# SUR UNE CLASSE

## PARTICULIÈRE

# DE GROUPES HYPERABÉLIENS,

PAR M. HENRY BOURGET,

Aide-Astronome à l'Observatoire de Toulouse.

## INTRODUCTION.

Si l'on considère *une* variable complexe $\xi$, les seules substitutions birationnelles effectuées sur elle sont les transformations linéaires de la forme

$$\left(\xi, \frac{a\xi + b}{c\xi + d}\right),$$

et la théorie des groupes formés par ces substitutions et des fonctions appartenant à ces groupes est contenue tout entière dans les travaux célèbres de MM. Poincaré et Klein.

Les choses se passent autrement dans le domaine de *deux* variables complexes $\xi$ et $\eta$. A côté des groupes de substitutions de la forme

$$\left(\xi, \eta, \frac{a\xi + b\eta + c}{a''\xi + b''\eta + c''}, \frac{a'\xi + b'\eta + c'}{a''\xi + b''\eta + c''}\right),$$

tout à fait comparables aux groupes fuchsiens et nommés *hyperfuchsiens* par M. Picard, viennent se placer d'autres groupes dont les substitutions, tout en étant birationnelles, ne sont plus forcément linéaires. M. Picard a étudié également une classe de ces groupes qu'il a nommés *groupes hyperabéliens;* dans ce cas, les substitutions sont de l'une ou l'autre des formes

$$\left(\xi, \eta; \frac{a\xi+b}{c\xi+d}, \frac{l\eta+m}{p\eta+q}\right),$$

$$\left(\xi, \eta; \frac{a\eta+b}{c\eta+d}, \frac{l\xi+m}{p\xi+q}\right).$$

Elles appartiennent, comme on voit, à la catégorie des substitutions quadratiques. Si l'on remarque maintenant que toute substitution birationnelle équivaut à la composition d'un certain nombre de substitutions quadratiques (Nöther), on apercevra immédiatement l'importance de tels groupes dans la théorie générale des groupes de substitutions birationnelles.

C'est ce qui m'a décidé, sur les conseils de M. Picard, à faire une étude plus détaillée d'un groupe hyperabélien particulier, signalé déjà par ce géomètre dans son Mémoire inséré dans le Tome I de la 4^e^ série du *Journal de Liouville,* et antérieurement, dans une Note des *Comptes rendus,* (17 mars 1884).

Ce groupe particulier a une double origine. On peut le faire dériver de la transformation du premier ordre des fonctions abéliennes du second genre telle qu'elle a été exposée par M. Hermite en 1855; d'autre part, on peut le considérer comme isomorphe au groupe des transformations semblables arithmétiques de la forme quaternaire

$$u_1^2 - D u_2^2 + u_3 u_4.$$

Nous avons divisé ce travail en trois Parties.

Dans la première, après des généralités sur les groupes de substitutions semblables des formes quadratiques quaternaires et sur l'étude arithmétique de telles formes, nous montrons comment le groupe que nous étudions se place parmi les groupes analogues déjà rencontrés par MM. Goursat et Bianchi.

La seconde Partie est consacrée à l'étude du groupe. Nous commençons par chercher la forme explicite des substitutions; nous démontrons sa discontinuité pour les valeurs imaginaires des variables $\xi = \xi_1 + i\xi_2$, $\eta = \eta_1 + i\eta_2$ appartenant au domaine S ($\xi_2 > 0$, $\eta_2 > 0$); nous réduisons ces substitutions à cinq d'entre elles, qu'on peut considérer comme fondamentales et qui présentent une analogie remarquable avec les substitutions fondamentales du groupe modulaire. La théorie de la réduction continuelle de la forme quadratique quaternaire

$$u_1^2 - D u_2^2 + u_3 u_4$$

nous apprend que le domaine fondamental du groupe a un sommet sur la limite du domaine S et nous développons les calculs de réduction, autour de ce sommet dans le cas particulier de $D = 5$. Enfin, nous mettons en évidence une infinité de sous-groupes du groupe considéré, entièrement analogues aux sous-groupes à congruences du groupe modulaire.

Au début de la troisième Partie, nous cherchons comment se comportent vis-à-vis des transformations du groupe, les dix fonctions

$$\vartheta(0, 0 \mid \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}),$$

paires à arguments nuls et de cette étude, nous tirons un procédé pour former à l'aide des fonctions $\vartheta$ une infinité de fonctions qui se reproduisent par toutes les substitutions du groupe. Nous montrons que les modules de Borchardt ou ceux de Richelot sont des fonctions invariables par des sous-groupes que nous formons.

Enfin, donnant, d'après M. Picard, les propriétés générales des fonctions du groupe, nous terminons en démontrant que, malgré le sommet situé sur la limite du domaine S, trois quelconques de ces fonctions sont liées par une relation algébrique.

Si l'on considère l'étendue de cette question, comparable à l'étude du groupe modulaire, on trouvera ce travail bien incomplet. Pourtant, si l'on y rencontre quelque nouveauté, le mérite en revient à M. Picard que je tiens à remercier ici des bienveillants et précieux conseils qu'il a bien voulu me donner.

Je tiens à remercier également M. Baillaud dont les affectueux encouragements ont rendu ma tâche plus facile, et M. Vessiot de l'intérêt qu'il a constamment porté à mon travail (1).

---

(1) Qu'il me soit permis de remercier également le comité des *Annales* et en particulier son secrétaire, M. Cosserat, des facilités qu'ils m'ont données pour l'insertion de ce travail dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*.

# PREMIÈRE PARTIE.

## GÉNÉRALITÉS SUR LES GROUPES ALGÉBRIQUES ET ARITHMÉTIQUES DES SUBSTITUTIONS SEMBLABLES D'UNE FORME.

---

### *Généralités sur le groupe algébrique des transformations semblables d'une forme quaternaire.*

1. Nous allons considérer, dans ce qui va suivre, une forme quadratique quaternaire à coefficients réels et le groupe des substitutions linéaires à coefficients réels et entiers qui n'altèrent pas la forme quadratique et de déterminant $\pm 1$. Nous nommerons *droite* ou *gauche* une substitution, selon que son déterminant sera $+1$ ou $-1$.

Soit F la forme donnée et $\Phi$ une forme ne contenant que les carrés des variables et dont on puisse déduire F par la substitution linéaire T. Si S désigne une transformation n'altérant pas $\Phi$, la transformée de S par T, $T^{-1}ST$ n'altérera pas F et, réciproquement, à toute transformation n'altérant pas F on peut faire correspondre une transformation qui n'altère pas $\Phi$. Nous pourrons donc raisonner sur la forme $\Phi$ [1]. Ajoutons encore que, selon l'usage, nous appellerons *substitution semblable de la forme* toute substitution à coefficients réels et de déterminant $\pm 1$ qui n'altère pas cette forme et *substitution semblable arithmétique* une substitution semblable dont les coefficients sont entiers.

2. Considérons maintenant la forme $\Phi$,

$$\Phi = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2,$$

que nous écrivons comme *somme* de carrés, ce qui est toujours possible au point de vue algébrique, et envisageons les substitutions linéaires telles que l'on ait

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = \text{const.}$$

---

[1] Il ne faut pas oublier que F peut dériver de $\Phi$ d'une infinité de manières. Il est clair que les groupes qu'on étudiera en supposant $\Phi$ dérivée de F, d'une manière ou d'une autre, ne seront pas identiques. *Voir*, à ce sujet, POINCARÉ, *Les Fonctions fuchsiennes et l'Arithmétique* (*Journal de Liouville*, 1887).

On peut toujours supposer que cette constante est égale à 1, en divisant, si cela n'a pas lieu, les variables par un même nombre.

Cela étant, si nous considérons $u_1$, $u_2$, $u_3$, $u_4$ comme les coordonnées cartésiennes d'un point dans un espace linéaire à quatre dimensions, nous voyons que la recherche des substitutions semblables de la forme $\Phi$ revient à celle des substitutions linéaires orthogonales de l'espace à quatre dimensions.

Faisons la perspective de la sphère

$$u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2=1,$$

dans l'espace linéaire à trois dimensions $u_4=0$, le point de vue étant le point $(0, 0, 0, 1)$. Nous définissons ainsi une transformation du second ordre et si $(x, y, z)$ sont les coordonnées du point de l'espace à trois dimensions qui correspond au point $(u_1, u_2, u_3, u_4)$ de la sphère, on a

$$(1) \qquad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{u_1}{1-u_4}, \\ y &= \frac{u_2}{1-u_4}, \\ z &= \frac{u_3}{1-u_4}, \end{aligned}\right.$$

et

$$(1') \qquad \left\{\begin{aligned} u_1 &= \frac{2x}{x^2+y^2+z^2+1}, \\ u_2 &= \frac{2y}{x^2+y^2+z^2+1}, \\ u_3 &= \frac{2z}{x^2+y^2+z^2+1}, \\ u_4 &= \frac{x^2+y^2+z^2-1}{x^2+y^2+z^2+1}. \end{aligned}\right.$$

On reconnaît dans $(1')$ les formules qui donnent les coordonnées pentasphériques du point $x$, $y$, $z$ par rapport aux cinq sphères ou plans,

$$x, \quad y, \quad z, \quad x^2+y^2+z^2-1, \quad i(x^2+y^2+z^2+1)=0,$$

la dernière coordonnée restant constante.

On peut donc dire qu'à toute substitution orthogonale de l'espace à quatre dimensions correspond une substitution linéaire effectuée sur les coordonnées pentasphériques d'un point qui conserve en outre la sphère

$$x^2+y^2+z^2+1=0,$$

et inversement.

Remarquons que cette transformation effectuée sur les coordonnées pentasphériques conserve les angles et transforme toute figure infiniment petite en une figure infiniment petite semblable. M. Goursat a nommé *isogonale* une telle transformation. Remarquons également que les points de la sphère

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 0$$

se correspondent un à un et subissent une transformation linéaire, tandis que les autres points de l'espace à quatre dimensions subissent une transformation du second ordre. Le résultat qui précède, fort précieux, puisqu'il nous permet de nous passer de l'espace à quatre dimensions, est bien connu. Il a été utilisé par M. Poincaré dans sa théorie des groupes fuchsiens et kleinéens et par ceux qui se sont occupés des mêmes questions et a été énoncé explicitement par M. Klein, par M. Goursat et par M. Kœnigs (1).

3. Ce que nous venons de dire est vrai, quels que soient les signes des carrés de la forme $\Phi$, à condition d'introduire les dénominations de la Géométrie non euclidienne; mais, comme les résultats diffèrent notablement suivant le type auquel appartient $\Phi$, il est nécessaire, pour la suite, de distinguer divers cas.

1° Si $\Phi$ est du type $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2$, les transformations isogonales conservent une sphère imaginaire $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ et les groupes formés de transformations semblables sont les groupes étudiés par M. Goursat dans le Mémoire cité plus haut. M. Goursat s'est toutefois borné à l'étude des groupes finis.

2° Si $\Phi$ est du type $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - u_4^2$, la quadrique conservée par les substitutions isogonales est une sphère réelle et comme on peut, en appliquant une transformation isogonale convenable, transformer cette sphère en un plan réel, on aperçoit l'identité des groupes rencontrés, avec les groupes kleinéens. M. Bianchi en a d'ailleurs étudié des cas particuliers en se plaçant à ce point de vue (2).

3° Enfin, si $\Phi$ est du type $u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2$, la quadrique conservée est

(1) Klein, *Programme d'Erlangen* et *M. A.;* t. V. — Poincaré, *Notice sur ses travaux scientifiques* et *Act. Mat.;* t. III. — Goursat, *Sur les substitutions orthogonales* (*A. E. N.,* 3e série, t. VI; 1889). — Kœnigs, *Bibliographie de l'espace réglé* (*A. F. T.,* t. VII; 1893).

Indiquons, une fois pour toutes, que nous n'avons pas l'intention de mentionner dans leur ordre tous les Mémoires se rapportant à la question que nous étudions, mais seulement ceux qui nous ont été le plus utile pour notre travail.

(2) Bianchi, *Math. Ann.,* t. XL, XLII, XLIII; *Annali di Mathem.,* t. XXI, XXIII.

un hyperboloïde réel, qu'on peut également transformer en un plan réel par une substitution isogonale convenable et l'on voit s'introduire des groupes analogues, à ce point de vue, aux groupes kleinéens et que M. Picard ([1]) a étudiés sous le nom de *groupes hyperabéliens*. C'est d'un groupe particulier de cette espèce que nous allons nous occuper ([2]).

4. Utilisant la remarque faite au n° 2 que $u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2 = 0$ se transforme linéairement en elle-même pendant que les points de l'espace à quatre dimensions subissent une transformation du second ordre, nous pouvons, avec M. Goursat, envisager autrement nos substitutions.

Posons

$$u_1 - u_3 = v_1, \qquad -u_1 - u_3 = v_4, \qquad u_2 + u_4 = v_2, \qquad u_2 - u_4 = v_3.$$

Les transformations semblables feront revenir sur elle-même la quadrique

$$v_1 v_4 - v_2 v_3 = 0.$$

M. Goursat ([3]) a démontré qu'en posant

$$\xi = \frac{v_1}{v_3} = \frac{v_2}{v_4}, \qquad \eta = \frac{v_4}{v_3} = \frac{v_2}{v_1},$$

toute transformation semblable correspondait à une transformation de l'une ou l'autre forme

$$\text{(A)} \qquad \left(\xi,\ \eta;\ \frac{a\xi + b}{c\xi + d},\ \frac{l\eta + m}{p\eta + q}\right),$$

$$\text{(B)} \qquad \left(\xi,\ \eta;\ \frac{a\eta + b}{c\eta + d},\ \frac{l\xi + m}{p\xi + q}\right).$$

Nous pouvons nous convaincre de ce fait en remarquant que les collinéations qui n'altèrent pas une quadrique

$$u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2 = 0$$

sont de deux espèces :

---

([1]) PICARD, *Comptes rendus*, 17 mars 1884; *Journal de Liouville*, 4e série, t. I; 1885.

([2]) On voit qu'on passe d'un de ces groupes à l'autre, par des substitutions imaginaires simples. Il semble donc qu'on puisse étudier, d'un même coup, tous ces groupes en partant des substitutions semblables à coefficients complexes.

([3]) GOURSAT, *Bull. Soc. Math.*, t. XI; 883.

1° Des collinéations droites qui transforment chaque génératrice rectiligne d'un système en une autre génératrice appartenant au même système et qui, par suite, laissent immobiles, sur la quadrique, quatre points, réels ou imaginaires, distincts ou non;

2° Des collinéations gauches, qui permutent les deux systèmes de génératrices rectilignes.

On voit également sans peine que l'ensemble de ces collinéations forme un groupe dans lequel les collinéations droites constituent un sous-groupe invariant d'indice 2.

Parmi les collinéations gauches, remarquons les homologies harmoniques qui sont de période 2 et qui laissent invariables sur la quadrique tous les points de l'intersection de cette quadrique avec le plan d'homologie.

5. Dans l'espace à quatre dimensions introduit plus haut, l'équation

$$u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2 = 0$$

représente l'intersection de la quadrique

$$u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2 = 1$$

par l'espace linéaire à trois dimensions qui contient les points à l'infini de l'espace à quatre dimensions. Nous pouvons donc imaginer que cette intersection soit la quadrique servant de définition aux longueurs et aux angles de cet espace.

La quadrique se présente alors comme une sphère non euclidienne de rayon 1.

Les substitutions semblables sont des rotations autour de l'origine ou des rotations suivies de symétrie selon qu'elles sont droites ou gauches et enfin les homologies harmoniques sont de simples symétries.

Il n'est peut-être pas sans intérêt de remarquer que nous utilisons ici une géométrie non euclidienne à quadrique fondamentale *réelle* et, par suite, appartenant à une classe laissée de côté par M. Klein, signalée par M. Poincaré. On ne doit pas oublier que, dans ce cas, les rotations ont une limite.

6. Dans la suite, nous aurons plus particulièrement à nous occuper de la forme

$$\Phi = u_1^2 - D u_2^2 + u_3 u_4,$$

D étant un nombre entier positif. Cette forme est bien réductible au type considéré et l'on voit sans peine que le résultat du n° 4 devient le suivant :

A toute collinéation faisant revenir sur elle-même

$$u_1^2 - \mathrm{D}\, u_2^2 + u_3 u_4$$

correspond sur les paramètres $\xi$, $\eta$, définis par les formules

$$\frac{\xi}{u_1 - \sqrt{\mathrm{D}}\, u_2} = \frac{\eta}{-u_1 - \sqrt{\mathrm{D}}\, u_2} = \frac{\xi\eta}{u_4} = \frac{1}{u_3}$$

ou

$$\frac{u_1}{\xi - \eta} = \frac{u_2}{-\frac{1}{\sqrt{\mathrm{D}}}(\xi + \eta)} = \frac{u_3}{2} = \frac{u_4}{2\xi\eta},$$

une transformation de la forme (A) ou de la forme à déterminants $+1$.

Réciproquement, si nous nous donnons une substitution de la forme (A) et si nous cherchons la substitution linéaire correspondante, nous trouvons

$$\begin{aligned}
\mathrm{U}_1 &= \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4,\\
\mathrm{U}_2 &= \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3 + \beta_4 u_4,\\
\mathrm{U}_3 &= \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \gamma_3 u_3 + \gamma_3 u_3,\\
\mathrm{U}_4 &= \delta_1 u_1 + \delta_2 u_2 + \delta_3 u_3 + \delta_4 u_4,
\end{aligned}$$

avec les valeurs suivantes des coefficients

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \lambda(aq + dl - bp - cm), & \beta_1 &= -\lambda : \sqrt{\mathrm{D}}\,(aq + cm - bp - dl),\\
\alpha_2 &= \lambda\sqrt{\mathrm{D}}\,(cm + dl - aq - bp), & \beta_2 &= \lambda(aq + cm + bp + dl),\\
\alpha_3 &= \lambda(bq - dm), & \beta_3 &= -\lambda : \sqrt{\mathrm{D}}\,(bq + dm),\\
\alpha_4 &= \lambda(ap - cl), & \beta_4 &= -\lambda : \sqrt{\mathrm{D}}\,(ap + cl),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= 2\lambda(cq - dp), & \delta_1 &= 2\lambda(am - bl),\\
\gamma_2 &= -2\lambda\sqrt{\mathrm{D}}\,(cq + dp), & \delta_2 &= -2\lambda\sqrt{\mathrm{D}}\,(am + bl),\\
\gamma_3 &= 2\lambda dq, & \delta_3 &= 2\lambda bm,\\
\gamma_4 &= 2\lambda cp, & \delta_4 &= 2\lambda al,
\end{aligned}$$

où $\lambda$ a la valeur

$$\lambda = \frac{1}{2\sqrt{\Delta\Delta_1}},$$

$$\Delta = ad - bc, \qquad \Delta_1 = lq - mp.$$

On voit donc qu'à toute substitution de la forme (A) correspondent deux substitutions linéaires sur les $u_i$ et que ces substitutions se déduisent l'une de l'autre en changeant $u_i$ en $-u_i$, ce qui était évident *a priori*, car $\xi$ et $\eta$ ne changent point si l'on change $u_i$ en $-u_i$. De plus, ces deux substitutions ont toutes les deux leurs déterminants égaux à $+1$. Comme une substitution (B) est le produit d'une substitution (A) par la substitution

$$(\xi,\ \eta;\ \eta,\ \xi),$$

laquelle équivaut à la suivante

$$(u_1,\ -u_1),$$

on en conclut qu'à toute substitution (B) correspondent aussi deux substitutions linéaires gauches ne différant que par le signe de $\lambda$.

### *Substitutions semblables arithmétiques d'une forme à coefficients entiers.*

7. Dans tout ce que nous venons de dire, nous n'avons pas utilisé l'hypothèse que la forme quadratique et les substitutions linéaires ont leurs coefficients entiers. En réalité, les considérations précédentes s'appliquent au groupe algébrique des substitutions qui reproduisent la forme.

L'étude arithmétique de ces substitutions exige de nouveaux principes. Ils ont été posés par M. Hermite dans ses belles études sur l'introduction des variables continues dans la théorie des nombres (¹). Cette étude repose tout entière sur l'algorithme particulier que M. Hermite a nommé *réduction continuelle des formes indéfinies*.

M. Picard (²) a montré le grand parti qu'on pouvait tirer de cet algorithme pour la théorie des fonctions en faisant voir qu'il conduisait de la façon la plus naturelle et la plus régulière au domaine fondamental des groupes discontinus que l'on a à envisager. M. Picard a appliqué cette méthode successivement aux formes quadratiques binaires à indéterminées conjuguées, aux formes quadratiques ternaires à indéterminées conjuguées, et enfin aux formes quadratiques quaternaires du type qui nous occupe.

---

(¹) HERMITE, *Lettres à Jacobi sur la théorie des nombres* (*Journal de Crelle*, t. 40); *Mémoire sur la théorie des formes quadratiques* (*Journal de Crelle*, t. 47).

(²) PICARD, *Sur une classe de groupes discontinus de substitutions linéaires* (*Annales de Mathématiques*, t. I); *Sur les formes quadratiques binaires à indéterminations conjuguées* (*Annales de l'École Normale*, 1884); *Sur les formes quadratiques ternaires à indéterminations conjuguées* (*Annales de Mathématiques*, t. V); *Sur les formes quadratiques quaternaires indéfinies* (*Journal de Liouville*, 1885).

8. Dans cette dernière application, M. Picard a écarté dès le début le cas particulier où la forme peut représenter rationnellement o. Ce cas se présente précisément dans la forme signalée plus haut

$$u_1^2 - \mathrm{D}\,u_2^2 + u_3 u_4,$$

comme il est facile de s'en convaincre par l'exemple suivant

$$1 - 3.(3)^2 + 2.13 = 0.$$

Il est donc nécessaire, pour pouvoir utiliser la théorie de la réduction continuelle, d'examiner ce cas particulier. C'est ce que nous avons essayé de faire en suivant d'ailleurs la marche adoptée par M. Picard dans le cas particulier analogue des formes ternaires à indéterminées conjuguées. On doit cependant remarquer que les calculs sont plus pénibles dans le cas des formes quaternaires et il nous a été impossible d'aller aussi loin dans les détails.

9. Soit donc une forme indéfinie à coefficients entiers

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 & \\ + 2 b_{12} x_1 x_2 + 2 b_{13} x_1 x_3 + 2 b_{14} x_1 x_4 & \\ + 2 b_{23} x_2 x_3 + 2 b_{24} x_2 x_4 & \\ + 2 b_{34} x_3 x_4 &, \end{aligned}$$

réductible au type $u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2$ par la substitution

$$\begin{aligned} u_1 &= \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta x_4, \\ u_2 &= \alpha' x_1 + \beta' x_2 + \gamma' x_3 + \delta' x_4, \\ u_3 &= \alpha'' x_1 + \beta'' x_2 + \gamma'' x_3 + \delta'' x_4, \\ u_4 &= \alpha''' x_1 + \beta''' x_2 + \gamma''' x_3 + \delta''' x_4. \end{aligned}$$

Conformément à la méthode de M. Hermite, il faut adjoindre à la forme indéfinie

$$f = u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2$$

la forme définie

$$\varphi = \mathrm{U}_1^2 + \mathrm{U}_2^2 + \mathrm{U}_3^2 + \mathrm{U}_4^2,$$

les $\mathrm{U}_i$ étant les fonctions linéaires suivantes

$$\mathrm{U}_i = \mathrm{M}_i u_1 + \mathrm{P}_i u_2 + \mathrm{Q}_i u_3 + \mathrm{R}_i u_4 \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

où les $\mathrm{M}_i$, $\mathrm{P}_i$, $\mathrm{Q}_i$, $\mathrm{R}_i$ désignent les coefficients non forcément entiers d'une substitution qui transforme en elle-même

$$u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2;$$

la forme $\varphi$ contient donc un certain nombre de paramètres variant d'une manière continue. M. Picard a démontré que ces paramètres peuvent se réduire à deux

$$\xi = \xi' + i\xi'', \qquad \eta = \eta' + i\eta'',$$

et que l'on peut ramener $\varphi$ à la forme

$$\begin{aligned}\varphi &= (\eta - \eta_0)(\xi_0 - \xi)(u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2)\\ &\quad + 2\,\mathfrak{N}[(\eta - \xi)u_1 - (1 + \xi\eta)u_2 + (\eta + \xi)u_3 + (1 - \xi\eta)u_4],\end{aligned}$$

dans laquelle on doit supposer nécessairement

$$(\eta - \eta_0)(\xi_0 - \xi) > 0,$$

ce qui revient à dire que $\xi''$ et $\eta''$ doivent être de même signe, positifs par exemple. Nous désignerons dans la suite le domaine de l'espace à quatre dimensions, dans lequel $\xi'' > 0$ et $\eta'' > 0$ par la lettre S, et sa limite $\xi'' = 0$, $\eta'' = 0$, par (S) la notation $\mathfrak{N}$A désignant la norme de A.

10. En écrivant $\varphi$ sous la forme

$$\begin{aligned}\varphi = A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + A_3 x_3^2 + A_4 x_4^2&\\ + 2B_{12}x_1x_2 + 2B_{13}x_1x_3 + 2B_{14}x_1x_4&\\ + 2B_{23}x_2x_3 + 2B_{24}x_2x_4&\\ + 2B_{34}x_3x_4.&\end{aligned}$$

M. Picard (1) a démontré que l'on a les inégalités

$$|a_1| \leqq A_1, \qquad |a_2| \leqq A_2, \qquad |a_3| \leqq A_3, \qquad |a_4| \leqq A_4,$$

$$|a_i a_k - b_{ik}^2| \leqq A_i A_k - B_{ik}^2,$$
$$(i \neq k, \qquad i, k = 1, 2, 3, 4),$$

$$\begin{aligned}|\text{Discrim.}\, f(0, x_2, x_3, x_4)| &\leqq \text{Discrim.}\, \varphi(0, x_2, x_3, x_4),\\ |\text{Discrim.}\, f(x_1, 0, x_3, x_4)| &\leqq \text{Discrim.}\, \varphi(x_1, 0, x_3, x_4),\\ |\text{Discrim.}\, f(x_1, x_2, 0, x_4)| &\leqq \text{Discrim.}\, \varphi(x_1, x_2, 0, x_4),\\ |\text{Discrim.}\, f(x_1, x_2, x_3, 0)| &\leqq \text{Discrim.}\, \varphi(x_1, x_2, x_3, 0).\end{aligned}$$

(1) *Journal de Liouville*, 1885.

11. Enfin, nous dirons avec MM. Korkine et Zolotareff qu'une forme quaternaire définie est réduite si on peut l'écrire comme il suit :

$$\begin{aligned}&\mu_1(x_1+\varepsilon_1 x_2+\varepsilon_2 x_3+\varepsilon_3 x_4)^2\\ &\quad+\mu_2(x_2+\varepsilon_4 x_3+\varepsilon_5 x_4)^2\\ &\qquad+\mu_3(x_3+\varepsilon_6 x_4)^2\\ &\qquad\quad+\mu_4 x_4^2,\end{aligned}$$

dans laquelle les nombres $\mu_i$ sont positifs et satisfont aux conditions

$$\mu_2 \geqq \tfrac{1}{2}\mu_1, \qquad \mu_3 \geqq \tfrac{1}{2}\mu_2, \qquad \mu_4 \geqq \tfrac{1}{2}\mu_3,$$
$$\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4 = \Delta,$$

et les $\varepsilon_i$ sont positifs ou négatifs, satisfaisant aux conditions

$$|\varepsilon_i| < \tfrac{1}{2}.$$

MM. Korkine et Zolotareff ont démontré que toute forme quaternaire était équivalente arithmétiquement à une telle forme réduite.

De plus, on trouve sans peine

$$\varepsilon_1 = \frac{B_{12}}{A_1}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{B_{13}}{A_1}, \qquad \varepsilon_3 = \frac{B_{14}}{A_1},$$

$$\varepsilon_4 = \frac{\dfrac{\partial^2\Delta}{\partial A_4\,\partial B_{23}}}{\dfrac{\partial^2\Delta}{\partial A_4\,\partial A_3}}, \qquad \varepsilon_5 = \frac{\dfrac{\partial^2\Delta}{\partial B_{23}\,\partial B_{34}}}{\dfrac{\partial^2\Delta}{\partial A_4\,\partial A_3}}, \qquad \varepsilon_6 = \frac{\dfrac{\partial\Delta}{\partial B_{34}}}{\dfrac{\partial\Delta}{\partial A_4}},$$

$$\mu_1 = A_1, \qquad \mu_2 = \frac{\dfrac{\partial^2\Delta}{\partial A_4\,\partial A_3}}{A_1}, \qquad \mu_3 = \frac{\dfrac{\partial\Delta}{\partial A_4}}{\dfrac{\partial^2\Delta}{\partial A_4\,\partial A_3}}, \qquad \mu_4 = \frac{\Delta}{\dfrac{\partial\Delta}{\partial A_4}};$$

les conditions

$$\mu_2 \geqq \tfrac{1}{2}\mu_1, \qquad \mu_3 \geqq \tfrac{1}{2}\mu_2, \qquad \mu_4 \geqq \tfrac{1}{2}\mu_3$$

peuvent s'écrire

$$A_1A_2 - B_{12}^2 \geqq \tfrac{1}{2}A_1^2,$$

$$A_1\begin{vmatrix} A_1 & B_{12} & B_{13}\\ B_{12} & A_2 & B_{23}\\ B_{13} & B_{23} & A_3\end{vmatrix} \geqq \tfrac{1}{2}(A_1A_2 - B_{12}^2),$$

$$(A_1A_2 - B_{12}^2)\,\Delta \geqq \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} A_1 & B_{12} & B_{13}\\ B_{12} & A_2 & B_{23}\\ B_{13} & B_{23} & A_3\end{vmatrix}^2.$$

12. Cela étant, considérons la forme définie $\varphi$; elle ne sera pas réduite,

en général, et il faudra, pour la réduire, lui appliquer une substitution T; nous dirons que $f$T est réduite.

$\varphi$, étant réduite pour un système de valeurs de $\xi$ et $\eta$, ne le sera que pour les valeurs voisines satisfaisant à certaines conditions; en d'autres termes, tant que le point $(\xi', \xi''; \eta', \eta'')$ de l'espace à quatre dimensions sera à l'intérieur d'un certain domaine D et si nous imaginons que ce point varie de toutes les manières possibles, il faudra, suivant les régions où il sera, employer telle ou telle substitution pour réduire $\varphi$ et, par conséquent, la forme indéfinie correspondante $f$.

L'ensemble de ces opérations de réduction sur la forme $f$ constitue ce que l'on appelle la *réduction continuelle de la forme f*.

Parmi les applications de cette méthode, nous citerons, comme montrant très clairement la marche de cet algorithme, le développement des irrationnelles du troisième degré, fait par M. Charve dans sa Thèse.

Dans ce qui suit, nous ne développerons pas la théorie générale de la réduction continuelle des formes quadratiques quaternaires, qui paraît présenter encore bien des points non éclaircis, mais nous appliquerons à la forme qui nous occupe

$$x_1^2 - \mathrm{D}x_2^2 + x_3 x_4$$

l'algorithme de la réduction continuelle.

13. Nous allons seulement démontrer, relativement à la théorie de la réduction continuelle, quelques propositions qui nous seront utiles dans l'exemple que nous voulons traiter. Rappelons d'abord qu'il résulte d'un théorème général énoncé par M. Hermite que *le nombre des formes réduites arithmétiquement équivalentes à une forme indéfinie donnée est fini.*

14. Nous allons démontrer que le domaine D, dans lequel une forme est réduite, ne peut avoir qu'un point commun avec la limite du domaine S, considérée plus haut.

En vertu des inégalités auxquelles sont assujettis les $\mu_i$, on a

$$\mu_1^4 \geqq 2^6 \Delta.$$

Or, le discriminant de la forme $\varphi$ est, après quelques calculs faciles,

$$\Delta = \delta(\eta - \eta_0)^4 (\xi_0 - \xi)^4,$$

$\delta$ désignant le discriminant de la forme $f$. Comme de plus, dans $\varphi$, le coefficient de $x_1^2$ est $\mu_1$, l'inégalité ci-dessus devient

$$\begin{aligned}(\eta-\eta_0)(\xi_0-\xi)a_1 &+ 2\mathfrak{N}[(\eta-\xi)\alpha-(1+\xi\eta)\alpha'+(\eta+\xi)\alpha''+(1-\xi\eta)\alpha''']\\ &\leqq 2^{\frac{3}{2}}.\delta^{\frac{1}{4}}(\eta-\eta_0)(\xi_0-\xi).\end{aligned}$$

Si donc le domaine D a un point commun $\xi'$, $\eta'$ avec la limite du domaine S, on aura

$$(\eta'-\xi')\alpha-(1+\xi'\eta')\alpha'+(\eta'+\xi')\alpha''+(1-\xi'\eta')\alpha'''=0.$$

D'autre part, si un point variable $(\xi, \eta)$ se rapproche suivant un chemin quelconque du point $(\xi', \eta')$, on voit que l'on a

$$\begin{aligned}&\lim \mu_1 = 0,\\ &\lim \mu_2 = A_2,\\ &\lim \mu_3 = A_3 - \frac{B_{23}^2}{A_2};\end{aligned}$$

quant à la limite de $\mu_4$, elle ne nous servira pas.

Ces limites sont évidentes si l'on remarque que l'on a

$$\begin{aligned}&\lim A_1 = 0,\\ &\lim B_{12} = 0,\\ &\lim B_{13}^2 A_2 = 0,\end{aligned}$$

qui se tirent immédiatement des inégalités

$$\mu_{i+1} \geqq \tfrac{1}{2}\mu_i.$$

Mais, pour $\xi = \xi'$, $\eta = \eta'$, la forme $\varphi$ se réduit à

$$\begin{aligned}2\{&[(\eta'-\xi')\beta-(1+\xi'\eta')\beta'+(\eta'+\xi')\beta''+(1-\xi'\eta')\beta''']x_2\\ &+[(\eta'-\xi')\gamma-(1+\xi'\eta')\gamma'+(\eta'+\xi')\gamma''+(1-\xi'\eta')\gamma''']x_3\\ &+[(\eta'-\xi')\delta-(1+\xi'\eta')\delta'+(\eta'+\xi')\delta''+(1-\xi'\eta')\delta''']x_4\}^2,\end{aligned}$$

dont le discriminant est nul. On a donc

$$\mu_2\mu_3\mu_4 = 0,$$

ce qui donne

$$\mu_2 = 0,$$

car les hypothèses $\mu_3 = 0$ et $\mu_4$ donnent aussi

$$\mu_2 = 0,$$

par suite des inégalités

$$\mu_3 \geqq \tfrac{1}{2}\mu_2, \qquad \mu_4 \geqq \tfrac{1}{2}\mu_3.$$

Or $\mu_2 = A_2$ dans ce cas; donc $A_2$ est nul et la forme devient

$$2\left\{ \begin{aligned} &[(\eta'-\xi')\gamma - (1+\xi'\eta')\gamma' + (\eta'+\xi')\gamma'' + (1-\xi'\eta')\gamma''']x_3 \\ &+ [(\eta'-\xi')\delta - (1+\xi'\eta')\delta' + (\eta'+\xi')\delta'' + (1-\xi'\eta')\delta''']x_4 \end{aligned}\right\}^2,$$

dont le discriminant est encore nul; on a donc

$$\mu_3\mu_4 = 0;$$

d'où

$$\mu_3 = 0.$$

Or

$$\mu_3 = [(\eta'-\xi')\gamma - (1+\xi'\eta')\gamma' + (\eta'+\xi')\gamma'' + (1-\xi'\eta')\gamma'''].$$

On a donc, en définitive, les deux conditions $\mu_1 = 0$, $\mu_3 = 0$ qui entraînent $\mu_2 = 0$. Elles s'écrivent

$$(\alpha) \qquad (\eta'-\xi')\alpha - (1+\xi'\eta')\alpha' + (\eta'+\xi')\alpha'' + (1-\xi'\eta')\alpha''' = 0,$$

$$(\beta) \qquad (\eta'-\xi')\beta - (1+\xi'\eta')\beta' + (\eta'+\xi')\beta'' + (1-\xi'\eta')\beta''' = 0,$$

$$(\gamma) \qquad (\eta'-\xi')\gamma - (1+\xi'\eta')\gamma' + (\eta'+\xi')\gamma'' + (1-\xi'\eta')\gamma''' = 0.$$

Le point $(\xi', \eta')$ devra de plus satisfaire à

$$(\xi'_0 - \xi')(\eta' - \eta'_0) = 0.$$

On peut donner une autre forme à ces conditions.

Écrivons les trois premières sous la forme

$$\begin{aligned} p\,\xi'\eta' + q\,\xi' + r\,\eta' + s &= 0, \\ p'\xi'\eta' + q'\xi' + r'\eta' + s' &= 0, \\ p''\xi'\eta' + q''\xi' + r''\eta' + s'' &= 0, \end{aligned}$$

les valeurs des $p, q, r, s, \ldots$ se trouvant aisément.

On tire des deux premières, par exemple,

$$\begin{aligned} &(pq'-p'q)\xi'^2 + (ps'-p's+rq'-r'q)\xi' + rs'-r's = 0, \\ &(pr'-p'r)\eta'^2 + (ps'-p's+qr'-q'r)\eta' + qs'-q's = 0. \end{aligned}$$

Comme les quantités $p, q, r, s, \ldots$ sont réelles, la première équation a pour racines $\xi'$ et $\xi'_0$, la seconde $\eta'$ et $\eta'_0$, donc la condition

$$(\xi'_0 - \xi')(\eta' - \eta'_0) = 0$$

équivaut à dire que l'une de ces deux équations a une racine double; la première, par exemple, ce qui donne

$$(ps' - p's + rq' - r'q)^2 - 4(pq' - p'q)(rs' - r's) = 0,$$

qui, calculée, est égale à

$$b_{12}^2 - a_1 a_2 = 0.$$

Si nous écrivons que l'équation en $\eta'$ a une racine double, nous trouvons la même condition.

Si nous combinons ensemble la première équation ($\alpha$) avec la troisième ($\gamma$), comme nous avons fait pour la première et la seconde, nous ne trouvons

$$b_{13}^2 - a_1 a_3 = 0.$$

D'un autre côté, M. Picard [1] a démontré que, si l'on avait $a_1 \neq 0$, on pouvait avoir

$$(\xi'_0 - \xi')(\eta' - \eta'_0) = 0.$$

Nous concluons donc de là, que les *seules réduites, dont le domaine* D *peut avoir des points communs avec la limite du domaine S, sont celles dans lesquelles*

$$a_1 = 0, \qquad b_{12} = 0, \qquad b_{13} = 0,$$

*et le domaine* D *n'a qu'un point commun, s'il a des points communs avec la limite du domaine* S.

Les coordonnées de ce point dépendent des $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ..., c'est-à-dire du mode de réduction de $f$ à la forme canonique.

15. Remarquons aussi que l'existence des réduites dans lesquelles $a_1 = 0$ est entièrement subordonnée au fait qu'il y a un système de nombres entiers qui annulent la forme.

Faisons, en effet, dans $f$ une substitution de déterminant 1 et à coefficients entiers; le coefficient de $x_1^2$ dans la transformée de $f$ est

$$f(\mathrm{A}, \mathrm{A}', \mathrm{A}'', \mathrm{A}'''),$$

A, A′, A″, A‴ désignant les coefficients de $x_1$ dans la substitution. Cette quantité ne peut être nulle que s'il y a un système A, A′, A″, A‴ de nombres entiers annulant la forme.

---

(1) *Journal de Liouville*, 1885.

Pour s'assurer de l'existence d'un tel système de nombres entiers, il suffit de se reporter à la solution générale de cette question donnée par M. Jordan dans son Mémoire sur les formes quadratiques inséré dans le *Journal de l'École Polytechnique* (1).

Il nous suffit de savoir que de telles réduites sont possibles, ce que nous avons montré en faisant voir, par un exemple, qu'il peut y avoir un système de nombres entiers rendant la forme égale à zéro.

---

(1) *Journal de l'École Polytechnique*, t. XXXI.

# DEUXIÈME PARTIE.

## ÉTUDE DU GROUPE.

---

*Recherche des substitutions du groupe, considéré comme sous-groupe du groupe de la transformation des fonctions abéliennes.*

16. Arrivons, après ces préliminaires, au groupe particulier dont l'étude est l'objet de ce travail.

Il a son origine dans la théorie de la transformation du premier ordre des fonctions abéliennes de second genre.

M. Hermite [1] a démontré que les transformations du premier ordre effectuées sur les périodes conduisent à un groupe important de substitutions non linéaires sur les périodes des intégrales normales.

Désignant par

$$\begin{matrix} 1, & 0, & \tau_{11}, & \tau_{12}, \\ 0, & 1, & \tau_{21}, & \tau_{22}, \end{matrix}$$

le tableau des périodes des intégrales normales et posant

$$(ab)_{ij} = a_i b_j - a_j b_i,$$

ces substitutions sont

$$\tau'_{11} = \frac{(db)_{01} + (db)_{31}\tau_{11} + 2(db)_{03}\tau_{12} + (db)_{02}\tau_{22} + (db)_{23}(\tau_{12}^2 - \tau_{11}\tau_{22})}{(ab)_{01} + (ab)_{31}\tau_{11} + 2(ab)_{03}\tau_{12} + (ab)_{02}\tau_{22} + (ab)_{23}(\tau_{12}^2 - \tau_{11}\tau_{22})},$$

$$\tau'_{12} = \frac{(ad)_{01} + (ad)_{31}\tau_{11} + [(ad)_{03} + (ad)_{21}]\tau_{12} + (ad)_{02}\tau_{22} + (ad)_{23}(\tau_{12}^2 - \tau_{11}\tau_{22})}{(ab)_{01} + (ab)_{31}\tau_{11} + 2(ab)_{03}\tau_{12} + (ab)_{02}\tau_{22} + (ab)_{23}(\tau_{12}^2 - \tau_{11}\tau_{22})},$$

$$\tau'_{22} = \frac{(ac)_{01} + (ac)_{31}\tau_{11} + 2(ac)_{03}\tau_{12} + (ab)_{02}\tau_{22} + (ac)_{23}(\tau_{12}^2 - \tau_{11}\tau_{22})}{(ab)_{01} + (ab)_{31}\tau_{11} + 2(ab)_{03}\tau_{12} + (ab)_{02}\tau_{22} + (ab)_{23}(\tau_{12}^2 - \tau_{11}\tau_{22})};$$

les $a$, $b$, $c$, $d$ étant des entiers réels vérifiant le système des six relations

$$(ad)_{03} + (bc)_{03} = 1, \tag{1}$$

$$(ad)_{12} + (bc)_{12} = 1, \tag{2}$$

$$(ad)_{01} + (bc)_{01} = 0, \tag{3}$$

$$(ad)_{02} + (bc)_{02} = 0, \tag{4}$$

$$(ad)_{13} + (bc)_{13} = 0, \tag{5}$$

$$(ad)_{23} + (bc)_{23} = 0, \tag{6}$$

---

[1] HERMITE, *Sur la transformation des fonctions abéliennes* (*Comptes rendus*, t. XL; 1855).

ou le système équivalent :

$$(ad)_{03}+(ad)_{12}=1, \tag{1'}$$
$$(bc)_{03}+(bc)_{12}=1, \tag{2'}$$
$$(ab)_{03}+(ab)_{12}=0, \tag{3'}$$
$$(ac)_{03}+(ac)_{12}=0, \tag{4'}$$
$$(bd)_{03}+(bd)_{12}=0, \tag{5'}$$
$$(cd)_{03}+(cd)_{12}=0, \tag{6'}$$

le déterminant de la transformation

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

étant d'ailleurs égal à l'unité positive.

Comme nous l'avons remarqué, les substitutions ci-dessus ne sont pas linéaires. M. Picard (¹) a fait voir qu'en fixant la valeur du déterminant

$$\tau_{12}^2-\tau_{11}\tau_{22}$$

égale à un nombre entier positif non carré D, on isolait du groupe précédent, un sous-groupe de nature très remarquable. Posons donc

$$\tau_{12}^2-\tau_{11}\tau_{22}=\mathrm{D}$$

et résolvons cette relation comme il suit :

$$\tau_{11}=-\frac{2\sqrt{\mathrm{D}}}{\xi+\eta}, \qquad \tau_{12}=\sqrt{\mathrm{D}}\,\frac{\xi-\eta}{\xi+\eta}, \qquad \tau_{22}=\frac{2\sqrt{\mathrm{D}}\,\xi\eta}{\xi+\eta},$$

$\sqrt{\mathrm{D}}$ désignant la valeur arithmétique du radical, $\xi$, $\eta$ étant deux paramètres complexes en général.

Les substitutions sur les $\tau_{ij}$ sont devenues linéaires; de plus, par l'introduction des paramètres $\xi$, $\eta$, nous faisons correspondre à ces substitutions des substitutions sur $\xi$, $\eta$. Ce sont ces dernières que nous allons spécialement étudier dans ce Travail.

Nous isolons donc, en définitive, une classe particulière de fonctions abé-

(¹) *Comptes rendus*, 1ᵉʳ semestre 1884 et *Journal de Liouville*, 1885.

liennes du second genre et il y a lieu d'étudier, pour cette classe, la transformation des fonctions $\theta$, les fonctions $\theta$ à arguments nuls, etc. C'est un point de vue sur lequel M. Hermite a attiré depuis longtemps l'attention et auquel M. Picard (¹) s'est placé dans un travail sur les fonctions $\theta$ à trois arguments pour obtenir un exemple effectif des plus intéressants de fonctions hyperfuchsiennes.

Tout d'abord les paramètres complexes ont une limitation qui est importante pour la suite.

Posons
$$\tau_{11}=\tau'_{11}+i\tau''_{11},\qquad \tau_{12}=\tau'_{12}+i\tau''_{12},\qquad \tau_{22}=\tau'_{22}+i\tau''_{22},$$

on sait qu'on doit avoir

$$\tau''_{11}>0,\qquad \tau''_{12}>0,\qquad \tau''^{2}_{12}-\tau''_{11}\tau''_{22}<0,$$

posant, en outre,
$$\xi=\xi'+i\xi'',\qquad \eta=\eta'+i\eta'',$$

on trouve sans peine

$$\tau''_{11}=\frac{2\sqrt{\mathrm{D}}(\xi''+\eta'')}{\mathfrak{N}(\xi+\eta)},$$
$$\tau''_{22}=\frac{2\sqrt{\mathrm{D}}[\eta''(\xi'^2+\xi''^2)+\xi''(\eta'^2+\eta''^2)]}{\mathfrak{N}(\xi+\eta)},$$
$$\tau''_{12}=\frac{2\sqrt{\mathrm{D}}(\eta'\xi''-\xi'\eta'')}{\mathfrak{N}(\xi+\eta)}.$$

De là on tire
$$\tau''^{2}_{12}-\tau''_{11}\tau''_{22}=\frac{-4\mathrm{D}\xi''\eta''}{(\xi'+\eta')^2+(\xi''+\eta'')^2};$$

ce qui montre que $\xi''$ et $\eta''$ doivent être de même signe et, comme $\tau''_{11}$ et $\tau''_{22}$ sont positifs, on en conclut

$$\xi''>0,\qquad \eta''>0,$$

qui est la limitation annoncée.

17. Cela posé, commençons par chercher l'expression analytique des substitutions du sous-groupe en fonction des coefficients de la transformation $a_i$, $b_i$, $c_i$, $d_i$.

---

(¹) *Sur une classe de fonctions de deux variables indépendantes* (*Comptes rendus*, 1er semestre; 1883).

M. Picard a fait voir qu'en supposant

$$\tau_{12}^2 - \tau_{11}\tau_{22} = \mathrm{D},$$

on était conduit à adjoindre aux relations (1), (2), (3), (4), (5), (6) les quatre suivantes :

$$(cd)_{13} = \mathrm{D}(ab)_{13}, \tag{7}$$

$$(cd)_{03} = \mathrm{D}(ab)_{03}, \tag{8}$$

$$(cd)_{02} = \mathrm{D}(ab)_{02}, \tag{9}$$

$$(ab)_{23}\mathrm{D}^2 + [(ab)_{01} - (cd)_{23}]\mathrm{D} - (cd)_{01} = 0. \tag{10}$$

Nous avons donc seize paramètres $a_0$, $b_0$, $c_0$, $d_0$, ..., $a_3$, $b_3$, $c_3$, $d_3$ liés par les dix relations (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8), (9), (10).

Nous allons transformer ce système de dix équations en une succession de systèmes équivalents et exprimer finalement les $c$ et les $d$ en fonctions des $a$ et des $b$ qui seront liés par deux relations que nous conserverons.

**18.** Supposons $d_0$ et $d_3$ différents de zéro et $(bd)_{03}$ aussi. Des équations (1), (7), (8), (9), on peut tirer $c_0$, $c_1$, $c_2$, $c_3$ et les porter dans les équations (3), (4), (5), (6).

Le système (1), ..., (10) est remplacé par le système équivalent

$$c_0(bd)_{03} = d_0 - d_0(ad)_{03} + b_0\mathrm{D}(ab)_{03}, \tag{11}$$

$$c_1(bd)_{03} = d_1 - d_1(ad)_{03} + \frac{b_3 d_1}{d_3}\mathrm{D}(ab)_{03} + \frac{(bd)_{03}}{d_3}\mathrm{D}(ab)_{13}, \tag{12}$$

$$c_2(bd)_{03} = d_2 - d_2(ad)_{03} + \frac{b_0 d_2}{d_0}\mathrm{D}(ab)_{03} - \frac{(bd)_{03}}{d_0}\mathrm{D}(ab)_{02}, \tag{13}$$

$$c_3(bd)_{03} = d_3 - d_3(ad)_{03} + b_3\mathrm{D}(ab)_{03}, \tag{14}$$

$$(ad)_{12} + (bc)_{12} = 1, \tag{2}$$

$$\left(d_0 - \mathrm{D}\frac{b_0 b_3}{d_3}\right)[\;a_0(bd)_{13} - a_1(bd)_{03} + a_3(bd)_{01}] + (bd)_{01} = 0, \tag{15}$$

$$\left(d_0 - \mathrm{D}\frac{b_0^2}{d_0}\right)[\;a_0(bd)_{23} - a_2(bd)_{03} + a_3(bd)_{02}] + (bd)_{02} = 0, \tag{16}$$

$$\left(d_3 - \mathrm{D}\frac{b_3^2}{d_3}\right)[-a_0(bd)_{13} + a_1(bd)_{03} - a_3(bd)_{01}] + (bd)_{13} = 0, \tag{17}$$

$$\left(d_3 - \mathrm{D}\frac{b_0 b_3}{d_0}\right)[-a_0(bd)_{23} + a_2(bd)_{03} - a_3(bd)_{02}] + (bd)_{23} = 0, \tag{18}$$

$$(ab)_{23}\mathrm{D}^2 + [(ab)_{01} - (cd)_{23}]\mathrm{D} - (cd)_{01} = 0. \tag{10}$$

Supposons $d_0 - D\frac{b_0 b_3}{d_3} \neq 0$; en vertu d'hypothèses déjà faites, on en conclut que les facteurs

$$d_0 - D\frac{b_0^2}{d_0} \quad \text{et} \quad d_3 - D\frac{b_3^2}{d_3}$$

sont différents de zéro et on tire des équations (15), (16), (17), (18)

$$d_1 - D\frac{b_1 b_3}{d_3} = 0, \tag{19}$$

$$d_2 - D\frac{b_0 b_2}{d_0} = 0, \tag{20}$$

D'autre part, nous tirons de (15) et (16) pour $a_1$ et $a_2$ les expressions

$$a_1(bd)_{03} = -b_1 + b_1(ad)_{03} - \frac{D b_1 b_3}{d_3}(ab)_{03}, \tag{21}$$

$$a_2(bd)_{03} = -b_2 + b_2(ad)_{03} - \frac{D b_0 b_2}{d_0}(ab)_{03}. \tag{22}$$

Tirons maintenant de (19), (20), (21) et (22) les valeurs de $d_1$, $d_2$, $a_1$ et $a_2$ et portons-les dans (12), (13) et (2). Nous obtenons

$$c_1 = -\frac{a_3 b_1}{d_3} D, \tag{23}$$

$$c_2 = -\frac{a_0 b_2}{d_0} D, \tag{24}$$

$$D = -\frac{d_0 d_3}{b_1 b_2}, \tag{25}$$

de sorte que le système primitif des dix équations est équivalent au système suivant :

$$(ab)_{23} D^2 + [(ab)_{01} - (cd)_{23}] D - (cd)_{01} = 0, \tag{10}$$

$$c_0(bd)_{03} = d_0 - d_0(ad)_{03} + b_0 D(ab)_{03}, \tag{11}$$

$$c_3(bd)_{03} = d_3 - d_3(ad)_{03} + b_3 D(ab)_{03}, \tag{14}$$

$$d_1 = D\frac{b_1 b_3}{d_3}, \tag{19}$$

$$d_2 = D\frac{b_0 b_2}{d_0}, \tag{20}$$

$$a_1(bd)_{03} = -b_1 + b_1(ad)_{03} - \frac{D b_1 b_2}{d_3}(ab)_{03}, \tag{21}$$

$$a_2(bd)_{03} = -b_2 + b_2(ad)_{03} - \frac{D b_0 b_2}{d_0}(ab)_{03}, \tag{22}$$

$$c_1 = -\frac{a_3 b_1}{d_3} \mathrm{D}, \tag{23}$$

$$c_2 = -\frac{a_0 b_2}{d_0} \mathrm{D}, \tag{24}$$

$$\mathrm{D} = -\frac{d_0 d_3}{b_1 b_2}. \tag{25}$$

Tirons D de l'équation (25), portons sa valeur dans toutes les autres et portons dans l'équation (10) les valeurs de $c_0$, $c_1$, $c_2$, $c_3$, $d_1$, $d_2$, $a_1$, $a_2$. Nous trouvons, par un calcul qui n'a d'autre difficulté que sa longueur,

$$\frac{d_0}{b_1^2 b_2}(b_1^2 - d_3^2) = 0,$$

en supposant $b_1$ et $b_2$ différents de zéro, on en tire

$$b_1^2 = d_3^2, \tag{26}$$

et notre système d'équations, suivant que l'on prend

$$b_1 = d_3 \qquad \text{ou} \qquad b_1 = -d_3,$$

est équivalent à l'un ou à l'autre des deux systèmes suivants :

$$(\mathrm{I}) \left\{ \begin{array}{lll} c_0 = \phantom{-}\mathrm{D} a_2, & d_0 = -\mathrm{D} b_2, & a_1 (bd)_{03} = -d_3 + d_3 (ad)_{03} + \dfrac{b_3 d_0}{b_2} (ab)_{03}, \\ c_1 = -\mathrm{D} a_3, & d_1 = \phantom{-}\mathrm{D} b_3, & a_2 (bd)_{03} = -b_2 + b_2 (ad)_{03} + b_0 (ab)_{03}, \\ c_2 = \phantom{-}a_0, & d_2 = -b_0, & \\ c_3 = -a_1, & d_3 = \phantom{-}b_1, & \end{array} \right.$$

$$(\mathrm{II}) \left\{ \begin{array}{lll} c_0 = -\mathrm{D} a_2, & d_0 = \phantom{-}\mathrm{D} b_2, & a_1 (bd)_{03} = \phantom{-}d_3 - d_3 (ad)_{03} + \dfrac{b_3 d_0}{b_2} (ab)_{03}, \\ c_1 = \phantom{-}\mathrm{D} a_3, & d_1 = -\mathrm{D} b_3, & a_2 (bd)_{03} = -b_2 + b_2 (ad)_{03} - b_0 (ab)_{03}, \\ c_2 = -a_0, & d_2 = \phantom{-}b_0, & \\ c_3 = \phantom{-}a_1, & d_3 = -b_1. & \end{array} \right.$$

Nous voyons donc, comme conclusion de ce calcul un peu long, il est vrai, mais très simple, qu'on exprime symétriquement les $c$ et les $d$ au moyen des $a$ et des $b$ liés encore par deux relations. Il est inutile d'aller plus loin et d'essayer d'utiliser ces deux relations pour faire disparaître deux coefficients; nous verrons plus loin une interprétation simple des deux relations restantes.

**19.** Des formules données au n° **16**, nous tirons

$$\xi_1 = -\frac{\tau'_{12} + \sqrt{D}}{\tau'_{11}}, \qquad \eta_1 = \frac{\tau'_{12} - \sqrt{D}}{\tau'_{11}}.$$

Dans ces formules, remplaçons $\tau'_{11}$, $\tau'_{12}$ par leurs valeurs en fonction de $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}$, puis $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}$ par leurs expressions en $\xi$ et $\eta$; nous trouvons ainsi

$$\xi_1 = \frac{\alpha\xi\eta + \beta\xi + \gamma\eta + \delta}{\alpha''\xi\eta + \beta''\xi + \gamma''\eta + \delta''}, \qquad \eta_1 = \frac{\alpha'\xi\eta + \beta'\xi + \gamma'\eta + \delta'}{\alpha''\zeta\eta + \beta''\xi + \gamma''\eta + \delta''},$$

dans lesquelles, pour abréger l'écriture, on a posé

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
\alpha &= D(ab)_{02} - \sqrt{D}(ad)_{02},\\
2\beta &= \sqrt{D}\,[(ab)_{01} + D(ab)_{23} + (ad)_{03} - (ad)_{12}] - [(ad)_{01} + D(ad)_{23}] - D[(ab)_{03} - (ab)_{12}],\\
2\gamma &= \sqrt{D}\,[(ab)_{01} + D(ab)_{23} - (ad)_{03} + (ad)_{12}] - [(ad)_{01} + D(ad)_{23}] + D[(ab)_{03} - (ab)_{12}],\\
\delta &= D(ab)_{13} - \sqrt{D}(ad)_{13},
\end{aligned}\right.$$

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
\alpha' &= D(ab)_{02} + \sqrt{D}(ad)_{02},\\
2\beta' &= \sqrt{D}\,[(ab)_{01} + D(ab)_{23} - (ad)_{03} + (ad)_{12}] + [(ad)_{01} + D(ad)_{23}] - D[(ab)_{03} - (ab)_{12}],\\
2\gamma' &= \sqrt{D}\,[(ab)_{01} + D(ab)_{23} + (ad)_{03} - (ad)_{12}] + [(ad)_{01} + D(ad)_{23}] + D[(ab)_{03} - (ab)_{12}],\\
\delta' &= D(ab)_{13} + \sqrt{D}(ad)_{13},
\end{aligned}\right.$$

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}
\alpha'' &= \sqrt{D}(bd)_{02},\\
2\beta'' &= [(bd)_{01} + D(bd)_{23}] - \sqrt{D}\,[(bd)_{03} - (bd)_{12}],\\
2\gamma'' &= [(bd)_{01} + D(bd)_{23}] + \sqrt{D}\,[(bd)_{03} - (bd)_{12}],\\
\delta'' &= \sqrt{D}(bd)_{13}.
\end{aligned}\right.$$

Si les expressions de $\xi_1$, $\eta_1$ sont linéaires en $\xi$ et $\eta$, comme M. Picard l'a démontré, elles contiennent nécessairement au numérateur et au dénominateur un facteur commun. Si donc on multiplie le dénominateur par $\alpha''$, il s'écrit

$$\alpha''\xi(\alpha''\eta + \beta'') + \alpha''(\gamma''\eta + \delta'')$$

ou

$$\alpha''\eta(\alpha''\xi + \gamma'') + \alpha''(\beta''\xi + \delta'')$$

et l'on doit avoir

$$\alpha''\delta'' = \beta''\gamma'',$$

moyennant quoi on peut l'écrire

$$(\alpha''\eta + \beta'')(\alpha''\eta + \gamma'').$$

Si donc on vérifie que l'on a $\alpha''\delta''=\beta''\gamma''$, on aura trouvé par là même les facteurs. Des procédés analogues donneront les facteurs des deux numérateurs. On vérifie, en effet, sans peine que l'on a bien

$$\alpha\delta=\beta\gamma, \qquad \alpha'\delta'=\beta'\gamma', \qquad \alpha''\delta''=\beta''\gamma'',$$

et l'on trouve que les numérateurs et le dénominateur peuvent s'écrire

$$\frac{1}{\alpha}(\alpha\xi+\gamma)(\alpha\eta+\beta),$$

$$\frac{1}{\alpha'}(\alpha'\xi+\gamma')(\alpha'\eta+\beta'),$$

$$\frac{1}{\alpha''}(\alpha''\xi+\gamma'')(\alpha''\eta+\beta'').$$

Si nous portons maintenant dans les $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ les valeurs $a_i$, $b_i$, $c_i$, $d_i$, tirées des systèmes (I) ou (II), nous trouvons respectivement les formules suivantes, conclusion de tout ce calcul,

$$\text{(A)}\quad \xi_1=\frac{(a_0-a_2\sqrt{D})\,\xi-(a_1+a_3\sqrt{D})}{-(b_0-b_2\sqrt{D})\,\xi+(b_1+b_3\sqrt{D})}, \qquad \eta_1=\frac{(a_0+a_2\sqrt{D})\,\eta+(a_1-a_3\sqrt{D})}{(b_0+b_2\sqrt{D})\,\eta+(b_1-b_3\sqrt{D})},$$

$$\text{(B)}\quad \xi_1=-\frac{(a_0+a_2\sqrt{D})\,\eta+(a_1-a_3\sqrt{D})}{(b_0+b_2\sqrt{D})\,\eta+(b_1-b_3\sqrt{D})}, \qquad \eta_1=\frac{(a_0-a_2\sqrt{D})\,\xi-(a_1+a_3\sqrt{D})}{(b_0-b_2\sqrt{D})\,\xi-(b_1+b_3\sqrt{D})}.$$

On voit, de plus, sans peine, que les deux relations qui existent dans chaque cas, entre les $a$ et $b$, peuvent s'écrire

$$\text{(R)}\qquad (ab)_{01}-D(ab)_{23}=\ 1, \qquad (ab)_{12}+(ab)_{03}=0,$$

$$\text{(S)}\qquad (ab)_{01}-D(ab)_{23}=-1, \qquad (ab)_{12}+(ab)_{03}=0,$$

car ces relations ne sont autres, d'après leur origine, que les relations (1) et (3'), dans lesquelles on a porté les valeurs des coefficients, tirées des systèmes (I) ou (II). Remarquons qu'en formant les déterminants des substitutions que nous venons de trouver, on obtient pour (A),

$$\Delta_{\xi_1}=(ab)_{01}-D(ab)_{23}+\sqrt{D}[(ab)_{12}+(ab)_{03}],$$

$$\Delta_{\eta_1}=(ab)_{01}-D(ab)_{23}-\sqrt{D}[(ab)_{12}+(ab)_{03}],$$

et si l'on suppose maintenant que les coefficients de la transformation du premier ordre soient entiers et réels et que D soit un entier, réel, positif et non carré, les conditions (R) expriment simplement que l'on a

$$\Delta_{\xi_1} = \Delta_{\eta_1} = +1.$$

On verrait de même que, pour la substitution (B), les conditions (S) expriment également que les deux déterminants sont égaux à $+1$.

Cette remarque nous dispense d'exprimer $a_1$ et $a_2$ en fonction des autres coefficients. Il suffit d'ajouter, comme on le fait d'habitude, que les substitutions que nous considérons, ont leurs déterminants égaux à l'unité positive.

*Discontinuité du groupe.*

20. Nous pouvons maintenant établir directement les propriétés de ces substitutions.

Pour les écrire sous une forme plus commode, convenons de désigner le nombre complexe $x + y\sqrt{D}$ par une seule lettre et le nombre conjugué $x - y\sqrt{D}$ par la même lettre affectée de l'indice o.

Moyennant cela, nos substitutions s'écrivent

$$\text{(A)} \qquad \xi_1 = \frac{a_0\xi - b}{-c_0\xi + d}, \qquad \eta_1 = \frac{a\eta + b_0}{c\eta + d_0},$$

$$\text{(B)} \qquad \xi_1 = -\frac{a\eta + b_0}{c\eta + d_0}, \qquad \eta_1 = \frac{a_0\xi - b}{c_0\xi - d}.$$

Considérons les substitutions (A); elles forment un groupe. En effet, l'inverse d'une pareille substitution est

$$\xi = \frac{d\xi_1 + b}{c_0\xi_1 + a_0}, \qquad \eta = \frac{d_0\eta_1 - b_0}{-c\eta_1 + a},$$

c'est-à-dire une substitution de la même forme.

De plus, formons le produit de deux substitutions de cette dernière forme; nous trouvons

$$\xi = \frac{d(d'\xi_2 + b') + b(c'_0\xi_2 + a'_0)}{c_0(d'\xi_2 + b') + a_0(c'_0\xi_2 + a'_0)}, \qquad \eta = \frac{d_0(d'_0\eta_2 - b'_0) - b_0(-c'\eta_2 + a'}{-c(d'_0\eta_2 - b'_0) + a(-c'\eta_2 + a')}$$

ou bien

$$\xi = \frac{\mathbf{D}\eta_2 + \mathbf{B}}{\mathbf{C}_0\eta_2 + \mathbf{A}_0}, \qquad \eta = \frac{\mathbf{D}_0\eta_2 - \mathbf{B}_0}{-\mathbf{C}\eta_2 + \mathbf{A}},$$

avec les valeurs

$$\begin{aligned} A &= cb'_0 + aa', \\ B &= db' + ba'_0, \\ C &= cd'_0 + ac', \\ D &= dd' + bc'_0. \end{aligned}$$

Donc, les substitutions (A) forment bien un groupe.

Les substitutions (B) ne forment pas de groupe, car le produit de deux telles substitutions est manifestement une substitution (A). Il faut, toutefois, mettre de côté le cas où le groupe ne contiendrait qu'une seule substitution (B). L'ensemble des substitutions (A) et (B) forme un groupe. Dans ce groupe total les substitutions (A) constituent un sous-groupe.

Considérons en particulier, dans le groupe total, la substitution unité et la substitution $(\xi, \eta; \eta, \xi)$, T. Toute substitution du groupe total S pourra s'écrire d'une seule manière, sous la forme

$$A.1 \quad \text{ou} \quad A.T,$$

A étant une substitution (A) selon qu'elle appartiendra au type (A) ou (B) de substitutions. De plus, A et A' étant deux substitutions de la forme A, $A'.AA'^{-1}$ est encore une substitution de cette forme. Donc le sous-groupe constitué par les substitutions (A) est un sous-groupe invariant d'indice 2.

21. Nous allons faire voir de plus, que le groupe formé par ces substitutions est un groupe discontinu.

Remarquons d'abord qu'il suffit de démontrer la discontinuité du groupe formé par les substitutions (A).

Considérons la substitution relative à $\xi$. Écrivons-la sous la forme homogène :

$$\begin{aligned} \rho(\xi'_1 + i\xi''_1) &= \phantom{-}(a_0 - a_2\sqrt{D})(\xi' + i\xi'') - (a_1 + a_3\sqrt{D})(\omega' + i\omega''), \\ \rho(\omega'_1 + i\omega''_1) &= -(b_0 - b_2\sqrt{D})(\xi' + i\xi'') + (b_1 + b_3\sqrt{D})(\omega' + i\omega''), \end{aligned}$$

la variable $\xi$ ayant été prise égale à $\dfrac{\xi' + i\xi''}{\omega' + i\omega''}$ et supposons que cette valeur soit telle que le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi' + i\xi'' & \omega' + i\omega'' \\ \xi' - i\xi'' & \omega' - i\omega'' \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro.

Dans le plan de la variable complexe $\xi$, décrivons autour de la valeur précédente de $\xi$ un cercle ne coupant pas l'axe des $\xi$ réels. On peut toujours le faire.

Supposons, en outre, que le transformé $\xi_1 = \dfrac{\xi'_1 + i\xi''_1}{\omega'_1 + i\omega''_1}$ tombe à l'intérieur de ce cercle.

Cela étant, effectuons le produit

$$\begin{vmatrix} \xi' + i\xi'' & \omega' + i\omega'' \\ \xi' - i\xi'' & \omega' - i\omega'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_0 - a_2\sqrt{D} & -(a_1 + a_3\sqrt{D}) \\ -(b_0 - b_2\sqrt{D}) & b_1 + b_2\sqrt{D} \end{vmatrix};$$

comme le second déterminant est égal à 1, le produit est encore égal à $\Delta$ et, d'autre part, il est égal à

$$\rho\rho_0\Delta_1,$$

$\rho_0$ étant ici l'imaginaire conjuguée de $\rho$ et $\Delta_1$ le déterminant

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \xi'_1 + i\xi''_1 & \omega'_1 + i\omega''_1 \\ \xi'_1 - i\xi''_1 & \omega'_1 - i\omega''_1 \end{vmatrix};$$

on peut donc écrire

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{\Delta_1}(\xi'^2_1 + \xi''^2_1) = {} & [(a_0 - a_2\sqrt{D})\xi' - (a_1 + a_3\sqrt{D})\omega']^2 \\ & + [(a_0 - a_2\sqrt{D})\xi'' - (a_1 + a_3\sqrt{D})\omega'']^2 \end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{\Delta_1}(\omega'^2_1 + \omega''^2_1) = {} & [-(b_0 - b_2\sqrt{D})\xi' + (b_1 + b_3\sqrt{D})\omega']^2 \\ & + [-(b_0 - b_2\sqrt{D})\xi'' + (b_1 + b_3\sqrt{D})\omega'']^2. \end{aligned}$$

Comme le point $\dfrac{\xi'_1 + i\xi''_1}{\omega'_1 + i\omega''_1}$ est supposé à l'intérieur du cercle construit plus haut, $\left|\dfrac{\Delta_1}{\xi'^2_1 + \xi''^2_1}\right|$, $\left|\dfrac{\Delta_1}{\omega'^2_1 + \omega''^2_1}\right|$ ne peuvent dépasser certaines limites. Les premiers membres de ces relations étant limités, les seconds le sont et, par suite, chacune des parties élevées au carré est également limitée et, de plus, comme $\begin{vmatrix} \xi' & \omega' \\ \xi'' & \omega'' \end{vmatrix}$ ne diffère de $\Delta$ que par un facteur, on en conclut que les quantités

$$(1) \qquad |a_0 - a_2\sqrt{D}|, \quad |a_1 + a_3\sqrt{D}|, \quad |b_0 - b_2\sqrt{D}|, \quad |b_1 + b_3\sqrt{D}|$$

sont limitées.

Des considérations analogues appliquées à la substitution sur $\eta$ montrent que les quantités

$$(2) \qquad |a_0 + a_2\sqrt{D}|, \quad |a_1 - a_3\sqrt{D}|, \quad |b_0 - b_2\sqrt{D}|, \quad |b_1 - b_3\sqrt{D}|$$

sont limitées.

Comme, maintenant, parmi les huit quantités (1) et (2), il y a certainement quatre sommes véritables, quels que soient les signes des $a$ et des $b$, on en conclut que les modules des coefficients :

$$|a_0|,\quad |a_1|,\quad |a_2|,\quad |a_3|,\qquad |b_0|,\quad |b_1|,\quad |b_2|,\quad |b_3|$$

sont limités.

Donc, en résumé, si l'on applique à $\xi$ et à $\eta$, *simultanément* les substitutions du groupe A, il n'y a qu'un nombre limité de points transformés d'un point donné à l'intérieur d'un domaine composé de deux cercles de rayon fini tracés autour de $\xi$ et de $\eta$ et ne coupant pas l'axe des quantités réelles. Donc, le groupe formé par les substitutions (A) est discontinu, résultat trouvé autrement par M. Picard.

Remarquons que, si l'on applique *séparément* et *indépendamment* l'une de l'autre, les deux substitutions sur $\xi$ et sur $\eta$, on n'est plus conduit à la même conclusion. Les substitutions sur $\xi$, d'une part, sur $\eta$, d'autre part, engendrent des groupes continus.

Cette remarque est en défaut si D est un carré parfait; dans ce cas, les deux substitutions deviennent à coefficients entiers et le groupe résulte de la substitution de deux groupes modulaires.

### *Substitutions fondamentales du groupe.*

22. Nous nous proposons maintenant de réduire les substitutions (A), de manière à obtenir un système de substitutions fondamentales du groupe.

On est naturellement conduit à essayer une méthode analogue à celle employée pour réduire le groupe modulaire; mais nous avons ici à calculer sur des nombres complexes de la forme

$$a + b\sqrt{D}, \qquad D > 0,$$

et l'on sait que l'algorithme d'Euclide ne s'applique plus sans précautions et d'une manière générale. Il vaut donc mieux opérer autrement et faire la réduction sur le groupe de la transformation du premier ordre qui nous a servi de point de départ.

Nous avons vu qu'à toute transformation de la forme

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ Da_2 & -Da_3 & a_0 & -a_1 \\ -Db_2 & Db_3 & b_0 & b_1 \end{vmatrix}$$

correspondait *une* substitution, soit de la forme (A), soit de la forme (B), et il est clair qu'inversement à toute substitution (A) ou (B) correspondent *deux* substitutions linéaires à quatre variables, l'une se déduisant de l'autre en changant les signes des éléments.

En d'autres termes, les deux groupes sont *isomorphes mériédriquement.*

C'est le groupe des substitutions linéaires à quatre variables que nous allons réduire en appliquant une méthode de réduction déjà bien des fois employée.

Partons de la substitution suivante

$$S = \begin{vmatrix} b_1 & -a_1 & -b_3 & -a_3 \\ -b_0 & a_0 & -b_2 & -a_2 \\ -Db_3 & Da_3 & b_1 & a_1 \\ Db_2 & -Da_2 & b_0 & a_0 \end{vmatrix},$$

qui est l'inverse de celle que nous venons d'écrire.

Considérons les substitutions :

$$U = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad V = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

On a

$$U^q = \begin{vmatrix} 1 & q & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -q \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad V^q = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ q & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -q & 1 \end{vmatrix}.$$

On voit tout d'abord que les substitutions U, V, $U^q$, $V^q$ font partie du groupe.

Cela étant, supposons qu'on ait $|a_0| > |b_0|$. Appliquons à S la substitution $U^q$; nous obtenons

$$SU^q = S' = \begin{vmatrix} b_1 & -(a_1 - qb_1) & -b_3 & -(a_3 - qb_3) \\ -b_0 & a_0 - qb_0 & -b_2 & -(a_2 - qb_2) \\ -Db_3 & D(a_3 - qb_3) & b_1 & a_1 - qb_1 \\ Db_2 & -D(a_2 - qb_2) & b_0 & a_0 - qb_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b'_1 & -a'_1 & -b'_3 & -a'_3 \\ -b'_0 & a'_0 & -b'_2 & -a'_2 \\ -Db'_3 & Da'_3 & b'_1 & a'_1 \\ b'_2 & -Da'_2 & b'_0 & a'_0 \end{vmatrix}$$

et déterminons $q$ de manière à avoir

$$|a_0 - qb_0| \leqq \tfrac{1}{2}|b_0| \qquad \text{ou} \qquad |a'_0| \leqq \tfrac{1}{2}|b_0|,$$

ce qui est toujours possible. Nous aurons de la sorte une substitution S′ où l'on aura

$$|a'_0| < |b'_0|.$$

Appliquons à S′ la substitution $V^{q'}$, en déterminant $q'$ de manière à avoir

$$|b'_0 - q'a'_0| \leqq \tfrac{1}{2}|a'_0| \qquad \text{ou} \qquad |b''_0| \leqq \tfrac{1}{2}|a''_0|.$$

On sera ainsi conduit à une substitution S″ telle que l'on ait

$$|a''_0| > |b''_0|.$$

On appliquera de nouveau à S″ une puissance convenable de U et ainsi de suite; en alternant l'emploi des substitutions U et V, on sera sûrement conduit, après un nombre fini d'opérations, à une substitution du groupe dans laquelle $a_0$ ou $b_0$ sera nul. On traitera de la même manière les termes $a_1$, $b_1$, puis $a_2$, $b_2$ et enfin $a_3$, $b_3$; de sorte qu'après un nombre fini d'opérations, on sera conduit à un des seize types suivants possibles *a priori*. (Nous n'écrivons, pour abréger, que les deux dernières colonnes de ces substitutions.)

$$\underset{(1)}{\begin{vmatrix} \beta_3 & 0 \\ \beta_2 & 0 \\ \beta_1 & 0 \\ \beta_0 & 0 \end{vmatrix}}, \quad \underset{(2)}{\begin{vmatrix} \beta_3 & 0 \\ \beta_2 & 0 \\ \beta_1 & 0 \\ 0 & \alpha_0 \end{vmatrix}}, \quad \underset{(3)}{\begin{vmatrix} \beta_3 & 0 \\ \beta_2 & 0 \\ 0 & \alpha_1 \\ \beta_0 & 0 \end{vmatrix}}, \quad \underset{(4)}{\begin{vmatrix} \beta_3 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \\ \beta_1 & 0 \\ \beta_0 & 0 \end{vmatrix}}, \quad \underset{(5)}{\begin{vmatrix} 0 & \alpha_3 \\ \beta_2 & 0 \\ \beta_1 & 0 \\ \beta_0 & 0 \end{vmatrix}};$$

$$\underset{(1')}{\begin{vmatrix} 0 & \alpha_3 \\ 0 & \alpha_2 \\ 0 & \alpha_1 \\ 0 & \alpha_0 \end{vmatrix}}, \quad \underset{(2')}{\begin{vmatrix} 0 & \alpha_3 \\ 0 & \alpha_2 \\ 0 & \alpha_1 \\ \beta_0 & 0 \end{vmatrix}}, \quad \underset{(3')}{\begin{vmatrix} 0 & \alpha_3 \\ 0 & \alpha_2 \\ \beta_1 & 0 \\ 0 & \alpha_0 \end{vmatrix}}, \quad \underset{(4')}{\begin{vmatrix} 0 & \alpha_3 \\ \beta_2 & 0 \\ 0 & \alpha_1 \\ 0 & \alpha_0 \end{vmatrix}}, \quad \underset{(5')}{\begin{vmatrix} \beta_3 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \\ 0 & \alpha_1 \\ 0 & \alpha_0 \end{vmatrix}},$$

$$\underset{(6)}{\begin{vmatrix} \beta_3 & 0 \\ \beta_2 & 0 \\ 0 & \alpha_1 \\ 0 & \alpha_0 \end{vmatrix}}, \quad \underset{(7)}{\begin{vmatrix} \beta_3 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \\ \beta_1 & 0 \\ 0 & \alpha_0 \end{vmatrix}}, \quad \underset{(8)}{\begin{vmatrix} 0 & \alpha_3 \\ \beta_2 & 0 \\ \beta_1 & 0 \\ 0 & \alpha_0 \end{vmatrix}}, \quad \underset{(6')}{\begin{vmatrix} 0 & \alpha_3 \\ 0 & \alpha_2 \\ \beta_1 & 0 \\ \beta_0 & 0 \end{vmatrix}}, \quad \underset{(7')}{\begin{vmatrix} 0 & \alpha_3 \\ \beta_2 & 0 \\ 0 & \alpha_1 \\ \beta_0 & 0 \end{vmatrix}}, \quad \underset{(8')}{\begin{vmatrix} \beta_3 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \\ 0 & \alpha_1 \\ \beta_0 & 0 \end{vmatrix}}.$$

Il reste à examiner si des substitutions de cette nature peuvent satisfaire aux conditions

$$(\mathrm{R})\qquad \begin{cases} (ab)_{01} - \mathrm{D}(ab)_{23} = 1, \\ (ab)_{12} + \phantom{\mathrm{D}}(ab)_{03} = 0, \end{cases}$$

ce qui va déterminer les valeurs des $\alpha$ et $\beta$.

23. Remarquons qu'on peut éliminer (1) et (1′) sans examen, car leur déterminant est nul. En outre, nous voyons qu'on passe d'une substitution à numéro d'ordre non accentué à la substitution de même numéro accentué, en appliquant la substitution du groupe

$$\mathrm{W} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Il nous reste à examiner à part les sept types (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8).

*Type* (2).

$$(\mathrm{R})\qquad \begin{cases} \beta_1\alpha_0 = 1, \\ \beta_3\alpha_0 = 0, \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad \beta_3 = 0, \qquad \alpha_0 = \pm 1, \qquad \beta_1 = \pm 1;$$

elle est donc

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 & 0 \\ -\mathrm{D}\beta_2 & 0 & 0 & \pm 1 \end{vmatrix}.$$

*Type* (3).

$$(\mathrm{R})\qquad \begin{cases} -\alpha_1\beta_0 = 1, \\ \phantom{-}\alpha_1\beta_2 = 0, \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad \beta_2 = 0, \qquad \beta_0 = \pm 1, \qquad \alpha_1 = \mp 1;$$

elle devient

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} 0 & \pm 1 & \beta_3 & 0 \\ \mp 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{D}\beta_3 & 0 & 0 & \mp 1 \\ 0 & 0 & \pm 1 & 0 \end{vmatrix},$$

*Type* (4).

$$(\mathrm{R})\qquad \left\{\begin{aligned} -\mathrm{D}\alpha_2\beta_3 &= 1, \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{D}=\pm 1,\\ \beta_1\alpha_2 &= 0. \end{aligned}\right.$$

Elle est donc à rejeter.

*Type* (5).

$$(\mathrm{R})\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{D}\beta_2\alpha_3 &= 1,\\ \beta_0\alpha_3 &= 0, \end{aligned}\right.$$

elle est à rejeter pour les mêmes raisons que la précédente.

*Type* (6).

$$(\mathrm{R})\qquad \left\{\begin{aligned} 0 &= 1,\\ \beta_2\alpha_1+\beta_3\alpha_0 &= 0, \end{aligned}\right.$$

elle est à rejeter.

*Type* (7).

$$(\mathrm{R})\qquad \left\{\begin{aligned} \beta_1\alpha_0-\mathrm{D}\beta_3\alpha_2 &= 1,\\ \beta_1\alpha_2 &= \beta_3\alpha_0. \end{aligned}\right.$$

On en tire $\beta_1=\rho\alpha_0$, $\beta_3=\rho\alpha_2$ et $\rho(\alpha_0^2-\mathrm{D}\alpha_2^2)=1$. Mais le déterminant est $\rho^2(\alpha_0^2-\mathrm{D}\alpha_2^2)^2$; donc on en conclut $\rho=\pm 1$ : par suite

$$\beta_1=\pm\alpha_0, \qquad \beta_3=\pm\alpha_2 \qquad \text{avec} \qquad \alpha_0^2-\mathrm{D}\alpha_2^2=\pm 1.$$

La substitution peut donc s'écrire

$$(7)\qquad \left|\begin{array}{cccc} \pm\alpha_0 & 0 & \pm\alpha_2 & 0\\ 0 & \alpha_0 & 0 & \alpha_2\\ \pm\mathrm{D}\alpha_2 & 0 & \pm\alpha_0 & 0\\ 0 & \mathrm{D}\alpha_2 & 0 & \alpha_0 \end{array}\right|$$

avec

$$\alpha_0^2-\mathrm{D}\alpha_2^2=\pm 1.$$

On doit toujours prendre le signe $+$, car autrement le déterminant de la substitution semblable serait $-1$.

*Type* (8).

$$(\mathrm{R})\qquad \left\{\begin{aligned} \beta_1\alpha_0+\mathrm{D}\beta_2\alpha_3 &= 1,\\ 0 &= 0. \end{aligned}\right.$$

Elle est à garder.

24. Nous pouvons aller plus loin.

Si, dans la substitution du type (2), nous prenons le signe $+$, nous voyons qu'elle peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -D & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}^{\beta_2},$$

et si l'on prend le signe $-$, on a la décomposition

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -D & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ D & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}^{\beta_2-1},$$

Donc, en définitive, la substitution (2) se ramène aux deux suivantes et à leurs inverses

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -D & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -D & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

De même, dans la substitution du type (3), en prenant successivement les signes $+$ et $-$, on a les décompositions, aisées à vérifier,

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ D & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -D & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}^{\beta_3},$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ D & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ D & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

de sorte que le type (3) se réduit aux substitutions déjà trouvées et aux deux précédentes et à leurs inverses.

Nous voyons donc que nos substitutions peuvent se former en composant entre elles et avec (7) et (8) les substitutions suivantes et leurs inverses

$$U = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad V = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \qquad W = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -D & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad B = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -D & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix},$$

$$C = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ D & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \qquad D = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ D & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Or, il est aisé de voir que ces substitutions ne sont pas indépendantes et que l'on a

$$UW^{-1}U = V,$$

puis

$$\begin{aligned} W^4 &= 1, \\ CA^{-1} &= W, \\ CB &= W^{-1}, \\ DA &= W^{-1}, \\ AB &= W^2, \\ AB &= BA, \end{aligned}$$

d'où nous tirons

$$\begin{aligned} V &= UW^{-1}U, \\ A &= W^{-1}C, \\ B &= C^{-1}W^{-1}, \\ D &= W^{-1}C^{-1}W \end{aligned}$$

et

$$C^{-1}W^2CW^2 = 1.$$

Donc il suffit de considérer les substitutions U, W, C et (7) et (8), qui ne comprennent pas d'ailleurs U, W, C comme cas particuliers.

25. Si nous formons maintenant les substitutions de la forme (A) correspondantes, nous trouvons les résultats suivants :

à U correspond la substitution

$$(\xi,\ \eta;\ \xi + 1,\ \eta - 1).$$

à W correspond la substitution

$$\left(\xi,\ \eta;\ -\frac{1}{\xi},\ -\frac{1}{\eta}\right),$$

et à C correspond la substitution

$$\left(\xi,\ \eta;\ \frac{-1}{\xi+\sqrt{D}},\ \frac{-1}{\eta+\sqrt{D}}\right),$$

à la substitution (7) correspond la substitution

$$\left(\xi,\ \eta;\ \pm\frac{\alpha_0+\alpha_2\sqrt{D}}{\alpha_0-\alpha_2\sqrt{D}}\xi,\ \pm\frac{\alpha_0-\alpha_2\sqrt{D}}{\alpha_0+\alpha_2\sqrt{D}}\eta\right),$$

mais

$$\pm\frac{\alpha_0+\alpha_2\sqrt{D}}{\alpha_0-\alpha_2\sqrt{D}} = (\alpha_0+\alpha_2\sqrt{D})^2, \qquad \pm\frac{\alpha_0-\alpha_2\sqrt{D}}{\alpha_0-\alpha_2\sqrt{D}} = (\alpha_0-\alpha_2\sqrt{D})^2;$$

comme, d'autre part, on obtient toutes les solutions de l'équation de Pell en employant l'identité

$$x \pm y\sqrt{D} = (a \pm c\sqrt{D})^n \qquad (n \text{ q. c. q. entier}),$$

$a$ et $c$ désignant les plus petites solutions entières, on en conclut que la substitution (7) revient à la suivante

$$[\xi,\ \eta;\ (a+c\sqrt{D})\xi,\ (a-c\sqrt{D})\eta].$$

Enfin, à la substitution (8) correspond la substitution

$$\left(\xi,\ \eta;\ \frac{\alpha_0\xi+\alpha_3\sqrt{D}}{-\beta_2\sqrt{D}\,\xi+\beta_1},\ \frac{\alpha_0\eta+\alpha_3\sqrt{D}}{-\beta_2\sqrt{D}\,\eta+\beta_1}\right)$$

avec la condition

$$\alpha_0\beta_1+\alpha_3\beta_2 D = 1,$$

qui exprime que le déterminant est égal à $+1$.

Sous cette forme, une réduction nous apparaît encore; multiplions, en effet, notre substitution par la suivante,

$$(a) \qquad \begin{vmatrix} 1 & -m\sqrt{D} \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$

qui est de la forme (8) et supposons $|\alpha_3| > |\alpha_0|$; nous obtenons

$$\begin{vmatrix} \alpha_0 & (\alpha_3 - m\alpha_0)\sqrt{\mathrm{D}} \\ -\beta_2\sqrt{\mathrm{D}} & \mathrm{D}m\beta_2 + \beta_1 \end{vmatrix}$$

et choisissons $m$ de manière que l'on ait

$$|\alpha_3 - m\alpha_0| \leqq \tfrac{1}{2}|\alpha_0|;$$

la substitution devient

$$\begin{vmatrix} \alpha'_0 & \alpha'_3\sqrt{\mathrm{D}} \\ -\beta'_2\sqrt{\mathrm{D}} & \beta'_1 \end{vmatrix} \qquad \text{avec} \qquad |\alpha'_3| < |\alpha'_0|.$$

Appliquons à cette dernière la substitution

$$(b) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -m'\sqrt{\mathrm{D}} & 1 \end{vmatrix},$$

en déterminant $m'$ par la condition

$$|\alpha'_0 - m'\alpha'_3| \leqq \tfrac{1}{2}|\alpha'_3|,$$

et ainsi de suite; appliquons alternativement les substitutions ($a$) et ($b$); nous arriverons, après un nombre fini d'opérations, à l'un ou à l'autre des deux types,

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha_3^{(n)}\sqrt{\mathrm{D}} \\ -\beta_2^{(n)}\sqrt{\mathrm{D}} & \beta_1^{(n)} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \alpha_0^{(n)} & 0 \\ -\beta_2^{(n)}\sqrt{\mathrm{D}} & \beta_1^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Le premier est à rejeter, comme donnant $\mathrm{D} = \pm 1$; quant au second, il donne immédiatement $\alpha_0^{(n)} = \pm 1$ et $\beta_1^{(n)} = \pm 1$; de sorte que nous avons, pour obtenir la substitution correspondant à (8), à composer les trois suivantes :

$$\begin{vmatrix} 1 & -m\sqrt{\mathrm{D}} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -m\sqrt{\mathrm{D}} & 1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -m\sqrt{\mathrm{D}} & -1 \end{vmatrix}.$$

Mais on a, d'autre part,

$$\begin{vmatrix} 1 & -m\sqrt{\mathrm{D}} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\sqrt{\mathrm{D}} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}^m,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -m\sqrt{\mathrm{D}} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\sqrt{\mathrm{D}} & 1 \end{vmatrix}^m,$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -m\sqrt{\mathrm{D}} & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -\sqrt{\mathrm{D}} & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\sqrt{\mathrm{D}} & 1 \end{vmatrix}^{-(m-1)},$$

c'est-à-dire qu'on est ramené aux trois suivantes :

$$\begin{vmatrix} 1 & -\sqrt{D} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad (\xi, \eta;\ \xi - \sqrt{D},\ \eta - \sqrt{D}),$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\sqrt{D} & 1 \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \left(\xi, \eta;\ \frac{\xi}{-\sqrt{D}\,\xi + 1},\ \frac{\eta}{-\sqrt{D}\,\eta + 1}\right),$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -\sqrt{D} & -1 \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \left(\xi, \eta;\ \frac{\xi}{\sqrt{D}\,\xi + 1},\ \frac{\eta}{\sqrt{D}\,\eta + 1}\right),$$

de sorte qu'en définitive, le groupe résulte des substitutions suivantes

$$(\xi, \eta;\ \xi + 1,\ \eta - 1),$$
$$\left(\xi, \eta;\ -\frac{1}{\xi},\ -\frac{1}{\eta}\right),$$
$$(\xi, \eta;\ \xi - \sqrt{D},\ \eta - \sqrt{D}),$$
$$[\xi, \eta;\ (a - c\sqrt{D})\xi,\ (a + c\sqrt{D})\eta] \quad \text{avec} \quad a^2 - c^2 D = 1,$$

auxquelles il faut ajouter, si l'on veut comprendre le groupe total des substitutions (A) et (B)

$$(\xi, \eta;\ \eta, \xi).$$

Nous poserons, pour abréger le langage dans la suite,

$$\alpha = (\xi, \eta;\ \xi + 1,\ \eta - 1),$$
$$\beta = (\xi, \eta;\ \xi - \sqrt{D},\ \eta - \sqrt{D}),$$
$$\gamma = \left(\xi, \eta;\ -\frac{1}{\xi},\ -\frac{1}{\eta}\right),$$
$$\delta = [\xi, \eta;\ (a + c\sqrt{D})\xi,\ (a - c\sqrt{D})\eta], \qquad a^2 - Dc^2 = 1,$$
$$\varepsilon = (\xi, \eta;\ \eta, \xi).$$

Remarquons, en passant, que nous démontrons un résultat énoncé par M. Picard dans son Mémoire couronné *Sur les fonctions de deux variables,* à savoir qu'on obtient un groupe discontinu de substitutions entières, en prenant le groupe admettant pour substitutions fondamentales

$$\alpha, \quad \beta, \quad \delta.$$

*Recherche des substitutions du groupe, considérées comme substitutions semblables d'une forme quadratique.*

26. Nous avons défini le groupe que nous étudions en montrant sa liaison analytique avec le groupe des transformations du premier ordre

d'un système de fonctions abéliennes de genre deux, dans lequel on a

$$\tau_{12}^2 - \tau_{11}\tau_{22} = D.$$

Dans le courant du long calcul d'élimination qui nous a donné la forme des substitutions, nous avons fait quelques restrictions. Il n'est donc pas inutile de montrer qu'on peut retrouver les mêmes formules en cherchant comment on doit choisir les coefficients des substitutions

$$\left(\xi,\ \eta;\ \frac{a\xi+b}{c\xi+d},\ \frac{l\eta+m}{p\eta+q}\right),$$

pour que les substitutions correspondantes qui reproduisent la forme

$$u_1^2 - D u_2^2 + u_3 u_4$$

aient tous leurs coefficients entiers.

27. A cet effet, commençons par remarquer que, dans les formules du n° 6, si l'on change $+\sqrt{D}$ en $-\sqrt{D}$, $\xi$ et $\eta$ deviennent respectivement $-\eta$, $-\xi$ et, en second lieu, que toute transformation semblable de la forme

$$u_1^2 - D u_2^2 + u_3 u_4$$

n'est pas entière si $\xi$ et $\eta$ ne contiennent pas $\sqrt{D}$.

Cela étant, considérons les systèmes de valeurs $(\xi, \eta)$, $(\xi', \eta')$ correspondant respectivement aux systèmes $(u_1, u_2, u_3, u_4)$, $(u'_1, u'_2, u'_3, u'_4)$ et supposons que les $(u_i)$ soient des nombres entiers et que les $(u'_i)$ leur correspondent par une substitution à coefficients entiers; on aura les relations

$$\xi' = \frac{a\xi+b}{c\xi+q}, \qquad \eta' = \frac{l\eta+m}{p\eta+q},$$

dans lesquelles les $a$, $b$, ..., $q$ contiennent $\sqrt{D}$. Changeons, dans la première de ces formules, $\sqrt{D}$ en $-\sqrt{D}$; elle devient

$$-\eta' = \frac{-a_0\eta+b_0}{-c_0\eta+d_0} \qquad \text{ou} \qquad \eta' = \frac{a_0\eta-b_0}{-c_0\eta+d_0},$$

où $a_0$, ... désignent les nombres conjugués en $\sqrt{D}$ de $a$, .... Comme les points $(u)$ et $(u')$ n'ont pas bougé dans cette transformation, la dernière formule doit être identique à

$$\eta' = \frac{l\eta + m}{p\eta + q},$$

ce qui entraîne les conditions

$$\frac{l}{a_0} = \frac{m}{-b_0} = \frac{p}{c_0} = \frac{q}{d_0},$$

d'où l'on tire

$$\xi' = \frac{a\xi + b}{c\xi + d}, \qquad \eta' = \frac{a_0\eta - b_0}{-c_0\eta + d_0}.$$

Telle est donc la forme nécessaire de toute substitution correspondant à une substitution entière sur les $u_i$. On constate d'ailleurs aisément que toute substitution de cette forme correspond à une substitution à coefficients entiers. D'autre part, c'est, aux notations près, précisément la forme des substitutions (A).

28. Nous avons donc le droit d'utiliser, pour notre groupe, les considérations développées dans les premiers paragraphes de ce travail.

Nous passerons des substitutions de la forme (A) ou (B) aux substitutions linéaires sur les $u_i$, au moyen des formules du n° 6.

A ces dernières substitutions correspondent des substitutions sur $x$, $y$, $z$ qui peuvent représenter des transformations isogonales non euclidiennes, dans un espace où la conique à l'infini aurait pour équations

$$t = 0, \qquad x^2 - y^2 - z^2 = 0.$$

Pour trouver ces transformations isogonales, il faut commencer par passer de la forme quadratique, considérée jusqu'ici,

$$u_1^2 - \mathrm{D}\,u_2^2 + u_3 u_4,$$

à la forme canonique

$$u_1^2 - u_2^2 + u_3^2 - u_4^2,$$

ce qui se fait au moyen de la substitution

$$\left\| \begin{array}{l|l} u_1 & u_1, \\ u_2 & \dfrac{u_2}{\sqrt{\mathrm{D}}}, \\ u_3 & u_3 + u_4, \\ u_4 & u_3 - u_4. \end{array} \right\|$$

Cela fait, on appliquera les formules qui donnent la représentation, dans l'espace à trois dimensions $u_1 = 0$, de la quadrique

$$u_1^2 - u_2^2 + u_3^2 - u_4^2 = 1,$$

le point de vue étant le point (1, 0, 0, 0). Ces formules sont

$$x = \frac{u_3}{1 - u_1},$$

$$y = \frac{u_2}{1 - u_1},$$

$$z = \frac{u_4}{1 - u_1},$$

ou bien

$$u_1 = \frac{x^2 - y^2 - z^2 - 1}{x^2 - y^2 - z^2 + 1},$$

$$u_2 = \frac{2y}{x^2 - y^2 - z^2 + 1},$$

$$u_3 = \frac{2x}{x^2 - y^2 - z^2 + 1},$$

$$u_4 = \frac{2z}{x^2 - y^2 - z^2 + 1}.$$

La quadrique conservée par les transformations isogonales non euclidiennes sera la sphère non euclidienne

$$x^2 - y^2 - z^2 + 1 = 0.$$

Nous avons fait observer au n° 3 qu'on pouvait faire en sorte que les transformations isogonales laissent invariable un plan. Il suffit de transformer toutes les substitutions trouvées par la substitution

$$\begin{array}{c|c} x & \dfrac{-2x}{x^2 - y^2 - (z+1)^2}, \\ y & \dfrac{-2y}{x^2 - y^2 - (z+1)^2}, \\ z + 1 & \dfrac{-2(z+1)}{x^2 - y^2 - (z+1)^2}, \end{array}$$

qui change la quadrique $x^2 - y^2 - z^2 + 1 = 0$ dans le plan $z = 0$. Cette substitution n'est autre qu'une inversion par rapport à la sphère non euclidienne

$$x^2 - y^2 - (z+1)^2 + 2 = 0.$$

Nous pourrons donc avoir finalement les transformations isogonales non euclidiennes conservant un plan réel, qui correspondent à des substitutions données sur les $\xi$ et $\eta$.

En particulier, si nous considérons les substitutions (B) à période *deux*, c'est-à-dire de la forme

$$\left(\xi,\ \eta;\ \frac{a\eta+b}{c\eta+d},\ \frac{-d\xi+b}{c\xi-a}\right),$$

il leur correspond sur les $u_i$ une substitution à période 2, c'est-à-dire une homologie harmonique, le plan d'homologie étant

$$-(a+d)u_1-(a-d)u_2+(b-c)u_3+(b+c)u_4=0.$$

Les transformations isogonales non euclidiennes correspondantes sont des inversions non euclidiennes ou des réflexions sur les sphères transformées de ces plans. Ces sphères (qui sont des plans passant par l'origine si $a+d=0$) sont orthogonales au sens non euclidien, à la sphère non euclidienne

$$x^2-y^2-z^2+1=0.$$

Par suite, enfin, dans les transformées de ces substitutions isogonales, les homologies harmoniques correspondent à des réflexions sur des sphères non euclidiennes, toutes orthogonales au sens non euclidien au plan $z=0$.

On sait, et il n'est pas difficile de le voir, que si l'on peut former un polyèdre à faces sphériques tel qu'il ne soit traversé par aucune autre sphère de réflexion du groupe, ce polyèdre peut constituer le domaine fondamental du groupe (ou d'un de ses sous-groupes d'indice fini) à condition que les réflexions successives de ce polyèdre sur ses faces remplissent sans vides ni empiètement l'espace entier.

Dans le cas où D est quelconque, ce domaine fondamental paraît difficile à construire et nos recherches sur ce sujet n'ont pas abouti. Il semble y avoir là une variété de cas particuliers aussi grande que celle que M. Bianchi a rencontrée dans l'étude du cas voisin des transformations semblables d'une forme quadratique quaternaire réductible au type

$$u_1^2+u_2^2+u_3^2-u_4^2 \quad (^1).$$

(1) *Ann. di Mat.*, t. XXI et XIII.

## *Particularités du domaine fondamental du groupe déduites de la réduction continuelle.*

**29.** Essayons maintenant d'appliquer à la forme quadratique qui nous intéresse l'algorithme de la réduction continuelle et de voir quels renseignements nous pouvons en tirer relativement au domaine fondamental du groupe.

Ce que nous avons dit sur les réduites à la fin de la première Partie de ce Travail nous conduit à envisager, à la place de la forme

$$u_1^2 - \mathrm{D}\,u_2^2 + u_3 u_4,$$

la forme

$$u_3^2 - \mathrm{D}\,u_2^2 + u_1 u_4,$$

dans laquelle

$$a_1 = 0, \qquad b_{12} = 0, \qquad b_{13} = 0,$$

et qui peut, par suite, avoir un point commun avec la limite du domaine S.

Si nous calculons, pour cette forme, les coefficients de la forme définie associée, nous trouvons sans peine

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}_1 &= 2,\\
\mathrm{A}_2 &= \mathrm{D}[2\xi\xi_0 + 2\eta\eta_0 + (\xi+\xi_0)(\eta+\eta_0)],\\
\mathrm{A}_3 &= 2\xi\xi_0 + 2\eta\eta_0 - (\xi+\xi_0)(\eta+\eta_0),\\
\mathrm{A}_4 &= 2\xi\xi_0\eta\eta_0,\\
\mathrm{B}_{12} &= -\sqrt{\mathrm{D}}(\xi+\xi_0+\eta+\eta_0),\\
\mathrm{B}_{13} &= \xi+\xi_0-\eta-\eta_0,\\
\mathrm{B}_{14} &= \tfrac{1}{2}(\xi+\xi_0)(\eta+\eta_0),\\
\mathrm{B}_{23} &= -2\sqrt{\mathrm{D}}(\xi\xi_0-\eta\eta_0),\\
\mathrm{B}_{24} &= -\sqrt{\mathrm{D}}[\xi\xi_0(\eta+\eta_0)+\eta\eta_0(\xi+\xi_0)],\\
\mathrm{B}_{34} &= [\xi\xi_0(\eta+\eta_0)-\eta\eta_0(\xi+\xi_0)].
\end{aligned}$$

Si nous mettons cette forme définie

$$(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4; \mathrm{B}_{12}, \mathrm{B}_{13}, \mathrm{B}_{14}, \mathrm{B}_{23}, \mathrm{B}_{24}, \mathrm{B}_{34})$$

sous la forme de MM. Korkine et Zolotareff, il vient, par des calculs qui n'ont d'autre difficulté que leur longueur,

$$\varepsilon_1 = -\frac{\sqrt{D}}{2}(\xi+\xi_0+\eta+\eta_0), \qquad \mu_1 = 2,$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2}(\xi+\xi_0-\eta-\eta_0), \qquad \mu_2 = -\frac{D}{2}[(\xi_0-\xi)^2+(\eta-\eta_0)^2],$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{4}(\xi+\xi_0)(\eta+\eta_0), \qquad \mu_3 = -2\frac{(\xi_0-\xi)^2(\eta-\eta_0)^2}{(\xi_0-\xi)^2+(\eta-\eta_0)^2},$$

$$\varepsilon_4 = -\frac{1}{\sqrt{D}}\frac{(\xi_0-\xi)^2-(\eta-\eta_0)^2}{(\xi_0-\xi)^2+(\eta-\eta_0)^2}, \qquad \mu_4 = \frac{1}{2}(\xi_0-\xi)^2(\eta-\eta_0)^2,$$

$$\varepsilon_5 = -\frac{1}{2\sqrt{D}}\frac{(\eta+\eta_0)(\xi_0-\xi)^2+(\xi+\xi_0)(\eta-\eta_0)^2}{(\xi_0-\xi)^2+(\eta-\eta_0)^2},$$

$$\varepsilon_6 = -\tfrac{1}{4}(\xi+\xi_0-\eta-\eta_0);$$

on en tire

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = -\frac{D}{4}[(\xi_0-\xi)^2+(\eta-\eta_0)^2],$$

$$\frac{\mu_3}{\mu_2} = \frac{4}{D}\frac{(\xi_0-\xi)^2(\eta-\eta_0)^2}{[(\xi_0-\xi)^2+(\eta-\eta_0)^2]^2},$$

$$\frac{\mu_4}{\mu_3} = -\frac{1}{4}[(\xi_0-\xi)^2+(\eta-\eta_0)^2].$$

Comme on doit avoir, pour que la forme soit réduite, $\frac{\mu_3}{\mu_2} \geqq \frac{1}{2}$, on en conclut

$$\frac{4}{D}\frac{(\xi_0-\xi)^2(\eta-\eta_0)^2}{[(\xi_0-\xi)^2+(\eta-\eta_0)^2]^2} \geqq \frac{1}{2};$$

mais, d'autre part, on a, pour toutes les valeurs de $\xi$, $\eta$,

$$4\frac{(\xi_0-\xi)^2(\eta-\eta_0)^2}{[(\xi_0-\xi)^2+(\eta-\eta_0)^2]^2} < 1;$$

on devrait donc avoir

$$\frac{D}{2} \leqq 1 \qquad \text{ou} \qquad D \leqq 2,$$

ce qui n'arrive pas en général; donc la forme dont on est parti

$$u_3^2 - D u_2^2 + x_1 x_4$$

n'est réduite pour aucune valeur de $\xi$, $\eta$, ce qui nous montre en passant que *les conditions du n° 14 ne sont pas suffisantes*. Si on veut la réduire, il faut faire une substitution linéaire qui change en quelque manière les quantités $\mu_i$, ce qui est mal commode, et nous sommes conduit à changer de forme de départ.

30. Faisons dans $f$ la substitution

$$\left(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4;\ x_1,\ \frac{x_2}{\sqrt{D}},\ x_3\sqrt{D},\ x_4\right);$$

la forme devient

$$D x_3^2 - x_2^2 + x_1 x_4 = -(x_2^2 - D x_3^2 - x_1 x_4) = -\varphi,$$

ce qui montre qu'on obtient $-\varphi$ en faisant dans $f$ la substitution entière de déterminant $+1$

$$T = (x_1, x_2, x_3, x_4;\ x_1, x_3, x_2, -x_4).$$

A toute substitution semblable S de $\varphi$ correspond une substitution semblable $TST^{-1}$ de $f$ et inversement à toute substitution semblable de $f$, $\Sigma$, correspond la substitution semblable de $\varphi$, $T^{-1}\Sigma T$.

Donc, au point de vue de notre groupe, nous pouvons raisonner sur la forme $\varphi$. Or, si nous faisons la première substitution qui nous a donné $-\varphi$ sur $f$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\mu_1\left(x_1 + \varepsilon_1 \frac{x_2}{\sqrt{D}} + \varepsilon_2\sqrt{D}\,x_3 + \varepsilon_3 x_4\right)^2 \\ + \mu_2\left(\frac{x_2}{\sqrt{D}} + \varepsilon_4\sqrt{D}\,x_3 + \varepsilon_5 x_4\right)^2 \\ + \mu_3(x_3\sqrt{D} + \varepsilon_6 x_4)^2 \\ + \mu_4 x_4^2,\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}-\varphi = \mu_1\left(x_1 + \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{D}} x_2 + \varepsilon_2\sqrt{D}\,x_3 + \varepsilon_3 x_4\right)^2 \\ + \frac{\mu_2}{\sqrt{D}}(x_2 + \varepsilon_4 D\,x_3 + \varepsilon_5\sqrt{D}\,x_4)^2 \\ + \mu_3 D\left(x_3 + \frac{\varepsilon_6}{\sqrt{D}} x_4\right)^2 \\ + \mu_4 x_4^2,\end{aligned}$$

et il se trouve que les nouvelles valeurs des coefficients $\mu_i$ sont encore entières.

Or, pour cette dernière forme $\varphi$, nous avons les coefficients

$$\varepsilon_1 = -\tfrac{1}{2}(\xi+\xi_0+\eta+\eta_0), \qquad \mu_1 = -2,$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sqrt{D}}{2}(\xi+\xi_0-\eta-\eta_0), \qquad \mu_2 = \frac{1}{2}[(\xi_0-\xi)^2+(\eta-\eta_0)^2],$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{4}(\xi+\xi_0)(\eta+\eta_0), \qquad \mu_3 = 2D\frac{(\xi_0-\xi)^2(\eta-\eta_0)^2}{(\xi_0-\xi)^2+(\eta-\eta_0)^2},$$

$$\varepsilon_4 = -\sqrt{D}\frac{(\xi_0-\xi)^2-(\eta-\eta_0)^2}{(\xi_0-\xi)^2+(\eta-\eta_0)^2}, \qquad \mu_4 = -\frac{1}{2}(\xi_0-\xi)^2(\eta-\eta_0)^2,$$

$$\varepsilon_5 = -\frac{1}{2}\frac{(\eta+\eta_0)(\xi_0-\xi)^2+(\xi+\xi_0)(\eta-\eta_0)^2}{(\xi_0-\xi)^2+(\eta-\eta_0)^2},$$

$$\varepsilon_6 = -\frac{1}{4\sqrt{D}}(\xi+\xi_0-\eta-\eta_0),$$

expressions qui se simplifient en posant

$$\xi = \xi_1+i\xi_2,$$
$$\eta = \eta_1+i\eta_2,$$

et qui deviennent

$$\varepsilon_1 = -(\xi_1+\eta_1), \qquad \frac{\mu_2}{\mu_1} = \xi_2^2+\eta_2^2,$$

$$\varepsilon_2 = \sqrt{D}(\xi_1-\eta_1), \qquad \frac{\mu_3}{\mu_2} = 4D\frac{\xi_2^2\eta_2^2}{(\xi_2^2+\eta_2^2)^2},$$

$$\varepsilon_3 = \xi_1\eta_1, \qquad \frac{\mu_4}{\mu_3} = \frac{1}{D}(\xi_2^2+\eta_2^2),$$

$$\varepsilon_4 = -\sqrt{D}\frac{\xi_2^2-\eta_2^2}{\xi_2^2+\eta_2^2},$$

$$\varepsilon_5 = -\frac{\eta_1\xi_2^2+\xi_1\eta_2^2}{\xi_2^2+\eta_2^2},$$

$$\varepsilon_6 = -\frac{1}{2\sqrt{D}}(\xi_1-\eta_1).$$

31. Le problème qui va nous occuper est donc la réduction continuelle de la forme

$$x_2^2-Dx_3^2-x_1x_4.$$

Remarquons avant tout qu'il y a des valeurs de $\xi_2$, $\eta_2$ aussi grandes qu'on veut qui satisfont aux conditions

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} \geqq \frac{1}{2}, \qquad \frac{\mu_3}{\mu_2} \geqq \frac{1}{2}, \qquad \frac{\mu_4}{\mu_3} \geqq \frac{1}{2}$$

pour la première et la dernière inégalité; le fait est évident. Pour la seconde, il suffit de choisir une valeur de $\zeta^2 = \left(\frac{\xi_2}{\eta_2}\right)^2$ qui satisfasse à l'inégalité

$$\zeta^4 + (2 - 8D)\zeta^2 + 1 < 0;$$

il faut donc que $\xi_2^2$ et $\eta_2^2$ croissent sans limite de façon que leur rapport $\zeta^2$ soit compris entre les racines de l'équation

$$X^2 - 2(4D - 1)X + 1 = 0,$$

racines qui sont toujours réelles et égales à

$$4D - 1 \pm 2\sqrt{2D(2D - 1)}.$$

Remarquons également que de pareilles valeurs infiniment grandes de $\xi_2$ et $\eta_2$ sont compatibles avec la condition

$$|\varepsilon_4| < \tfrac{1}{2}$$

ou

$$-\frac{1}{2} < \sqrt{D}\,\frac{\eta_2^2 - \xi_2^2}{\eta_2^2 + \xi_2^2} < \frac{1}{2},$$

ou bien

$$-\frac{1}{2} < \sqrt{D}\,\frac{1 - \zeta^2}{1 + \zeta^2} < \frac{1}{2},$$

car cette dernière exige que l'on ait

$$\frac{2\sqrt{D} - 1}{2\sqrt{D} + 1} < \zeta^2 < \frac{2\sqrt{D} + 1}{2\sqrt{D} - 1};$$

or ces deux limites de $\zeta^2$ sont comprises dans l'intervalle des racines de l'équation ci-dessus en X.

Donc notre assertion est confirmée; il y a des valeurs infiniment grandes de $\xi_2$ et $\eta_2$ satisfaisant aux inégalités de la réduction en ce qui concerne les nombres $\mu_i$ et $|\varepsilon_4| < \frac{1}{2}$.

Ceci nous montre que le domaine D de réduction a un point commun avec la limite du domaine S à l'infini qui est entièrement analogue au point à l'infini du domaine fondamental du groupe modulaire. Il résulte de cette analyse qu'il ne peut avoir que ce point commun.

Enfin, remarquons encore que, sauf les conditions

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} \geqq \frac{1}{2}, \qquad \frac{\mu_4}{\mu_3} \geqq \frac{1}{2},$$