SUR LE

PROBLÈME DE L'ITÉRATION,

PAR M. C. BOURLET.

Le problème général de l'*Itération* peut être posé de la façon suivante :

Soit $\varphi(z)$ *une fonction donnée de la variable* z; *posons*

$$\varphi_0(z) = z, \qquad \varphi_1(z) = \varphi(z), \qquad \varphi_2(z) = \varphi[\varphi(z)], \qquad \ldots$$

plus généralement

$$\varphi_k(z) = \varphi[\varphi_{k-1}(z)].$$

Soit $\varphi_{-1}(z)$ *la fonction inverse de* $\varphi(z)$; *nous poserons encore*

$$\varphi_{-2}(z) = \varphi_{-1}[\varphi_{-1}(z)], \qquad \ldots, \qquad \varphi_{-k-1}(z) = \varphi_{-1}[\varphi_{-k}(z)].$$

On aura, alors, pour toutes les valeurs entières positives ou négatives des indices de p et q,

$$\varphi_p[\varphi_q(z)] = \varphi_{p+q}(z);$$

et il s'agit de trouver une fonction $\psi(k, z)$ *de la variable* z *et du paramètre* k *telle que l'on ait*

$$\text{(A)} \qquad \psi(p, z) = \varphi_p(z),$$

pour toutes les valeurs entières positives ou négatives de p, *et telle, en outre, que l'on ait*

$$\text{(B)} \qquad \psi[k, \psi(k', z)] = \psi(k + k', z),$$

quels que soient les nombres k *et* k', *réels ou imaginaires.*

Ce problème a déjà donné lieu à de remarquables travaux. Étudié d'abord par Schröder [1] et Korkine [2], il a été repris, plus récemment, par M. Kœnigs [3].

Schröder et Korkine se sont surtout occupés du calcul des coefficients du développement de la fonction $\psi(k, z)$ suivant les puissances croissantes de $z-x$, x étant *point limite* de la fonction $\varphi(z)$; mais, outre que leurs méthodes se bornent à montrer comment on calculera de proche en proche ces coefficients, elles présentent l'inconvénient de présupposer soit l'existence de la fonction $\psi(k, z)$, soit la convergence des développements étudiés.

Korkine, à vrai dire, a donné une seconde méthode, fort ingénieuse, dans laquelle il montre que la fonction $\psi(k, z)$ peut être mise sous la forme

$$\psi(k, z) = \pi_{-1}[k + \pi(z)]$$

et la recherche de cette fonction est ainsi ramenée à celle de la fonction $\pi(z)$, qui vérifie l'équation fonctionnelle d'Abel

$$\pi[\varphi(z)] = 1 + \pi(z).$$

Il donne une expression *formelle* de $\pi(z)$, dans laquelle figure un développement en une série doublement infinie dont, malheureusement, il n'a pas établi la convergence.

M. Kœnigs, en se plaçant à un tout autre point de vue, et sans rechercher la forme de la fonction $\psi(k, z)$, a démontré d'une façon rigoureuse son *existence*.

Aucun de ces auteurs, comme on le voit, n'a donné une expression *explicite* de cette fonction $\psi(k, z)$ *dont la validité soit assurée*.

Cependant Schröder indique dans son Mémoire, aux notations près, la formule suivante [4] :

$$\begin{aligned}\varphi_r(z) = \varphi_0(z) &+ \frac{r}{1}[\varphi_1(z) - \varphi_0(z)] + \frac{r(r-1)}{1.2}[\varphi_2(z) - 2\varphi_1(z) + \varphi_0(z)] + \ldots \\ &+ \frac{r(r-1)\ldots 2.1}{1.2\ldots(r-1)r}\left[\varphi_r(z) - \frac{r}{1}\varphi_{r-1}(z) + \frac{r(r-1)}{1.2}\varphi_{r-2}(z) - \ldots + (-1)^r\varphi_0(z)\right],\end{aligned}$$

---

(1) SCHRÖDER, *Ueber iterirte Functionen* (*Mathematische Annalen*, t. III, p. 296).

(2) KORKINE, *Sur un problème d'interpolation* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. VI, p. 228; 1882).

(3) KOENIGS, *Nouvelles recherches sur les équations fonctionnelles* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. II, p. 385; 1885).

(4) Cette formule a été suggérée à Schröder par une autre formule donnée par Cayley dans le *Quarterly Journal*, t. LI, p. 1 ; pour ma part, je l'avais retrouvée en appliquant la formule d'interpolation de Newton.

où r désigne un *entier positif* et où le second membre ne contient que $r+1$ termes. Il est vraiment curieux qu'il n'ait pas eu l'idée d'appliquer cette formule au cas de r quelconque car, en remplaçant la somme du second membre par une série, il aurait été ainsi conduit à la solution explicite qui fait l'objet de ce Travail.

I.

Je rappelle d'abord deux propriétés de la fonction de substitution $\varphi(z)$.

1° Soit x une racine de l'équation

$$\varphi(z) - z = 0;$$

x est ce qu'on appelle un *point limite* de la substitution $\varphi(z)$; on a, pour toutes les valeurs entières, positives ou négatives, de l'indice p,

$$\varphi_p(x) = x. \tag{1}$$

Je supposerai, de plus, toujours, dans la suite, que la fonction $\varphi(z)$ est *régulière* au voisinage du point $z = x$, c'est-à-dire qu'elle est développable en une série ordonnée suivant les puissances croissantes de $z - x$ et que l'on a :

$$|\varphi'(x)| < 1.$$

2° Désignons par $\varphi'_p(z)$ la dérivée de $\varphi_p(z)$; on aura, quel que soit l'entier positif ou négatif p,

$$\varphi'_p(x) = [\varphi'(x)]^p \tag{2}$$

[pourvu que, dans le cas où p est négatif, $\varphi'(x) \neq 0$].

En effet, pour $k = 2$, on a

$$\varphi'_2(z) = \varphi'[\varphi(z)]\,\varphi'(z)$$

et, en faisant $z = x$ et remarquant que

$$\varphi(x) = x,$$
$$\varphi'_2(x) = [\varphi'(x)]^2.$$

Si la loi est vraie pour l'indice p, elle est vraie pour l'indice $p+1$, car

$$\varphi'_{p+1}(z) = \varphi'[\varphi_p(z)]\,\varphi'_p(z)$$

et, en faisant $z = x$, en vertu de l'égalité (1),

$$\varphi'_{p+1}(x) - \varphi'(x)\,\varphi'_p(x) = [\varphi'(x)]^{p+1}.$$

La proposition est donc vraie pour les indices positifs.

D'autre part, on a

$$\varphi[\varphi_{-1}(z)] = z,$$

donc

$$\varphi'[\varphi_{-1}(z)]\,\varphi'_{-1}(x) = 1$$

et, en faisant $z = x$,

$$\varphi'(x)\,\varphi'_{-1}(x) = 1,$$

d'où

$$\varphi'_{-1}(x) = [\varphi'(x)]^{-1}.$$

La loi s'étend alors, de proche en proche, comme plus haut, aux indices négatifs.

II.

Considérons maintenant la série

$$(3)\quad \begin{cases} \psi(k, z) = z + \dfrac{k}{1}[\varphi(z) - z] + \dfrac{k(k-1)}{1.2}[\varphi_2(z) - 2\varphi_1(z) + z] + \dots \\ \qquad + \dfrac{k(k-1)\dots(k-p+1)}{p!}[\varphi_p(z) - C_p^1\varphi_{p-1}(z) + C_p^2\varphi_{p-2}(z) + \dots + (-1)^p z] + \dots, \end{cases}$$

les coefficients C_p^1, C_p^2, ..., qui figurent dans les crochets, étant les coefficients binominaux. Remarquons, de suite, que cette série peut s'écrire *symboliquement*

$$(4)\quad \begin{cases} \psi(k, z) = z + \dfrac{k}{1}(\varphi - 1)z + \dfrac{k(k-1)}{1.2}(\varphi - 1)^{(2)}z + \dots \\ \qquad + \dfrac{k(k-1)\dots(k-p+1)}{p!}(\varphi - 1)^{(p)}z + \dots, \end{cases}$$

à condition de remplacer, dans le développement de la puissance symbolique $(\varphi - 1)^{(p)}z$, l'expression $\varphi^{(q)}z$ par $\varphi_q(z)$. D'ailleurs, cette dernière formule (4) peut encore se condenser, symboliquement, en celle-ci :

$$(5)\qquad \psi(k, z) = [1 + (\varphi - 1)]^{(k)}z.$$

Pour que l'égalité (3), ou les équivalentes (4) et (5), définisse une fonction bien déterminée $\psi(k, z)$, il faut, d'abord, prouver la convergence de la série qui figure dans le second membre et, à cet effet, j'établirai la proposition suivante :

x étant un point limite de la fonction $\varphi(z)$, au voisinage duquel elle

est régulière, tel que l'on ait

$$|\varphi'(x) - 1| < 1,$$

il existe un cercle C_x, de centre x, tel que, pour tout point z situé à l'intérieur de ce cercle, la série (3) *soit convergente, quel que soit k.*

Prenons le rapport du $(p+1)^{\text{ième}}$ terme de la série (3) au précédent; ce rapport est

$$R_p(z) = \frac{k-p+1}{p} \; \frac{\varphi_p(z) - C_p^1 \varphi_{p-1}(z) + C_p^2 \varphi_{p-2}(z) - \ldots + (-1)^p z}{\varphi_{p-1}(z) - C_{p-1}^1 \varphi_{p-2}(z) + C_{p-2}^2 \varphi_{p-3}(z) - \ldots + (-1)^{p-1} z},$$

et cherchons d'abord la valeur de ce rapport pour $z = x$. Pour cette valeur, le rapport prend la forme indéterminée $\frac{0}{0}$, car

$$\varphi_p(x) = \varphi_{p-1}(x) = \ldots = \varphi(x) = x;$$

nous aurons donc sa valeur en prenant le rapport des dérivées pour $z = x$. Si l'on tient compte des égalités (2), démontrées plus haut, la valeur de ce rapport est donc

$$R_p(x) = \frac{k-p+1}{p} \; \frac{[\varphi'(x) - 1]^p}{[\varphi'(x) - 1]^{p-1}} = \frac{k-p+1}{p} [\varphi'(x) - 1].$$

Ceci nous prouve, d'abord, que le rapport $R_p(z)$ est, quel que soit p, une fonction régulière de z dans le voisinage du point limite x puisqu'en ce point il a une valeur *finie* et qu'il est le quotient de deux fonctions régulières. La limite de ce rapport, lorsque p croît indéfiniment (limite qui est indépendante de k), est donc, *en général*, une fonction $R(z)$ régulière au voisinage de $z = x$ et la valeur de cette fonction pour $z = x$ est

$$R(x) = \lim_{p=\infty} \left\{ \frac{k-p+1}{p} [\varphi'(x) - 1] \right\} = 1 - \varphi'(x).$$

Si donc on a

$$|\varphi'(x) - 1| < 1,$$

on pourra déterminer un cercle C_x, de centre x, tel que, pour tout point z situé à l'intérieur de ce cercle, le module de $R(z)$ soit assez voisin du module de $R(x)$, c'est-à-dire de $|\varphi'(x) - 1|$, pour être plus petit que 1; pour tous ces points la série (3) sera donc absolument convergente, *quel que soit k*.

Mais il y a plus. La démonstration précédente nous prouve, en effet, que si l'on considère la série déduite de la série (3) en prenant les dérivées de tous les termes, par rapport à z, et si, dans cette nouvelle série, on prend le rapport du $(p+1)^{\text{ième}}$ terme au précédent, ce rapport a une limite indépendante de k qui est une fonction $S(z)$, régulière au voisinage du point limite, telle que l'on ait

$$S(x) = R(x) = 1 - \varphi'(x).$$

On pourra donc déterminer un second cercle Γ_x, de centre x, de rayon égal ou inférieur à celui de C_x, tel qu'à l'intérieur de ce cercle, et quel que soit k, la série (3) *soit convergente et définisse une fonction* $\psi(k, z)$, *régulière en* z.

Dans toute la suite, je supposerai qu'on ne considère la fonction $\psi(k, z)$ que pour les valeurs de z situées à l'intérieur du cercle Γ_x dans lequel elle est régulière.

III.

J'établirai d'abord quelques propriétés simples de la fonction $\psi(k, z)$.

1° *x étant le point limite, on a*

$$\psi(k, x) = x. \tag{6}$$

C'est évident, car, comme nous l'avons remarqué plus haut, l'expression $(\varphi - 1)^{(p)} z$ prend, pour $z = x$, la valeur

$$(1-1)^p x = 0 \quad [1],$$

$\psi(k, x)$ se réduit donc à son premier terme x.

2° *$\psi'(k, z)$ désignant la dérivée de la fonction $\psi(k, z)$, par rapport à z, on a, au point limite x,*

$$\psi'(k, x) = [\varphi'(x)]^k, \tag{7}$$

quel que soit k.

Nous avons vu, en effet, qu'on a toujours pour les valeurs *entières* de l'indice p

$$\varphi'_p(x) = [\varphi'(x)]^p;$$

---

[1] Ici $(1-1)^p$ désigne une *véritable* puissance. Pour qu'il n'y ait pas de confusion, j'aurai toujours soin de placer les exposants des puissances symboliques entre parenthèses.

or, on a

$$\psi'(k, z) = 1 + \frac{k}{1}[\varphi'(z) - 1] + \frac{k(k-1)}{1.2}[\varphi'(z) - 1]^{(2)} + \ldots$$
$$+ \frac{k(k-1)\ldots(k-p+1)}{p!}[\varphi'(z) - 1]^{(p)}\ldots,$$

et, pour $z = x$,

$$[\varphi'(z) - 1]^{(p)} = \varphi'_p(z) - C_p^1 \varphi'_{p-1}(z) + C_p^2 \varphi'_{p-2}(z) - \ldots + (-1)^p$$

prend, par suite, la valeur

$$[\varphi'(x)]^p - C_p^1[\varphi'(x)]^{p-1} + C_p^2[\varphi'(x)]^{p-2} - \ldots + (-1)^p = [\varphi'(x) - 1]^p.$$

On a donc

$$\psi'(k, x) = 1 + \frac{k}{1}[\varphi'(x) - 1] + \frac{k(k-1)}{1.2}[\varphi'(x) - 1]^2 + \ldots$$
$$+ \frac{k(k-1)\ldots(k-p+1)}{p!}[\varphi'(x) - 1]^p + \ldots,$$

les puissances étant ici de véritables puissances. Puisque $|\varphi'(x) - 1| < 1$, la série du second membre est convergente et a pour somme

$$\psi'(k, x) = [1 + \varphi'(x) - 1]^k = [\varphi'(x)]^k,$$

quel que soit k.

Ces deux propriétés ne sont, en somme, que l'extension à $\psi(k, z)$ des deux propriétés des fonctions $\varphi_p(z)$ rappelées au n° I.

3° *p étant un entier positif ou nul, on a*

$$(8) \qquad \psi(p, z) = \varphi_p(z).$$

Ceci est encore évident, car on a

$$\psi(p, z) = [1 + \varphi - 1]^{(p)} z = \varphi^{(p)} z = \varphi_p(z),$$

puisque p est entier, et en effectuant la puissance symbolique.

4° *p étant un entier positif, on a*

$$(9) \qquad \psi[k, \varphi_p(z)] = \psi[k + p, z],$$

quel que soit k (¹).

(¹) Il faut remarquer qu'à cause de l'hypothèse $|\varphi'(x)| < 1$, si z est suffisamment voisin du point x, $\varphi_p(z)$ sera à l'intérieur du cercle Γ_x dans lequel la fonction Ψ est régulière.

Il suffit de prouver la proposition lorsque $p=1$, car, alors, elle s'étend sans difficulté, de proche en proche, pour $p=2, 3, 4, \ldots$. Or, on a

$$\psi[k, \varphi(z)] = \varphi(z) + \frac{k}{1}[\varphi_2 - \varphi_1]z + \ldots$$
$$+ \frac{k(k-1)\ldots(k-p+1)}{p!}[\varphi_{p+1} - C_p^1\varphi_p + C_p^2\varphi_{p-1} + \ldots + (-1)^p\varphi]z + \ldots,$$

et ceci peut s'écrire, symboliquement,

$$\psi[k, \varphi(z)] = \varphi z + \frac{k}{1}[\varphi - 1]\varphi z + \ldots + \frac{k(k-1)\ldots(k-p+1)}{p!}(\varphi-1)^{(p)}\varphi z + \ldots,$$

ce qui revient à multiplier *symboliquement* par φ.

Pour multiplier symboliquement par φ, on peut multiplier par $1+\varphi-1$ et l'on a donc

$$\begin{aligned}\psi[k, \varphi(z)] &= [1+(\varphi-1)]^{(k)}[1+(\varphi-1)]z \\ &= [1+(\varphi-1)]^{(k+1)}z = \psi(k+1, z).\end{aligned}$$

5° — *p étant un entier négatif, on a aussi*

$$\psi(-p, z) = \varphi_{-p}(z), \tag{10}$$

à condition de choisir pour $\varphi_{-1}(z)$ celle des déterminations qui, pour $z=x$, se réduit à x.

On a, en effet, d'après ce qui précède,

$$\psi[-1, \varphi(z)] = \psi[0, z] = z.$$

$\psi(-1, z)$ est donc la fonction inverse de $\varphi(z)$ qui se réduit à x pour $z=x$, en vertu de l'égalité (6). Donc

$$\psi(-1, z) = \varphi_{-1}(z).$$

Plus généralement,

$$\psi[-p, \varphi_p(z)] = \psi[0, z] = z,$$

donc

$$\psi[-p, z] = \varphi_{-p}(z),$$

la détermination de $\varphi_{-p}(z)$ étant telle que, pour $z=x$, $\varphi_{-p}(z)$ se réduise à x.

IV.

Pour terminer, il nous reste à prouver la proposition capitale que voici :

On a, quel que soit k,

$$\varphi[\psi(k, z)] = \psi[k+1, z]. \tag{11}$$

Pour cela, il suffit, à cause de l'égalité (9), de prouver que l'on a

$$\varphi[\psi(k, z)] = \psi[k, \varphi(z)]. \tag{12}$$

Or, les deux membres de cette égalité (12) étant des fonctions régulières au voisinage du point limite x, il suffit de prouver que les deux membres, ainsi que *toutes* leurs dérivées par rapport à z, sont égales pour $z = x$.

On a, en premier lieu,

$$\varphi[\psi(k, x)] = \varphi(x) = x$$

et

$$\psi[k, \varphi(x)] = \psi(k, x) = x,$$

donc

$$\varphi[\psi(k, x)] = \psi[k, \varphi(x)].$$

En second lieu, en vertu des égalités (6) et (7),

$$\varphi'[\psi(k, x)]\,\psi'(k, x) = \varphi'(x)\,[\varphi'(x)]^k = [\varphi'(x)]^{k+1},$$
$$\psi'[k, \varphi(x)]\,\varphi'(x) = [\varphi'(x)]^k\,\varphi'(x) = [\varphi'(x)]^{k+1};$$

donc, encore,

$$\varphi'[\psi(k, x)]\,\psi'(k, x) = \psi'[k, \varphi(x)]\,\varphi'(x).$$

Prenons les dérivées secondes : il faut prouver que

$$\varphi''[\psi(k, x)]\,[\psi'(k, x)]^2 + \varphi'[\psi(k, x)]\,\psi''(k, x)$$
$$= \psi''[k, \varphi(x)]\,[\varphi'(x)]^2 + \psi'[k, \varphi(x)]\,\varphi''(x).$$

Posons, pour abréger l'écriture,

$$\varphi'(x) = x', \qquad \varphi''(x) = x'', \qquad \ldots,$$

on doit donc avoir

$$x''x'^{2k} + x'\psi''(k, x) = x'^2\psi''(k, x) + x''x'^k$$

ou

$$\psi''(k, x)(x'^2 - x') = x''(x'^{2k} - x'^k).$$

La relation (12) qu'il s'agit de démontrer étant vraie pour toutes les valeurs entières de k, cette dernière relation, qui en est une conséquence, est vraie pour toutes les fonctions $\varphi_p(z)$; on en conclut que $\psi''(k,x)$ s'obtient en remplaçant dans son développement les expressions

$$\varphi''_p(x) \quad \text{par} \quad \frac{x''(x'^{2p}-x'^p)}{x'^2-x'},$$

et l'on trouve ainsi

$$\psi''(k,x) = \frac{x''}{x'^2-x'}[(1+x'^2-1)^k-(1+x'-1)^k] = \frac{x''}{x'^2-x'}(x'^{2k}-x'^k),$$

ce qu'il fallait établir.

Considérons encore les dérivées troisièmes : il faut prouver que

$$\begin{aligned}\varphi'''[\psi(k,x)][\psi'(k,x)]^3 \\ +3\varphi''[\psi(k,x)]\,\psi''(k,x)\,\psi'(k,x)+\varphi'[\psi(k,x)]\,\psi'''(k,x) \\ =\psi'''[k,\varphi(x)][\varphi'(x)]^3+3\psi''[k,\varphi(x)]\,\varphi''(x)\,\varphi'(x)+\psi'[k,\varphi(x)]\,\varphi'''(x).\end{aligned}$$

En remplaçant dans cette expression $\psi(k,x)$, $\psi'(k,x)$, $\psi''(k,x)$ par leurs valeurs et simplifiant, il reste à montrer que

$$\begin{aligned}&\psi'''(k,x)(x'^3-x')(x'^2-x') \\ &\quad = x'''(x'^2-x')(x'^{3k}-x'^k)+3x''^2(x'^{3k}-x'^{2k+1}-x'^{2k}+x'^k).\end{aligned}$$

Or, cette relation étant vraie pour les valeurs entières de k est vraie pour toutes les fonctions $\varphi_p(z)$; on a donc

$$\varphi'''_p(x) = \frac{x'''(x'^2-x')(x'^{3p}-x'^p)+3x''^2(x'^{3p}-x'^{2p+1}-x'^{2p}+x'^p)}{(x'^3-x')(x'^2-x')}.$$

En remplaçant dans le développement de $\psi'''(k,x)$ toutes les quantités $\varphi'''_p(x)$ par ces valeurs et faisant la somme, on trouve que la relation proposée est vraie pour $\psi'''(k,x)$.

D'une façon générale, si l'on a démontré la proposition pour la dérivée $q^{\text{ième}}$, $\psi^{(q)}(k,x)$, on la démontrera pour la dérivée $(q+1)^{\text{ième}}$ de la façon suivante : on dérivera $(q+1)$ fois la relation (12) par rapport à z, on y fera $z=x$ et l'on remplacera $\psi(k,x)$, $\psi'(k,x)$, $\psi''(k,x)$, ..., $\psi^{(q)}(k,x)$ par leurs valeurs calculées précédemment en fonction de x', x'', x''', ..., $x^{(q)}$.

L'égalité qu'il s'agira de démontrer prendra alors la forme

$$\psi^{(q+1)}(k, x) = \sum_n F_n(x', x'', \ldots, x^{(q+1)}) x'^{kn},$$

les fonctions $F_n(x', x'', \ldots, x^{(q+1)})$ ne dépendant aucunement de k. Or, la relation (12) étant vraie pour les valeurs entières de k, on aura, quel que soit l'entier p,

$$\varphi_p^{(q+1)}(x) = \sum_n F_n(x', x'', \ldots, x^{(q+1)}) x'^{pn}.$$

En remplaçant les quantités $\varphi_p^{(q+1)}(x)$ par leurs valeurs dans le développement de $\psi^{(q+1)}(k, x)$, on trouve

$$\begin{aligned}\psi^{(q+1)}(k, x) &= \sum_n F_n(x', x'', \ldots, x^{(q+1)})(1 + x'^n - 1)^k \\ &= \sum_n F_n(x', x'', \ldots, x^{(q+1)}) x'^{kn},\end{aligned}$$

et c'est ce qu'il fallait établir.

V.

Ces propositions préliminaires nous conduiront maintenant au résultat final.

Considérons, en effet, l'expression $\psi[k, \psi(k', z)]$; c'est une somme de termes de la forme

$$\frac{k(k-1)\ldots(k-p+1)}{p!}\left\{\varphi_p[\psi(k', z)] - C_p^1 \varphi_{p-1}[\psi(k', z)] + \ldots + (-1)^p \psi(k', z)\right\}.$$

Or, de la relation (12) que nous venons d'établir, on déduit, par des applications répétées,

$$\varphi_p[\psi(k', z)] = \psi(k'+p, z),$$

quels que soient k' et l'entier positif p; le terme général peut donc s'écrire

$$\frac{k(k-1)\ldots(k-p+1)}{p!}[\psi(k'+p, z) - C_p^1 \psi(k'+p-1, z) + \ldots + (-1)^p \psi(k', z)],$$

ou, avec l'écriture symbolique,

$$\begin{aligned}\frac{k(k-1)\ldots(k-p+1)}{p!}\Big\{&[1+(\varphi-1)]^{(k'+p)} \\ &- C_p^1[1+(\varphi-1)]^{(k'+p-1)} + \ldots + (-1)^p[1+(\varphi-1)]^{(k')}\Big\}z,\end{aligned}$$

ou encore

$$\frac{k(k-1)\ldots(k-p+1)}{p!}\Big\{[1+(\varphi-1)]^{(p)} - C_p^1[1+(\varphi-1)]^{(p-1)}+\ldots+(-1)^p\Big\}[1+(\varphi-1)]^{(k')}z,$$

et enfin

$$\frac{k(k-1)\ldots(k-p+1)}{p!}(\varphi-1)^{(p)}(1+\varphi-1)^{(k')}z.$$

L'opération de la substitution de $\psi(k', z)$ à z dans $\psi(k, z)$ revient donc à multiplier *symboliquement* chaque terme du développement et, par suite, $\psi(k, z)$ elle-même par $(1+\varphi-1)^{(k')}$; on a donc

$$\begin{aligned}\psi[k, \psi(k', z)] &= [1+(\varphi-1)]^{(k)}[1+(\varphi-1)]^{(k')}z \\ &= [1+(\varphi-1)]^{(k+k')}z = \psi(k+k', z),\end{aligned}$$

quels que soient k et k'.

En résumé, la fonction $\psi(k, z)$, régulière dans le cercle Γ_x, vérifie bien les deux relations (A) et (B); c'est donc bien *une* fonction *itérée* de $\varphi(z)$. Korkine a d'ailleurs montré [1] comment, lorsqu'on connaît une solution du problème, on pourra construire toutes les autres.

Remarquons, en terminant, que la démonstration de l'identité (12), au n° IV, donne précisément le calcul, de proche en proche, des coefficients du développement de $\psi(k, z)$ suivant les puissances croissantes de $z-x$ en fonction de x, x', x'', x''', ..., c'est-à-dire en fonction des coefficients du développement de $\varphi(z)$. Car, si l'on pose

$$\varphi(z) = x + A_1(z-x) + A_2(z-x)^2 + \ldots$$

et

$$\psi(k, x) = x + \alpha_1(z-x) + \alpha_2(z-x)^2 + \ldots,$$

on a généralement

$$A_p = \frac{x^{(p)}}{p!}$$

et

$$\alpha_p = \frac{\psi^{(p)}(k, x)}{p!}.$$

On retrouve les résultats des calculs de Korkine, résultats qui se trouvent ainsi justifiés après coup.

---

[1] *Loc. cit.*, p. 234.