
SUR LE PROBLÈME DE CAUCHY
POUR LES
ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES
DU PREMIER ORDRE
A DEUX VARIABLES INDÉPENDANTES,

PAR M. ÉTIENNE DELASSUS,
Chargé de Cours à la Faculté des Sciences de Toulouse.

Je me propose ici de comparer les diverses méthodes employées pour traiter le problème de Cauchy et de montrer qu'on ne doit pas les considérer comme distinctes, mais simplement comme des interprétations différentes d'un même système de formules. En particulier, nous verrons que l'intégrale à point singulier de M. Darboux s'introduit nécessairement dans la question, de sorte qu'en traitant le problème à la façon ordinaire on passe, en quelque sorte inconsciemment, par son intermédiaire.

I. Je commencerai par m'occuper d'une propriété relative aux enveloppes et, bien que cela ne soit pas nécessaire pour ce qui suivra, je la présenterai sous sa forme la plus générale et indépendamment de la théorie des équations aux dérivées partielles.

Soit une surface fixe S à chaque point M de laquelle correspond dans l'espace une surface σ . Ces surfaces σ à deux paramètres peuvent avoir une enveloppe; désignons-la par Σ . Supposons, de plus, qu'à chaque point P de l'espace corresponde une courbe C sur S ; il y correspondra par là même une surface Σ_p enveloppe de σ quand M décrit C .

Faisons alors décrire à P une courbe Γ ; la courbe C se déplaçant sur S aura une enveloppe γ .

L'enveloppe de Σ_P , lorsque P décrit Γ , se compose de la surface Σ et de la surface Σ' , enveloppe de σ , quand M décrit γ .

Cette propriété pourrait s'établir par des considérations de Géométrie infinitésimale, mais je m'attacherai uniquement au calcul et, pour simplifier le langage, je désignerai par A et par B ces deux problèmes qui conduisent à la même surface Σ' .

Désignons par x', y', z' les coordonnées de P et par ξ, η les coordonnées curvilignes d'un point M de S, la surface σ sera

$$\sigma \quad V(x, y, z, \xi, \eta) = 0,$$

et la courbe C

$$C \quad U(x', y', z', \xi, \eta) = 0.$$

Soit une courbe Γ

$$\Gamma \quad x' = f(t), \quad y' = \varphi(t), \quad z' = \psi(t),$$

et désignons par

$$W(\xi, \eta, t) = 0,$$

ce que devient $U = 0$ quand on y remplace x', y', z' en fonction de t .

Cherchons d'abord à résoudre le problème B.

On obtiendra γ en éliminant t entre les deux équations

$$\gamma \quad W = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial t} = 0,$$

Pour avoir l'enveloppe de σ quand ξ, η décrit γ , on peut considérer σ comme dépendant de deux paramètres ξ, η liés par l'équation de γ ou comme dépendant de trois paramètres ξ, η, t liés par les deux relations (γ). On aura donc Σ' en éliminant ξ, η, t entre les quatre équations

$$V = 0, \quad W = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial t} = 0, \quad \frac{D(V, W, \frac{\partial W}{\partial t})}{D(\xi, \eta, t)} = 0;$$

la dernière équation se réduit à

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \frac{D(V, W)}{D(\xi, \eta)} = 0.$$

Or $\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$ n'est pas toujours nul sans quoi les trois paramètres seraient liés

par trois relations, de sorte qu'on obtiendra Σ' en éliminant ξ, η, t entre

$$E \quad V = 0, \quad W = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial t} = 0, \quad \frac{D(V, W)}{D(\xi, \eta)} = 0.$$

Cherchons maintenant à interpréter autrement les équations E. Pour abréger, nous poserons

$$\frac{D(V, W)}{D(\xi, \eta)} = \Delta, \quad \frac{D(V, \Delta)}{D(\xi, \eta)} = \Delta', \quad \frac{D(W, \Delta)}{D(\xi, \eta)} = \Delta''.$$

Pour éliminer ξ, η, t entre les équations

$$V = 0, \quad W = 0, \quad \Delta = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial t} = 0,$$

supposons que de deux des trois premières, on tire ξ et η et qu'on porte dans les deux autres entre lesquelles il suffira alors d'éliminer t . Nous devons naturellement supposer, puisque $\Delta = 0$, que l'un des deux déterminants Δ' et Δ'' n'est pas nul. La surface résultant de l'élimination de ξ, η entre les trois premières est, d'après la théorie des enveloppes, l'enveloppe de σ quand ξ, η vérifient la relation

$$W = 0,$$

c'est-à-dire quand M décrit la courbe C relative au point P de la courbe Γ . C'est donc Σ_p .

Pour avoir l'enveloppe de Σ_p , nous pouvons prendre, par exemple, pour équation de cette surface l'équation $V = 0$ où ξ et η seraient les valeurs tirées de $W = 0$ et $\Delta = 0$.

Il faudra donc éliminer t entre

$$V = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0,$$

$\frac{\partial \xi}{\partial t}$ et $\frac{\partial \eta}{\partial t}$ étant donnés par

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial \Delta}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \Delta}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \Delta}{\partial t} &= 0; \end{aligned}$$

finalement, il faudra donc éliminer ξ, η, t entre

$$V = 0, \quad W = 0, \quad \Delta = 0, \quad \frac{D(V, W, \Delta)}{D(\xi, \eta, t)} = 0;$$

la dernière équation se réduit, en vertu des autres à

$$\Delta' \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} = 0.$$

Supposons qu'on parte alors des quatre équations

$$V = 0, \quad \mathbf{W} = 0, \quad \Delta = 0, \quad \Delta' = 0,$$

on aura, par hypothèse,

$$\Delta' \neq 0,$$

de sorte que les deux équations

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \xi} \frac{\partial V}{\partial \eta} - \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \eta} \frac{\partial V}{\partial \xi} = 0, \\ \Delta' &= \frac{\partial \Delta}{\partial \xi} \frac{\partial V}{\partial \eta} - \frac{\partial \Delta}{\partial \eta} \frac{\partial V}{\partial \xi} = 0 \end{aligned}$$

ne pourront être vérifiées que si

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \eta} = 0,$$

ce qui conduit à l'enveloppe Σ .

Si, au contraire, nous partons du facteur $\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} = 0$, nous retrouvons les quatre équations

$$E \quad V = 0, \quad \mathbf{W} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\mathbf{D}(\mathbf{V}, \mathbf{W})}{\mathbf{D}(\xi, \eta)} = 0,$$

qui définissent Σ' .

Ainsi, les équations qui résolvent le problème B, résolvent en même temps le problème A débarrassé de la solution Σ connue *a priori*.

Pour simplifier le calcul, nous avons supposé que les coordonnées d'un point de Γ étaient exprimées en fonction d'un paramètre, mais il est évident que, même dans le cas où la courbe Γ serait donnée par deux relations entre x' , y' , z' , la double interprétation des formules serait encore possible.

II. Considérons une équation aux dérivées partielles

$$\mathbf{F}(x, y, z, p, q) = 0,$$

et proposons-nous de chercher la surface intégrale passant par une courbe

$$\Gamma \quad x' = f(t), \quad y' = \varphi(t), \quad z' = \psi(t).$$

Pour cela appliquons la méthode rigoureuse qui est celle de Cauchy.

Nous devons commencer par intégrer les équations des caractéristiques ; mais nous savons que si, pour le faire, on profite de leur forme particulière, on retombe sur la recherche d'une intégrale complète

$$V(x, y, z, a, b) = 0,$$

par la méthode de Lagrange et Charpit et que l'intégrale générale de ces équations est alors donnée par

$$(\alpha) \quad V = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial a} + c \frac{\partial V}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial x} + p \frac{\partial V}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} + q \frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

Il nous faut introduire les valeurs initiales x', y', z', p', q' qui doivent vérifier

$$(\beta) \quad \begin{cases} x' = f(t), & y' = \varphi(t), & z' = \psi(t), \\ F(x', y', z', p', q') = 0, \\ \frac{\partial z'}{\partial t} = p' \frac{\partial x'}{\partial t} + q' \frac{\partial y'}{\partial t}. \end{cases}$$

Pour l'intégrale considérée, les trois constantes initiales a, b, c seront fonctions de x', y', z', p', q' et, par suite, seront des fonctions de t que je désignerai par ξ, η, ζ . En plus, pour abrégé, je poserai

$$V(x', y', z', \xi, \eta) = W(\xi, \eta, t).$$

Pour avoir ξ, η, ζ , je remplacerai d'abord x, y, z, p, q par leurs valeurs initiales dans les équations (α) , ce qui donnera

$$(\alpha') \quad W = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \xi} + \zeta \frac{\partial W}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial x'} + p' \frac{\partial V}{\partial z'} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y'} + q' \frac{\partial V}{\partial z'} = 0.$$

Parmi les équations (β) , l'avant-dernière est vérifiée quels que soient ξ, η, ζ ; il ne reste à vérifier que

$$(\beta') \quad \frac{\partial z'}{\partial t} = p' \frac{\partial x'}{\partial t} + q' \frac{\partial y'}{\partial t};$$

l'élimination de p' et q' entre (β') et les deux dernières équations (α') est évidente et donne

$$\frac{\partial V}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial t} = 0,$$

ou, plus simplement,

$$\frac{\partial W}{\partial t} = 0.$$

ξ , η , ζ sont donc déterminées, comme fonctions de t , par

$$W = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \xi} + \zeta \frac{\partial W}{\partial \eta} = 0.$$

Pour avoir l'équation de la surface intégrale, il faudra éliminer t entre

$$V = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \xi} + \zeta \frac{\partial V}{\partial \eta} = 0,$$

ou, ce qui revient au même, éliminer ξ , η , ζ , t entre les cinq équations que nous venons d'écrire. L'élimination de ζ est immédiate et l'on est finalement ramené à éliminer ξ , η , t entre

$$E \quad V = 0, \quad W = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial t} = 0, \quad \frac{D(V, W)}{D(\xi, \eta)} = 0.$$

III. On peut arriver plus rapidement, et d'une façon aussi rigoureuse, à ces équations en se servant *analytiquement* de l'intégrale complète. En effet, une intégrale s'obtient en considérant η comme fonction de ξ et éliminant ξ entre

$$V = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{d\xi}{d\eta} \frac{\partial V}{\partial \eta} = 0.$$

Pour que l'intégrale obtenue contienne la courbe Γ , il faut et il suffit que cette fonction η de ξ soit telle que, quel que soit t , il y ait toujours une valeur de ξ vérifiant les deux équations

$$W(\xi, \eta, t) = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \xi} + \frac{d\eta}{d\xi} \frac{\partial W}{\partial \eta} = 0;$$

ξ est une fonction de t et, en différentiant la première, il vient

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt} + \frac{\partial W}{\partial \eta} \frac{d\eta}{d\xi} \frac{d\xi}{dt} + \frac{\partial W}{\partial t} = 0,$$

qui, en vertu de la seconde, devient

$$\frac{\partial W}{\partial t} = 0.$$

Les deux équations

$$\mathbf{W} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} = 0$$

ne contenant pas $\frac{d\eta}{d\xi}$ définissent ξ et η comme fonctions de t et par suite η comme fonction de ξ . Réciproquement, si ξ et η vérifient ces deux équations, on a certainement

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \xi} + \frac{d\eta}{d\xi} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \eta} = 0;$$

on est donc ramené à éliminer ξ , η , $\frac{d\xi}{d\eta}$, t entre

$$\mathbf{V} = 0, \quad \mathbf{W} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \xi} + \frac{d\eta}{d\xi} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \xi} + \frac{d\eta}{d\xi} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \eta} = 0;$$

en éliminant tout de suite $\frac{d\eta}{d\xi}$ on retombe sur les équations E du paragraphe précédent.

IV. L'interprétation géométrique des formules auxquelles les deux méthodes précédentes viennent de nous conduire se fait immédiatement.

Considérons les deux paramètres ξ , η qui entrent dans l'intégrale complète

$$\sigma \quad \mathbf{V}(x, y, z, \xi, \eta) = 0,$$

comme les coordonnées curvilignes d'un point M d'une surface S. A chaque point M correspond une surface σ . A chaque point P (x' , y' , z') correspond sur S la courbe

$$C \quad \mathbf{V}(x', y', z', \xi, \eta) = 0$$

qui exprime que σ passe par P.

Les équations E peuvent être considérées comme celles d'un problème B, c'est-à-dire comme définissant l'enveloppe de la surface Σ quand M décrit l'enveloppe de C, c'est-à-dire la courbe γ définie par

$$\mathbf{W}(\xi, \eta, t) = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} = 0.$$

Ces deux relations expriment que l'équation

$$\mathbf{W} = 0,$$

où l'on considère t comme inconnue, a une racine double, c'est-à-dire que σ est tangente à Γ .

Les formules E peuvent donc s'interpréter comme définissant l'enveloppe des intégrales complètes tangentes à la courbe proposée et nous retrouvons ainsi la méthode géométrique généralement employée.

IV. Les formules E peuvent aussi être considérées comme celles d'un problème A. En assujettissant le point M à décrire la courbe C, on assujettit l'intégrale complète σ à passer par P, de sorte que la surface Σ_p du problème A est l'enveloppe des intégrales complètes qui passent par P; c'est donc l'intégrale à point singulier de M. Darboux relative au point P et il faut ensuite chercher l'enveloppe de cette intégrale quand P décrit Γ .

Nous retrouvons ainsi, par un simple changement d'interprétation des formules ordinaires la méthode élégante proposée par M. Darboux (1).

V. D'après ce que nous avons vu, à propos des problèmes A et B, les deux méthodes géométriques ne sont pas absolument équivalentes. Chacune a ses avantages et ses inconvénients.

La méthode par l'intégrale complète ordinaire, du moins en employant celle qui est tangente en un nombre limité de points à l'intégrale singulière, résout *rigoureusement* le problème sans introduire de solution auxiliaire, mais exige que l'on recommence chaque fois toutes les éliminations.

La méthode par l'intégrale à point singulier présente l'avantage de permettre de faire, une fois pour toutes, les éliminations qui fournissent l'équation de l'intégrale relative à un point quelconque x', y', z' . Chaque fois que l'on changera de courbe Γ , il y aura seulement à recommencer l'élimination d'une seule inconnue entre deux équations. Le calcul est donc plus simple; mais, s'il y a une solution singulière, on devra fatalement la trouver en facteur dans le résultat, et il faudra de nouveaux calculs pour l'en débarrasser.

Si donc il n'y a pas d'intégrale singulière et si l'on n'a à traiter le problème de Cauchy que pour une seule courbe Γ , les deux méthodes sont absolument équivalentes.

S'il n'y a pas d'intégrale singulière et si l'on a à traiter le problème de

(1) DARBOUX, *Mémoire sur les solutions singulières des équations aux dérivées partielles du premier ordre.*

Cauchy successivement pour plusieurs courbes Γ , il y a avantage à employer le procédé de M. Darboux.

Nous pouvons donc dire que dans le cas où l'intégrale singulière de Lagrange n'existe pas, il y a avantage à employer systématiquement l'intégrale à point singulier de M. Darboux.

Si l'intégrale singulière existe, il est impossible de choisir d'une façon générale, car on est en présence de deux modes de calcul, l'un brutal et fournissant la solution simple, l'autre simple et élégant, mais fournissant la solution cherchée compliquée d'une solution auxiliaire.

Dans ce cas, il est facile de donner l'interprétation des courbes C . Prenons pour S l'intégrale singulière Σ . ξ , η pourront être considérées comme les coordonnées curvilignes du point M où σ touche Σ . La courbe C relative à un point P sera donc le lieu des points de contact des intégrales complètes passant par P avec l'intégrale singulière ou encore la courbe de contact de l'intégrale singulière avec l'intégrale à point singulier relative au point P . Quant à la courbe γ , enveloppe des courbes C , c'est le lieu des points de contact avec Σ des intégrales complètes tangentes à Γ .

A la façon dont nous avons présenté les calculs, il semble que, ayant à résoudre le problème de Cauchy, pour une courbe bien déterminée Γ , il soit nécessaire de chercher l'intégrale à point singulier uniquement pour les points de Γ . Cela tient seulement à la forme que nous avons donnée aux équations de Γ . Si Γ est donnée de la façon la plus générale

$$f(x', y', z') = 0, \quad \varphi(x', y', z') = 0,$$

on sera forcé de chercher l'intégrale Σ_p relative à un point P absolument quelconque (1).

(1) Je ferai remarquer que tous les calculs relatifs au problème de Cauchy sont bien connus de tous ceux qui ont eu à s'occuper de cette question, mais que j'ai été obligé de les développer complètement ici, car ils ne figurent explicitement, à ma connaissance du moins, dans aucun des Traités ou Mémoires classiques.