations différentielles linéaires homogènes à coefficients rationnels nous a conduit à un principe général, permettant de classer les singularités de toutes ces équations.

En supposant que le point singulier étudié soit le point $x = 0$, l'équation peut s'écrire

$$\frac{y'}{y} = \mathrm{P}'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{\alpha}{x} + \frac{f'(x)}{f(x)},$$

$\mathrm{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ étant un polynome en $\frac{1}{x}$ et $f(x)$ une fonction holomorphe et différente de zéro au point $x = 0$.

En intégrant, nous obtenons

$$y = e^{\mathrm{P}\left(\frac{1}{x}\right)} x^{\alpha} f(x),$$

et nous avons à distinguer trois cas.

A. Le polynome $\mathrm{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ est nul (ou constant) et α est un nombre entier positif ou négatif. Dans ce cas

$$y = x^{\alpha} f(x)$$

et la fonction y est *méromorphe au point* $x = 0$.

Nous verrons plus loin qu'il y a avantage à considérer y comme l'invariant du groupe

$$(a) \qquad \mathrm{Y} = y,$$

formé de la seule transformation identique.

B. Le polynome $P\left(\frac{1}{x}\right)$ est nul (ou constant) et α est un nombre commensurable positif ou négatif $\frac{p}{q}$, p et q étant premiers entre eux

$$y = x^{\frac{p}{q}} f(x).$$

Lorsque x tourne autour du point $x = 0$, y prend q valeurs $y_1, y_2, \ldots, y_q$ qui se déduisent de l'une d'elles par les substitutions du groupe

$$(b) \qquad Y = \varepsilon y, \qquad \varepsilon^q = 1.$$

La fonction y^q est l'invariant le plus simple de ce groupe et nous remarquons immédiatement que cet invariant est *méromorphe au point* $x = 0$

$$y^q = x^p [f(x)]^q.$$

C. Nous réunirons ici les cas qui n'ont pas été étudiés en A ou en B.

Lorsque x tourne autour du point 0, y prend, en général, une infinité de valeurs, qui se déduisent de l'une d'elles par les substitutions du groupe

$$(\gamma) \qquad Y = e^{2n\alpha i\pi} y, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \quad \ldots.$$

Ce groupe est compris dans le groupe continu

$$(c) \qquad Y = ty$$

dont l'invariant différentiel le plus simple est $\frac{y'}{y}$. Cet invariant est *méromorphe autour du point* $x = 0$

$$\frac{y'}{y} = P'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{\alpha}{x} + \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

L'analyse des cas A, B, C nous conduit donc à ce résultat, *qu'à tout point singulier d'une équation linéaire homogène du premier ordre à coefficients rationnels, est attaché un groupe de transformations linéaires* (a), (b) *ou* (c), *dont les invariants sont méromorphes au voisinage du point singulier*.

Ce résultat une fois acquis, il n'est pas difficile d'arriver à la conviction que le même fait a lieu pour les singularités de toutes les équations linéaires à coefficients rationnels. Pour le démontrer d'une façon précise, je suivrai une méthode exactement parallèle à celle qu'emploie M. Picard (*Traité d'Analyse*, t. III) pour arriver à la notion du groupe de rationalité d'une équation linéaire.

2. *Groupes de méromorphie des points singuliers d'une équation linéaire.* — Considérons l'équation différentielle linéaire

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + p_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + p_n y = 0, \tag{1}$$

dont nous supposons pour le moment les coefficients rationnels. Désignons par $y_1, y_2, \ldots, y_n$ un système fondamental d'intégrales et posons

$$V = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \ldots + u_n y_n,$$

les quantités u étant des fonctions rationnelles arbitraires.

En différentiant cette équation n^2 fois et remplaçant, lorsqu'il y a lieu, $\frac{d^n y_i}{dx^n}$ par sa valeur tirée de l'équation (1), on obtient un système d'équations exprimant $V, \frac{dV}{dx}, \ldots, \frac{d^{n^2} V}{dx^{n^2}}$ en fonctions linéaires et homogènes de $y_1, \frac{dy_1}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}}, y_2, \ldots, \frac{d^{n-1} y_n}{dx^{n-1}}$.

En éliminant ces n^2 quantités, on voit que la fonction V satisfait à une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels d'ordre n^2, si les u sont des fonctions rationnelles *arbitraires* (*voir* Picard, *Traité d'Analyse*, t. III, p. 532). Cette équation, que l'on nomme la *résolvante* de l'équation (1), s'écrit

$$\frac{d^{n^2} V}{dx^{n^2}} + P_1 \frac{d^{n^2-1} V}{dx^{n^2-1}} + \ldots + P_{n^2} V = 0. \tag{E}$$

De plus, le même système d'équations montre que les intégrales y_1, $y_2, \ldots, y_n$, et leurs dérivées s'expriment par des fonctions linéaires à coefficients rationnels de $V, \frac{dV}{dx}, \ldots, \frac{d^{n^2-1} V}{dx^{n^2-1}}$

$$\begin{aligned}
y_1 &= \alpha_1 V + \alpha_2 \frac{dV}{dx} + \ldots + \alpha_{n^2} \frac{d^{n^2-1} V}{dx^{n^2-1}}, \\
y_2 &= \beta_1 V + \beta_2 \frac{dV}{dx} + \ldots + \beta_{n^2} \frac{d^{n^2-1} V}{dx^{n^2-1}}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
y_n &= \lambda_1 V + \lambda_2 \frac{dV}{dx} + \ldots + \lambda_{n^2} \frac{d^{n^2-1} V}{dx^{n^2-1}}.
\end{aligned}$$

Ces formules montrent qu'à toute intégrale de l'équation (E) correspond un système d'intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de l'équation (1). Ce sera un système fondamental, sauf le cas où le déterminant formé par les y et leurs dérivées jusqu'à l'ordre $n - 1$ serait nul, ce qui donnerait l'équation

$$(\varphi) \qquad \varphi\left(x, \mathrm{V}, \frac{d\mathrm{V}}{dx}, \ldots, \frac{d^k\mathrm{V}}{dx^k}\right) = 0, \qquad k \leqq m^2 - 1.$$

φ étant un polynome entier par rapport à tous ses arguments. Ainsi, à toute intégrale de l'équation (E), ne satisfaisant pas à l'équation (φ), correspond un système fondamental d'intégrales de l'équation (1).

Ceci posé, considérons un point singulier a de l'équation (1); les coefficients des équations (1), (E) et (φ) sont rationnels en x et, par suite, méromorphes au voisinage du point a. Il pourra arriver que certaines solutions de l'équation (E), n'appartenant pas à l'équation (φ), vérifient l'équation

$$(f) \qquad f\left[(x), \mathrm{V}, \frac{d\mathrm{V}}{dx}, \ldots, \frac{d^p\mathrm{V}}{dx^p}\right] = 0,$$

f étant un polynome entier, par rapport aux quantités $\mathrm{V}, \frac{d\mathrm{V}}{dx}, \ldots, \frac{d^p\mathrm{V}}{dx^p}$ *dont les coefficients sont des fonctions de* x, *non plus rationnelles, mais méromorphes au point* a (1).

Nous verrons plus tard que, en général, c'est-à-dire si l'équation (1) est prise arbitrairement, il n'y a pas d'autre équation (f) que l'équation (E) elle-même.

Mais il peut aussi en être autrement et nous allons étudier les cas très étendus où il existe des équations (f); parmi toutes ces équations, considérons celles qui sont d'ordre moindre et, parmi celles-ci, l'une de celles de moindre degré en $\frac{d^p\mathrm{V}}{dx^p}$ que nous appellerons (f). Dans ce cas, f est algébriquement irréductible par rapport à $\frac{d^p\mathrm{V}}{dx^p}$ et il est facile de voir que toute solution de (f) appartient à l'équation (E). En effet, s'il n'en était pas ainsi, on pourrait déduire des équations (E) et (f) une équation (f_1) d'ordre moindre que vérifieraient toutes les solutions communes à (E) et à (f) parmi lesquelles sont certaines intégrales de (E) ne satisfaisant pas à (φ). L'existence d'une telle équation (f_1) est contraire à l'hypothèse; l'intégrale générale de (f) appartient donc à l'équation (E).

(1) C'est ici que ces considérations se distinguent de celles de M. Picard qui, étudiant les intégrales dans tout le plan, considère une équation (f) rationnelle aussi par rapport à x.

Il en résulte que cette intégrale s'écrit

$$V = \omega_1 V_1 + \omega_2 V_2 + \ldots + \omega_{n^2} V_{n^2};$$

les V_i étant des solutions indépendantes de l'équation (E) et les ω_i des constantes. En écrivant que cette équation vérifie l'équation (f), nous obtenons des relations nécessairement algébriques entre les constantes ω_i, qui permettent de les exprimer en fonctions algébriques de p constantes arbitraires [car l'intégrale de (f) doit dépendre de p constantes]. Ainsi les p constantes figurent algébriquement dans l'intégrale générale de f

$$V = V[(x), \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p] = V[(x), \lambda].$$

Ceci acquis, soit $y_1^0, \ldots, y_n^0$ le système fondamental correspondant à une solution $V^0 = V[(x), \lambda^0]$, et $y_1^1, \ldots, y_n^1$, celui qui correspond à la solution $V^1 = V[(x), \lambda^1]$. Pour que les expressions $y_1^0, \ldots, y_n^0, y_1^1, \ldots, y_n^1$ aient un sens bien déterminé et unique, nous supposerons que l'on ait fait, dans le domaine du point a, une coupure rendant uniformes toutes les intégrales de l'équation linéaire. Il suffit, par exemple, de tracer une ligne partant de a et allant jusqu'à la limite du domaine; les fonctions y^0, y^1 et, par suite, V^0 et V^1 sont alors bien déterminées et uniformes.

Les intégrales y^0 dépendent algébriquement des quantités λ^0 et les intégrales y^1 des quantités λ^1; mais l'on a

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} y_1^1 = a_{11} y_1^0 + a_{12} y_2^0 + \ldots + a_{1n} y_n^0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_n^1 = a_{n1} y_1^0 + a_{n2} y_2^0 + \ldots + a_{nn} y_n^0, \end{array} \right.$$

et il résulte de ces équations que les quantités a, qui sont indépendantes de x, sont des fonctions algébriques des paramètres λ^0 et λ^1. Si nous donnons aux λ^0 des valeurs numériques fixes en laissant varier les λ^1, les équations (2) définiront un ensemble de transformations linéaires dont les coefficients dépendent algébriquement des paramètres variables.

Cet ensemble forme un groupe.

Nous devons démontrer que le produit de deux transformations de l'ensemble (2) est une transformation de cet ensemble. Pour cela, considérons une troisième intégrale de l'équation (f), $V^2 = V[(x), \lambda^2]$, ne satisfaisant pas à l'équation (φ). Il lui correspond le système fondamental $y_1^2, \ldots, y_n^2$ et l'on a

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} y_1^2 &= b_{11} y_1^0 + b_{12} y_2^0 + \ldots + b_{1n} y_n^0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_n^2 &= b_{n1} y_1^0 + b_{n2} y_2^0 + \ldots + b_{nn} y_n^0, \end{aligned}\right.$$

les quantités b_{ik} n'étant pas autre chose que les quantités a_{ik} où l'on a remplacé les valeurs λ^1 par les valeurs λ^2.

Le produit des transformations (2) et (3) est

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{Y}_1 &= b_{11} y_1^1 + b_{12} y_2^1 + \ldots + b_{1n} y_n^1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathrm{Y}_n &= b_{n1} y_1^1 + b_{n2} y_2^1 + \ldots + b_{nn} y_n^1, \end{aligned}\right.$$

et il nous faut prouver que l'on a les relations

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{Y}_1 &= c_{11} y_1^0 + c_{12} y_2^0 + \ldots + c_{1n} y_n^0 = y_1^3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathrm{Y}_n &= c_{n1} y_1^0 + c_{n2} y_2^0 + \ldots + c_{nn} y_n^0 = y_n^3, \end{aligned}\right.$$

où les quantités c_{ik} ont précisément les valeurs que prennent les quantités a_{ik} quand on y remplace les λ^1 par de nouvelles valeurs λ^3.

Cela revient à démontrer que les intégrales Y correspondent à une intégrale $\mathrm{V}^3 = \mathrm{V}[(x), \lambda^3]$ appartenant à (f).

Les systèmes fondamentaux y^0, y^1, y^2, Y correspondent respectivement aux intégrales V^0, V^1, V^2, V de la résolvante (E) et nous savons que les trois premières appartiennent à (f) ; il faut démontrer que V est aussi une intégrale de (f).

Or on a

$$\begin{aligned} \mathrm{V}^0 &= u_1 y_1^0 + \ldots + u_n y_n^0, \\ \mathrm{V}^1 &= u_1 y_1^1 + \ldots + u_n y_n^1, \\ \mathrm{V}^2 &= u_1 y_1^2 + \ldots + u_n y_n^2 = \mathrm{U}_1 y_1^0 + \ldots + \mathrm{U}_n y_n^0, \\ \mathrm{V} &= u_1 \mathrm{Y}_1 + \ldots + u_n \mathrm{Y}_n = \mathrm{U}_1 y_1^1 + \ldots + \mathrm{U}_n y_n^1, \end{aligned}$$

d'après les formules (3) et (4). En remplaçant dans les deux dernières égalités les intégrales y^0 et y^1 par leurs valeurs en fonction de V^0 et de V^1, nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathrm{V}^2 &= \mathrm{R}\left[(x), \mathrm{V}^0, \frac{d\mathrm{V}^0}{dx}, \ldots, \frac{d^p\mathrm{V}^0}{dx^p}\right], \\ \mathrm{V} &= \mathrm{R}\left[(x), \mathrm{V}^1, \frac{d\mathrm{V}^1}{dx}, \ldots, \frac{d^p\mathrm{V}^1}{dx^p}\right], \end{aligned}$$

où l'expression R est une fonction rationnelle des quantités $V, \frac{dV}{dx}, \ldots, \frac{d^p V}{dx^p}$, dont les coefficients sont des fonctions de x méromorphes au point a. Les dérivées $\frac{d^{p+i} V}{dx^{p+i}}$ ont été éliminées à l'aide de l'équation (f).

Si je fais maintenant sur l'équation $f = 0$ la transformation

$$V' = R\left[(x), V, \frac{dV}{dx}, \ldots, \frac{d^p V}{dx^p}\right], \tag{5}$$

cette équation deviendra

$$f'\left[(x), V', \frac{dV'}{dx}, \ldots, \frac{d^p V'}{dx^p}\right] = 0,$$

qui admettra la solution $V' = V^2$. Cela suffit pour démontrer qu'elle est identique à l'équation

$$f\left[(x), V', \frac{dV'}{dx}, \ldots, \frac{d^p V'}{dx^p}\right] = 0.$$

En effet, s'il n'en était pas ainsi, la fonction V^2 et, en général, toutes les solutions communes aux équations $f = 0$, $f' = 0$ vérifieraient une équation

$$f_1\left[(x), V', \frac{dV'}{dx}, \ldots, \frac{d^{p_1} V'}{dx^{p_1}}\right] = 0,$$

qui serait d'ordre inférieur à celui de f, ce qui est contraire à notre hypothèse fondamentale.

La transformation (5) change donc l'équation $f = 0$ en elle-même ; V est donc une intégrale de cette équation et le théorème que nous avions en vue est démontré.

Ainsi les transformations linéaires homogènes (2) forment un groupe. Nous exprimerons ce fait que les coefficients a de ces transformations dépendent algébriquement des paramètres arbitraires en disant que ce groupe est *algébrique*.

Nous énoncerons donc, comme conclusion à ce paragraphe, ce premier résultat :

Théorème I. — *A tout point singulier a d'une équation différentielle linéaire, homogène, d'ordre n, à coefficients rationnels, est attaché un groupe algébrique de transformations linéaires homogènes à n variables.*

Ce groupe g_a sera appelé le *groupe de méromorphie* de l'équation relatif au point a.

3. *Propriétés du groupe de méromorphie.* — Nous allons établir deux propriétés fondamentales de ce groupe qui justifieront le nom que nous venons de lui donner; elles sont tout à fait analogues aux propriétés du groupe de rationalité d'une équation linéaire démontrées par MM. Picard et Vessiot.

Théorème II. — *Toute fonction rationnelle de x, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ et de leurs dérivées qui s'exprime par une fonction de x, méromorphe au point a, reste invariable quand on effectue sur $y_1, y_2, \ldots, y_n$ une substitution du groupe g_a.*

Lorsque nous parlons de l'invariabilité d'une fonction, nous la considérons toujours comme dépendant de la seule variable x. Il peut très bien arriver que la fonction considérée où les y sont regardés comme des variables indépendantes, soit altérée par une transformation linéaire, tandis que sa valeur ne change pas lorsqu'on y a remplacé les y par les intégrales de l'équation considérée; c'est de cette dernière invariabilité qu'il s'agit ici.

Supposons que l'on ait

$$F(x, y_1^0, \ldots, y_n^0, \ldots) = F_0(x),$$

et remplaçons $y_1^0, \ldots, y_n^0$ et leurs dérivées par leurs valeurs en fonction de V^0; nous obtenons

$$F(x, y_1^0, \ldots, y_n^0, \ldots) = G\left[(x), V^0, \frac{dV^0}{dx}, \ldots, \frac{d^pV^0}{dx^p}\right] = F_0(x).$$

Puisque $F_0(x)$ est méromorphe autour du point a, l'équation

$$G\left[(x), V, \frac{dV}{dx}, \ldots, \frac{d^pV}{dx^p}\right] = F_0(x)$$

est analogue à l'équation (f) et elle a, avec cette dernière équation, une intégrale commune V^0 ne satisfaisant pas à (φ). Elle admet donc toutes les solutions de (f) et l'on a

$$G\left[(x), V^1, \frac{dV^1}{dx}, \ldots, \frac{d^pV^1}{dx^p}\right] = F_0(x).$$

Enfin l'égalité

$$F(x, y_1^1, \ldots, y_n^1, \ldots) = G\left[(x), V^1, \frac{dV^1}{dx}, \ldots, \frac{d^pV^1}{dx^p}\right]$$

nous conduit à

$$F(x, y_1^1, \ldots, y_n^1, \ldots) = F_0(x) = F(x, y_1^0, \ldots, y_n^0, \ldots).$$

La fonction F est donc invariable au sens que nous avons donné à ce mot.

Théorème III. — *Toute fonction rationnelle de $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$ et de leurs dérivées qui reste invariable par les transformations du groupe g_a est une fonction de x, méromorphe au point a.*

Soit $F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$ une fonction rationnelle de tous ces arguments, telle que

$$F(x, y_1^1, y_2^1, \ldots, y_n^1, \ldots) = F(x, y_1^0, \ldots, y_n^0, \ldots).$$

En remplaçant les intégrales y^0 et y^1 par leurs valeurs en fonction des intégrales V^0 et V^1, nous obtenons

$$G\left[(x), V^1, \frac{dV^1}{dx}, \ldots, \frac{d^pV^1}{dx^p}\right] = G\left[(x), V^0, \frac{dV^0}{dx}, \ldots, \frac{d^pV^0}{dx^p}\right].$$

Ainsi, quelle que soit l'intégrale V de l'équation $f = 0$, on a

$$G\left[(x), V, \frac{dV}{dx}, \ldots, \frac{d^pV}{dx^p}\right] = F_0(x).$$

Je dis que $F_0(x)$ est une fonction méromorphe au point a. En effet, si μ est le degré de f par rapport à $\frac{d^pV}{dx^p}$, on peut supposer G de degré $\mu - 1$ au plus. Donnons à x une valeur b voisine de a et considérons les intégrales de $f = 0$ qui, pour $x = b$, prennent, ainsi que leurs $p - 1$ premières dérivées, des valeurs initiales arbitraires $V_0, \left(\frac{dV}{dx}\right)_0, \ldots, \left(\frac{d^{p-1}V}{dx^{p-1}}\right)_0$; ces intégrales sont en nombre μ, puisque $f = 0$ donne μ valeurs distinctes pour $\frac{d^pV}{dx^p}$. L'équation

$$G\left[(b), V_0, \left(\frac{dV}{dx}\right)_0, \ldots, \left(\frac{d^{p-1}V}{dx^{p-1}}\right)_0, \frac{d^pV}{dx^p}\right] = F_0(b)$$

doit être vérifiée pour ces μ valeurs de $\frac{d^pV}{dx^p}$ et puisqu'elle est de degré $\mu - 1$

en $\frac{d^p V}{dx^p}$, elle est identiquement vérifiée. Ainsi, quelles que soient les valeurs attribuées à V, $\frac{dV}{dx}, \ldots, \frac{d^p V}{dx^p}$, G garde la même valeur; elle ne dépend donc pas de ces variables et l'on a

$$F_0(x) = G\left[(x), V, \frac{dV}{dx}, \ldots, \frac{d^p V}{dx^p}\right] = G\left[(x), V_0, \left(\frac{dV}{dx}\right)_0, \ldots, \left(\frac{d^p V}{dx^p}\right)_0\right],$$

ce qui prouve que $F_0(x)$ est méromorphe au voisinage de a.

Les théorèmes II et III expriment les deux propriétés fondamentales du groupe de méromorphie de l'équation linéaire relatif au point a. Ils sont tout à fait analogues aux théorèmes de Galois sur les groupes des équations algébriques, de MM. Picard et Vessiot sur les groupes de rationalité des équations différentielles linéaires.

Ces deux propriétés sont d'ailleurs caractéristiques du groupe g_a qui est ainsi formé de toutes les transformations linéaires laissant invariables toutes les fonctions rationnelles de $x, y_1, \ldots, y_n$ et de leurs dérivées, méromorphes au point a. En effet, supposons que toutes ces transformations forment un groupe G_a différent du groupe g_a. Le théorème II montre que le groupe G_a contient toutes les transformations du groupe g_a, qui est donc un de ses sous-groupes. De plus, le théorème III nous apprend que toutes les fonctions invariables par rapport à g_a sont méromorphes au point a et par suite invariables par rapport au groupe G_a.

Les invariants du groupe G_a sont donc les mêmes que ceux du sous-groupe g_a; cela suffit pour pouvoir affirmer que ces groupes sont identiques.

4. *Groupe de méromorphie et groupe de monodromie au point a.* — Lorsque la variable x tourne autour du point a en franchissant la coupure tracée au n° 2, les intégrales y^0 se changent en des intégrales z^0 qui s'expriment en fonction des y^0 par les formules

$$z_i^0 = \alpha_{i1} y_1^0 + \alpha_{i2} y_2^0 + \ldots + \alpha_{in} y_n^0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

qui définissent une substitution linéaire S. Lorsque x tourne un nombre quelconque de fois autour du point a, le groupe de substitution des intégrales se compose de la substitution S et de ses puissances; c'est, comme l'on sait, le groupe de monodromie de l'équation dans le domaine du point a.

Ce groupe, qui est toujours discontinu, ne se confond avec le groupe de méromorphie relatif au point a, que dans les seuls cas particuliers où celui-ci est aussi discontinu. C'est ainsi qu'au n° 1 les groupes (a) et (b) sont à la fois les groupes de monodromie et de méromorphie relatifs à l'origine. Au contraire, dans le cas général C, le groupe (γ) est un sous-groupe du groupe de méromorphie (c).

Ce dernier résultat est général : *le groupe de méromorphie contient le groupe de monodromie.*

En effet, lorsque x tourne autour du point a, les intégrales y^0 se changent en les intégrales z^0 et l'intégrale V^0 de (f) en une autre intégrale U^0 de cette même équation. La substitution S correspond au changement de V^0 en U^0 ; elle appartient donc au groupe de méromorphie.

5. *Le groupe de méromorphie est déterminé à une transformation linéaire près.* — Nous avons choisi arbitrairement une quelconque des équations (f) qui remplissent les conditions fixées au n° 2. Que devient le groupe de méromorphie lorsqu'on remplace l'équation (f) par une autre équation (f_1)?

Par le procédé employé au n° 2, nous définirons un nouveau groupe g_{1a}. Aux intégrales U^0 et U^1 de l'équation $f_1(U) = 0$ correspondent les systèmes fondamentaux $z_1^0, \ldots, z_n^0$ et $z_1^1, \ldots, z_n^1$ de l'équation linéaire ; le groupe g_{1a} sera formé de toutes les transformations linéaires faisant passer des intégrales z^0 aux intégrales z^1, lorsqu'on suppose que U^0 est une intégrale déterminée de (f_1) et U^1 son intégrale générale.

Nous avons les relations

$$z_i^0 = A_{i1}y_1^0 + A_{i2}y_2^0 + \ldots + A_{in}y_n^0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{6}$$

d'où il résulte

$$U^0 = u_1 z_1^0 + \ldots + u_n z_n^0 = \sum_{ik} A_{ik} u_i y_k^0 = \alpha V^0 + \beta \frac{dV^0}{dx} + \ldots,$$

α et β étant des fonctions rationnelles de x.

Il est maintenant facile de voir que la transformation

$$U = \alpha V + \beta \frac{dV}{dx} + \ldots$$

change l'équation $f(V) = 0$ en l'équation $f_1(U) = 0$. En effet, si nous désignons par $f'(U) = 0$ l'équation transformée de (f), les deux équations (f_1) et (f') ont une intégrale commune U^0 et, par suite, ont toutes leurs intégrales communes, comme nous l'avons déjà vu bien souvent.

Donc, si nous appelons U^1 l'intégrale de (f_1) qui correspond à V^1, nous aurons

$$U^1 = \alpha V^1 + \beta \frac{dV^1}{dx} + \ldots$$

et cette formule nous conduit immédiatement aux relations

$$(7) \qquad z_i^1 = A_{i1} y_1^1 + A_{i2} y_2^1 + \ldots + A_{in} y_n^1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Les équations (6) et (7) montrent que *le groupe g_{1a} est le transformé du groupe g_a par une substitution linéaire convenable.* Nous dirons que ces groupes sont *homologues* dans le groupe linéaire homogène général formé par toutes les transformations linéaires à n variables, ou bien encore qu'ils appartiennent au même *type*.

La démonstration suivante (¹) nous conduira plus rapidement au même résultat.

Lorsqu'on a choisi pour $y_1^0, \ldots, y_n^0$ un système bien déterminé d'intégrales

$$y_1^0 = f_1^0(x), \qquad \ldots, \qquad y_n^0 = f_n^0(x)$$

(le sens des expressions f^0 est bien déterminé et unique, lorsqu'on a effectué une coupure dans le domaine du point a) le groupe de méromorphie est bien déterminé, car c'est, comme on l'a vu au n° 3, le groupe formé par toutes les transformations linéaires qui laissent invariables toutes les fonctions rationnelles de x, $y_1^0, \ldots, y_n^0$ et leurs dérivées qui sont méromorphes au point a, après qu'on y a remplacé les quantités y_i^0 par les expressions f_i^0.

Mais ce choix d'intégrales est arbitraire, et nous pourrions tout aussi bien désigner par les lettres $y_1^0, \ldots, y_n^0$ et prendre pour point de départ de nos considérations les nouvelles intégrales que l'on obtiendrait par la résolution des équations

$$f_i^0 = A_{i1} y_1^0 + \ldots + A_{in} y_n^0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Ce ne sont plus alors les mêmes fonctions de $y_1^0, \ldots, y_n^0$ qui sont méromorphes au point a, mais, au contraire, d'autres fonctions qui se déduisent des premières en changeant y_i^0 en $A_{i1} y_1^0 + \ldots + A_{in} y_n^0$. Le groupe de transformations linéaires qui laissera invariables ces nouvelles fonctions sera donc le transformé du premier groupe par cette substitution linéaire.

(¹) Ce mode de raisonnement est emprunté à M. Vessiot qui l'emploie pour établir le théorème analogue relatif au groupe de rationalité.

Remarque. — Pour la commodité du langage, nous avons supposé jusqu'ici que l'équation différentielle linéaire étudiée avait ses coefficients rationnels; cela n'est nullement nécessaire : il suffit que ces coefficients soient méromorphes au point a.

6. *Réduction du problème d'intégration au point a.* — Les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont des intégrales de l'équation

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n y = 0$$

et vérifient par suite les égalités

$$\frac{d^n y_i}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y_i}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n y_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

En résolvant ces équations linéaires par rapport à $p_1, p_2, \ldots, p_n$, nous obtenons le système d'équations différentielles suivant, que vérifient les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$,

$$(8) \qquad \frac{\Delta_1}{\Delta} = -p_1, \qquad \ldots, \qquad \frac{\Delta_i}{\Delta} = -p_i, \qquad \ldots, \qquad \frac{\Delta_n}{\Delta} = -p_n.$$

On a posé

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} & \cdots & y_1 \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdot\cdot \\ \frac{d^{n-1} y_n}{dx^{n-1}} & \cdots & y_n \end{vmatrix}$$

et Δ_i est le déterminant obtenu en remplaçant dans Δ les éléments de la colonne de rang i par $\frac{d^n y_1}{dx^n}, \ldots, \frac{d^n y_n}{dx^n}$.

Nous remarquons que les premiers membres des équations du système (8) sont des invariants différentiels du groupe linéaire homogène général; les seconds membres sont des fonctions rationnelles connues de la variable indépendante. Nous aurons souvent à considérer de tels systèmes d'équations que nous nommerons *systèmes canoniques*.

Nous voulons étudier les intégrales dans le voisinage du point a. Pour cela, nous développons les fonctions $p_1, p_2, \ldots, p_n$ suivant les puissances croissantes de $x - a$; ces fonctions sont méromorphes au point a, de sorte que le nombre des termes à exposants négatifs est limité. L'étude des intégrales autour du point a ou, comme nous dirons à l'avenir, le problème d'intégration au point a, consiste en l'étude des équations (8), lorsque la variable indépendante reste dans le domaine du point a. Nous allons voir de quelle importance est, pour cette étude, la notion de groupe de méromorphie.

Soit g_a le groupe de méromorphie de l'équation relatif au point a. Les invariants différentiels de ce groupe sont méromorphes en a, d'après le théorème III. Prenons, parmi ces invariants, les plus simples $f_1, f_2, \ldots, f_r$ en nombre suffisant pour que les transformations qui n'altèrent pas $f_1, f_2, \ldots, f_r$ soient les transformations du groupe g_a et celles-là seulement. Ces fonctions f forment alors un système d'invariants caractéristiques du groupe g_a. Lorsqu'on y remplace les intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_n$ par leur valeur exprimée en x, ces invariants deviennent des fonctions $f^0(x)$ méromorphes en a. Les intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_n$ vérifient donc le système d'équations suivant :

$$(9) \qquad f_1\left(y_1, \ldots, y_n, \frac{dy_1}{dx}, \ldots\right) = f_1^0(x), \qquad \ldots, \qquad f_r(y) = f_r^0(x).$$

De plus, toute autre relation

$$F\left[(x), y_1, y_2, \ldots, y_n, \frac{dy_1}{dx}, \ldots\right] = 0,$$

où F est un polynome par rapport aux $y_1, \ldots, y_n, \frac{dy_1}{dx}$, dont les coefficients sont méromorphes en x, sera une conséquence des équations (9).

En effet, la fonction F reste invariable pour toutes les transformations du groupe g_a (théorème II), c'est-à-dire pour toutes les transformations qui n'altèrent pas $f_1, f_2, \ldots, f_r$. Elle s'exprime donc en fonction rationnelle de $f_1, f_2, \ldots, f_r, \frac{df_1}{dx}, \ldots$, avec des coefficients méromorphes en x (*voir* Picard, *Traité d'Analyse*, t. III, p. 558) :

$$F\left[(x), y_1, y_2, \ldots, y_n, \frac{dy_1}{dx}, \ldots\right] = G\left[(x), f_1, f_2, \ldots, f_r, \frac{df_1}{dx}, \ldots\right].$$

La relation $G = 0$ doit être identiquement vérifiée quand on y remplace les f_i par les expériences f_i^0, sans quoi on aurait une relation où figurerait seule la variable indépendante. La relation $F = 0$ n'est donc pas distincte des équations (9).

En particulier, les équations (8) sont une conséquence des équations (9); il en résulte que ces dernières sont en nombre au moins égal à n. Dans le cas où $r=n$, les invariants $f_1, f_2, \ldots, f_r$ sont indépendants; dans le cas où r est plus grand que n, les invariants $f_1, f_2, \ldots, f_r$ sont liés par $r-n$ relations algébriques par rapport aux f et à leurs dérivées.

Nous arrivons ainsi à définir les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ comme intégrales du système (9). Les premiers membres des équations de ce système sont des invariants différentiels du groupe de méromorphie; les seconds membres sont des fonctions de x, méromorphes au point a. C'est un *système canonique*.

De plus, toute équation, telle que $F=0$ entre $y_1, y_2, \ldots, y_n$, peut se déduire par différentiation et élimination des équations (9). Donc, si l'on ne fait pas d'autres opérations que des différentiations et des éliminations, on ne peut remplacer le système (9) par un système plus simple; il est, à ce point de vue, *irréductible*.

La considération du groupe de méromorphie nous a donc permis de remplacer le système canonique (8) par le système (9) qui est plus simple, lorsque le groupe g_a ne contient qu'une partie des transformations du groupe linéaire homogène général. Le problème d'intégration au point a est alors ramené à une forme plus simple, mais il n'est plus susceptible d'autre réduction analogue.

Enfin, dès que l'on a intégré le système (9), on obtient toutes les intégrales du système (8) en faisant sur les intégrales obtenues une transformation linéaire homogène quelconque.

7. *Étude analytique des singularités.* — Dans l'étude analytique des intégrales autour du point a nous aurons plusieurs cas à distinguer :

A. *Le groupe g_a contient la seule transformation identique.*

Les invariants $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sont alors tout simplement $y_1, y_2, \ldots, y_n$, et l'on a

$$y_1 = f_1^0(x), \qquad y_2 = f_2^0(x), \qquad \ldots, \qquad y_n = f_n^0(x).$$

Ces intégrales sont méromorphes au point a et le calcul des quantités f^0 donne leurs développements en séries. Ces expressions peuvent être obtenues par les méthodes de M. Fuchs.

B. *Le groupe g_a est un groupe discontinu.*

Les équations du groupe ne contiennent alors aucun paramètre arbitraire et le nombre N de ses transformations est nécessairement fini, puisque les relations entre les a qui les définissent (n° 2) sont algébriques.

Les équations

$$f_1 = f_1^0(x), \quad \ldots, \quad f_r = f_r^0(x) \tag{9}$$

seront donc vérifiées pour N systèmes fondamentaux que l'on obtiendra en effectuant sur une solution quelconque $y_1, y_2, \ldots, y_n$ les N substitutions du groupe g_a (théorème III). De plus, il n'y aura pas d'autres solutions, car les fonctions f gardent la même valeur pour les seules substitutions du groupe g_a. Nous pouvons donc supposer que le système d'invariants caractéristiques $f_1, f_2, \ldots, f_r$ dépend seulement de $y_1, y_2, \ldots, y_n$, car, s'il contenait les dérivées de ces fonctions, les équations (9) seraient vérifiées par une infinité de systèmes d'intégrales $y_1, \ldots, y_n$.

Pour calculer $y_1, y_2, \ldots, y_n$ il faudra résoudre les équations (9) par rapport à $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Puisque les fonctions f^0 sont méromorphes au point a, la résolution conduira à des expressions algébriques au voisinage du point a. Mais on peut préciser bien davantage la forme des intégrales.

Nous avons vu, plus haut, que le groupe de méromorphie contient le groupe de monodromie; je dis que, dans le cas qui nous occupe, ces deux groupes sont identiques. En effet, toute fonction rationnelle de x, y_1, $y_2, \ldots, y_n$ et de leurs dérivées, qui est invariable pour les substitutions du groupe de monodromie, est uniforme autour du point a; elle est donc méromorphe, car il résulte de la forme des intégrales que les termes à exposants négatifs sont en nombre limité.

De même, toute fonction rationnelle de x, y_1, $y_2, \ldots, y_n$ et de leurs dérivées, qui est méromorphe au point a, reste invariable pour toutes les transformations du groupe de monodromie. Ce dernier groupe est donc confondu avec le groupe de méromorphie.

Or, le groupe de monodromie est composé, comme nous l'avons vu au n° 4, d'une substitution S et de ses diverses puissances, qui doivent être ici en nombre N. Le groupe de méromorphie qui lui est identique est donc le groupe cyclique formé par les substitutions

$$S, \quad S^2, \quad \ldots, \quad S^N = 1.$$

Puisque ce groupe n'est déterminé qu'à une transformation linéaire près, je puis supposer que la transformation S a la forme suivante :

$$Y_1 = a_1 y_1, \quad \ldots, \quad Y_n = a_n y_n,$$

où les a_i sont des quantités déterminées, telles que

$$a_i^{\mathrm{N}} = 1.$$

Les invariants de ce groupe sont tout simplement

$$y_1^{\mathrm{N}}, \quad y_2^{\mathrm{N}}, \quad \ldots, \quad y_n^{\mathrm{N}},$$

et les équations (9) deviennent

$$y_1^{\mathrm{N}} = (x-a)^{\alpha}[\mathrm{A} + \mathrm{A}_1(x-a) + \ldots], \qquad \ldots, \qquad y_n^{\mathrm{N}} = (x-a)^{\lambda}[\mathrm{L} + \mathrm{L}_1(x-a) + \ldots],$$

d'où l'on déduit

$$y_1 = (x-a)^{\frac{\alpha}{\mathrm{N}}}[\mathrm{A}' + \mathrm{A}'_1(x-a) + \ldots], \qquad \ldots, \qquad y_n = (x-a)^{\frac{\lambda}{\mathrm{N}}}[\mathrm{L}' + \mathrm{L}'_1(x-a) + \ldots].$$

Le point a est un point singulier algébrique; les développements que nous venons d'obtenir peuvent se calculer par les méthodes de M. Fuchs.

C. *Le groupe g_a contient une infinité de transformations.*

Les équations du groupe contiennent alors des paramètres variables et les invariants $f_1, f_2, \ldots, f_r$ renferment certainement les dérivées des fonctions y. L'étude des intégrales au voisinage du point a revient à l'étude du système

$$f_1\left(y_1, \ldots, y_n, \frac{dy_1}{dx}, \ldots\right) = f_1^0(x), \qquad \ldots, \qquad f_r\left(y_1, \ldots, y_n, \frac{dy_1}{dx}, \ldots\right) = f_r^0(x).$$

Pour faire l'intégration il faudra introduire des expressions analytiques nouvelles : intégrales définies, exponentielles, etc. Le point a n'est plus un point singulier algébrique et, sauf dans des cas particuliers que nous allons faire connaître, les intégrales ne peuvent être obtenues par les méthodes de M. Fuchs.

Quelques exemples simples éclairciront ces généralités.

I. Les équations du groupe g_a sont

$$\mathrm{Y}_1 = a y_1, \qquad \mathrm{Y}_2 = b y_2, \qquad \ldots, \qquad \mathrm{Y}_n = l y_n,$$

où les $a, b, \ldots, l$ sont m paramètres arbitraires.

Les invariants les plus simples de ce groupe sont

$$\frac{y'_1}{y_1}, \quad \frac{y'_2}{y_2}, \quad \ldots, \quad \frac{y'_n}{y_n}.$$

Ces invariants sont méromorphes autour du point a, de sorte que les équations (9) deviennent ici

$$(9)\qquad \begin{cases} \dfrac{y_1'}{y_1} = P_1'\left(\dfrac{1}{x-a}\right) + \dfrac{\alpha_1}{x-a} + A_1 + B_1(x-a) + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{y_n'}{y_n} = P_n'\left(\dfrac{1}{x-a}\right) + \dfrac{\alpha_n}{x-a} + A_n + B_n(x-a) + \ldots, \end{cases}$$

les expressions $P_1', \ldots, P_n'$ étant des polynomes en $\dfrac{1}{x-a}$.

En intégrant, nous obtenons

$$\begin{gathered} y_1 = e^{P_1\left(\frac{1}{x-a}\right)}(x-a)^{\alpha_1}[A_1' + B_1'(x-a) + \ldots], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_n = e^{P_n\left(\frac{1}{x-a}\right)}(x-a)^{\alpha_n}[A_n' + B_n'(x-a) + \ldots]. \end{gathered}$$

On dit alors que l'équation admet, au point a, n intégrales normales. Lorsque les polynomes P sont tous nuls, les intégrales sont dites *régulières* au point a; on sait reconnaître, par les méthodes de M. Fuchs, dans quels cas l'équation a toutes ses intégrales régulières au point a et l'on peut alors calculer leurs développements en série.

II. Supposons que, pour une équation du second ordre, le groupe de méromorphie relatif au point a soit

$$Y_1 = a y_1, \qquad Y_2 = b y_1 + a y_2.$$

Les invariants caractéristiques de ce groupe sont

$$\frac{y_1'}{y_1}, \quad \left(\frac{y_2}{y_1}\right)',$$

ils s'expriment par des fonctions méromorphes de x et les équations (9) deviennent

$$\begin{aligned} \frac{y_1'}{y_1} &= P'\left(\frac{1}{x-a}\right) + \frac{\alpha}{x-a} + A + B(x-a) + \ldots, \\ \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' &= \frac{\beta}{x-a} + \varphi'(x-a). \end{aligned}$$

P désigne ici un polynome en $\dfrac{1}{x-a}$ et φ une fonction méromorphe au point a, d'ailleurs quelconque.

En intégrant, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
y_1 &= e^{P\left(\frac{1}{x-a}\right)}(x-a)^\alpha[A' + B'(x-a) + \ldots],\\
y_2 &= y_1[\beta \log(x-a) + \varphi(x-a)].
\end{aligned}
$$

Lorsque le polynome P est nul, nous reconnaissons la forme donnée par M. Fuchs, pour les singularités logarithmiques des équations du second ordre. Les intégrales sont alors régulières au point a et l'on peut calculer leurs développements en série.

8. *Décomposition du problème d'intégration autour du point a.* — Ce qui précède suffit à montrer combien l'étude des intégrales de notre équation linéaire autour du point a est intimement liée à la nature du groupe de méromorphie; nous allons montrer de quelle importance est la *structure* de ce groupe.

On sait le rôle que joue, dans la résolution d'une équation algébrique par la méthode de Galois, la structure du groupe de l'équation; dans le problème d'intégration d'une équation linéaire, la structure du groupe de rationalité joue le même rôle, comme l'a montré M. Vessiot. La structure du groupe de méromorphie a exactement la même signification pour le problème d'intégration autour du point a.

Les modes de raisonnement étant les mêmes dans les deux théories, je me bornerai à énoncer les résultats obtenus, renvoyant pour les démonstrations au *Traité d'Analyse* de M. Picard (t. III, p. 557), où il suffira de remplacer les mots *fonctions rationnelles* par *fonctions méromorphes* autour du point a.

Au point de vue qui nous occupe, le groupe g_a peut présenter deux aspects différents : il peut se faire qu'il ne contienne aucun sous-groupe invariant; on dit alors que c'est un groupe *simple;* dans le cas contraire, c'est un groupe *composé*.

Lorsque le groupe g_a est simple, le problème d'intégration autour du point a n'est pas susceptible de décomposition; il comporte l'étude de l'équation différentielle (f) dont l'ordre p est égal au nombre de paramètres du groupe. Nous dirons que c'est un problème simple d'ordre p.

Supposons maintenant que le groupe g_a soit composé, et considérons une *décomposition normale* du groupe

$$
g_a, \quad g_a^1, \quad g_a^2, \quad \ldots, \quad g_a^s = 1.
$$

obtenue de la façon suivante : g_a^1 est un sous-groupe invariant à p_1 paramètres de g_a, qui n'est contenu dans aucun autre sous-groupe invariant de g_a et qui est nommé, pour cela, *sous-groupe invariant maximum de* g_a; g_a^2 est un sous-groupe invariant maximum de g_a^1 et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à un groupe simple g_a^{s-1}, qui n'a d'autre sous-groupe invariant que celui formé par la transformation identique $g_a^s = 1$.

Le problème d'intégration se décompose alors en s problèmes plus simples qu'il faudra résoudre successivement par la marche théorique suivante.

Les invariants caractéristiques $f_1, f_2, \ldots, f_r$ du groupe g_a s'expriment par des fonctions méromorphes autour du point a, que l'on suppose connues. Ces invariants f sont des fonctions rationnelles des invariants f^1 du groupe g_a^1 et de leurs dérivées

$$f_1 = \mathrm{R}_1\left(f_1^1, \ldots, f_{r_1}^1, \frac{df_1^1}{dx}, \ldots\right), \qquad \ldots, \qquad f_r = \mathrm{R}_r\left(f_1^1, \ldots, f_{r_1}^1, \frac{df_1^1}{dx}, \ldots\right).$$

L'intégration de ce système d'équations différentielles permettra d'exprimer les invariants f^1 par des fonctions de x qui ne seront plus méromorphes; cette intégration constitue un problème simple d'ordre $p - p_1$.

On connaîtra donc en fonction de x les invariants caractéristiques f^1 du groupe g_a^1; un problème simple d'ordre $p^1 - p^2$ nous permettra de calculer les expressions des invariants caractéristiques f^2 du groupe g_a^2, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on obtienne en fonction de x les expressions des invariants caractéristiques de g_a^s, qui sont précisément $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Notre problème d'intégration a donc été décomposé en une suite de s problèmes simples d'ordre $p - p^1, p^1 - p^2, \ldots, p^{s-1} - p^s = p^{s-1}$.

Un cas particulier fort intéressant est celui où le groupe g_a à p paramètres contient un sous-groupe invariant g_a^1 à $p - 1$ paramètres, celui-ci un sous-groupe invariant g_a^2 à $p - 2$ paramètres, et ainsi de suite; le groupe g_a est dit alors *intégrable*, et M. Lie a démontré que les transformations de ce groupe peuvent prendre la forme suivante (nous nous bornons aux équations du troisième ordre)

$$(g_a) \qquad \left\{\begin{array}{l} y_1 = a y_1, \\ y_2 = b y_1 + c y_2, \\ y_3 = d y_1 + e y_2 + f y_3. \end{array}\right.$$

Les invariants de ce groupe sont faciles à calculer. Nous trouvons d'abord

$$\frac{y'_1}{y_1} = \frac{d \log y_1}{dx}.$$

Posons ensuite

$$y = y_1 \int z\,dx,$$

et désignons par z_1 et z_2 les valeurs de z correspondant à y_2 et y_3. Lorsqu'on effectue sur les y les transformations du groupe g_a, les z subissent les transformations

$$z_1 = \alpha z_1,$$
$$z_2 = \beta z_1 + \gamma z_2.$$

La fonction

$$\frac{z'_1}{z_1} = \frac{d}{dx} \log \frac{d}{dx} \frac{y_2}{y_1}$$

est donc un invariant du groupe g_a.

En posant $z_2 = z_1 \int u\,dx$, on trouverait de même que

$$\frac{u'_1}{u_1} = \frac{d}{dx} \log \frac{d}{dx} \frac{z_2}{z_1}$$

est un autre invariant du groupe g_a.

Ces trois invariants sont des fonctions méromorphes de x et suffisent au calcul des intégrales y_1, y_2, y_3. On a, en effet,

$$\frac{y'_1}{y_1} = \mathrm{P}'\left(\frac{1}{x-a}\right) + \frac{\alpha}{x-a} + \mathrm{A} + \mathrm{B}\,(x-a) + \ldots,$$
$$\frac{z'_1}{z_1} = \mathrm{Q}'\left(\frac{1}{x-a}\right) + \frac{\beta}{x-a} + \mathrm{A}_1 + \mathrm{B}_1(x-a) + \ldots,$$
$$\frac{u'_1}{u_1} = \mathrm{R}'\left(\frac{1}{x-a}\right) + \frac{\gamma}{x-a} + \mathrm{A}_2 + \mathrm{B}_2(x-a) + \ldots,$$

où P, Q, R désignent des polynomes en $\frac{1}{x-a}$.

En intégrant, nous obtenons les expressions suivantes pour y_1, y_2, y_3

$$y_1 = e^{\mathrm{P}\left(\frac{1}{x-a}\right)}(x-a)^\alpha\,\mathrm{F}(x-a),$$
$$y_2 = y_1 \int e^{\mathrm{Q}\left(\frac{1}{x-a}\right)}(x-a)^\beta\,\mathrm{G}(x-a)\,dx,$$
$$y_3 = y_1 \int \left[e^{\mathrm{Q}\left(\frac{1}{x-a}\right)}(x-a)^\beta\,\mathrm{G}(x-a) \int e^{\mathrm{R}\left(\frac{1}{x-a}\right)}(x-a)^\gamma\,\mathrm{H}(x-a)\,dx\right] dx.$$

D'une façon générale, lorsque le groupe g_a est intégrable, les intégrales y s'expriment par des quadratures successives portant sur des fonctions dont la dérivée logarithmique est méromorphe.

Signalons encore la réciproque de ce théorème :

Lorsque, au voisinage du point singulier a, les intégrales s'expriment par des quadratures successives à partir des fonctions méromorphes, le groupe de méromorphie g_a est intégrable.

M. Thomé s'est occupé de l'étude des points singuliers de cette nature; il a montré que les coefficients des polynomes P, Q, R et des séries F, G, H s'expriment algébriquement en fonction des coefficients de l'équation linéaire. (Voir *Journal de Crelle,* t. 96.)

Nous résumerons comme il suit les résultats acquis dans ce premier Chapitre :

A tout point singulier d'une équation différentielle linéaire homogène, à coefficients rationnels, est attaché un groupe algébrique de transformations linéaires homogènes à n variables.

Ce groupe g_a, que nous nommons *groupe de méromorphie de l'équation relatif au point a*, n'est déterminé qu'à une transformation linéaire près.

Il est caractérisé par les propriétés suivantes :

1° *Toute fonction rationnelle de x, des intégrales et de leurs dérivées, qui s'exprime par une fonction de x méromorphe au point a, reste invariable par les substitutions du groupe.*

2° *Toute fonction rationnelle de x, des intégrales et de leurs dérivées, qui reste invariable par les substitutions du groupe, s'exprime par une fonction de x méromorphe au point a.*

Le groupe g_a contient les substitutions du groupe de monodromie relatif au point a.

Le système d'équations exprimant, en fonction de x, les invariants caractéristiques du groupe, forme un système canonique irréductible qui définit, autour du point a, les intégrales de notre équation.

La structure du groupe g_a joue un rôle fondamental dans l'étude analytique des intégrales autour de a.

Nous avons ainsi classé les singularités des équations différentielles linéaires d'ordre n, et il y a autant de classes de points singuliers qu'il y a de types de sous-groupes dans le groupe linéaire homogène général à n variables.

CHAPITRE II.

GROUPES DE MÉROMORPHIE ET GROUPE DE RATIONALITÉ.

1. *Groupe de méromorphie dans un domaine* D. — Nous avons étudié jusqu'ici les intégrales de notre équation linéaire dans un cercle de centre a ne contenant aucun autre point singulier de l'équation. Les résultats que nous avons obtenus s'étendent immédiatement à un domaine quelconque D à contour simple. Afin de fixer d'une façon précise les valeurs des intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_n$, nous faisons, dans le domaine D, des coupures qui rendent les intégrales uniformes; il suffit, par exemple, d'y tracer des coupures partant des points singuliers et aboutissant à la frontière du domaine; nous choisissons ensuite, pour $y_1, \ldots, y_n$, des intégrales déterminées.

Cela posé, tous les raisonnements faits au Chapitre précédent subsistent lorsque nous remplaçons l'expression *méromorphe au point a* par *méromorphe dans le domaine* D. Nous démontrons donc l'existence d'un groupe algébrique de transformations linéaires homogènes g_D, caractérisé par les deux propriétés suivantes :

1° *Toutes les fonctions rationnelles de x, de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ et de leurs dérivées, qui s'expriment par des fonctions de x méromorphes dans le domaine* D, *sont inaltérées par les substitutions du groupe.*

2° *Toutes les fonctions rationnelles de x, de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ et de leurs dérivées, qui sont inaltérées par les substitutions du groupe, s'expriment par des fonctions de x méromorphes dans le domaine* D.

Ce groupe g_D sera appelé le *groupe de méromorphie de l'équation, relatif au domaine* D; il contient le groupe de monodromie relatif à ce domaine.

Le groupe g_D est parfaitement déterminé dès que l'on a choisi les intégrales $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ de l'équation linéaire, que l'on désigne par $y_1, \ldots, y_n$. Mais ce choix est entièrement arbitraire et l'on aurait pu appeler $y_1, \ldots, y_n$ des combinaisons linéaires quelconques de $f_1(x), \ldots, f_n(x)$. Le nouveau groupe de méromorphie serait alors le transformé du groupe g_D par une substitution linéaire.

Comme au n° 6 du Chapitre I, nous verrons que l'étude des intégrales de l'équation linéaire dans le domaine D revient à l'étude du système canonique

$$f_1\left(y_1, \ldots, y_n, \frac{dy_1}{dx}, \ldots\right) = f_1^0(x), \qquad \ldots, \qquad f_r\left(y_1, \ldots, y_n, \frac{dy_1}{dx}, \ldots\right) = f_r^0(x),$$

où $f_1, \ldots, f_r$ forment un système caractéristique d'invariants différentiels du groupe g_D et $f_1^0, \ldots, f_r^0$ sont des fonctions de x méromorphes dans D. Tout ce que nous avons dit au Chapitre précédent sur l'étude analytique de ce système et sur la décomposition du problème d'intégration reste vrai, sauf le point particulier suivant :

Lorsque le groupe g_D est discontinu, on démontre, comme au n° 7, qu'il est composé d'un nombre fini de transformations et qu'il se confond avec le groupe de monodromie; mais, ici, ce dernier groupe n'est pas cyclique en général, et l'on ne peut poursuivre le raisonnement que nous avons fait alors.

Si le domaine D s'étend jusqu'à recouvrir tout le plan, les fonctions de x que nous considérons, méromorphes dans tout le plan, sont rationnelles et le groupe de méromorphie devient le *groupe de rationalité* G de l'équation linéaire. Les intégrales de cette équation sont donc définies par le système canonique irréductible

$$F_1\left(y_1, \ldots, y_n, \frac{dy_1}{dx}, \ldots\right) = F_1^0(x), \qquad \ldots, \qquad F_r\left(y_1, \ldots, y_n, \frac{dy_1}{dx}, \ldots\right) = F_r^0(x),$$

où $F_1, \ldots, F_r$ constituent un système caractéristique d'invariants différentiels du groupe G, et $F_1^0, \ldots, F_r^0$ sont des fonctions rationnelles de x.

2. *Relation entre le groupe de rationalité et les groupes de méromorphie.* — Considérons un domaine D_1 contenu entièrement dans un domaine D. Les transformations du groupe g_{D_1} laissent invariables les fonctions rationnelles des intégrales y et de leurs dérivées qui sont méromorphes dans le domaine D_1 et *a fortiori* dans le domaine D ; elles appartiennent donc au groupe g_D. Nous pouvons donc énoncer le théorème :

Le groupe de méromorphie relatif à un domaine D_1 *est contenu dans le groupe de méromorphie relatif à tout domaine qui comprend* D_1.

En particulier, les divers groupes g_a, g_b, ... *relatifs aux points singuliers* a, b, ... *de l'équation linéaire sont des sous-groupes du groupe de rationalité.*

Nous savons que ce dernier groupe contient le groupe de monodromie de l'équation. Il est facile de montrer que :

Le groupe de rationalité est le plus petit groupe algébrique G *contenant le groupe de monodromie et les groupes* g_a, g_b, ...

En effet, nous avons vu plus haut qu'il contient ces deux catégories de groupe ; c'est donc le groupe G ou un groupe qui contient le groupe G.

Puisque le groupe de rationalité contient le groupe G, toutes les fonctions rationnelles des intégrales et de leurs dérivées qui s'expriment rationnellement sont invariables par rapport au groupe G.

De plus, les fonctions rationnelles des intégrales et de leurs dérivées, qui sont invariables par rapport au groupe G, s'expriment par des fonctions de x uniformes dans tout le plan, puisque les transformations du groupe de monodromie ne changent pas leur valeur ; elles sont aussi méromorphes au voisinage de chaque point singulier, car elles restent inaltérées par les transformations du groupe de méromorphie relatif à ce point. Toutes les fonctions rationnelles des intégrales et de leurs dérivées, invariables par rapport au groupe G, sont donc rationnelles.

Le groupe G possédant les deux propriétés caractéristiques du groupe de rationalité se confond avec lui.

Dans le cas où l'équation différentielle linéaire a toutes ses intégrales régulières autour des points singuliers, M. Klein avait démontré que le groupe de rationalité est le plus petit groupe algébrique contenant le groupe de monodromie. (*Voir* Klein, *Lineare Differentialgleichungen.*)

CHAPITRE III.

EXTENSION DES MÉTHODES DE GALOIS.

1. *Nouvelle définition du groupe de monodromie.* — Le fait fondamental qui nous a permis d'édifier les théories précédentes est celui-ci : en faisant les opérations élémentaires, addition, multiplication, division, différentiation sur des fonctions méromorphes, on obtient encore des fonctions méromorphes. En étendant une dénomination employée en

Algèbre, nous exprimerons cette propriété en disant que les fonctions méromorphes dans un domaine donné forment un *corps;* les fonctions rationnelles forment aussi un corps.

La seule hypothèse nécessaire pour que les méthodes de Galois et les démonstrations de M. Picard s'appliquent est que les fonctions de x que l'on considère forment un corps. Les fonctions uniformes sont précisément dans ce cas; nous pouvons donc refaire la théorie précédente en remplaçant les mots *fonctions méromorphes de x* par *fonctions uniformes de x.*

Notre conclusion sera qu'à chaque domaine D est attaché un groupe algébrique G de transformations linéaires homogènes, caractérisé par ce fait, qu'il laisse invariables toutes les fonctions rationnelles des intégrales et de leurs dérivées qui s'expriment par des fonctions de x uniformes dans le domaine D, et celles-là seulement.

Une démonstration analogue à celle donnée plus haut (Chap. II, n° 2) nous montre que *ce groupe* G *est le plus petit groupe algébrique qui contienne le groupe de monodromie du domaine* D. C'est un sous-groupe du groupe de méromorphie g_D.

Les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont donc définies dans le domaine D par un système canonique tel que

$$(1)\quad \mathfrak{F}_1\left(y_1, \ldots, y_n, \frac{dy_1}{dx}, \ldots\right) = \mathfrak{F}_1^0(x), \quad \ldots, \quad \mathfrak{F}_r\left(y_1, \ldots, y_n, \frac{dy_1}{dx}, \ldots\right) = \mathfrak{F}_r^0(x),$$

où les $\mathfrak{F}$ forment un système caractéristique d'invariants du groupe G et sont des fonctions rationnelles des intégrales et de leurs dérivées, tandis que les $\mathfrak{F}^0(x)$ sont des fonctions uniformes dans le domaine D.

Pour donner un exemple, nous allons déterminer le groupe G relatif au domaine d'un point singulier. Le groupe de monodromie est un groupe cyclique, en général infini, formé d'une substitution S et de ses puissances. On peut, en général, choisir les intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de façon que S ait la forme

$$Y_1 = \varepsilon_1 y_1, \quad Y_2 = \varepsilon_2 y_2, \quad \ldots, \quad Y_n = \varepsilon_n y_n,$$

où les ε sont des constantes numériques fixes. Le plus petit groupe algébrique contenant S et ses puissances sera, en général,

$$Y_1 = a_1 y_1, \quad Y_2 = a_2 y_2, \quad \ldots, \quad Y_n = a_n y_n,$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des paramètres variables. Les invariants caractéristiques de ce groupe sont $\frac{y'_1}{y_1}, \frac{y'_2}{y_2}, \ldots, \frac{y'_n}{y_n}$ et les équations (1) deviennent

$$\frac{y'_1}{y_1} = \theta_1(x), \qquad \frac{y'_2}{y_2} = \theta_2(x), \qquad \ldots, \qquad \frac{y'_n}{y_n} = \theta_n(x);$$

$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ sont des fonctions uniformes au voisinage du point singulier et développables par la formule de Laurent.

Ce qui précède n'est qu'une transition pour nous permettre de passer à une extension plus complète encore des méthodes de Galois. Cependant il était intéressant d'attirer l'attention sur les équations (1) qui définissent les intégrales par des équations très simples rationnelles en $y_1, \ldots, y_n$ avec des coefficients uniformes en x.

Mais il est bien certain que, au point de vue où nous nous plaçons maintenant, il n'est nullement nécessaire de nous borner à la considération de fonctions rationnelles des intégrales : il nous suffit de prendre des fonctions uniformes de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ et de leurs dérivées. Cela sera même nécessaire si nous voulons ne faire appel à aucune autre notion que celle d'uniformité.

Les modifications qu'il convient alors d'apporter aux démonstrations du Chap. I sont les suivantes :

Le premier membre de l'équation

$$f\left(x, \mathrm{V}, \frac{d\mathrm{V}}{dx}, \ldots, \frac{d^p\mathrm{V}}{dx^p}\right) = 0$$

sera une fonction uniforme de x, V, $\frac{d\mathrm{V}}{dx}, \cdots$ et nous supposerons que cette équation est irréductible, c'est-à-dire qu'il n'y a aucune autre équation de même nature dont toutes les intégrales vérifient $f = 0$.

Ceci posé, on poursuit facilement les raisonnements faits au Chap. I, à cette différence près que l'on ne peut démontrer ici que le groupe trouvé est algébrique.

Nous démontrons donc l'existence d'un groupe Γ, tel que :

1° Toute fonction uniforme des intégrales qui s'exprime par une fonction uniforme de x est invariable par les substitutions du groupe ;

2° Toute fonction uniforme des intégrales qui est invariable par les substitutions du groupe s'exprime par une fonction uniforme de x.

Ce groupe Γ n'est donc pas autre chose que le groupe de monodromie ; en général, il n'est pas algébrique.

Nous pouvons donc définir les intégrales par des équations analogues aux équations (1). Le groupe Γ est discontinu, en ce sens que ses substitutions ne contiennent pas de paramètre arbitraire; il possède donc un système caractéristique d'invariants $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_s$, fonctions de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ seulement; ce sont des fonctions transcendantes dans le cas où le groupe n'est pas algébrique. Ces invariants s'expriment par des fonctions uniformes de x :

$$\Phi_1(y_1, \ldots, y_n) = \Phi_1^0(x), \qquad \ldots, \qquad \Phi_s(y_1, \ldots, y_n) = \Phi_s^0(x). \tag{2}$$

Les intégrales de notre équation différentielle s'obtiendront en résolvant ce système d'équations transcendantes.

2. *Étude analytique des intégrales.* — L'équation différentielle à coefficients rationnels

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n y = 0, \tag{3}$$

ou bien encore le système d'équations (Chap. I, n° 6)

$$\frac{\Delta_1}{\Delta} = -p_1, \qquad \ldots, \qquad \frac{\Delta_n}{\Delta} = -p_n, \tag{4}$$

définissent les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ à partir du corps des fonctions rationnelles. Mais, tandis que ces équations conservent la même forme apparente, elles peuvent définir, suivant les valeurs des fonctions p, des fonctions y aussi différentes que le sont, par exemple, les fonctions rationnelles, les fonctions algébriques, les fonctions exponentielles, etc. Notre système d'équations (3) et (4) est donc tout à fait insuffisant pour mettre en évidence la *position* des intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_n$, par rapport au corps des fonctions rationnelles. Cette position sera au contraire parfaitement déterminée et apparente si nous définissons les fonctions y par les équations que donne le groupe de rationalité (Chap. II, n° 1).

La connaissance du groupe de rationalité d'une équation différentielle linéaire donne la position de ses intégrales par rapport au corps des fonctions rationnelles. C'est la *première partie* de l'étude analytique des intégrales.

Que faut-il faire maintenant pour poursuivre cette étude, pour trouver de nouvelles propriétés des intégrales? Il faut évidemment chercher comment elles se relient avec un ensemble de fonctions possédant une propriété plus générale que la rationalité. Nous chercherons donc à les classer, à trouver leur *position* par rapport au corps des fonctions méromorphes dans un domaine.

La connaissance du groupe de méromorphie d'une équation différentielle linéaire, relatif à un domaine quelconque, donne, dans ce domaine, la position de ses intégrales par rapport au corps des fonctions méromorphes. C'est l'étude des singularités, *deuxième partie* de l'étude analytique des intégrales.

Enfin, pour terminer, nous étendrons encore le corps des fonctions de comparaison en y admettant toutes les fonctions uniformes.

La connaissance du groupe de monodromie d'une équation différentielle linéaire donne la position de ses intégrales par rapport au corps des fonctions uniformes. C'est la *troisième partie* de l'étude analytique des intégrales.

3. *Comparaison des méthodes de Galois et de Riemann.* — Les méthodes de Galois, convenablement étendues, nous conduisent donc des propriétés de rationalité, qui font l'objet des théorèmes de MM. Picard et Vessiot, aux propriétés de méromorphie exposées au Chapitre I, et enfin aux propriétés d'uniformité étudiées d'une manière systématique par Riemann. Il est intéressant de suivre la marche inverse.

Lorsqu'il s'agit de définir le système de fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$, que nous venons d'étudier, Riemann se donne le groupe de monodromie Γ (c'est-à-dire la position du système de fonctions par rapport au corps des fonctions uniformes) et la forme des fonctions au voisinage des points singuliers.

Si les invariants caractéristiques du groupe Γ sont $\Phi_1, \ldots, \Phi_s$, les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont données par les équations, en général transcendantes,

$$\Phi_1 = \Phi_1^0(x), \qquad \ldots, \qquad \Phi_s = \Phi_s^0(x),$$

où les Φ^0 sont des fonctions uniformes.

Si l'on veut remonter de là aux équations différentielles rationnelles que vérifient nos fonctions, on considère le plus petit groupe algébrique contenant Γ; les invariants différentiels de ce groupe seront des fonctions uniformes de x

$$\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_1^0(x), \qquad \ldots, \qquad \mathfrak{F}_r = \mathfrak{F}_r^0(x).$$

Riemann se bornait à l'étude des fonctions dont les développements dans le domaine des points singuliers contiennent seulement un nombre limité de termes à exposants négatifs. Il est alors évident que les fonctions $\mathcal{F}^0$ sont méromorphes au voisinage de chaque point singulier et par suite rationnelles.

On a ainsi obtenu un système d'équations différentielles rationnelles entre $y_1, \ldots, y_n$ et x.

Mais, dans le cas où les points singuliers sont quelconques, la théorie de Riemann ne peut donner aucun moyen pour déterminer les fonctions dans le voisinage des singularités. Il faut alors recourir à la notion du groupe de méromorphie qui permet cette détermination.

Nous devons donc donner, pour définir les fonctions, non seulement leur groupe de monodromie, mais aussi leurs groupes de méromorphie avec l'expression de leurs invariants.

Dans ces conditions, les invariants d'un groupe algébrique quelconque contenant le groupe de monodromie et les groupes de méromorphie seront rationnels et conduiront à un système d'équations différentielles rationnelles entre les fonctions et la variable.

Nous avons seulement étudié les fonctions vérifiant les équations linéaires; il est bien clair que tout ce que nous venons de dire s'étend immédiatement à ces équations dont l'intégrale générale s'exprime en fonction d'un nombre limité d'intégrales particulières, et qui ont été étudiées par MM. Lie, Vessiot, Picard, etc.

CHAPITRE IV.

CLASSIFICATION DES TRANSCENDANTES QUI INTÈGRENT LES ÉQUATIONS LINÉAIRES.

1. *Décomposition de l'ensemble des équations linéaires d'ordre n.* — Les théorèmes de M. Picard donnent une première subdivision des transcendantes qui intègrent les équations différentielles linéaires à coefficients rationnels d'ordre n. Nous rangerons dans la même *classe* toutes celles de ces équations qui ont le même groupe de rationalité. Il y a donc autant de classes d'équations linéaires d'ordre n qu'il y a de types de groupes algébriques dans le groupe linéaire homogène général à n variables. Toutes les

équations d'une même classe ont même théorie d'intégration (*voir* Vessiot, *Annales de l'École Normale;* 1892) et définissent des transcendantes qui sont liées à leurs dérivées et à la variable indépendante par des relations rationnelles tout à fait analogues.

Le calcul de ces transcendantes exige l'intégration de l'équation $f=0$, d'ordre égal à celui du groupe de rationalité; on peut donc dire, à ce point de vue, que ces transcendantes sont d'autant plus compliquées que le groupe de rationalité aura plus de paramètres. Ce n'est pas là le seul élément de complication : la structure du groupe joue aussi, comme nous l'avons vu, un rôle essentiel.

Les principes qui nous ont servi à classer les points singuliers nous permettent de poursuivre la classification donnée par M. Picard. Considérons, en effet, la classe d'équations différentielles linéaires ayant le groupe de rationalité G. Les groupes de méromorphie attachés à leurs points singuliers sont des sous-groupes $G_1, \ldots, G_N$ de G; nous réunirons, dans une même famille, celles de ces équations linéaires qui ont

s	points	singuliers	de groupe	G,
s_1	»	»	»	G_1,
...	...	...	...	...,
s_N	»	»	»	G_N.

C'est ainsi que les équations considérées par M. Fuchs, et dont les intégrales sont régulières en leurs points singuliers, seront séparées des équations dont les intégrales ont des points essentiels compliqués et appartiendront à des familles dont les singularités ont des groupes très simples, analogues à ceux étudiés au Chapitre I, n° 7.

Enfin, notre dernière subdivision consistera à revenir aux ensembles d'équations linéaires, considérés par Riemann (*Zwei allgemeine Sätze über lineare Differentialgleichungen*); nous rangerons, dans une même *espèce,* toutes les équations obtenues en faisant, sur une équation déterminée

$$\frac{d^n y}{dx^n}+p_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+p_n y=0, \tag{1}$$

la transformation

$$Y=A_0 y+A_1\frac{dy}{dx}+\ldots+A_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, \tag{2}$$

où les expressions $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ sont des fonctions rationnelles.

Les équations d'une même espèce ont évidemment même groupe de monodromie; nous allons démontrer qu'elles ont même groupe de rationalité et que les groupes de méromorphie, relatifs à leurs points singuliers, sont les mêmes. Il en résultera que toutes les équations d'une même espèce appartiennent à une même famille; la dernière spécification s'obtient donc bien en subdivisant les ensembles déjà formés.

2. *Équations linéaires appartenant à une même espèce.* — Il est bien certain que le problème de l'intégration est du même ordre de difficulté pour toutes les équations d'une même espèce. D'une façon plus précise, M. Schlesinger a démontré que :

Toutes les équations d'une même espèce ont même groupe de rationalité.

Avant de connaître les travaux de M. Schlesinger j'avais obtenu les mêmes résultats, par la démonstration suivante :

Supposons que la transformation (2), effectuée sur l'équation (1), nous conduise à la nouvelle équation

$$\frac{d^n Y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} Y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_n Y = 0. \tag{3}$$

Je puis former pour ces deux équations la *même résolvante* d'ordre n^2, en posant

$$\begin{aligned} V &= a_1 y_1 + \ldots + a_n y_n + b_1 \frac{dy_1}{dx} + \ldots + l_n \frac{d^{n-1} y_n}{dx^{n-1}}, \\ &= \alpha_1 Y_1 + \ldots + \alpha_n Y_n + \beta_1 \frac{dY_1}{dx} + \ldots + \lambda_n \frac{d^{n-1} Y_n}{dx^{n-1}}. \end{aligned}$$

L'égalité a lieu en vertu de l'équation (2) et des équations obtenues en la différentiant.

La résolvante d'ordre n^2 nous conduira à la même équation (f)

$$f\left(x, V, \frac{dV}{dx}, \ldots, \frac{d^p V}{dx^p}\right) = 0,$$

rationnelle par rapport à toutes les variables, et deux systèmes fondamentaux correspondants des deux équations s'exprimeront en fonction d'une intégrale de (f) par les formules

$$\left.\begin{aligned} y_i &= f_i\left(x, V, \frac{dV}{dx}, \ldots, \frac{d^p V}{dx^p}\right) \\ Y_i &= F_i\left(x, V, \frac{dV}{dx}, \ldots, \frac{d^p V}{dx^p}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

de sorte que, l'intégrale V^0 nous donnera les systèmes fondamentaux $(y_1^0, \ldots, y_n^0)$ et $(Y_1^0, \ldots, Y_n^0)$ et l'intégrale V^1 les systèmes $(y_1^1, \ldots, y_n^1)$ et $(Y_1^1, \ldots, Y_n^1)$. Les équations du groupe de rationalité de la première équation sont

$$y_i^1 = a_{i1} y_1^0 + \ldots + a_{in} y_n^0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

et il est évident que l'équation (2) nous conduit aux mêmes relations entre les intégrales $(Y_1^0, \ldots, Y_n^0)$ et $(Y_1^1, \ldots, Y_n^1)$; les deux équations ont donc même groupe de rationalité.

En supposant que l'équation (f) a seulement ses coefficients méromorphes au voisinage du point singulier a, la même marche conduit au théorème :

Le groupe de méromorphie relatif à un point singulier a est le même pour toutes les équations d'une même espèce.

Ce théorème comprend toute une série de remarques qui ont été faites depuis longtemps [Poincaré, *Mémoire sur les fonctions zêta-fuchsiennes* (*Acta mathematica,* t. V)]. C'est ainsi que, au voisinage du point a, les nombres des intégrales méromorphes, des intégrales qui restent régulières, des intégrales normales, etc., sont les mêmes pour toutes les équations de l'espèce considérée.

3. *Invariants communs à toutes les équations d'une espèce.* — Le groupe de rationalité et les groupes de méromorphie constituent donc des éléments invariants appartenant à toutes les équations d'une même espèce. Il est intéressant de faire connaître des invariants d'une nature toute différente et qui permettent souvent de décider par un calcul très simple si deux équations linéaires peuvent être de même espèce.

M. Thomé a montré que, si a est un point singulier d'une équation linéaire (1), on peut, en général, trouver n expressions de la forme

$$(4) \qquad e^{Q_i\left(\frac{1}{x-a}\right)}(x-a)^{\rho_i}[A_0^i + A_1^i(x-a) + \ldots] \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

Q_i étant un polynome en $\frac{1}{x-a}$ et ρ_i une constante, qui satisfont formellement à l'équation différentielle. Ces *séries normales* ne sont pas convergentes en général, mais on peut cependant démontrer le théorème suivant :

Les polynomes Q_i restent les mêmes pour toutes les équations d'une même espèce et les exposants ρ_i ne varient que d'un nombre entier.

En effet, imaginons que l'on effectue sur l'équation (1) une transformation (2) déterminée; on peut calculer *algébriquement* les polynomes Q et les exposants ρ pour les deux équations. Mais, dans le cas où les séries normales sont convergentes, le théorème est évident et le calcul supposé fait en doit constater l'exactitude; il est donc vrai dans tous les cas, car l'hypothèse de la convergence des séries n'intervient jamais dans la recherche des polynomes Q et des exposants ρ.

Dans certains cas spéciaux, il est impossible de trouver n développements (4) vérifiant formellement l'équation différentielle. M. Fabry (*Thèse de Doctorat,* 1885) a fait voir qu'on peut alors former des séries de la forme suivante :

$$\left\{\begin{aligned} & e^{Q_i\left(\frac{1}{x-a}\right)}(x-a)^{\rho_i}[f_0(x-a)+\log(x-a)f_1(x-a)+\ldots \\ & \qquad\qquad +\log^{\lambda-1}(x-a)f_{\lambda-1}(x-a)], \end{aligned}\right. \tag{5}$$

où Q_i est un polynome en $(x-a)^{-\frac{1}{n}}$, ρ_i une constante et $f_0, f_1, \ldots, f_{\lambda-1}$ des séries ordonnées suivant les puissances de $(x-a)^{\frac{1}{n}}$ et, en général, divergentes. Ces *séries anormales* satisfont formellement à l'équation linéaire et la formule (5) donne un groupe de λn développements linéairement distincts.

On peut alors démontrer comme plus haut que :

Pour toutes les équations différentielles linéaires de même espèce on obtient les mêmes groupes de séries anormales; les polynomes Q_i, les nombres n et λ restent les mêmes et les exposants ρ ne varient que d'un multiple de $\frac{1}{n}$.

Les coefficients des polynomes Q et les exposants ρ sont des fonctions algébriques des coefficients de notre équation linéaire (1), qui sont invariables par rapport à toutes les transformations (2).

L'ensemble de ces transformations, qui font passer d'une équation de l'espèce considérée à une autre, forme évidemment un groupe. Mais ce groupe est tout à fait différent des groupes considérés par M. Lie. Il contient un nombre quelconque de paramètres arbitraires et ne peut être défini par des équations différentielles. On peut le rapprocher du groupe formé par l'ensemble de toutes les transformations birationnelles qui font passer d'une courbe algébrique appartenant à une classe déterminée à une autre courbe de la même classe. L'existence d'invariants algébriques appartenant à de tels groupes est intéressante à signaler.

Ces fonctions invariantes nous donnent des conditions nécessaires pour que deux équations linéaires soient de même espèce; ces conditions ne sont pas suffisantes. Alors même que les équations ont même groupe de monodromie, elles ne sont pas suffisantes, sauf le cas où les séries normales (4) ou (5) sont toutes convergentes.

Peut-on trouver un système d'invariants donnant les conditions nécessaires et suffisantes?

Dans le cas particulier où les intégrales de l'équation sont régulières aux points singuliers, M. Poincaré (*Acta mathematica,* t. V) a montré que la réponse est affirmative. Il a appris à former une équation réduite qui caractérise chaque espèce d'équation linéaire. Les coefficients de l'équation réduite seront les invariants cherchés.

Puisque les invariants donnés plus haut sont relatifs à la partie en quelque sorte essentielle des développements des intégrales aux points singuliers, il y a lieu de croire que le théorème de M. Poincaré est général. Je n'ai pu en trouver de démonstration satisfaisante.

Cependant, je puis énoncer le résultat suivant :

4. *On peut reconnaître, par un nombre fini d'opérations, si deux équations données sont de même espèce.*

Supposons que la transformation (2) fasse passer de l'équation (1) à l'équation (3) et considérons le système

$$Y_i = A_0 y_i + \ldots + A_{n-1} \frac{d^{n-1} y_i}{dx^{n-1}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

On en déduit

$$A_{n-1} = u_1 Y_1 + \ldots + u_n Y_n,$$

où l'on a posé

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \ldots & y'_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}, \qquad u_i = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial y_i^{(n-1)}}.$$

Les fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_n$ forment un système fondamental de l'adjointe de Lagrange relative à l'équation (1). (Darboux, *Leçons sur la*

Théorie des surfaces, t. II, Chap. V); cette adjointe s'écrit :

$$\frac{d^n u}{dx^n} - \frac{d^{n-1} p_1 u}{dx^{n-1}} + \ldots + (-1)^n p_n u = 0. \tag{6}$$

La fonction A_{n-1} est donc une intégrale particulière de l'équation linéaire admettant les n^2 intégrales $u_i Y_k$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$. Cette équation est d'ordre n^2 en général et on la forme facilement comme il suit : Posons

$$U = uY$$

et différentions cette équation n^2 fois en remplaçant, lorsqu'il y a lieu, $\frac{d^n u}{dx^n}$ et $\frac{d^n Y}{dx^n}$ par leurs valeurs tirées des équations (6) et (3). Nous obtenons un système de n^2+1 équations (7) exprimant U et ses n^2 premières dérivées en fonctions linéaires et homogènes des produits

$$\frac{d^r u}{dx^r}\frac{d^s Y}{dx^s} \qquad (r, s = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

En éliminant ces n^2 quantités, nous obtenons une équation linéaire homogène d'ordre n^2 à coefficients rationnels

$$\frac{d^{n^2} U}{dx^{n^2}} + \ldots = 0. \tag{8}$$

Si les équations (1) et (3) appartiennent à la même espèce, cette équation (8) admet une intégrale rationnelle A_{n-1}.

Il est facile de voir s'il en est ainsi :

Les pôles des intégrales rationnelles de (8) sont les points singuliers $a, b, \ldots, l$ de cette équation; l'ordre maximum du pôle a est la valeur absolue α de la plus petite racine négative entière de l'équation déterminante relative au point a. Par conséquent, le produit

$$A'_{n-1} = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \ldots (x-l)^\lambda A_{n-1}$$

est un polynome entier qui vérifie l'équation linéaire obtenue en posant

$$U_1 = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \ldots (x-l)^\lambda U.$$

Il est facile de former cette équation à partir de l'équation (8)

$$\frac{d^{n^2} U_1}{dx^{n^2}} + \ldots = 0$$

et nous sommes ramenés à rechercher si cette équation admet comme intégrale particulière un polynome entier. Le degré de ce polynome est inférieur à la plus grande racine positive entière de l'équation déterminante relative au point à l'infini. La méthode des coefficients indéterminés permet donc le calcul du polynome A'_{n-1}, au cas où il existe.

Supposons qu'il en soit ainsi et que l'équation (8) admette une intégrale rationnelle connue A_{n-1}. Cette intégrale s'écrit

$$A_{n-1} = \sum \alpha_{ik} u_i Y_k;$$

mais, en choisissant convenablement les intégrales Y, on peut la mettre sous la forme

$$A_{n-1} = \sum u_i Y_i.$$

La fonction A_{n-1} étant calculée, les fonctions A_{n-k} s'en déduisent facilement. On a, en effet,

$$A_{n-k} = \frac{1}{\Delta}\left(Y_1 \frac{\partial\Delta}{\partial y_1^{(n-k)}} + \ldots + Y_n \frac{\partial\Delta}{\partial y_n^{(n-k)}}\right),$$

$$A_{n-k} = v_1 Y_1 + \ldots + v_n Y_n.$$

Les fonctions v_i vérifient une équation linéaire d'ordre n, que M. Cels a étudiée sous le nom d'*adjointe de la* $n - k^{\text{ième}}$ *ligne de l'équation* (1); il a montré que l'intégrale v_i s'exprimait en fonction de l'intégrale u_i par une formule telle que

$$(9) \qquad v_i = a u_i + b \frac{du_i}{dx} + \ldots + l \frac{d^{n-1} u_i}{dx^{n-1}},$$

où les $a, b, \ldots, l$ sont rationnels.

Pour l'établir, il nous suffira de démontrer que, si la formule (9) est vraie pour les fonctions v_i, elle l'est encore pour les fonctions $w_i = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial\Delta}{\partial y_i^{(n-k-1)}}$. Or, nous avons

$$\frac{dv_i}{dx} = \frac{d}{dx} \frac{1}{\Delta} \frac{\partial\Delta}{\partial y_i^{(n-k)}} = \frac{1}{\Delta} \frac{d}{dx} \frac{\partial\Delta}{\partial y_i^{(n-k)}} - \frac{\Delta'}{\Delta^2} \frac{\partial\Delta}{\partial y_i^{(n-k)}},$$

$$\frac{dv_i}{dx} = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial\Delta}{\partial y_i^{(n-k-1)}} - p_1 \frac{\partial\Delta}{\partial y_i^{(n-k)}} + (-1)^{k+1} p_{n-k} \frac{\partial\Delta}{\partial y_i^{n-1}}\right) - \frac{\Delta'}{\Delta^2} \frac{\partial\Delta}{\partial y_i^{(n-k)}},$$

$$\frac{dv_i}{dx} = w_i - p_1 v_i + (-1)^{k+1} p_{n-k} u_i + p_1 v_i = w_i + (-1)^{k+1} p_{n-k} u_i.$$

Nous obtenons donc la formule

$$w_i = (-1)^k p_{n-k} u_i + \frac{dv_i}{dx} \tag{10}$$

qui démontre le résultat annoncé et permettrait, au besoin, le calcul par voie de récurrence des expressions v_i, w_i.

La formule (9) nous donne

$$\mathrm{A}_{n-k} = \sum v_i \mathrm{Y}_i = a \sum u_i \mathrm{Y}_i + b \sum \frac{du_i}{dx} \mathrm{Y}_i + \ldots.$$

Mais les équations (7) obtenues plus haut permettent d'exprimer les quantités $\sum \mathrm{Y}_i \frac{d^s u_i}{dx^s}$ en fonctions linéaires de A_{n-1} et de ses dérivées jusqu'à l'ordre $n^2 - 1$. Donc

$$\mathrm{A}_{n-k} = b_0^k \mathrm{A}_{n-1} + b_1^k \frac{d\mathrm{A}_{n-1}}{dx} + \ldots + b_{n^2-1}^k \frac{d^{n^2-1} \mathrm{A}_{n-1}}{dx^{n^2-1}},$$

où les b sont des fonctions rationnelles.

Ainsi, si l'équation (8) admet une intégrale rationnelle A_{n-1}, on en déduira que les fonctions A sont aussi rationnelles.

La condition nécessaire et suffisante pour que les équations (1) *et* (3) *appartiennent à la même espèce est que l'équation* (8) *ait une intégrale rationnelle.*

Car des formules

$$\mathrm{A}_k = \frac{1}{\Delta} \sum \mathrm{Y}_i \frac{\partial \Delta}{\partial y_i^{(k)}} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

on déduit

$$\mathrm{Y}_i = \mathrm{A}_0 y_i + \mathrm{A}_1 \frac{dy_i}{dx} + \ldots + \mathrm{A}_{n-1} \frac{d^{n-1} y_i}{dx^{n-1}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

DEUXIÈME PARTIE.

DÉTERMINATION DU GROUPE DE RATIONALITÉ ET DES GROUPES DE MÉROMORPHIE.

CHAPITRE V.

LES ÉQUATIONS LINÉAIRES D'ORDRE QUELCONQUE.

---

1. *Résultats généraux.* — La méthode de M. Picard nous a conduits à la notion de groupe de rationalité par la considération d'une résolvante irréductible

$$f\left(x, V, \frac{dV}{dx}, \ldots, \frac{d^pV}{dx^p}\right) = 0$$

de l'équation E (Chap. I, n° 2). Mais la détermination effective du groupe de rationalité par cette voie se présente sous un aspect compliqué; on ne connaît aucun moyen direct de trouver la résolvante f.

M. Vessiot a décomposé en trois parties le problème de la recherche du groupe de rationalité :

1° *Déterminer tous les groupes algébriques de transformations linéaires homogènes à n variables.* — Les travaux de MM. Klein, Jordan et Lie, font connaître pour $n = 2, 3, 4$, tous les types de groupes discontinus et continus; il serait facile de déterminer les groupes complexes ou mixtes (*voir* plus loin, n° 2). De plus, MM. Jordan et Lie ont donné des théorèmes généraux sur les groupes à n variables.

Ce premier problème étant résolu, il reste à déterminer lequel de ces groupes est le groupe de rationalité de l'équation différentielle donnée. Nous savons qu'il n'y a pas lieu de distinguer deux groupes appartenant au même type. Les théorèmes II et III nous apprennent que ce groupe est le plus petit groupe algébrique dont les invariants s'expriment rationnellement. Nous sommes donc conduits à poser les problèmes suivants :

2° *Former pour chaque groupe algébrique trouvé ci-dessus un système caractéristique d'invariants différentiels.* — Lorsque les équations du groupe G sont connues, ce problème n'exige que des différentiations et des éliminations; on peut donc le considérer comme résolu [1].

On obtient ainsi les invariants

$$u_1 = F_1\left(y_1, \ldots, y_n, \frac{dy_1}{dx}, \cdots\right), \qquad \ldots, \qquad u_r = F_r\left(y_1, \ldots, y_n, \frac{dy_1}{dx}, \cdots\right)$$

qui sont fonctions rationnelles de $y_1, \ldots, y_n$ et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre n.

On peut alors former par élimination les résolvantes dont dépendent les invariants $u_1, \ldots, u_r$ lorsque $y_1, \ldots, y_n$ sont des intégrales de l'équation linéaire donnée. On trouve ainsi les équations différentielles

$$\Phi_1\left(x, u_1, \frac{du_1}{dx}, \cdots\right) = 0, \qquad \ldots, \qquad \Phi_r\left(x, u_r, \frac{du_r}{dx}, \cdots\right) = 0.$$

Si le groupe G est le groupe de rationalité ou le contient, $u_1, \ldots, u_r$ seront rationnels. Nous sommes donc conduits au dernier problème.

3° *Rechercher les intégrales rationnelles de ces équations.* — J'ai fait observer que ces équations résolvantes font partie d'une classe remarquable d'équations différentielles étudiées par M. Painlevé; ce sont les équations dont l'intégrale générale est une fonction rationnelle connue des constantes arbitraires.

En effet, l'intégrale générale de l'équation $\Phi_1 = 0$ s'écrit

$$U_1 = F_1\left(Y_1, \ldots, Y_n, \frac{dY_1}{dx}, \cdots\right) = F_1\left(\sum a_{1k} y_k, \ldots, \sum a_{nk} y_k, \sum a_{1k} y'_k, \ldots\right).$$

M. Painlevé a démontré que l'on peut, par des transformations algébriques connues, ramener ces équations aux équations linéaires et en calculer effectivement toutes les intégrales rationnelles ou algébriques à un nombre donné de branches; la détermination de toutes les intégrales algébriques exigerait l'étude de quadratures (*voir* PAINLEVÉ, *Comptes rendus*, juillet 1894).

Ces résultats résolvent donc complètement la question suivante :

---

[1] La question des relations entre les invariants caractéristiques reste ouverte cependant. Il y a $n+p$ tels invariants entre lesquels existent p relations algébriques ou différentielles. Peut-on toujours trouver un système de n invariants caractéristiques indépendants?

Reconnaître si une équation linéaire donnée admet comme groupe de rationalité un groupe donné.

Cependant le problème de la recherche du groupe de rationalité n'est pas complètement résolu, car il y a une infinité de types de groupes algébriques contenus dans le groupe linéaire homogène général à n variables. Un exemple nous permettra de préciser davantage ce point.

Supposons que l'on veuille savoir si l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \mathrm{P}(x)\frac{dy}{dx} + \mathrm{Q}(x)y = 0 \tag{1}$$

admet comme groupe de transformations le groupe

$$\mathrm{Y}_1 = t^p y_1, \qquad \mathrm{Y}_2 = t^q y_2, \tag{g}$$

où p et q sont des entiers premiers entre eux.

Les invariants différentiels caractéristiques de ce groupe sont

$$\frac{y'_1}{y_1}, \quad \frac{y'_2}{y_2}, \quad \frac{y_2^p}{y_1^q};$$

et il nous est toujours possible de reconnaître si l'équation (1) admet deux intégrales y_1 et y_2 dont les dérivées logarithmiques sont rationnelles et d'en calculer les valeurs :

$$\frac{y'_1}{y_1} = \varphi_1(x), \qquad \frac{y'_2}{y_2} = \varphi_2(x).$$

Si maintenant les entiers p et q sont donnés, on pourra toujours reconnaître si $\frac{y_2^p}{y_1^q}$ est rationnel et savoir ainsi effectivement si le groupe de rationalité est g. Mais, si p et q sont inconnus, la détermination du groupe est ramenée au problème suivant :

Trouver deux nombres entiers p et q, tels que

$$e^{\int(p\varphi_2 - q\varphi_1)dx}$$

soit une fonction rationnelle de x.

On voit aussi que si l'on considère le groupe G, contenant le groupe g et dont les équations sont entièrement connues,

$$\mathrm{Y}_1 = a y_1, \qquad \mathrm{Y}_2 = b y_2, \tag{G}$$

où a et b sont des paramètres arbitraires, on peut alors décider effectivement si l'équation (1) admet comme groupe de rationalité G ou un de ses sous-groupes.

Ce qui précède nous conduit à indiquer la marche théorique suivante pour la recherche du groupe de rationalité.

Considérons les *sous-groupes maxima* contenus dans le groupe linéaire homogène général, c'est-à-dire les groupes qui ne sont compris dans aucun autre sous-groupe du groupe général.

Nous commencerons par rechercher si les invariants d'un ou plusieurs de ces sous-groupes maxima sont rationnels; c'est là une opération que nous saurons effectuer d'après ce qui a été expliqué plus haut. Cette méthode aura plusieurs avantages. Tout d'abord les groupes maxima sont en petit nombre, et nous verrons que leurs invariants ont une forme très simple qui facilite beaucoup les calculs; de plus, si, pour l'un de ces groupes, l'essai ne conduit pas à un système d'invariants rationnels, on peut écarter, dans les essais ultérieurs, tous ses sous-groupes. En particulier, si les invariants ne sont rationnels pour aucun des sous-groupes maxima, le groupe de rationalité sera le groupe linéaire homogène général.

Supposons, au contraire, que, pour l'un des groupes au moins G, les invariants caractéristiques soient rationnels; le groupe de rationalité sera G ou l'un de ses sous-groupes. On continuera donc en faisant l'essai de tous les sous-groupes maxima de G et ainsi de suite.

Lorsqu'on sera arrivé à un groupe G_s dont les invariants sont rationnels, mais dont aucun sous-groupe n'a tous ses invariants rationnels, ce groupe G_s sera le groupe de rationalité.

Tout ce que nous venons de dire s'applique aussi à la recherche du groupe de méromorphie; nous aurons alors à calculer les intégrales méromorphes $u_1, \ldots, u_r$ du système d'équations résolvantes.

Si l'on veut étudier de plus près le problème de la détermination du groupe de rationalité, il est nécessaire d'approfondir la théorie des groupes linéaires homogènes à n variables et de leurs invariants différentiels caractéristiques. C'est un point que je laisserai ici de côté, me réservant d'y revenir plus tard. Je vais donc abandonner ces généralités et étudier le problème de la détermination du groupe de rationalité et des groupes de méromorphie pour les équations des deuxième, troisième et quatrième ordre.

Les résultats obtenus dans cette étude seront d'une précision que l'on ne peut espérer atteindre dans l'étude du cas général, et enfin ils nous indiqueront dans quelles directions les recherches peuvent se poursuivre avec fruit.

2. *Groupes discontinus, continus et mixtes.* — Nous avons vu, au Chapitre I, n° 7, que le groupe de rationalité G peut être composé d'un nombre fini de transformations; dans ce cas, il est nécessairement *discontinu*.

Il peut aussi contenir une infinité de transformations. Nous avons vu alors que ses équations dépendent de paramètres arbitraires. Nous ferons avec M. Lie la distinction suivante :

Le groupe G sera appelé *continu,* si toutes ses transformations forment un ensemble tel qu'on puisse passer d'une transformation quelconque de l'ensemble à une autre également quelconque, en faisant varier d'une façon continue les paramètres du groupe. Tel est, par exemple, le groupe à deux variables et à deux paramètres :

$$Y_1 = a y_1, \qquad Y_2 = b y_1 + y_2.$$

Nous dirons, au contraire, que le groupe G est *mixte* ou *complexe* s'il est formé d'un certain nombre d'ensembles continus séparés de transformations; le groupe G étant algébrique, ces ensembles sont en nombre fini. Tel est, par exemple, le groupe de toutes les transformations de coordonnées rectangulaires du plan, l'origine étant conservée; ce groupe G contient les deux ensembles continus

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} Y_1 &= y_1 \cos\alpha - y_2 \sin\alpha, \\ Y_2 &= y_1 \sin\alpha + y_2 \cos\alpha; \end{aligned} \right.$$

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} Y_1 &= y_1 \cos\alpha - y_2 \sin\alpha, \\ Y_2 &= -y_1 \sin\alpha - y_2 \cos\alpha. \end{aligned} \right.$$

Ces ensembles sont bien séparés, puisque le déterminant de leurs transformations est $+1$ pour le premier et -1 pour le second. De plus, nous voyons immédiatement que les transformations (1) forment un groupe continu g. Au contraire, les trasnformations de l'ensemble (2) considéré isolément ne forment pas un groupe; mais elles sont le produit d'une transformation de g et de la transformation

$$(S) \qquad Y_1 = y_1, \qquad Y_2 = -y_2.$$

Nous pouvons donc désigner l'ensemble des transformations (2) par le symbole gS, et nous voyons que le groupe G est formé de la réunion des deux ensembles g et gS.

M. Lie a démontré que le même fait se produit pour tous les groupes mixtes (Lie, *Theorie der Transformationsgruppen*, t. I, Chap. XVIII).

Tout groupe mixte G contient un groupe continu g formé des transformations T et qui est le plus grand sous-groupe continu de G ou, comme nous dirons encore, son *sous-groupe continu* maximum. Les transformations de G qui n'appartiennent pas à g forment $m-1$ ensembles continus composés des transformations qui sont le produit des transformations de g par chacune des $m-1$ transformations $S_1, S_2, \ldots, S_{m-1}$. Le groupe G est ainsi constitué par les m ensembles continus

$$T, \quad TS_1, \quad TS_2, \quad \ldots, \quad TS_{m-1}.$$

Pour la généralité des énoncés que nous donnerons au paragraphe suivant, il est bon d'étendre ces résultats aux groupes finis discontinus; le groupe g comprend alors la seule transformation identique et les substitutions $S_1, S_2, \ldots, S_{m-1}$ sont les autres transformations du groupe G.

3. *Les invariants du sous-groupe continu maximum du groupe de rationalité.* — Il est maintenant bien facile de démontrer que les invariants du groupe g sont des fonctions algébriques des invariants du groupe G.

En effet, soit u un invariant de g; si l'on effectue sur u les substitutions du groupe G, u prend les diverses déterminations $u, u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}$, u_i désignant la fonction obtenue en effectuant sur u la transformation S_i.

Il en résulte que toute fonction symétrique de $u, u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}$ est un invariant du groupe G. Donc u est une fonction algébrique des invariants de G.

Si le groupe G est le groupe de rationalité d'une équation linéaire, ses invariants sont rationnels; nous en concluons que les invariants du groupe g sont algébriques.

Théorème. — *Les invariants du sous-groupe continu maximum g compris dans le groupe de rationalité s'expriment par des fonctions algébriques de x.*

Réciproquement, *si une fonction rationnelle des intégrales et de leurs dérivées s'exprime par une fonction algébrique de x, c'est un invariant du groupe g.*

Soit en effet $F_1\left(y, \frac{dy}{dx}, \cdots\right)$ une fonction rationnelle des intégrales et de leurs dérivées qui s'exprime par une fonction algébrique $f_1(x)$. Lorsque x parcourt dans le plan tous les contours que l'on peut imaginer et revient à son point de départ f_1 et F_1 prennent les p déterminations $f_1, f_2, \ldots, f_p$ et $F_1, F_2, \ldots, F_p$. Les fonctions symétriques de $F_1, F_2, \ldots, F_p$ s'expriment par des fonctions symétriques de $f_1, f_2, \ldots, f_p$; elles sont donc rationnelles. Le groupe de rationalité laisse donc invariables les fonctions symétriques de $F_1, F_2, \ldots, F_p$; il ne fait donc que permuter entre elles ces fonctions.

Le groupe g ne peut donc aussi faire autre chose que permuter F_1, $F_2, \ldots, F_p$; mais un groupe continu ne peut changer F_1 qu'en des fonctions formant avec F_1 un ensemble continu. Donc F_1 reste inaltéré par les transformations du groupe g.

Ajoutons enfin que, si un groupe continu possède les deux propriétés énoncées plus haut, c'est le sous-groupe continu maximum du groupe de rationalité.

Les mêmes théorèmes subsistent évidemment pour les groupes de méromorphie; les invariants de leurs sous-groupes continus maxima s'expriment par des fonctions à forme algébrique dans le domaine considéré.

Nous pouvons donc nous borner dans ce qui va suivre à la considération des groupes continus.

4. *Équations linéaires admettant des intégrales dont la dérivée logarithmique est algébrique.* — Nous verrons tout à l'heure que le problème de la détermination du groupe de rationalité revient à rechercher les intégrales d'une équation linéaire dont la dérivée logarithmique est algébrique. On peut énoncer à ce sujet quelques théorèmes généraux qui nous seront utiles plus tard.

On sait trouver pour l'équation à coefficients rationnels (ou algébriques)

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n y = 0, \tag{1}$$

les intégrales dont la dérivée logarithmique est algébrique.

Cherchons tout d'abord quelles formes peuvent avoir ces intégrales.

Soit

$$\frac{y_1'}{y_1} = \text{f. alg. de } x = u_1(x).$$

Lorsque x décrit dans le plan les divers contours distincts que l'on y peut tracer, la fonction $u_1(x)$ acquiert p valeurs distinctes $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_p(x)$ qui sont les p déterminations de la fonction algébrique $u(x)$. Il y correspond p valeurs distinctes $\frac{y'_1}{y_1}, \frac{y'_2}{y_2}, \ldots, \frac{y'_p}{y_p}$ du quotient $\frac{y'}{y}$

$$\frac{y'_1}{y_1} = u_1(x), \qquad \frac{y'_2}{y_2} = u_2(x), \qquad \ldots, \qquad \frac{y'_p}{y_p} = u_p(x).$$

Les intégrales $y_2, \ldots, y_p$ sont les transformées de y_1 par la substitution du groupe de monodromie de l'équation (1) qui correspondent aux contours décrits par la variable x. Il faut remarquer que les substitutions du groupe de monodromie changent en général y_1 en une infinité d'autres intégrales de (1); mais toutes ces intégrales ne donnent que p valeurs distinctes pour le quotient $\frac{y'}{y}$ et ne diffèrent que par des facteurs constants des intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_p$.

Une première observation fort importante consiste en ce que *le nombre n étant donné, on peut assigner au nombre p une limite supérieure* N. Consulter à ce sujet le Mémoire de M. Jordan, *Sur les équations différentielles linéaires à intégrales algébriques* (*Journal de Crelle*, t. 84).

Parmi les intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_p$, il y en a q, $y_1, y_2, \ldots, y_q$, $(q \leqq p)$, qui sont linéairement indépendantes; les autres $y_{q+1}, \ldots, y_p$ s'expriment en fonctions linéaires des q premières. *Les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_q$ vérifient une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels.* Car les coefficients de l'équation linéaire que vérifient $y_1, y_2, \ldots, y_q$ sont *algébriques* puisque $\frac{y'_1}{y_1}, \frac{y'_2}{y_2}, \ldots, \frac{y'_q}{y_q}$ sont algébriques, et *uniformes* puisque, en décrivant un contour quelconque, les intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_q$ se changent en des fonctions linéaires de ces mêmes intégrales.

Nous pouvons former cette équation d'ordre q

$$\frac{d^q y}{dx^q} + \omega_1 \frac{d^{q-1} y}{dx^{q-1}} + \ldots + \omega_q y = 0. \tag{2}$$

Si $q = n$, c'est précisément l'équation (1); si q est plus petit que n, toutes les intégrales de (2) appartiennent à (1) et l'on sait trouver les équations qui jouissent de cette propriété (Picard, *Traité d'Analyse*, t. III, p. 522).

Le problème qui nous était proposé est donc simplifié dans le cas où

$q < n$ et il nous reste à reconnaître si l'équation (2) admet un système fondamental d'intégrales dont la dérivée logarithmique est algébrique.

Le nombre p des déterminations de la fonction algébrique $\frac{y'}{y} = u(x)$ est inférieur à un nombre fixe Q que l'on peut calculer dès que l'on connaît q.

La fonction symétrique

$$\frac{y'_1}{y_1} + \frac{y'_2}{y_2} + \ldots + \frac{y'_p}{y_p} = \frac{d}{dx} \log y_1 y_2 \ldots y_p$$

est une fonction rationnelle. Pour reconnaître si l'équation (2) admet de telles intégrales $y_1, \ldots, y_p$, nous formerons par différentiation et élimination l'équation linéaire que vérifie la fonction

$$Y = y_1 y_2 \ldots y_p.$$

Cette équation, qui a ses coefficients rationnels, admet pour intégrale le polynome le plus général d'ordre p formé avec les variables $y_1, y_2, \ldots, y_q$; son ordre est égal au nombre de coefficients arbitraires qui entrent dans ce polynome.

Nous rechercherons les intégrales de cette équation dont la dérivée logarithmique est rationnelle, en employant la méthode exposée par M. Picard (*Traité d'Analyse*, t. III, p. 527).

Lorsqu'on a trouvé une telle intégrale, il faut reconnaître si elle est bien le produit de p intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_p$ de l'équation (2). On recherchera à l'aide de différentiations et d'éliminations s'il en est ainsi; en cas de réussite, le calcul donnera en même temps les autres fonctions symétriques $\frac{y'_1}{y_1}, \frac{y'_2}{y_2}, \ldots, \frac{y'_p}{y_p}$.

La fonction algébrique $\frac{y'}{y} = u(x)$ *sera donc entièrement connue.* Nous allons chercher à déterminer quel est alors le groupe de rationalité G de l'équation (2). L'étude que nous allons faire nous permettra de simplifier dans un grand nombre de cas les calculs que nous venons d'indiquer.

Nous avons vu plus haut (n° 3) que le sous-groupe continu maximum g de G laisse invariables les fonctions $\frac{y'_1}{y_1}, \frac{y'_2}{y_2}, \ldots, \frac{y'_p}{y_p}$, qui s'expriment algébriquement en x. Les transformations que g effectue sur les variables y_1, $y_2, \ldots, y_p$, sont donc de la forme

$$Y_1 = a_1 y_1, \qquad Y_2 = a_2 y_2, \qquad \ldots, \qquad Y_p = a_p y_p.$$

Nous distinguerons deux cas :

1° $p = q$. Les intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_p = y_q$ sont linéairement indépendantes et forment un système fondamental de l'équation (2). Les équations du groupe g sont de la forme

$$Y_1 = a_1 y_1, \qquad Y_2 = a_2 y_2, \qquad \ldots, \qquad Y_q = a_q y_q,$$

$a_1, a_2, \ldots, a_q$ étant des paramètres arbitraires, distincts ou non.

Le groupe de monodromie contient par hypothèse des substitutions S_1, $S_2, \ldots, S_{k-1}$ qui font passer de y_1 à l'une quelconque des intégrales $y_2, \ldots,$ y_q. Ces substitutions appartiennent aussi au groupe de rationalité qui comprendra les ensembles de transformations

$$g, \quad gS_1, \quad gS_2, \quad \ldots, \quad gS_{k-1}.$$

Les invariants $\frac{y'_1}{y_1}, \frac{y'_2}{y_2}, \ldots, \frac{y'_q}{y_q}$ sont les racines d'une équation irréductible d'ordre q à coefficients rationnels

$$u^q + r_1(x) u^{q-1} + \ldots + r_q(x) = 0$$

et les intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_q$ sont données par les formules

$$\log y_1 = \int u_1 \, dx, \qquad \ldots, \qquad \log y_q = \int u_q \, dx.$$

2° $p > q$. Nous pouvons supposer que les intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_q$ sont linéairement indépendantes; $y_{q+1}, \ldots, y_p$ sont alors des fonctions linéaires de $y_1, \ldots, y_q$ et l'on a, par exemple,

$$(\alpha) \qquad y_{q+1} = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_r y_r, \qquad r \leqq q, \qquad \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r \neq 0.$$

Nous savons que le groupe g effectue sur les variables $y_1, y_2, \ldots, y_p$, des transformations de la forme

$$Y_1 = a_1 y_1, \quad \ldots, \quad Y_r = a_r y_r, \quad \ldots, \quad Y_q = a_q y_q, \quad Y_{q+1} = a_{q+1} y_{q+1}, \quad \ldots, \quad Y_p = a_p y_p.$$

Il en résulte, à cause de l'équation (α),

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_r = a_{q+1} = a$$

et les équations du groupe g deviennent

$$Y_1 = a y_1, \qquad \ldots, \qquad Y_r = a y_r, \qquad Y_{r+1} = a_{r+1} y_{r+1}, \qquad \ldots, \qquad Y_p = a_p y_p.$$

Il y a dans le groupe de monodromie des transformations qui changent y_1 en y_{r+1}; si nous appliquons une telle transformation à l'équation (α), il vient

$$y_{\lambda_1} = \alpha_1 y_{r+1} + \alpha_2 y_{\lambda_2} + \ldots + \alpha_r y_{\lambda_r}.$$

Il peut arriver que, parmi les intégrales $y_{\lambda_1}, y_{\lambda_2}, \ldots, y_{\lambda_r}$, il y ait une des intégrales $y_2, \ldots, y_r, y_{q+1}$ ou une de leurs combinaisons linéaires; on en conclut alors que

$$a_{\lambda_1} = a_{r+1} = a_{\lambda_2} = \ldots = a_{\lambda_r} = a.$$

Les équations du groupe g deviennent alors

$$Y_1 = a y_1, \quad \ldots, \quad Y_r = a y_r, \quad Y_{r+1} = a y_{r+1}, \quad Y_{r+2} = a_{r+2} y_{r+2}, \quad \ldots, \quad Y_p = a_p y_p$$

et l'on effectuera alors sur l'équation (α) la transformation qui fait passer de y_1 à y_{r+2} et ainsi de suite.

En poursuivant ainsi, nous obtiendrons un faisceau d'intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_s$ qui auront les deux propriétés suivantes : 1° une substitution du groupe g multiplie les variables $y_1, y_2, \ldots, y_s$ par le même facteur; 2° une substitution du groupe de monodromie ou bien échange $y_1, \ldots, y_s$ entre elles ou avec leurs combinaisons linéaires ou bien fait passer à un faisceau d'intégrales tout différent. On sait que, si $s = q$, le groupe de monodromie est appelé *primitif;* sinon, il est appelé *imprimitif*.

Dans ce dernier cas, considérons une de ces substitutions qui font passer du faisceau $y_1, \ldots, y_s$ au faisceau $y_{s+1}, \ldots, y_{2s}$; il est facile de voir que $y_{s+1}, \ldots, y_{2s}$ sont indépendantes entre elles et indépendantes aussi de $y_1, \ldots, y_s$. Elles ont les mêmes propriétés que $y_1, \ldots, y_s$.

En continuant ainsi, on décomposera le système fondamental $y_1, \ldots, y_q$ en ρ faisceaux $(y_1, \ldots, y_s)$, $(y_{s+1}, \ldots, y_{2s})$, $\ldots$, $(y_{\rho(s-1)+1}, \ldots, y_{\rho s})$ et les équations du groupe g seront

$$\left.\begin{array}{lcl} Y_1 = a y_1, & \ldots, & Y_s = a y_s \\ Y_{s+1} = b y_{s+1}, & \ldots, & Y_{2s} = b y_{2s} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots \\ Y_{\rho(s-1)+1} = l y_{\rho(s-1)+1}, & \ldots, & Y_{\rho s} = l y_{\rho s} \end{array}\right\} \quad q = \rho s.$$

Le faisceau d'intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_s$ vérifie une équation linéaire d'ordre s à coefficients algébriques, puisque $\frac{y'_1}{y_1}, \ldots, \frac{y'_s}{y_s}$ sont algébriques

$$(3) \qquad \frac{d^s y}{dx^s} + \theta_1 \frac{d^{s-1} y}{dx^{s-1}} + \ldots + \theta_s y = 0.$$

Nous pouvons en calculer facilement les coefficients. En effet, en posant

$$\delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_s \\ y'_1 & y'_2 & \cdots & y'_s \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot \\ y_1^{(s-1)} & y_2^{(s-1)} & \cdots & y_s^{(s-1)} \end{vmatrix},$$

nous avons

$$-\theta_1 = \frac{\delta'}{\delta}.$$

Les substitutions du groupe de monodromie laissent donc θ_1 inaltéré si elles ne font qu'échanger $y_1, \ldots, y_s$ entre elles ou avec leurs combinaisons linéaires; si, au contraire, elles permutent les faisceaux d'intégrales, θ_1 prend autant de valeurs qu'il y a de faisceaux. θ_1 *est une fonction algébrique à* ρ *déterminations.*

Mais δ vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre C_q^s à coefficients rationnels qu'il est facile de former à partir de l'équation (2). Nous aurons à rechercher si cette équation admet une intégrale dont la dérivée logarithmique soit une fonction algébrique à ρ déterminations.

La fonction θ_1 étant obtenue, des différentiations et des résolutions d'équations du premier degré nous donneront $\theta_2, \ldots, \theta_s$. Nous formons ainsi l'équation (3).

Le sous-groupe continu maximum de son groupe de rationalité est

$$Y_1 = a y_1, \qquad \ldots, \qquad Y_s = a y_s.$$

Faisons la transformation

$$(4) \qquad y = e^{-\frac{1}{s}\int \theta_1 \, dx} z.$$

L'équation en z obtenue sera privée de terme en $\frac{d^{s-1} z}{dx^{s-1}}$; le sous-groupe continu maximum du groupe de rationalité sera de la forme

$$Z_1 = a z_1, \qquad Z_s = a z_s;$$

mais, comme il doit laisser invariable le déterminant

$$\begin{vmatrix} z_1 & \cdots & z_s \\ z'_1 & \cdots & z'_s \\ \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot \\ z_1^{(s-1)} & \cdots & z_s^{(s-1)} \end{vmatrix},$$

il en résulte

$$a = 1.$$

L'intégrale générale de l'équation en z doit donc être algébrique.

Ce fait que l'intégrale est algébrique simplifie considérablement sa recherche. La méthode la plus rapide est celle donnée par M. Painlevé (*Comptes rendus*, 1887, 1888). La fonction $u = \frac{y'}{y}$ vérifie une équation algébrique; les travaux de M. Jordan font connaître une limite supérieure du degré de l'équation par rapport à u; la considération des équations déterminantes relatives aux points singuliers donne une limite supérieure du degré par rapport à x.

Tout ceci est considérablement simplifié dans le cas où $s = q$ (ce qui arrive nécessairement si q est premier), car l'équation (3) se confond avec l'équation (2). On fait alors immédiatement la transformation (4) et l'on cherche les intégrales algébriques de l'équation en z.

CHAPITRE VI.

LES ÉQUATIONS DU SECOND ORDRE.

1. *Classification des groupes linéaires homogènes continus à deux variables.* — Les équations d'un tel groupe G sont de la forme

$$Y_1 = a_1 y_1 + b_1 y_2, \qquad Y_2 = a_2 y_1 + b_2 y_2$$

et contiennent au plus quatre paramètres.

Supposons que y_1 et y_2 soient les coordonnées homogènes d'un point d'une droite. Les substitutions du groupe G effectuent sur les points de cette droite des transformations projectives formant un groupe continu Γ dont l'équation est

$$\frac{Y_1}{a_1 y_1 + b_1 y_2} = \frac{Y_2}{a_2 y_1 + b_2 y_2}.$$

Nous partagerons les groupes linéaires G en deux catégories, suivant que le groupe Γ est le groupe projectif général à trois paramètres de la droite ou un de ses sous-groupes. Nous calculerons pour chaque catégorie un invariant différentiel caractéristique.

I. *Le groupe* Γ *est le groupe projectif général à trois paramètres de la droite.* — Nous pouvons écrire son équation sous la forme

$$\frac{Y_1}{\alpha_1 y_1 + \beta_1 y_2} = \frac{Y_2}{\alpha_2 y_1 + \beta_2 y_2}, \qquad \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 1.$$

Déterminons les divers groupes G correspondants.

Les transformations de ces groupes sont certainement de la forme

$$\begin{aligned} Y_1 &= \rho(\alpha_1 y_1 + \beta_1 y_2),\\ Y_2 &= \rho(\alpha_2 y_1 + \beta_2 y_2), \end{aligned}$$

les quantités ρ, ρ', ρ'', ... relatives aux diverses transformations, vérifiant l'équation

$$\rho\rho' = \rho''.$$

Cette relation est tout d'abord vérifiée si toutes les quantités ρ sont égales à ± 1. On obtient alors le groupe linéaire homogène spécial

$$\left.\begin{aligned} Y_1 &= \alpha_1 y_1 + \beta_1 y_2\\ Y_2 &= \alpha_2 y_1 + \beta_2 y_2 \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 1).$$

On peut aussi laisser varier ρ arbitrairement, et l'on a le groupe linéaire homogène général à quatre paramètres

$$\begin{aligned} Y_1 &= a_1 y_1 + b_1 y_2,\\ Y_2 &= a_2 y_1 + b_2 y_2. \end{aligned}$$

Il n'y a pas d'autre groupe linéaire algébrique continu correspondant au groupe Γ. Car, si, pour une transformation particulière, $|\rho|$ a une valeur $\omega \neq 1$, il doit prendre nécessairement toutes les valeurs comprises entre 1 et ω et, par suite, les puissances de $|\rho|$ prennent des valeurs positives quelconques. Mais, comme les relations entre ρ, α_1, β_1, α_2, β_2 sont algébriques, il est impossible que ces relations donnent pour $|\rho|$ toutes les valeurs positives si elles ne font acquérir à ρ toutes les valeurs réelles ou imaginaires.

L'invariant le plus simple du groupe linéaire homogène spécial est la fonction

$$v = y_1 y_2' - y_2 y_1'.$$

Pour le groupe général, l'invariant est $\frac{v'}{v}$, qui est aussi un invariant du groupe spécial. Cette fonction $\frac{v'}{v}$ sera donc l'invariant le plus simple attaché à la première catégorie de groupes linéaires.

II. *Le groupe* Γ *est un sous-groupe du groupe projectif.*

M. Lie a montré (*Theorie der Transformationsgruppen*, t. III, p. 17) que Γ laisse invariable un point de la droite. Nous pouvons prendre ce point pour origine de coordonnées ($y_1 = 0$), car cela revient à remplacer le groupe G par un groupe homologue.

Les équations du groupe Γ sont alors

$$\frac{Y_1}{\alpha_1 y_1} = \frac{Y_2}{\alpha_2 y_1 + \beta_2 y_2},$$

et celles du groupe G

$$Y_1 = a_1 y_1,$$
$$Y_2 = a_2 y_1 + b_2 y_2,$$

a_1, a_2, b_2, n'étant indépendants que si le groupe G est à trois paramètres.

Tous ces groupes admettent l'invariant différentiel $\frac{y'_1}{y_1}$ que nous choisirons comme invariant caractéristique de la deuxième catégorie.

Le théorème suivant résume les résultats obtenus dans ce paragraphe :

Théorème. — *Les groupes continus linéaires homogènes à deux variables se partagent en deux catégories qui comprennent respectivement :*

I. *Le groupe linéaire homogène général et le groupe linéaire homogène spécial;* $V = \frac{v'}{v}$ *est l'invariant le plus simple, commun à ces deux groupes.*

II. *Les groupes dont les équations sont de la forme*

$$Y_1 = a_1 y_1, \qquad Y_2 = a_2 y_1 + b_2 y_2;$$

$U = \frac{y'_1}{y_1}$ *est l'invariant caractéristique, commun à tous ces groupes.*

2. *Détermination du groupe de rationalité de l'équation*

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p_1 \frac{dy}{dx} + p_2 y = 0. \tag{1}$$

Nous supposons que p_1 et p_2 sont des fonctions rationnelles de x. Tout ce que nous dirons s'applique au cas où ce sont des fonctions algébriques.

Le groupe de rationalité de l'équation (1) ou tout au moins son groupe continu maximum appartient à l'une des deux catégories obtenues plus haut. *Les équations du second ordre se partagent donc en deux catégories suivant la nature de leur groupe de rationalité.*

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une équation appartienne à une catégorie donnée est que l'invariant caractéristique de cette catégorie soit rationnel ou algébrique, quand on y remplace y_1, y_2, par un système fondamental d'intégrales de l'équation (1) (Chap. V, n° 3). Examinons, séparément, les deux cas qui peuvent se présenter.

I. Pour toutes les équations (1), l'invariant $\frac{v'}{v}$ est rationnel, car

$$\frac{v'}{v} = \frac{y_1 y''_2 - y_2 y''_1}{y_1 y'_2 - y_2 y'_1} = -p_1.$$

Les équations de la première catégorie seront donc caractérisées par cette propriété négative qu'elles n'appartiennent pas à la deuxième catégorie. Nous verrons tout à l'heure comment l'on peut reconnaître s'il en est ainsi; supposons, pour le moment, le fait acquis.

Afin de poursuivre la détermination du groupe de rationalité, nous recherchons si ce groupe est le groupe linéaire général ou bien si son sous-groupe continu maximum est le groupe linéaire spécial. Dans ce dernier cas seulement, l'invariant v de ce groupe est une fonction algébrique de x; or v est donné par l'équation

$$v = e^{-\int p_1 dx}.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que v soit algébrique est évidemment que la fonction p_1 n'ait, dans tout le plan, que des pôles simples avec des résidus commensurables.

Si cette condition n'est pas vérifiée, le groupe de rationalité de (1) est le groupe linéaire homogène général.

Si, au contraire, v est une fonction algébrique, le groupe de rationalité admet comme sous-groupe continu maximum le groupe linéaire homogène spécial; la forme de la fonction v permet ensuite de déterminer complètement le groupe de rationalité.

II. Les équations de la deuxième catégorie sont celles dont le groupe de rationalité ou son sous-groupe continu maximum appartiennent à la deuxième catégorie; pour ces équations, l'invariant $U = \frac{y'_1}{y_1}$ est rationnel ou algébrique.

Nous avons à reconnaître si l'équation (1) admet une intégrale dont la dérivée logarithmique est rationnelle ou algébrique. C'est un problème que nous savons résoudre : la méthode exposée au Chapitre V, nº 4, nous conduit aux résultats suivants :

1º $\frac{y'}{y}$ *n'a qu'une seule détermination.* — On l'obtient en cherchant les intégrales de l'équation (1), dont la dérivée logarithmique est rationnelle. Au cas où cette recherche aboutit, nous avons

$$\frac{y'}{y} = r(x).$$

Toutes les intégrales de l'équation

$$z = y' - r(x)y = 0$$

appartiennent à l'équation (1), qui, par suite, peut s'écrire

$$\frac{dz}{dx} - r_1(x)z = 0,$$

$r_1(x)$ étant une fonction rationnelle (Schlesinger, *Handbuch der linearen Differentialgleichungen,* t. I, p. 45).

Nous calculerons d'abord par une quadrature la fonction z ; l'équation

$$y' - r(x)y = z$$

nous donnera ensuite par deux quadratures l'intégrale générale de l'équation (1).

La détermination complète du groupe de rationalité revient à l'étude de ces quadratures.

2º $\frac{y'}{y}$ *a deux déterminations.* — La fonction symétrique

$$\frac{y'_1}{y_1} + \frac{y'_2}{y_2} = \frac{d}{dx}\log y_1 y_2$$

est rationnelle.

Nous formons l'équation linéaire du troisième ordre qui admet pour intégrale $y_1 y_2$ et nous en cherchons les intégrales, dont la dérivée logarithmique est rationnelle. Lorsque cette recherche aboutit, il existe une expression de la forme

$$Y = a y_1^2 + 2 b y_1 y_2 + c y_2^2,$$

dont la dérivée logarithmique est rationnelle.

Si $b^2 - ac$ était nul, Y serait le carré d'une intégrale de l'équation (1) et cette intégrale aurait sa dérivée logarithmique rationnelle; nous l'aurions reconnue directement.

Donc $b^2 - ac \neq 0$, et Y est le produit de deux intégrales distinctes de (1); on peut donc écrire

$$Y = y_1 y_2,$$

et l'on a

$$\frac{y'_1}{y_1} + \frac{y'_2}{y_2} = r_1(x).$$

Il est facile de calculer la fonction symétrique $\frac{y'_1}{y_1}\frac{y'_2}{y_2}$. En effet

$$\frac{y''_1}{y_1} - \frac{y'^2_1}{y_1^2} + \frac{y''_2}{y_2} - \frac{y'^2_2}{y_2^2} = r'_1(x),$$

et, en remplaçant y''_1 et y''_2 par leurs valeurs tirées de (1),

$$-p_1 r_1(x) - 2p_2 - \frac{y'^2_1}{y_1^2} - \frac{y'^2_2}{y_2^2} = r'_1(x),$$

ou

$$-p_1 r_1(x) - 2p_2 - r_1^2(x) + 2\frac{y'_1}{y_1}\frac{y'_2}{y_2} = r'_1(x).$$

Nous pouvons donc écrire l'équation algébrique donnant $U = \frac{y'}{y}$ en fonction de x

$$U^2 - r_1(x)U + r_2(x) = 0,$$

$\log y_1$ et $\log y_2$ sont donnés par les intégrales hyperelliptiques

$$\log y_1 = \int U_1\,dx, \qquad \log y_2 = \int U_2\,dx.$$

Le sous-groupe continu maximum du groupe de rationalité est de la forme

$$Y_1 = a_1 y_1, \qquad Y_2 = a_2 y_2.$$

L'étude des intégrales hyperelliptiques achèvera la détermination du groupe de rationalité.

3° $\frac{y'}{y}$ *a plus de deux déterminations.* — Nous avons vu alors, au Chapitre V, n° 4, que le sous-groupe continu maximum du groupe de rationalité est

$$Y_1 = \alpha y_1, \qquad Y_2 = \alpha y_2.$$

La transformation

$$y = e^{-\frac{1}{2}\int p_1\,dx} z$$

nous fait passer à l'équation

$$4z'' + (p_1^2 - 2p'_1 + 4p_2)z = 0,$$

dont toutes les intégrales doivent être algébriques. On reconnaîtra s'il en est ainsi par la méthode de M. Painlevé.

L'énoncé suivant résume les résultats obtenus dans ce paragraphe :

Théorème. — *Les équations différentielles linéaires homogènes du second ordre se partagent en deux catégories caractérisées comme il suit :*

I. *Aucune intégrale n'a sa dérivée logarithmique algébrique.*

II. *La dérivée logarithmique d'une intégrale est une fonction algébrique à* N *déterminations; trois cas sont à distinguer :*

$N > 2$: *L'intégrale générale est le produit de l'exponentielle* $e^{-\frac{1}{2}\int p_1 dx}$ *par une fonction algébrique.*

$N = 2$: *Les logarithmes de deux intégrales particulières s'expriment par des intégrales hyperelliptiques.*

$N = 1$: *Le logarithme d'une intégrale au moins s'exprime par une quadrature portant sur une fonction rationnelle. L'intégration s'achève par quadratures.*

La détermination complète du groupe de rationalité s'achève ou revient à l'étude de quadratures.

CHAPITRE VII.

ÉQUATIONS DU TROISIÈME ORDRE.

1. *Classification des groupes linéaires homogènes continus à trois variables.* — Les équations d'un tel groupe G sont de la forme

$$(\mathrm{G}) \qquad \begin{cases} Y_1 = a_1 y_1 + b_1 y_2 + c_1 y_3, \\ Y_2 = a_2 y_1 + b_2 y_2 + c_2 y_3, \\ Y_3 = a_3 y_1 + b_3 y_2 + c_3 y_3 \end{cases}$$

et contiennent au plus neuf paramètres.

Supposons que y_1, y_2, y_3 soient les coordonnées homogènes d'un point d'un plan. Les substitutions du groupe G effectuent, sur les points de ce plan, des transformations projectives formant un groupe continu Γ, dont les équations sont

$$(\Gamma) \qquad \frac{Y_1}{a_1 y_1 + b_1 y_2 + c_1 y_3} = \frac{Y_2}{a_2 y_1 + b_2 y_2 + c_2 y_3} = \frac{Y_3}{a_3 y_1 + b_3 y_2 + c_3 y_3}.$$

Nous allons classer ces groupes d'après les figures géométriques qu'ils laissent invariables, et nous rangerons les groupes linéaires de la même façon que les groupes projectifs qui leur correspondent.

D'après un théorème de M. Lie (*Th. der Transformationsgruppen*, t. III, p. 94), un groupe continu projectif du plan, qui n'est pas le groupe projectif général, laisse invariable ou un point ou une droite, ou bien c'est le groupe à trois paramètres d'une conique non décomposable.

Nous avons donc quatre catégories de groupes linéaires; nous allons déterminer, pour chacune d'elles, la forme des groupes qui y sont contenus et un invariant différentiel caractéristique.

I. *Le groupe* Γ *est le groupe projectif général à huit paramètres du plan.* — Ses équations peuvent s'écrire

$$\frac{Y_1}{\alpha_1 y_1 + \beta_1 y_2 + \gamma_1 y_3} = \frac{Y_2}{\alpha_2 y_1 + \beta_2 y_2 + \gamma_2 y_3} = \frac{Y_3}{\alpha_3 y_1 + \beta_3 y_2 + \gamma_3 y_3}$$

avec

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 1.$$

On reconnaît, comme au Chapitre précédent, qu'il y a deux groupes linéaires correspondant à ce groupe :

Le groupe linéaire homogène spécial à huit paramètres

$$Y_i = \alpha_i y_1 + \beta_i y_2 + \gamma_i y_3 \qquad (i = 1, 2, 3),$$
$$\Delta = 1;$$

Le groupe linéaire homogène général à neuf paramètres

$$Y_i = a_i y_1 + b_i y_2 + c_i y_3 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

L'invariant le plus simple du groupe spécial est

$$w = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}.$$

Pour le groupe général, l'invariant est $\frac{w'}{w}$, qui appartient aussi au groupe spécial.

La fonction $W = \frac{w'}{w}$ sera donc l'invariant le plus simple attaché à la première catégorie de groupes linéaires.

II. *Le groupe* Γ *laisse une droite invariable.* — Nous pouvons supposer qu'elle est le côté $y_1 = 0$ du triangle de référence.

Les équations du groupe G sont alors de la forme

$$\begin{aligned} Y_1 &= a_1 y_1, \\ Y_2 &= a_2 y_1 + b_2 y_2 + c_2 y_3, \\ Y_3 &= a_3 y_1 + b_3 y_2 + c_3 y_3, \end{aligned}$$

les paramètres a, b, c n'étant indépendants que si le groupe G est à sept paramètres.

Tous ces groupes admettent l'invariant différentiel $U = \frac{y'_1}{y_1}$, que nous choisirons comme invariant caractéristique de la deuxième catégorie.

III. *Le groupe* Γ *laisse un point invariable.* — Nous pouvons supposer que c'est le sommet $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ du triangle de référence.

Les équations du groupe G sont alors de la forme

$$\begin{aligned} Y_1 &= a_1 y_1 + b_1 y_2, \\ Y_2 &= a_2 y_1 + b_2 y_2, \\ Y_3 &= a_3 y_1 + b_3 y_2 + c_3 y_3, \end{aligned}$$

les paramètres a, b, c n'étant indépendants que si le groupe G est à sept paramètres.

Nous poserons

$$v = y_1 y'_2 - y_2 y'_1.$$

Tous les groupes de la troisième catégorie admettent l'invariant différentiel $V = \frac{v'}{v}$, qui en est l'invariant caractéristique.

IV. *Le groupe* Γ *est le groupe projectif à trois paramètres d'une conique non décomposable,* dont nous pouvons supposer l'équation ramenée à la forme

$$\theta = y_2^2 - y_1 y_3 = 0.$$

On voit facilement que cette catégorie comprend deux groupes :

Un groupe à trois paramètres formé des transformations linéaires dont le déterminant est égal à 1, qui laissent inaltérée la fonction θ.

Un groupe à quatre paramètres formé des transformations linéaires qui multiplient θ par un facteur constant quelconque.

Ces deux groupes admettent donc l'invariant différentiel $\Theta = \frac{\theta'}{\theta}$, qui est l'invariant caractéristique de la quatrième catégorie.

L'énoncé suivant résume les résultats acquis dans ce paragraphe :

Théorème. — *Les groupes continus linéaires homogènes à trois variables se partagent en quatre catégories qui comprennent respectivement :*

I. *Le groupe linéaire général et le groupe linéaire spécial;* $W = \frac{w'}{w}$ *est l'invariant le plus simple commun à ces deux groupes.*

II. *Les groupes qui laissent invariable l'équation* $y_1 = 0$; *l'invariant caractéristique est* $U = \frac{y'_1}{y_1}$.

III. *Les groupes qui laissent invariables le système d'équations* $y_1 = 0, y_2 = 0$; *l'invariant caractéristique est* $V = \frac{v'}{v}$.

IV. *Les groupes qui laissent invariable l'équation* $\theta = 0$; *l'invariant caractéristique est* $\Theta = \frac{\theta'}{\theta}$.

Un même groupe peut d'ailleurs appartenir à plusieurs catégories.

2. *Détermination du groupe de rationalité de l'équation*

$$\frac{d^3y}{dx^3} + p_1\frac{d^2y}{dx^2} + p_2\frac{dy}{dx} + p_3 y = 0. \tag{1}$$

Les coefficients p_1, p_2, p_3 sont rationnels (ou algébriques).

Le groupe de rationalité, ou tout au moins son sous-groupe continu maximum, appartient à l'une des quatre catégories obtenues plus haut. *Les équations du troisième ordre se partagent donc en quatre catégories suivant la nature de leur groupe de rationalité.*

Pour décider à quelle catégorie appartient l'équation (1), il faut rechercher si les invariants donnés plus haut sont rationnels ou algébriques quand on remplace y_1, y_2, y_3 par un système fondamental d'intégrales de cette équation.

Mais les quantités u, v, w, θ vérifient des équations différentielles linéaires à coefficients rationnels qu'il est aisé de former; nous aurons à reconnaître si ces équations ont des intégrales dont la dérivée logarithmique est rationnelle ou algébrique (Chap. V, n° 4).

Nous allons parcourir les diverses catégories et approfondir la solution du problème en étudiant ce qui est particulier à chacune d'elles.

I. Pour toutes les équations (1), l'invariant $\frac{w'}{w}$ est rationnel, car

$$\frac{w'}{w} = -p_1.$$

Les équations de la première catégorie sont donc caractérisées par cette propriété négative qu'elles n'appartiennent à aucune des trois autres catégories. Nous verrons tout à l'heure comment on peut reconnaître s'il en est ainsi; supposons pour le moment le fait acquis.

Nous rechercherons, comme au n° 2 du Chapitre précédent, si le groupe de rationalité est le groupe linéaire général ou si son sous-groupe continu maximum est le groupe linéaire spécial.

II. Les équations de la deuxième catégorie sont celles dont le groupe de rationalité ou son sous-groupe continu maximum appartiennent à la deuxième catégorie; pour ces équations, l'invariant $U = \frac{y_1'}{y_1}$ est rationnel ou algébrique.

Nous rechercherons donc, par la méthode exposée au Chap. V, n° 4, si l'équation (1) admet des intégrales dont la dérivée logarithmique est rationnelle ou algébrique. Il peut se présenter les cas suivants :

1° $\frac{y'}{y}$ *n'a qu'une seule détermination.* Soit

$$\frac{y'}{y} = r(x).$$

Toutes les intégrales de l'équation

$$z = y' - r(x)y = 0$$

appartiennent à l'équation (1) qui, par suite, peut s'écrire

$$\frac{d^2z}{dx^2} + q_1\frac{dz}{dx} + q_2 z = 0,$$

q_1 et q_2 étant des fonctions rationnelles.

Nous rechercherons, comme il a été dit au Chap. VI, le groupe de rationalité de cette équation; lorsqu'il sera déterminé, nous en déduirons le groupe de rationalité de l'équation (1).

2° $\frac{y'}{y}$ *a deux déterminations.* Le sous-groupe continu maximum du groupe de rationalité a pour équations

$$\begin{aligned} Y_1 &= a_1 y_1, \\ Y_2 &= a_2 y_2, \\ Y_3 &= a_3 y_1 + b_3 y_2 + c_3 y_3, \end{aligned}$$

y_1 et y_2 sont deux intégrales indépendantes de l'équation à coefficients rationnels

$$t = y'' + r_1(x) y' + r_2(x) = 0. \tag{2}$$

L'équation (1) peut donc s'écrire

$$\frac{dt}{dx} + r_3(x) t = 0.$$

La fonction t se calculera par une quadrature; l'équation à second membre (2) que nous savons intégrer lorsque $t = 0$ nous donnera ensuite, par des quadratures, l'intégrale générale de l'équation (1).

La détermination complète du groupe de rationalité revient à l'étude de ces quadratures.

3° $\frac{y'}{y}$ *a trois déterminations relatives à trois intégrales linéairement indépendantes.* Les équations du sous-groupe continu maximum du groupe de rationalité sont

$$Y_1 = a_1 y_1, \qquad Y_2 = a_2 y_2, \qquad Y_3 = a_3 y_3.$$

Les diverses déterminations de la fonction $\log y$ sont données par des intégrales abéliennes attachées à la courbe

$$U^3 + r_1(x) U^2 + r_2(x) U + r_3(x) = 0,$$
$$\log y = \int U \, dx.$$

4° $\frac{y'}{y}$ *a plus de trois déterminations.* Les équations du sous-groupe continu maximum du groupe de rationalité sont

$$Y_1 = a y_1, \qquad Y_2 = a y_2, \qquad Y_3 = a y_3.$$

L'intégrale générale est le produit de l'exponentielle $e^{-\frac{1}{3}\int p_1 dx}$ par une fonction algébrique.

III. Les équations de la troisième catégorie sont celles dont le groupe de rationalité ou son sous-groupe continu maximum appartiennent à la troisième catégorie; pour ces équations, l'invariant $V = \frac{v'}{v}$ est rationnel ou algébrique.

Il est avantageux de remplacer l'invariant V par l'invariant

$$V + p_1 = \frac{v'}{v} - \frac{w'}{w} = \frac{d}{dx} \log \frac{v}{w}.$$

La fonction $\eta = \frac{v}{w}$ vérifie l'équation adjointe de l'équation (1)

$$\frac{d^3 \eta}{dx^3} - \frac{d^2 p_1 \eta}{dx^2} + \frac{d p_2 \eta}{dx} - p_3 \eta = 0. \tag{3}$$

Nous rechercherons si cette équation a des intégrales dont la dérivée logarithmique est rationnelle ou algébrique. La discussion est la même que celle que nous venons de faire pour les équations de la deuxième catégorie; elle nous conduit à la détermination du groupe de rationalité de l'équation (3). Le groupe de rationalité de l'équation (1) est le groupe dualistique du groupe ainsi trouvé (Vessiot).

IV. Le groupe de rationalité des équations de la quatrième catégorie contient le groupe linéaire homogène continu à trois paramètres qui laisse invariable la fonction

$$\theta = y_2^2 - y_1 y_3.$$

Pour ces équations, l'invariant $\Theta = \frac{\theta'}{\theta}$ est rationnel ou algébrique.

La fonction θ vérifie une équation linéaire à coefficients rationnels du sixième ordre que l'on obtient comme il suit. On pose

$$\theta = y^2$$

et l'on différentie six fois cette équation en remplaçant, lorsqu'il y a lieu, $\frac{d^3 y}{dx^3}$ par sa valeur tirée de (1); l'élimination des six quantités

$$\frac{d^i y}{dx^i} \frac{d^j y}{dx^j} \qquad (i, j = 0, 1, 2)$$

nous conduit à l'équation cherchée, dont l'intégrale est la forme quadratique générale aux variables y_1, y_2, y_3.

On calculera les intégrales de cette équation dont la dérivée logarithmique est rationnelle ou algébrique.

S'il existe une telle intégrale, elle s'exprime certainement par une forme quadratique en y_1, y_2, y_3, dont le discriminant est différent de zéro; sinon l'équation (1) appartiendrait à la classe II ou à la classe III et nous l'aurions déjà reconnu.

De plus, la fonction $\frac{\theta'}{\theta}$ est rationnelle; car si elle avait deux déterminations $\frac{\theta'_1}{\theta_1}$ et $\frac{\theta'_2}{\theta_2}$, le sous-groupe continu maximum du groupe de rationalité laisserait invariable chacune des deux coniques :

$$\theta_1 = 0, \qquad \theta_2 = 0,$$

et, par suite, leurs points d'intersection. L'équation appartiendrait donc à la classe III.

Supposons donc que l'on ait obtenu

$$\Theta = \frac{\theta'}{\theta} = r(x). \tag{4}$$

Si la fonction θ, définie par cette équation, est algébrique, le groupe de rationalité admet comme sous-groupe continu maximum le groupe à trois paramètres qui laisse θ inaltéré. La nature de la fonction algébrique θ permet d'achever la détermination du groupe de rationalité.

Si θ n'est pas algébrique, le groupe de rationalité est le groupe à quatre paramètres qui laisse invariable l'équation $\theta = 0$.

Quel profit peut-on tirer de l'équation (4) pour simplifier l'intégration de l'équation (1)?

Nous transformerons d'abord l'équation (1) en une équation analogue pour laquelle la relation entre les intégrales sera

$$\theta = 0.$$

Pour définir la transformation employée, nous nous servirons du mode de représentation des systèmes fondamentaux d'intégrales adopté par Halphen. Nous ferons correspondre à chaque système de valeurs y_1, y_2, y_3 le point du plan dont les coordonnées homogènes sont y_1, y_2, y_3. Lorsque x varie, ce point se déplace sur une courbe C, qui représente le système fondamental y_1, y_2, y_3.

Considérons la courbe C relative à un système fondamental vérifiant l'équation (4). La tangente à la courbe C en un de ses points M coupe la conique $\theta = 0$ en deux points m, dont il est facile de trouver les coordonnées $\overline{y_1}, \overline{y_2}, \overline{y_3}$. Nous avons, en effet, puisque m est sur la tangente,

$$\begin{aligned}\overline{y_1} &= \alpha y_1 + \beta y'_1,\\ \overline{y_2} &= \alpha y_2 + \beta y'_2,\\ \overline{y_3} &= \alpha y_3 + \beta y'_3,\end{aligned}$$

et, puisqu'il est sur la conique $\theta = 0$,

$$(\alpha y_2 + \beta y'_2)^2 - (\alpha y_1 + \beta y'_1)(\alpha y_3 + \beta y'_3) = 0,$$
$$\alpha^2 (y_2^2 - y_1 y_3) + \alpha\beta(2 y_2 y'_2 - y_1 y'_3 - y_3 y'_1) + \beta^2 (y'^2_2 - y'_1 y'_3) = 0.$$

Les équations (1) et (4) permettent de calculer facilement, par des différentiations et des résolutions d'équations du premier degré, des quantités proportionnelles aux expressions

$$y_2^2 - y_1 y_3, \quad 2 y_2 y'_2 - y_1 y'_3 - y_3 y'_1, \quad y'^2_2 - y'_1 y'_3.$$

On trouve ainsi que le rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ est donné par l'équation à coefficients rationnels

$$\alpha^2 + r(x)\alpha\beta + s(x)\beta^2 = 0.$$

Les deux valeurs de ce rapport correspondent aux deux points d'intersection de la tangente en M et de la conique.

Si nous faisons maintenant sur l'équation (1) la transformation

$$\bar{y} = \alpha y + \beta y', \tag{5}$$

on obtient une nouvelle équation

$$\frac{d^3 \bar{y}}{dx^3} + \overline{p_1} \frac{d^2 \bar{y}}{dx^2} + \overline{p_2} \frac{d\bar{y}}{dx} + \overline{p_3}\, \bar{y} = 0, \tag{6}$$

dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de x, α et β et pour laquelle il existe un système d'intégrales fondamentales vérifiant la relation

$$\bar{y}_2^2 - \overline{y_1}\,\overline{y_3} = 0.$$

M. Goursat (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XI) a donné une méthode très élégante qui ramène l'intégration de l'équation (6) à celle d'une équation du second ordre.

Je me bornerai à énoncer le résultat :

Les intégrales de l'équation (6) *sont les carrés des intégrales d'une équation du second ordre à coefficients rationnels en* x, α, β.

Il résulte alors de l'équation (5) que :

Les intégrales de l'équation (1) *s'expriment en fonction de l'intégrale générale* z *de cette équation du second ordre par une formule de la forme*

$$y = Az^2 + Bz\frac{dz}{dx},$$

A *et* B *étant des fonctions rationnelles de* x, α *et* β.

L'énoncé suivant résume les résultats obtenus dans ce paragraphe.

THÉORÈME. — *Les équations différentielles linéaires homogènes du troisième ordre se partagent en quatre catégories caractérisées comme il suit :*

I. *Cette catégorie comprend les équations les plus générales et celles pour lesquelles* w *est une fonction algébrique.*

II. *La dérivée logarithmique d'une intégrale est une fonction algébrique.*

III. *La dérivée logarithmique de la fonction* v *ou bien encore d'une intégrale de l'équation adjointe est algébrique.*

IV. *La dérivée logarithmique d'une forme quadratique non décomposable des intégrales est rationnelle.*

Dans tous ces cas, la détermination effective du groupe de rationalité exige au plus l'étude de quadratures.

CHAPITRE VIII.

ÉQUATIONS DU QUATRIÈME ORDRE.

1. *Classification des groupes linéaires homogènes continus à quatre variables.* — Les équations d'un tel groupe G sont de la forme

$$Y_i = a_i y_1 + b_i y_2 + c_i y_3 + d_i y_4 \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

et contiennent au plus seize paramètres.

Supposons que y_1, y_2, y_3, y_4 soient les coordonnées homogènes d'un point de l'espace à trois dimensions. Les substitutions du groupe G effectuent sur les points de l'espace des transformations projectives formant un groupe continu Γ, dont les équations sont

$$\frac{Y_1}{a_1 y_1 + b_1 y_2 + c_1 y_3 + d_1 y_4} = \frac{Y_2}{a_2 y_1 + b_2 y_2 + c_2 y_3 + d_2 y_4} = \ldots.$$

Nous allons classer ces groupes, d'après les figures géométriques qu'ils laissent invariables et nous rangerons les groupes linéaires de la même façon que les groupes projectifs qui leur correspondent.

M. Lie a déterminé tous les groupes projectifs de l'espace ordinaire et il suffit de rassembler divers résultats qu'il a donnés (*Theorie der Transformationsgruppen*, t. III, p. 226, 235 et 236) pour reconnaître que les hypothèses suivantes sont seules à envisager :

I. Γ est le groupe projectif général de l'espace à trois dimensions, sinon il laisse invariable l'une au moins des figures suivantes :

II. Un plan;

III. Une droite;

IV. Un point.

Ou bien encore Γ est l'un ou l'autre des groupes suivants :

V. Le groupe projectif à six paramètres d'une surface du second degré non dégénérée.

VI. Le groupe projectif à dix paramètres d'un complexe linéaire non dégénéré.

VII. Le groupe projectif à trois paramètres d'une cubique gauche.

Nous avons donc sept catégories de groupes linéaires; nous allons déterminer pour chacune d'elles la forme des groupes qui y sont contenus et un invariant différentiel caractéristique.

I. *Le groupe* Γ *est le groupe projectif général à quinze paramètres de l'espace.* — On reconnaît alors, comme aux Chapitres précédents, qu'il y a deux groupes linéaires correspondant à ce groupe :

Le groupe linéaire homogène spécial à quinze paramètres formé de toutes les transformations linéaires dont le déterminant est égal à 1;

Le groupe linéaire homogène général à seize paramètres comprenant toutes les transformations linéaires.

L'invariant le plus simple du groupe spécial est

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 & y'_4 \\ y''_1 & y''_2 & y''_3 & y''_4 \\ y'''_1 & y'''_2 & y'''_3 & y'''_4 \end{vmatrix}.$$

Pour le groupe général, l'invariant le plus simple est $\frac{\Delta'}{\Delta}$.

La fonction $\frac{\Delta'}{\Delta}$ est donc l'invariant le plus simple commun aux groupes de la première catégorie.

II. *Le groupe* Γ *laisse un plan invariable.* — Nous pouvons supposer que c'est la face $y_1 = 0$ du tétraèdre de référence.

Les équations du groupe G sont alors de la forme

$$\left.\begin{aligned} Y_1 &= a_1 y_1, \\ Y_i &= a_i y_1 + b_i y_2 + c_i y_3 + d_i y_4 \end{aligned}\right\} \qquad (i = 2, 3, 4).$$

La fonction $U = \frac{y'_1}{y_1}$ est l'invariant caractéristique appartenant aux groupes de la deuxième catégorie.

III. *Le groupe* Γ *laisse une droite invariable.* — Nous pouvons supposer que c'est l'arête $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ du tétraèdre de référence.

Les équations du groupe G sont alors de la forme

$$\left.\begin{aligned} Y_1 &= a_1 y_1 + b_1 y_2 \\ Y_2 &= a_2 y_1 + b_2 y_2 \\ Y_i &= a_i y_1 + b_i y_2 + c_i y_3 + d_i y_4 \end{aligned}\right\} \qquad (i = 3, 4).$$

La fonction

$$V = \frac{v'}{v}, \qquad v = y_1 y'_2 - y_2 y'_1$$

est l'invariant différentiel caractéristique des groupes de la troisième catégorie.

IV. *Le groupe* Γ *laisse un point invariable.* — Nous pouvons supposer que c'est le sommet $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ du tétraèdre de référence.

Les équations du groupe G sont de la forme

$$\left.\begin{aligned} Y_i &= a_i y_1 + b_i y_2 + c_i y_3 \\ Y_4 &= a_4 y_1 + b_4 y_2 + c_4 y_3 + d_4 y_4 \end{aligned}\right\} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

La fonction $W = \frac{w'}{w}$, où

$$w = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \\ y''_1 & y''_2 & y''_3 \end{vmatrix}$$

est l'invariant différentiel caractéristique des groupes de la quatrième catégorie.

V. Γ *est le groupe projectif à six paramètres d'une surface du second degré non dégénérée* dont nous pouvons supposer l'équation ramenée à la forme

$$\theta = y_1 y_4 - y_2 y_3 = 0.$$

Cette catégorie comprend deux groupes :

Un groupe à six paramètres formé des transformations linéaires dont le déterminant est égal à 1, qui laissent inaltérée la fonction θ;

Un groupe à sept paramètres formé des transformations linéaires qui multiplient θ par un facteur constant quelconque.

Ces deux groupes admettent donc l'invariant différentiel $\Theta = \frac{\theta'}{\theta}$, qui est l'invariant caractéristique de la cinquième catégorie.

VI. Γ *est le groupe projectif à dix paramètres d'un complexe linéaire non dégénéré.*

Pour ce qui suit, il nous sera avantageux de supposer que ce complexe linéaire est celui qui est attaché à la cubique gauche

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{y_2}{y_3} = \frac{y_3}{y_4}$$

et qui peut être défini de la façon suivante :

Les coordonnées d'un point de la cubique s'expriment en fonction d'un paramètre par les formules

$$y_1 = t^3, \qquad y_2 = t^2, \qquad y_3 = t, \qquad y_4 = 1.$$

L'équation du plan osculateur à la cubique au point $t(y_1, y_2, y_3, y_4)$ sera donc

$$Y_1 - 3tY_2 + 3t^2 Y_3 - t^3 Y_4 = 0$$

ou

$$Y_1 y_4 - 3Y_2 y_3 + 3Y_3 y_2 - Y_4 y_1 = 0.$$

Les points de contact des plans osculateurs à la cubique menés par un point $M(z_1, z_2, z_3, z_4)$ de l'espace ont leurs coordonnées t définies par l'équation

$$z_1 - 3tz_2 + 3t^2z_3 - t^3z_4 = 0,$$

ou bien encore ces points sont dans le plan

$$(\alpha) \qquad z_1y_4 - 3z_2y_3 + 3z_3y_2 - z_4y_1 = 0.$$

Ces points, au nombre de trois, sont situés dans un plan P passant par le point M.

La cubique nous permet donc de définir une correspondance entre les points M et les plans P de l'espace qui est précisément la correspondance définie par le complexe linéaire formé par les droites joignant les deux points (y_1, y_2, y_3, y_4) et (z_1, z_2, z_3, z_4) dont les coordonnées vérifient l'équation (α).

L'équation (α) définit le complexe linéaire attaché à la cubique. On en déduit immédiatement l'équation différentielle des courbes dont les tangentes appartiennent à ce complexe :

$$\omega = y_1y'_4 - y_4y'_1 - 3(y_2y'_3 - y_3y'_2) = 0.$$

La sixième catégorie comprend deux groupes :

Un groupe à dix paramètres formé des transformations linéaires dont le déterminant est égal à 1, qui laissent inaltérée la fonction ω;

Un groupe à onze paramètres formé des transformations linéaires qui laissent inaltérée l'équation $\omega = 0$.

La fonction $\Omega = \frac{\omega'}{\omega}$ est l'invariant différentiel caractéristique de cette catégorie.

VII. Γ *est le groupe projectif à trois paramètres de la cubique gauche*

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{y_2}{y_3} = \frac{y_3}{y_4}.$$

Ce groupe laisse donc invariable le complexe linéaire dont nous venons de trouver l'équation. Les groupes linéaires correspondants admettent donc l'équation invariante $\omega = 0$ et possèdent l'invariant différentiel

$$\Omega = \frac{\omega'}{\omega}.$$

Ils laissent aussi invariable la développable formée par les tangentes à la cubique gauche et dont l'équation est

$$\sigma = (y_1 y_4 - y_2 y_3)^2 - 4(y_2^2 - y_1 y_3)(y_3^2 - y_2 y_4) = 0.$$

Ils admettent donc le nouvel invariant

$$\Sigma = \frac{\sigma'}{\sigma}.$$

Nous allons déterminer les équations des groupes G qui correspondent au groupe Γ.

Les coordonnées d'un point de la cubique gauche s'expriment en fonctions homogènes de deux paramètres λ_1 et λ_2 par les formules

$$y_1 = \lambda_1^3, \qquad y_2 = \lambda_1^2 \lambda_2, \qquad y_3 = \lambda_1 \lambda_2^2, \qquad y_4 = \lambda_2^3.$$

Si l'on suppose que λ_1 et λ_2 sont les coordonnées homogènes d'un point d'une droite, ces formules établissent une correspondance biuniforme entre les points M de la cubique et les points m de la droite.

Les transformations projectives de l'espace qui reproduisent la cubique correspondent aux transformations projectives de la droite et réciproquement.

En effet, une transformation projective de l'espace qui reproduit la cubique fait correspondre à un point M_1 un seul point M_2. On obtient donc sur la droite une transformation qui fait correspondre au point m_1 le seul point m_2; c'est une transformation projective.

Réciproquement, une transformation projective de la droite fait correspondre à un point m_1 le seul point m_2; elle donne donc sur la cubique une transformation qui fait correspondre au point M_1 le seul point M_2. Nous obtenons ainsi une transformation qui n'est définie que pour les points de la cubique; il est facile de la définir pour tout l'espace.

Pour cela, nous ferons correspondre au plan qui coupe la cubique aux trois points M_1, N_1, P_1 le plan qui la coupe aux trois points transformés M_2, N_2, P_2. La correspondance ainsi définie entre les plans de l'espace est biuniforme; c'est donc une transformation projective qui laisse la cubique invariable. Le théorème que nous avions en vue est donc démontré.

Il nous est maintenant facile de trouver les équations des groupes projectifs qui laissent la cubique invariable.

Les transformations projectives de la droite s'écrivent

$$(\beta) \qquad \Lambda_1 = a\lambda_1 + b\lambda_2 \qquad \Lambda_2 = c\lambda_1 + d\lambda_2.$$

Les transformations correspondantes de l'espace qui changent le point

$$y_1 = \lambda_1^3, \quad y_2 = \lambda_1^2\lambda_2, \quad y_3 = \lambda_1\lambda_2^2, \quad y_4 = \lambda_2^3$$

en le point

$$Y_1 = \Lambda_1^3, \quad Y_2 = \Lambda_1^2\Lambda_2, \quad Y_3 = \Lambda_1\Lambda_2^2, \quad Y_4 = \Lambda_2^3$$

s'exprimeront donc par les formules suivantes :

$$(\gamma) \quad \begin{cases} Y_1 = a^3 y_1 + 3a^2 b y_2 + 3ab^2 y_3 + b^3 y_4, \\ Y_2 = a^2 c y_1 + (2abc + a^2 d) y_2 + (b^2 c + 2abd) y_3 + b^2 d y_4, \\ Y_3 = ac^2 y_1 + (2acd + c^2 b) y_2 + (ad^2 + 2bcd) y_3 + bd^2 y_4, \\ Y_4 = c^3 y_1 + 3c^2 d y_2 + 3cd^2 y_3 + d^3 y_4. \end{cases}$$

Puisque les transformations (β) définissent le groupe projectif à trois paramètres de la droite, deux hypothèses seulement sont acceptables :

1° a, b, c, d sont indépendants. Les équations (γ) définissent un groupe linéaire à quatre paramètres.

2° a, b, c, d sont liés par la seule relation $ad - bc = 1$. Les équations (γ) définissent un groupe linéaire à trois paramètres.

Ce sont les deux seuls groupes linéaires homogènes qui appartiennent à la septième catégorie. Leurs invariants caractéristiques sont

$$\Omega = \frac{\omega'}{\omega}, \qquad \Sigma = \frac{\sigma'}{\sigma}.$$

L'énoncé suivant résume une partie des résultats acquis dans ce paragraphe :

Théorème. — *Les groupes continus linéaires homogènes à quatre variables se partagent en sept catégories qui comprennent respectivement :*

I. *Le groupe linéaire général et le groupe linéaire spécial;* $\frac{\Delta'}{\Delta}$ *est l'invariant le plus simple commun à ces deux groupes;*

II. *Les groupes qui laissent invariante l'équation* $y_1 = 0$; *l'invariant caractéristique est* $U = \frac{y_1'}{y_1}$;

III. *Les groupes qui laissent invariant le système d'équations* $y_1 = 0$, $y_2 = 0$; *l'invariant caractéristique est* $V = \frac{v'}{v}$;

IV. *Les groupes qui laissent invariant le système d'équations* $y_1 = 0$, $y_2 = 0, y_3 = 0$; *l'invariant caractéristique est* $W = \frac{w'}{w}$;

V. *Les deux groupes qui laissent invariante l'équation* $\theta = 0$ *et dont l'invariant commun est* $\Theta = \frac{\theta'}{\theta}$;

VI. *Les deux groupes qui laissent invariante l'équation* $\omega = 0$ *et dont l'invariant commun est* $\Omega = \frac{\omega'}{\omega}$;

VII. *Les deux groupes qui laissent la cubique gauche invariable et dont les invariants communs sont* $\Omega = \frac{\omega'}{\omega}$ *et* $\Sigma = \frac{\sigma'}{\sigma}$.

2. *Détermination du groupe de rationalité de l'équation*

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + p_1 \frac{d^3 y}{dx^3} + p_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + p_3 \frac{dy}{dx} + p_4 y = 0. \tag{1}$$

Les coefficients p_1, p_2, p_3, p_4 sont rationnels (ou algébriques).

Le groupe de rationalité ou tout au moins son sous-groupe continu maximum appartient à l'une des sept catégories énumérées plus haut. *Les équations du quatrième ordre se partagent donc en sept catégories suivant la nature de leur groupe de rationalité.*

Pour décider à quelle catégorie appartient l'équation (1), il faut rechercher si les invariants que nous avons donnés sont rationnels ou algébriques, quand on remplace y_1, y_2, y_3, y_4 par un système fondamental d'intégrales de cette équation.

Mais les quantités $u, v, w, \theta, \omega, \sigma$ vérifient des équations différentielles linéaires à coefficients rationnels qu'il est aisé de former; nous aurons à reconnaître si ces équations ont des intégrales dont la dérivée logarithmique est rationnelle ou algébrique.

Nous allons parcourir les diverses catégories et approfondir la solution du problème en indiquant ce qui est particulier à chacune d'elles.

I. Pour toutes les équations (1), l'invariant $\frac{\Delta'}{\Delta}$ est rationnel, car

$$\frac{\Delta'}{\Delta} = -p_1.$$

Les équations de la première catégorie sont donc caractérisées par cette propriété négative qu'elles n'appartiennent à aucune des six autres catégories. C'est donc lorsque les recherches que nous allons indiquer auront échoué que l'on saura que l'équation est de la première catégorie.

Nous rechercherons alors, comme au n° 2 du Chap. VI, si le groupe de rationalité est le groupe linéaire homogène général ou si son sous-groupe continu maximum est le groupe spécial.

II. Les équations de la deuxième catégorie sont caractérisées par ce fait que l'invariant $U = \frac{y'_1}{y_1}$ est rationnel ou algébrique.

Nous calculerons donc, par la méthode exposée au Chap. V, n° 4, les intégrales de l'équation (1) dont la dérivée logarithmique est rationnelle ou algébrique. La détermination du groupe de rationalité s'achèvera ensuite comme il a été indiqué pour les équations du troisième ordre (Chap. VII, n° 2).

IV. Pour les équations de la quatrième catégorie, l'invariant $W = \frac{w'}{w}$ est rationnel ou algébrique.

On verra, comme au Chapitre précédent, que l'adjointe de Lagrange de l'équation (1) admet une intégrale dont la dérivée logarithmique est rationnelle ou algébrique. On déterminera le groupe de rationalité de cette adjointe qui rentre dans la catégorie II; le groupe de rationalité de l'équation (1) est le groupe dualistique du groupe ainsi trouvé.

III et VI. L'équation (1) appartiendra à l'une ou à l'autre de ces deux catégories suivant que l'un ou l'autre des invariants

$$V = \frac{v'}{v}, \qquad \Omega = \frac{\omega'}{\omega}$$

est rationnel ou algébrique.

Mais les fonctions v et ω vérifient une même équation différentielle linéaire du sixième ordre que l'on peut former comme il suit. Posons

$$v = y_1 y'_2 - y_2 y'_1$$

et différentions cette équation en remplaçant toutes les fois qu'il y a lieu y_1^{IV} et y_2^{IV} par leurs valeurs déduites de l'équation (1). On obtient ainsi les expressions de v et de ses six premières dérivées en fonctions linéaires des six déterminants que l'on peut former dans la matrice

$$\begin{vmatrix} y_1 & y'_1 & y''_1 & y'''_1 \\ y_2 & y'_2 & y''_2 & y'''_2 \end{vmatrix}.$$

L'élimination de ces six déterminants conduit à une équation linéaire, à coefficients rationnels, du sixième ordre, dont l'intégrale générale est

$$\varepsilon = \sum a_{is}(y_i y'_k - y_k y'_i).$$

Nous recherchérons les intégrales de cette équation dont la dérivée logarithmique est rationnelle ou algébrique.

1° Une intégrale ε est telle que

$$\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = \text{fonct. rationn. de } x = r_1(x);$$

$\varepsilon = 0$ est l'équation différentielle des courbes dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire. Deux cas sont à distinguer.

a. Ce complexe se compose des droites qui coupent une droite fixe que nous pouvons supposer être la droite

$$y_1 = 0, \qquad y_2 = 0.$$

L'équation du complexe est alors

$$\varepsilon = y_1 y'_2 - y_2 y'_1 = 0.$$

Pour reconnaître si nous nous trouvons dans ce cas, il faut chercher s'il existe des intégrales y_1, y_2 de l'équation (1) telle que

$$y_1 y''_2 - y_2 y''_1 = r_1(x)(y_1 y'_2 - y_2 y'_1).$$

Des différentiations et des éliminations permettent de voir s'il en est ainsi et dans le cas favorable on trouve

$$y'_1 y''_2 - y'_2 y''_1 = r_2(x)(y_1 y'_2 - y_2 y'_1).$$

L'équation (1) appartient donc à la troisième catégorie. De plus elle est réductible et les intégrales y_1, y_2 vérifient l'équation du second ordre

$$z = \frac{d^2 y}{dx^2} - r_1(x)\frac{dy}{dx} + r_2(x) y = 0.$$

L'équation (1) peut donc s'écrire

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + q_1(x)\frac{dz}{dx} + q_2(x) z = 0,$$

q_1 et q_2 désignant deux fonctions rationnelles. On recherchera le groupe de rationalité de cette équation et l'on en conclura celui de l'équation (1).

b. Le complexe $\varepsilon = 0$ est un complexe général; on peut alors écrire son équation

$$\omega = 0.$$

Si aucun autre invariant U, V, W, Θ, Σ, n'est rationnel ou algébrique, l'équation (1) appartient à la sixième catégorie et son groupe de rationalité a dix ou onze paramètres.

On peut employer la relation

$$\frac{\omega'}{\omega} = r_1(x),$$

pour réduire l'équation (1) à une équation non linéaire du troisième ordre; on ne peut la ramener à une équation du second ordre.

2° Une intégrale ε est telle que $\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$ est une fonction algébrique à deux déterminations $\frac{\varepsilon'_1}{\varepsilon_1}$ et $\frac{\varepsilon'_2}{\varepsilon_2}$.

Le sous-groupe continu maximum Γ du groupe de rationalité laisse invariables les deux complexes

$$\varepsilon_1 = 0, \qquad \varepsilon_2 = 0,$$

et, par suite, la congruence qui est leur intersection. Les deux directrices de cette congruence sont distinctes, sans quoi nous aurions trouvé

$$\frac{v'}{v} = r_1(x).$$

Si ces deux directrices se coupent en un point A et sont situées dans un plan P, le groupe Γ laisse invariables le point A et le plan P; l'équation (1) appartient à la fois aux catégories II et IV et nous l'avons déjà reconnu.

Le seul cas nouveau qui puisse se présenter est donc celui où les deux directrices de la congruence ne se coupent pas; nous pouvons supposer que ce sont les arêtes

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad \text{et} \quad y_3 = 0, \quad y_4 = 0,$$

du tétraèdre de référence.

Le groupe Γ laisse invariables ces deux droites et s'écrit

$$\begin{aligned}
Y_1 &= a_1 y_1 + b_2 y_2,\\
Y_2 &= a_2 y_1 + b_2 y_2,\\
Y_3 &= c_3 y_3 + d_3 y_4,\\
Y_4 &= c_4 y_3 + d_4 y_4.
\end{aligned}$$

Les intégrales y_1, y_2, y_3, y_4 vérifient une équation linéaire du second ordre

$$\frac{d^2y}{dx^2} + s_1(x)\frac{dy}{dx} + s_2(x)y = 0,$$

dont les coefficients s_1 et s_2 sont des fonctions à deux déterminations.

3° Une intégrale ε est telle que $\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$ est une fonction algébrique à trois déterminations.

Il est facile de voir que le seul cas vraiment nouveau qui puisse se présenter est celui où le groupe Γ laisse invariables toutes les génératrices d'un même système d'un hyperboloïde.

L'équation appartient donc alors à la cinquième catégorie et il sera bon, pour simplifier les calculs, de reconnaître d'abord s'il en est ainsi.

Les cas où $\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$ aurait plus de trois déterminations rentrent dans les cas déjà connus.

V. L'équation appartiendra à la cinquième catégorie, si l'invariant Θ est rationnel ou algébrique.

La fonction θ vérifie une équation différentielle linéaire que l'on obtiendra comme il suit. Posons

$$\theta = y^2,$$

et différentions en remplaçant lorsqu'il y a lieu y^{IV} par sa valeur déduite de l'équation (1). Les seconds membres des équations obtenues seront des fonctions linéaires à coefficients rationnels des dix quantités

$$y^{(i)}y^{(k)} \qquad (i, k = 0, 1, 2, 3).$$

En éliminant ces quantités entre les équations donnant $\theta, \theta', \ldots, \theta^{(10)}$, nous obtiendrons une équation différentielle linéaire du dixième ordre dont l'intégrale est la forme quadratique la plus générale aux variables y_1, y_2, y_3, y_4.

Nous rechercherons les intégrales de cette équation, dont la dérivée logarithmique est rationnelle ou algébrique.

Nous devons d'abord écarter les cas où les intégrales que nous calculons ainsi sont des formes quadratiques réductibles à un, deux ou trois carrés; le groupe continu maximum Γ du groupe de rationalité laisserait alors ou un plan ou une droite ou un point invariables, et ce sont des cas que nous avons déjà examinés.

Il faut aussi écarter les cas où $\frac{\theta'}{\theta}$ est une fonction à plusieurs déterminations. S'il y en avait deux, par exemple $\frac{\theta_1'}{\theta_1}$ et $\frac{\theta_2'}{\theta_2}$, le groupe Γ laisserait invariables les deux quadriques

$$\theta_1 = 0, \qquad \theta_2 = 0,$$

et, par suite, leur tétraèdre conjugué commun qui comprend toujours au moins un sommet et une face; ce cas nous est donc connu.

Recherchons donc les intégrales de l'équation en θ dont la dérivée logarithmique est rationnelle. S'il en existe une, nous pourrons écrire

$$\frac{\theta'}{\theta} = r(x) \qquad \text{avec} \qquad \theta = y_1 y_4 - y_2 y_3. \tag{2}$$

Si la fonction θ définie par cette équation est algébrique, le groupe Γ est le groupe à six paramètres qui laisse θ invariable. Sinon, le groupe de rationalité est le groupe à sept paramètres qui laisse invariable l'équation $\theta = 0$.

Quel profit peut-on tirer de l'équation (2) pour simplifier l'intégration de l'équation (1)?

Par une transformation $\bar{y} = \alpha y + \beta y'$, toute semblable à celle qui a été employée pour les équations du troisième ordre, nous remplacerons l'équation (1) par une autre de même forme

$$\frac{d^4 \bar{y}}{dx^4} + \bar{p}_1 \frac{d^3 y}{dx^3} + \ldots = 0, \tag{3}$$

dont les coefficients sont des fonctions algébriques à deux déterminations et dont un système d'intégrales fondamentales vérifie la relation

$$\bar{y}_1 \bar{y}_4 - \bar{y}_2 \bar{y}_3 = 0.$$

M. Goursat (*Bulletin de la Société mathématique de France,* t. XI) a obtenu le résultat suivant :

Les intégrales de l'équation (3) *sont les produits des intégrales de deux équations linéaires du second ordre dont les coefficients sont racines d'équations quadratiques à coefficients algébriques*

$$\bar{y} = \eta\zeta.$$

Nous en concluons que :

Les intégrales de l'équation (1) *s'expriment en fonction des intégrales* η *et* ζ *de ces deux équations du second ordre par des formules telles que*

$$y = a\eta\zeta + b\eta\zeta' + c\eta'\zeta + d\eta'\zeta',$$

a, b, c, d *étant des fonctions algébriques.*

VII. L'équation (1) appartient à la septième catégorie, si le sous-groupe continu maximum g de son groupe de rationalité laisse invariable la cubique

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{y_2}{y_3} = \frac{y_3}{y_4}.$$

Une première condition nécessaire est donc que l'invariant $\Omega = \frac{\omega'}{\omega}$ soit rationnel. Supposons qu'il en soit ainsi.

Il faut ensuite que l'invariant $\Sigma = \frac{\sigma'}{\sigma}$ soit rationnel ou algébrique. Mais le cas où il est algébrique doit être rejeté, car s'il avait deux déterminations $\frac{\sigma'_1}{\sigma_1}$ et $\frac{\sigma'_2}{\sigma_2}$, le groupe g laisserait invariables les deux surfaces

$$\sigma_1 = 0, \qquad \sigma_2 = 0,$$

et aussi les points où la cubique gauche appartenant à la surface $\sigma_1 = 0$ rencontre la surface $\sigma_2 = 0$. L'équation (1) appartiendrait donc à une autre catégorie.

Pour reconnaître si $\Sigma = \frac{\sigma'}{\sigma}$ est rationnel, nous formerons l'équation différentielle linéaire à coefficients rationnels que vérifie la fonction σ. Le procédé qui nous a déjà servi à former l'équation du dixième ordre, que vérifie la fonction θ, nous conduit alors à une équation d'ordre 35. Nous aurons à rechercher si elle admet une intégrale dont la dérivée logarithmique est rationnelle.

Lorsque le calcul aboutit, nous pouvons affirmer qu'il existe une forme biquadratique des intégrales $\varphi_4(y_1 y_2 y_3 y_4)$ dont la dérivée logarithmique est rationnelle.

$$\frac{\varphi'_4}{\varphi_4} = r(x).$$

Le groupe Γ laisse invariable la surface $\varphi_4 = 0$. Si l'équation ne rentre pas dans une des catégories II, III, IV ou V, cette surface $\varphi_4 = 0$ est certainement la développable formée par les tangentes à une cubique gauche, car l'énumération des groupes linéaires, que nous avons faite au n° 1, est complète.

Donc on peut écrire

$$\varphi_4 = \sigma = (y_1 y_4 - y_2 y_3)^2 - 4(y_2^2 - y_1 y_3)(y_3^2 - y_2 y_4),$$

et l'on a

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = r(x).$$

L'équation (1) appartient à la catégorie VII, et le groupe Γ est le groupe à trois ou à quatre paramètres qui laisse invariable la cubique gauche.

M. Goursat (*Comptes rendus*, 1885) a signalé le cas où les intégrales d'une équation (1) vérifient la relation $\sigma = 0$; il a montré que ces intégrales s'expriment alors en fonction de l'intégrale λ d'une équation du second ordre par une formule telle que

$$y = a\lambda^3 + b\lambda^2\lambda',$$

sans indiquer cependant comment on peut reconnaître s'il en est ainsi et former l'équation en λ. Nous allons voir ce que deviennent ces résultats dans le cas général.

Quel profit peut-on tirer de l'équation

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = r(x), \tag{4}$$

pour faciliter l'intégration de l'équation (1)?

Avant de répondre à cette question, nous donnerons une nouvelle propriété du groupe de la cubique.

L'équation générale des surfaces du second degré qui passent par cette cubique est

$$\alpha\theta_1 + \beta\theta_2 + \gamma\theta_3 = \alpha(y_2^2 - y_1y_3) + \beta(y_3^2 - y_2y_4) + \gamma(y_1y_4 - y_2y_3) = 0.$$

Les transformations du groupe permutent entre elles les surfaces de ce faisceau et cela de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
Y_2^2 - Y_1Y_3 &= (bc-ad)^2[\,a^2(y_2^2-y_1y_3) + ab(y_2y_3-y_1y_4) + b^2(y_3^2-y_2y_4)],\\
Y_2Y_3 - Y_1Y_4 &= (bc-ad)^2[2ac(y_2^2-y_1y_3) + (ad+bc)(y_2y_3-y_1y_4) + 2bd(y_3^2-y_2y_4)],\\
Y_3^2 - Y_2Y_4 &= (bc-ad)^2[\,c^2(y_2^2-y_1y_3) + cd(y_2y_3-y_1y_4) + d^2(y_3^2-y_2y_4)].
\end{aligned}$$

Il en résulte que la quantité $\alpha\theta_1 + \beta\theta_2 + \gamma\theta_3$ est l'intégrale générale d'une équation différentielle linéaire du troisième ordre à coefficients rationnels. Ce sont aussi des intégrales particulières de l'équation en θ du dixième ordre qui nous a permis de caractériser la catégorie V; cette dernière équation est donc réductible. Nous avons donc une nouvelle méthode pour reconnaître si l'équation (1) est de la septième catégorie; mais les calculs qu'il nous faudrait effectuer sont beaucoup plus longs, car nous aurions à rechercher si une équation d'ordre $C_{10}^3 = 120$ a une intégrale dont la dérivée logarithmique est rationnelle.

Cela posé, nous allons définir une transformation qui nous fera passer de l'équation (1) à une équation linéaire analogue qui admettra un système d'intégrales fondamentales $\overline{y}_1, \overline{y}_2, \overline{y}_3, \overline{y}_4$ entre lesquelles on aura les relations

$$\frac{\overline{y}_1}{\overline{y}_2} = \frac{\overline{y}_2}{\overline{y}_3} = \frac{\overline{y}_3}{\overline{y}_4}. \tag{5}$$

En adoptant la représentation d'Halphen (*voir* Chap. VII, n° 2) nous pouvons dire que nous allons définir une transformation faisant passer de la courbe intégrale $C(y_1, y_2, y_3, y_4)$ de l'équation (1) à la cubique gauche (S).

Pour cela, nous ferons correspondre à un point M de la courbe C un des points où le plan osculateur à la courbe C en M rencontre la cubique; ces points sont au nombre de trois, ils seront donc déterminés par une équation du troisième ordre que nous allons calculer.

Les coordonnées d'un point du plan osculateur à la courbe C en $M(y_1, y_2, y_3, y_4)$ sont de la forme

$$\overline{y}_i = \alpha y_i + \beta y'_i + \gamma y''_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Ce point sera sur la cubique gauche si

$$\frac{\alpha y_1 + \beta y'_1 + \gamma y''_1}{\alpha y_2 + \beta y'_2 + \gamma y''_2} = \frac{\alpha y_2 + \beta y'_2 + \gamma y''_2}{\alpha y_3 + \beta y'_3 + \gamma y''_3} = \frac{\alpha y_3 + \beta y'_3 + \gamma y''_3}{\alpha y_4 + \beta y'_4 + \gamma y''_4}.$$

Ces équations s'écrivent encore

$$0 = \beta^2 \theta_i(y') + \beta[\alpha \theta'_i(y) + \gamma \theta'_i(y')] + \alpha^2 \theta_i(y) + \alpha\gamma[\theta''_i(y) - 2\theta_i(y')] + \gamma^2 \theta_i(y'')$$
$$(i = 1, 2, 3),$$

en désignant par $\theta_i(y')$, $\theta_i(y'')$ les fonctions θ_i définies plus haut où l'on a remplacé y par y' et y''.

En éliminant β entre ces trois équations, nous obtenons

$$\begin{vmatrix} \theta_1(y') & \alpha \theta'_1(y) + \gamma \theta'_1(y') & \alpha^2 \theta_1(y) + \alpha\gamma[\theta''_1(y) - 2\theta_1(y')] + \gamma^2 \theta_1(y'') \\ \theta_2(y') & \alpha \theta'_2(y) + \gamma \theta'_2(y') & \alpha^2 \theta_2(y) + \alpha\gamma[\theta''_2(y) - 2\theta_2(y')] + \gamma^2 \theta_2(y'') \\ \theta_3(y') & \alpha \theta'_3(y) + \gamma \theta'_3(y') & \alpha^2 \theta_3(y) + \alpha\gamma[\theta''_3(y) - 2\theta_3(y')] + \gamma^2 \theta_3(y'') \end{vmatrix} = 0,$$

équation homogène et du troisième degré entre α et γ.

Les formules de substitution établies plus haut entre les θ montrent que cette équation n'est pas altérée lorsqu'on fait une transformation quelconque du groupe de rationalité; ses coefficients sont donc rationnels.

En différentiant un nombre convenable de fois l'équation (4) et remplaçant, lorsqu'il y a lieu, y^{IV} par son expression déduite de (1), on arrive à un système d'équations du premier degré, qui permettent de calculer les coefficients de l'équation en α, γ.

α, β, γ *sont donc des fonctions algébriques de x à trois déterminations que nous avons appris à calculer.*

La transformation

$$\bar{y} = \alpha y + \beta y' + \gamma y''$$

change l'équation (1) en l'équation

$$\frac{d^4\bar{y}}{dx^4} + \bar{p}_1 \frac{d^3\bar{y}}{dx^3} + \bar{p}_2 \frac{d^2\bar{y}}{dx^2} + \bar{p}_3 \frac{d\bar{y}}{dx} + \bar{p}_4 \bar{y} = 0, \tag{6}$$

dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de x, α, β, γ et pour laquelle il existe un système fondamental vérifiant

$$\frac{\bar{y}_1}{\bar{y}_2} = \frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_3} = \frac{\bar{y}_3}{\bar{y}_4}.$$

Nous pouvons donc faire le changement de variables

$$\bar{y}_1 = \lambda_1^3, \qquad \bar{y}_2 = \lambda_1^2 \lambda_2, \qquad \bar{y}_3 = \lambda_1 \lambda_2^2, \qquad \bar{y}_4 = \lambda_2^3. \tag{7}$$

Les transformations des fonctions λ qui correspondent aux transformations que le groupe de rationalité effectue sur les $\bar{y}$ s'écrivent

$$\Lambda_1 = a\lambda_1 + b\lambda_2,$$
$$\Lambda_2 = c\lambda_1 + d\lambda_2.$$

Les invariants de ce groupe

$$\frac{\lambda_1 \lambda_2'' - \lambda_2 \lambda_1''}{\lambda_1 \lambda_2' - \lambda_2 \lambda_1'} \quad \text{et} \quad \frac{\lambda_1' \lambda_2'' - \lambda_2' \lambda_1''}{\lambda_1 \lambda_2' - \lambda_2 \lambda_1'}$$

sont donc des fonctions invariables par les substitutions du groupe de rationalité; elles s'expriment donc rationnellement en fonction de x, α, β, γ. Les fonctions λ_1 et λ_2 vérifient donc l'équation du second ordre

$$\lambda'' + q_1 \lambda' + q_2 \lambda = 0, \tag{8}$$

et les intégrales de l'équation (6) s'expriment en fonction des intégrales de (8) par les équations (7). Nous allons former l'équation (8).

L'équation aux cubes des intégrales de (8) est

$$\frac{d^4 z}{dx^4} + 6q_1 \frac{d^3 z}{dx^3} + (4q'_1 + 11 q_1^2 + 10 q_2)\frac{d^2 z}{dx^2} + \ldots = 0.$$

Elle doit être identique à l'équation (6), ce qui donne

$$6q_1 = \overline{p_1},$$
$$10 q_2 = \overline{p_2} - 4q'_1 - 11 q_1^2.$$

L'intégrale générale de l'équation (6) *s'exprime par une forme cubique des intégrales* λ_1 *et* λ_2 *de l'équation* (8).

Il est facile d'exprimer en fonction de l'intégrale λ les intégrales de l'équation (1). En effet, y s'exprime en fonction de $\overline{y}$ par une formule de la forme

$$y = \mathrm{A}\overline{y} + \mathrm{B}\overline{y'} + \mathrm{C}\overline{y''} + \mathrm{D}\overline{y'''}.$$

En remplaçant y par sa valeur λ^3 et tenant compte de (8), on trouve que

L'intégrale d'une équation (1) *appartenant à la septième catégorie s'exprime en fonction de l'intégrale d'une équation du second ordre* (8) *par une équation de la forme*

$$y = \mathrm{A}_1\lambda^3 + \mathrm{B}_1\lambda^2\lambda' + \mathrm{C}\lambda\lambda'^2 + \mathrm{D}\lambda'^3,$$

A, B, C, D *étant des fonctions algébriques à trois déterminations.*

Réciproquement, l'expression y, *où* λ *désigne l'intégrale d'une équation du second ordre, est l'intégrale d'une équation du quatrième ordre appartenant à la septième catégorie.*

Nous résumerons, dans l'énoncé suivant, quelques-uns des résultats contenus dans ce paragraphe :

Théorème. — *Les équations différentielles linéaires à coefficients rationnels du quatrième ordre se partagent en sept catégories qui comprennent respectivement :*

I. *Les équations les plus générales et celles pour lesquelles* Δ *est une fonction algébrique;*

II, III, IV. *Les équations pour lesquelles ou* y, *ou* v, *ou* w *ont des dérivées logarithmiques algébriques. Ces équations sont réductibles, et il* *existe des équations linéaires du premier, ou du deuxième, ou du troisième ordre dont toutes les intégrales vérifient l'équation primitive;*

V. *Les équations pour lesquelles une forme quadratique à discriminant non nul des intégrales a sa dérivée logarithmique rationnelle. L'intégration se ramène à celle de deux équations du second ordre à coefficients algébriques;*

VI. *Les équations dont le groupe de rationalité laisse invariable un complexe linéaire général. L'intégrale se ramène à celle d'une équation non linéaire du troisième ordre;*

VII. *Les équations dont le groupe de rationalité laisse invariable une cubique gauche. L'intégration se ramène à celle d'une équation du second ordre.*

CHAPITRE IX.

DÉTERMINATION DU GROUPE DE MÉROMORPHIE.

1. *Réduction du problème à une forme canonique.* — Pour les équations différentielles linéaires à coefficients rationnels du deuxième, du troisième et du quatrième ordre, le groupe de méromorphie relatif à un point singulier, ou tout au moins son sous-groupe continu maximum, appartient à l'une des catégories que nous avons définies dans les trois Chapitres précédents.

Il y a donc, suivant la nature des groupes de méromorphie :

Deux types de points singuliers pour les équations du second ordre; quatre, pour celles du troisième ordre, et sept, pour celles du quatrième ordre.

La condition nécessaire et suffisante pour que le point a appartienne à une catégorie déterminée est que l'invariant caractéristique de la catégorie soit méromorphe ou algébrique dans le domaine du point a, quand on y remplace les quantités y par un système fondamental d'intégrales de l'équation donnée.

Il nous faut donc reconnaître si les équations résolvantes que nous avons formées aux Chapitres précédents ont des intégrales dont la dérivée logarithmique est méromorphe ou algébrique dans le domaine du point a. On peut même, en considérant les équations linéaires qui admettent pour intégrales les produits d'un nombre déterminé d'intégrales de ces équations résolvantes, donner au problème qui consiste à déterminer à quelle catégorie appartient le point a, la forme canonique suivante :

Reconnaître si une équation linéaire donnée

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n y = 0, \tag{1}$$

dont les coefficients sont rationnels (ou méromorphes), admet une intégrale dont la dérivée logarithmique est méromorphe dans le domaine d'un point singulier a.

Pour simplifier l'écriture, nous supposerons que le point singulier choisi est l'origine. Nous cherchons si l'équation (1) admet une intégrale donnée par une équation de la forme

$$\frac{y'}{y} = \mathrm{P}'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{\alpha}{x} + a + bx + \ldots, \tag{2}$$

$\mathrm{P}'\left(\frac{1}{x}\right)$ désignant la dérivée d'un polynome en $\frac{1}{x}$, $\mathrm{P}\left(\frac{1}{x}\right)$.

En intégrant l'équation (2), nous obtenons

$$y = e^{\mathrm{P}\left(\frac{1}{x}\right)} x^{\alpha}(\mathrm{A} + \mathrm{B}x + \ldots). \tag{3}$$

L'intégrale y est donc précisément développée sous la forme d'une *série normale* de M. Thomé, mais ici *cette série doit être convergente* et définir une *intégrale normale* de l'équation (1).

Une autre façon d'énoncer notre problème fondamental est donc :

Reconnaître si l'équation (1) *admet, autour du point a, une intégrale normale.*

2. *Essai de résolution.* — Ce problème me paraît être de ceux dont on ne peut espérer obtenir la solution générale. On peut néanmoins l'étudier par les procédés suivants :

1° *Ramener la résolution du problème proposé à celle d'autres problèmes d'un ordre égal de difficultés.*

C'est ainsi que M. Poincaré a démontré (*Acta mathematica*, t. VIII) qu'une équation admet une intégrale normale (3) alors et seulement alors qu'une deuxième équation linéaire, qu'il apprend à former, possède une intégrale de la forme

$$(z-b)^{\beta}\,G(z),$$

$G(z)$ étant une fonction entière, transcendante ou non, de z.

2° *Chercher les conditions que doivent remplir les coefficients de l'équation* (1) *pour qu'elle admette une intégrale normale, et faire ensuite l'étude analytique de ces conditions en se plaçant au point de vue de la théorie des fonctions.*

M. H. von Koch a traité ce problème dans le cas particulier où l'intégrale y est régulière, c'est-à-dire

$$P\left(\frac{1}{x}\right)=0.$$

Nous allons voir qu'il est bien facile de déduire des résultats qu'il a obtenus la solution du problème général.

3° *Trouver des cas particuliers où le problème peut être complètement résolu.*

Le cas le plus remarquable et aussi le plus simple est celui qu'a étudié M. Fuchs, où l'équation (1) admet, autour du point a, n intégrales régulières.

M. Poincaré (*American Journal of Mathematics*, t. VII, et *Acta mathematica*, t. VIII) a formé des équations linéaires possédant des intégrales normales. Comme nous le verrons, les méthodes de M. H. von Koch permettraient de former une infinité de ces cas.

Nous allons ramener le problème posé plus haut à ce problème traité par M. H. von Koch (*Acta mathematica*, t. XVIII, et *Comptes rendus*, janvier 1893) : *Recherche des intégrales régulières d'une équation linéaire.*

Nous pouvons, en effet, calculer algébriquement les coefficients du polynome $P\left(\frac{1}{x}\right)$ en fonction des coefficients de l'équation (1). La transformation

$$y=e^{P\left(\frac{1}{x}\right)}z$$

nous conduit à une équation à coefficients rationnels (ou méromorphes)

$$\frac{d^n z}{dx^n} + q_1 \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \ldots + q_n z = 0, \tag{4}$$

dont il faut rechercher les intégrales régulières autour de l'origine.

Les fonctions $q_1, \ldots, q_n$, méromorphes autour du point o, s'écrivent

$$q_i = \sum_{\lambda=\alpha_i}^{\infty} A_{i\lambda} x^{\lambda}.$$

M. H. von Koch a fait connaître les résultats suivants :

On peut former, par des opérations arithmétiques, des fonctions transcendantes entières des coefficients A *qui, égalées à zéro, expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation* (4) *ait une intégrale régulière à l'origine.*

Nous avons donc ici la réponse à la question posée plus haut (2°).

En ce qui concerne les cas où l'on pourra résoudre effectivement le problème que nous nous proposons, je ne puis que citer deux nouveaux énoncés de M. H. von Koch.

On peut trouver des relations algébriques entre les coefficients de l'équation (4) *qui, égalées à zéro, donnent des conditions suffisantes, mais non nécessaires, pour que cette équation admette des intégrales régulières à l'origine.*

On peut enfin trouver des fonctions algébriques de ces coefficients qui permettent d'affirmer qu'il n'y a pas à l'origine d'intégrales régulières, dans le cas où leur valeur est supérieure à un nombre donné ε.