ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE.

EXPOSÉ ET DISCUSSION

DES PRINCIPALES EXPÉRIENCES

FAITES

SUR LES PHÉNOMÈNES DE TORSION,

PAR M. H. BOUASSE,

Professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse.

Le nombre des expériences faites sur les phénomènes de torsion est considérable. Malheureusement, beaucoup d'entre elles prêtent à la critique; la technique expérimentale est encore rudimentaire, bien que la définition et la continuité des forces agissantes aient une importance particulière. La question est pourtant suffisamment avancée pour qu'il soit opportun de ne plus se contenter d'approximations grossières et d'employer toutes les ressources de l'art expérimental moderne.

De plus, il s'est introduit une nomenclature et des expressions imagées (hystérésis, accommodation, effets élastiques tardifs, effets d'ébranlement, fatigue d'élasticité) dont le moindre défaut est de ne rien signifier du tout et le pire de servir trop souvent d'explication.

Nous nous proposons de faire, non un historique complet de la question, mais le bilan de nos connaissances actuelles et de leurs lacunes; aussi ne parlerons-nous que des principaux parmi les Mémoires les plus modernes. Laissant de côté Coulomb et Wertheim, malgré la valeur de leurs travaux, nous citerons les séries de Mémoires de Wiedemann (*Pogg. Ann.*, t. CVI; *Wied. Ann.*, t. VI); Tomlinson (*Phil. Trans.*, 1886-1887); Kohlrausch (*Pogg. Ann.*, t. CXIX, CXXVIII, CLVIII); Cantone (*Nuovo Cimento*, t. XXXV, t. I, II, IV).

Nous renverrons parfois à un Mémoire personnel, publié en août 1897 dans les *Annales de Physique* (paru comme Thèse en janvier 1897).

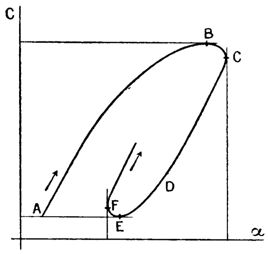
Nous ne nous occuperons pas des théories proposées, non qu'il n'en existe de très remarquables; mais jusqu'à présent elles sont restées loin derrière l'expérience. Les propriétés des corps dépendent à chaque instant de toutes les modifications antérieures, d'où des difficultés mathématiques presque insurmontables dont on ne s'est tiré que par des hypothèses trop simplificatrices. Nous n'avons pas l'idée de diminuer la valeur de ces essais qui acheminent au but, mais ne peuvent servir de guide à l'expérimentateur. D'ailleurs, il importe d'être fixé sur la cinématique d'un phénomène avant d'en discuter la dynamique ([1]).

Enfin nous bornerons notre étude aux phénomènes de torsion; comme on le sait, ceux de flexion satisfont aux mêmes lois.

PARCOURS A VITESSE NULLE.

Pour simplifier notre exposé, admettons d'abord que les parcours se font à température constante, à tension constante, à magnétisme constant, etc., et que la variable unique est l'angle de torsion α compté à partir d'une ori-

Fig. 1.



gine arbitraire. Il faut déterminer le mode de variation $C = \varphi(\alpha)$ du couple C, lorsque α varie suivant une loi quelconque en fonction du temps, $\alpha = f(t)$. Nous représentons les phénomènes sur un plan, en prenant α et

---

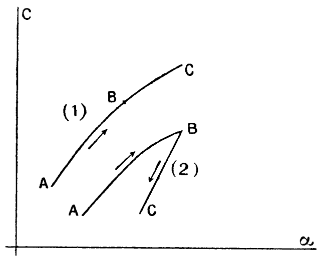
([1]) Ceci était écrit avant la publication des récents et remarquables travaux de M. Brillouin.

C pour coordonnées, et appelons *coefficient de torsion* en un point le quotient $\gamma = \frac{dC}{d\alpha}$.

Ce quotient peut prendre en tout point du plan des valeurs quelconques entre $-\infty$ et $+\infty$. Pour le parcours ABCD (*fig.* 1) par exemple, γ est nul en B, atteint $-\infty$ en C, passe brusquement à $+\infty$ et décroît ensuite jusqu'à o (point E) et $-\infty$ (point F), ... Sa valeur est donc *a priori* indéterminée en tout point du plan : elle dépend des parcours antérieurs.

Limitons le problème, en supposant les parcours effectués à vitesse nulle : ce qui est évidemment un cas limite analogue à celui des cycles réversibles en Thermodynamique. On doit alors distinguer deux sortes de passages en tout point B du plan (*fig.* 2). Ou bien le parcours traverse le point B

Fig. 2.



(courbe 1); γ est *a priori* complètement indéterminé et dépend des parcours antérieurs. Ou bien on s'arrête au point B (courbe 2), et l'on repart de ce point en retournant vers les azimuts d'où l'on arrive; alors le point anguleux B est dit *origine de la courbe de torsion* BC. La tangente d'arrivée en B suivant AB dépend des parcours antérieurs; la tangente de retour suivant BC, tangente à l'origine d'une courbe, a une direction invariable, caractéristique du métal employé : γ prend la valeur typique Γ. Pour le parcours à vitesse nulle, le long des courbes de torsion, γ reste toujours positif et varie de sa valeur maxima Γ à l'origine, à une valeur minima comprise entre Γ et o.

On peut faire à ces propositions l'objection suivante : puisque, pour faire apparaître Γ, les parcours doivent s'effectuer à vitesse nulle et que, d'autre part, cette manière d'opérer est purement théorique, peut-on, par quelque artifice, trouver expérimentalement la valeur de Γ, les vitesses de torsion restant quelconques?

L'expérience montre qu'en tout point du plan, quelles que soient les vitesses employées, si l'on décrit de petits cycles entre azimuts constants et distants de $\Delta\alpha$, le quotient moyen $\Delta C / \Delta\alpha$ sur une courbe ascendante

($|\Delta C| > 0$) ou descendante ($|\Delta C| < 0$) se rapproche d'autant plus de la valeur typique Γ que le parcours est plus petit, qu'il est répété un plus grand nombre de fois, que les couples auxquels il correspond sont plus petits en valeur absolue. Si ces conditions sont mal réalisées, $\Delta C / \Delta\alpha$ diffère de Γ généralement par excès sur les courbes descendantes, par défaut sur les courbes ascendantes. L'expérience montre de plus que, si, arrivé en un point avec une vitesse quelconque, on arrête un temps suffisant, la tangente, à l'origine de la courbe de retour effectuée avec une vitesse quelconque, a l'inclinaison caractéristique.

En un point quelconque d'une courbe de torsion, γ diffère de Γ; il est expérimentalement vain de chercher dans la valeur de γ à faire la part des actions élastiques de la molécule et des forces de liaison des molécules entre elles, ou, d'une manière générale, de donner aux couples de torsion deux origines différentes. Théoriquement, la distinction est légitime et a été faite par Coulomb, le premier, en vertu de cette remarque : que l'on peut faire varier considérablement la forme des courbes de torsion par certaines actions telles que le recuit, sans toucher à la valeur de la constante Γ caractéristique du métal.

PARCOURS A VITESSE NULLE ET TYPIQUES.

Les courbes de torsion à vitesse nulle ont donc en leurs origines une tangente de direction invariable : il s'agit d'en déterminer la forme entière. Nous allons d'abord le faire dans le cas particulier où elles limitent des cycles fermés.

Un cycle se compose des deux parcours effectués en sens contraires; il est défini par la condition que les origines des deux parcours correspondent à deux couples donnés C_1 et C_2, ou à deux azimuts donnés α_1 et α_2. Mais, si l'on part du couple C_1 par exemple, qu'on aille au couple C_2 et qu'on revienne au couple C_1, ce n'est généralement pas au point de départ que l'on aboutit; le cycle n'est pas fermé.

Cependant, si l'on répète l'opération un certain nombre de fois, il tend à se fermer. Les courbes qui le limitent tendent vers des positions et des formes asymptotiques : on peut dire qu'elles se *fixent* dans le plan. Nous étudierons plus loin la manière suivant laquelle se fait cette immobilisation des parcours. Le cycle une fois fermé, il est clair qu'il se trouve à la fois parcouru entre couples et entre azimuts invariables; ses extrémités sont fixes, il est lui-même *fixé* dans le plan.

Il s'agit maintenant de résumer les principales expériences connues en quelques formules qui en soient l'équivalent logique. *La vérité de ces propositions n'est pas ici en discussion :* dans l'immense quantité de matériaux de très inégale valeur que les physiciens ont à leur disposition, il n'y a pas d'autre moyen de faire le départ de ce qui est acceptable et de ce qui ne l'est pas, que de prouver entre ces résultats des contradictions logiques, et ceci n'est possible qu'à la condition de les grouper sous des formules générales. La découverte de ces formules est d'une importance capitale, parce qu'elles précisent les discussions à venir et suggèrent les expériences.

Parmi ces propositions, l'une des plus importantes est celle de l'identité des courbes limites des parcours énoncée par M. Brillouin dès 1896 et dont on va développer les conséquences.

Soit (*fig.* 3) un cycle fermé ABCD. Voici les propositions que l'expérience suggère :

1° Quels que soient les couples C_1 et C_2 qui correspondent aux extré-

Fig. 3.

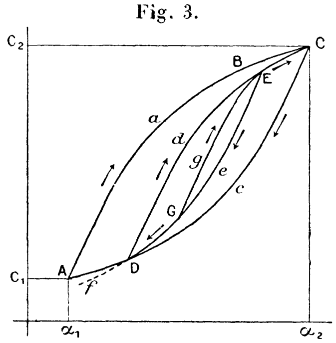
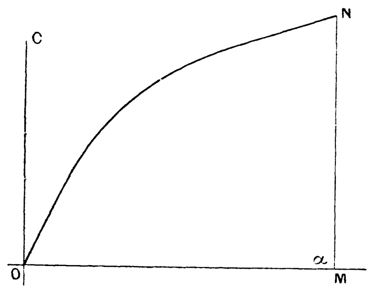


Fig. 3'.



mités, les courbes ABC et CDA sont superposables à partir de leurs origines; c'est-à-dire que, pour tracer ces courbes, on peut employer une même équerre courbe matérielle OMN (*fig.* 3'). Pour tracer ABC par exemple, on amène le point O sur l'origine A, on place horizontalement le côté OM. Pour tracer CDA, on tourne l'équerre de 180°, on amène le point O en C, et l'on place horizontalement le côté OM. Si donc on transporte les axes de coordonnées parallèlement à eux-mêmes et qu'on amène leur intersection à coïncider avec l'origine des courbes de torsion, les courbes ABC et CDA satisfont à l'équation unique $C = \Phi(\alpha)$. Bien entendu, quand on passe du point A (origine de ABC) au point C (origine de CDA), le système des axes doit tourner de 180°. Nous dirons que les courbes qui limitent un cycle fermé sont *typiques* ou *caractéristiques,* et nous surmonterons d'un point la lettre qui indique leur origine.

2° Décrivons le parcours $\dot{A}BC - \dot{C}D$, arrêtons-nous en D, puis revenons sur nos pas; la courbe de retour $\dot{D}\,dC$ est typique et repasse naturellement par le point C. Donc, si un parcours I est typique entre deux couples C_1 et C_2, tout parcours II ayant son origine sur le parcours I est typique jusqu'à son croisement avec le parcours I.

3° Sur le nouveau parcours II, arrêtons-nous au point E et rebroussons chemin; d'après la règle précédente, nous revenons en D, suivant $\dot{E}eD$. A partir du croisement D, la courbe $\dot{E}eD$ ne reste pas typique suivant Df. Il y a un point anguleux, et l'on continue suivant DA, c'est-à-dire suivant la dernière courbe typique qui a traversé le point D sans s'y arrêter.

4° Cette règle ne suffit pas à déterminer tous les parcours. En effet, supposons que, le cycle primitif une fois fermé, on décrive

$$\dot{A}BC - \dot{C}D - \dot{D}dE - \dot{E}eD - \dot{D}dE;$$

nous voici au point E qui n'a jamais été traversé par une courbe typique. Nous admettrons que l'on continue suivant EC, c'est-à-dire suivant la voie qu'on aurait suivie la première fois si l'on ne s'était pas arrêté en E.

5° Mais voici un cas plus compliqué : décrivons

$$\dot{A}BC - \dot{C}D - DdE - \dot{E}eG - \dot{G}gE.$$

La règle précédente ne nous dit plus où nous irons; car non seulement EC n'a pas été parcourue effectivement, mais encore nous ne nous présentons plus en E suivant une courbe ayant son origine sur les courbes qui limitent le cycle fermé. On est conduit à généraliser la règle 3° et à admettre qu'il existe en E un point anguleux sur la courbe $\dot{G}gE$, et qu'elle se continue par la courbe EC, c'est-à-dire par la courbe typique la plus inclinée parmi celles qui se sont arrêtées au point E. C'est celle dont l'origine est (en couples) la plus éloignée possible du point E et, par conséquent, se trouve sur $\dot{C}DA$.

6° Quelle que soit la position dans le plan de la bande C_1C_2, la courbe typique $C = \Phi(\alpha)$ reste la même. Donc, si l'on ferme un cycle entre un couple positif et un couple négatif les plus grands qu'il soit possible en valeur absolue, les parcours se trouvent tous définis dans la région accessible du plan. Ils se composent de portions complètement déterminées de la courbe $C = \Phi(\alpha)$ ou, si l'on veut, peuvent se tracer au moyen d'une équerre unique courbe OMN (*fig.* 3').

Ces hypothèses ont des conséquences importantes. Soit $\dot{A}BC - \dot{C}DA$ le cycle fermé. On ne peut pas sortir de l'aire ABCD; car chaque fois que, suivant une courbe EeD, on essaye de franchir une des courbes limites, on est forcé de continuer sur elle.

A l'intérieur de cette aire tous les parcours sont complètement déterminés.

Par tout point E de cette aire, on peut faire passer une infinité de courbes typiques; on peut aussi traverser ce point d'une infinité de manières sur ces courbes y présentant un point anguleux.

La valeur maxima des γ en ce point, sur ces courbes, est Γ; la valeur minima correspond aux deux courbes typiques passant en E dont les origines sont sur les courbes limites du cycle fermé.

Un cycle étant fermé entre deux couples C_1 et C_2 : soient deux couples C_3 et C_4, compris entre C_1 et C_2; on peut, entre ces couples et à l'intérieur de l'aire ABCD, fermer une infinité de cycles identiques entre eux et qui ne diffèrent que par leur position dans la bande C_3C_4. Chaque cycle peut être obtenu de deux manières.

Quelle confiance peut-on avoir dans ces règles?

D'abord ce sont des lois limites. Ce n'est pas une de leurs moindres singularités que cette indépendance de la forme des courbes et de la position de leur origine : en particulier, la position de cette origine, par rapport au couple nul, n'intervient pas. Mais cette indépendance est plus apparente que réelle; en premier lieu, les règles impliquent une vitesse nulle; en second lieu, elles impliquent un cycle fermé, et cette dernière condition est d'autant moins satisfaite que la bande où l'on veut fermer le cycle est plus large et plus éloignée du couple nul.

Même envisagées comme lois limites, sont-elles rigoureuses? A la vérité elles sont très approchées et toutes hypothèses plus simples sont fausses. Cependant il se pourrait que la forme de la courbe typique dépende un peu de la position de l'origine (*voir* notre Mémoire, § XIV), de la largeur et de la position de la bande où le cycle a été fermé.

Pour décider la question il faut de nouvelles expériences où toutes les précautions de continuité, de définition pour les parcours, de constance pour la température, se trouvent réalisées.

Enfin reste à expliciter la forme typique $C = \Phi(\alpha)$. Elle est approximativement représentée par l'équation suivante, due à M. Brillouin :

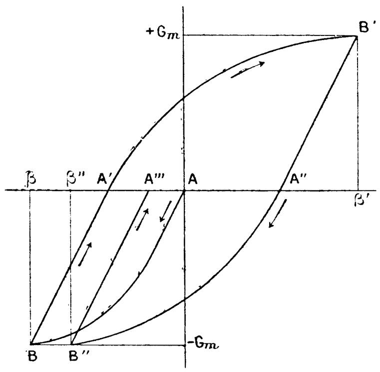
$$\alpha = \frac{C}{\Gamma} + B(e^{mC} - 1).$$

La courbe, d'abord presque rectiligne au début, s'infléchit ensuite rapidement.

Les règles précédentes sont en parfait accord avec les résultats de M. Wiedemann et avec ceux que M. Cantone a retrouvés pour la flexion et pour la torsion. Les expériences de ces savants sont loin de satisfaire aux conditions imposées; leurs appareils sont rudimentaires et leur technique imparfaite. De s'accorder avec les lois précédentes n'est peut-être pas pour leurs expériences une preuve de grande précision, puisqu'ils ne respectent pas les restrictions qui limitent l'application de ces lois.

L'appareil de M. Wiedemann permet de produire un couple donné et ses expériences consistent seulement à déterminer, non les courbes entières $C = \varphi(\alpha)$, mais seulement leurs extrémités; les vitesses de torsion $v = \frac{d\alpha}{dt}$ ne sont pas définies, les torsions sont produites par des poids appliqués d'une façon discontinue mais *sans choc*. L'appareil de M. Cantone est celui de M. Wiedemann avec des modifications insignifiantes; il détermine plusieurs points de la courbe de torsion, ce qui est un progrès, mais passe d'un point à l'autre d'une manière discontinue, non déterminée, en appliquant encore des couples sous forme de poids. Toutefois les expériences de M. Wiedemann sont faites avec une telle habileté qu'il a fait rendre du premier coup à sa méthode tout ce qu'elle pouvait donner.

Fig. 4.



Voici d'abord la terminologie de M. Wiedemann (*fig.* 4).

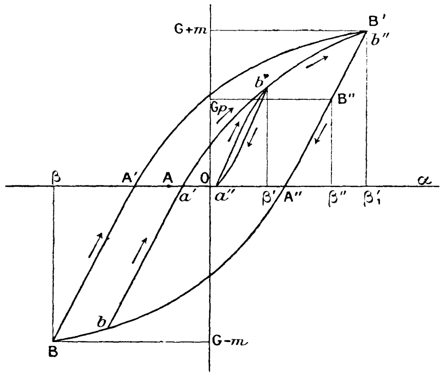
Partons du point A origine des coordonnées : décrivons le parcours AB, puis revenons suivant BA′. Les angles Aβ et AA′ sont les déformations temporaire et permanente.

Continuons suivant A′B′ et revenons suivant B′A″ : Aβ' et AA″ sont les nouvelles déformations temporaire et permanente. Ainsi ces déformations sont toujours comptées à partir du point fixe A. Ceci posé, voici la traduction et la discussion des § 5 et 6 du Mémoire (*Ann. Wied.*, t. VI), p. 485; ils ont trait à ce que M. Wiedemann appelle *un fil partiellement détordu:*

« Un fil est tordu dans un sens puis dans l'autre par des couples $\pm G_m$, jusqu'à ce que les torsions permanentes et temporaires $T_{\pm m}$ et $P_{\pm m}$ restent constantes. Si alors ce fil est de nouveau tordu dans le sens de la dernière torsion par des couples croissants, de manière que sa dernière torsion permanente P_p reste constante, les différences $T_p - P_p$ sont proportionnelles aux couples agissants. A peine pour de grands couples, le quotient $T_p - P_p/G_p$ croît-il légèrement. »

La *fig.* 4 donne la marche du phénomène au début. On part du point A et l'on fixe un cycle dans la bande comprise entre les couples égaux et de

Fig. 5.



signes contraires G_{+m} et G_{-m}. Après un certain nombre d'opérations le cycle est fermé (voir *fig.* 5).

Pour ce cycle fermé, d'après les définitions de M. Wiedemann :

$$A\beta'_1 = T_{+m}, \qquad A\beta = T_{-m}, \qquad AA'' = P_{+m}, \qquad AA' = P_{-m}.$$

Ces déformations temporaires et permanentes sont naturellement constantes, puisque, en répétant indéfiniment le cycle, on repasse toujours par les mêmes points.

Cette préparation effectuée, supposons qu'arrivé en A″ (*fig.* 5), au lieu de continuer le parcours, on revienne sur ses pas; on décrit, à partir du point A″ comme origine, une courbe typique. Or, approximativement, entre le couple nul et le couple G_{+m}, ces courbes sont rectilignes; donc, en quelque couple $+G_p$ que l'on retourne à partir du point A″, on parvient très sensiblement en un point B″ de la branche descendante B′A″;

On retourne par suppression du couple au point A″ (P_p est constant);

Il y a proportionnalité entre la torsion $A''\beta'' = T_p - P_p$ et le couple employé.

M. Wiedemann remarque que cette proportionnalité n'est qu'approchée, c'est-à-dire que, même sur la longueur de la courbe typique qui correspond à une variation de couple $\leqq G_m$ à partir de son origine, la courbe n'est pas parfaitement rectiligne.

(Au § 21 de son Mémoire, il prétend que dans le parcours B′A″ le fil est parfaitement élastique, proposition erronée et contradictoire avec la remarque précédente.)

Les nombres donnés par M. Wiedemann conduisent encore à la conséquence suivante qui montre le vice de sa terminologie. Bien que, pour le cycle fermé, les courbes $\dot{B}A'B'$ et $\dot{B}'A''B$ soient identiques, $A\beta$ et $A\beta'_1$ et, par conséquent, AA′ et AA″ ne sont pas égaux. Le milieu O des droites A′A″ et $\beta\beta'_1$ ne coïncide pas avec le point de départ A; les parties *superposables* des deux courbes du cycle ne correspondent pas aux mêmes déformations temporaires et permanentes (*voir* notre Mémoire, Note du § I).

Passons à la seconde partie de la règle.

« Une certaine torsion P_{+m} étant obtenue par le poids G_m, qu'on la réduise à une valeur plus petite P_n comprise entre les limites $P_{\pm m}$ par un couple agissant en sens contraire. Qu'alors le fil soit de nouveau tordu par les couples $+G$; peu à peu la torsion permanente croît de P_n à P_{+m}. Qu'on retranche cette torsion permanente P_n de la torsion temporaire due au poids G, les différences $T - P$ sont toujours les mêmes, de quelque valeur P_n que l'on soit parti, pourvu que cette valeur soit comprise entre les limites P_{+m} et P_{-m}. »

Voici la transcription de cet énoncé bizarre : dans la région du plan où un cycle a été formé, les courbes de torsion rapportées à leur origine ont une forme invariable.

En effet, supposons (*fig.* 5) que le cycle $\dot{B}A'B' - \dot{B}'A''B$ soit fermé au début de l'expérience entre les couples G_m et G_{-m} et les azimuts $O\beta_1$ et $O\beta'$. Après avoir décrit la branche $\dot{B}'A''b$, arrêtons-nous en b et revenons suivant ba' : la torsion permanente est devenu $Aa' = P_n$; elle est bien comprise, comme le veut l'énoncé, entre $AA'' = P_{+m}$ et $AA' = P_{-m}$.

Ceci fait, continuons vers les couples croissants en décrivant les boucles $a'b'a''$, $a''b''a'''$, ... dont on n'a représenté que deux. M. Wiedemann dit que, pour le couple G_{+m}, la courbe $a^n b^n$ (dans la figure $a''b''$) passe par le point B', de sorte que la torsion permanente redevient $P_{+m} = AA''$, quand on supprime le couple G_{+m}, et cela quel que soit le point origine b.

C'est une conséquence nécessaire des règles énoncées. Si, au lieu de décrire d'un coup la courbe $ba'b'b''$, on s'arrête en b' et si l'on décrit, à partir du point b', la boucle $b'a''$, les deux courbes qui la forment sont typiques et l'on revient en b'; si alors on continue vers les couples croissants, on doit repartir sur la plus grande courbe typique qui se soit arrêtée en b' : c'est évidemment la courbe bab' et l'on parvient encore au point B'.

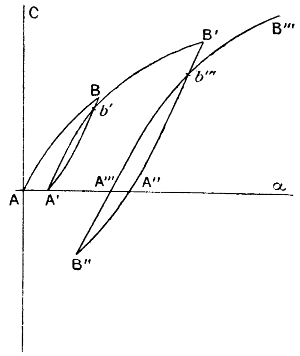
L'expérience citée par M. Wiedemann est encore plus complète. Il décrit non pas une, mais quatre boucles $b'a''$, $b''a'''$, ... avant de parvenir au point B', qui se trouve coïncider avec b^{IV} d'après ce qui vient d'être dit. Les couples qui limitent ces cycles sont : en bas le couple nul, en haut les couples $\frac{G_m}{4}$, $\frac{G_m}{2}$, $\frac{3G_m}{4}$, G_m. Les courbes de retour $b'a''$, $b''a'''$, ... sont typiques. Les longueurs $a''\beta'$, $a'''\beta''$, ..., qui sont les $T - P$ de M. Wiedemann, sont donc indépendantes de la position du point b origine du système. Enfin, puisque les courbes $b'a''$, ... s'infléchissent sur la gauche, les quotients $b'\beta'/a''\beta'$, ... doivent décroître quand l'origine b' de la boucle se déplace vers B'. Jusqu'au moindre détail, les hypothèses suffisent à tout expliquer.

Au § 6 de son Mémoire, M. Wiedemann remarque qu'un fil, qui a pris par des torsions répétées une torsion permanente $P_{+m} = AA''$, éprouve de la part de couples $-G$ dirigés en sens contraire du dernier couple agissant $(+G_m)$ des torsions temporaires plus grandes que si ces mêmes couples agissaient dans le sens $+G_m$. En effet, lorsque venant de B'A'' on continue suivant A''B, c'est véritablement une seule et même courbe typique que l'on décrit. Si l'on revient sur ses pas à partir de A'', c'est une nouvelle courbe typique que l'on recommence.

M. Cantone, en se servant de méthodes expérimentales identiques, a naturellement retrouvé pour la flexion et la torsion les mêmes phénomènes. La remarquable coïncidence des résultats expérimentaux et des règles posées n'est pas une preuve de précision pour les expériences, car, avec la technique de ces savants, les résultats devraient s'écarter notablement des hypothèses énoncées. Celles-ci doivent être d'autant moins vérifiées que les conditions imposées dans leur énoncé sont moins satisfaites. Aussi la règle suivante, due à M. Wiedemann [règle 8 (*Pogg. Ann.*, t. CVI)], qui coïncide avec elles, mais sans que les conditions imposées soient même approximativement réalisées, n'est plus qu'une grossière approximation.

La torsion permanente AA′ d'un fil (*fig.* 6) [acquise par suite d'un parcours ABA′ par exemple] est portée par un couple C à la valeur AA″

Fig. 6.



[parcours A′B′A″], puis à la valeur AA‴ [parcours A″B″A‴] intermédiaire entre AA′ et AA″. Elle doit acquérir de nouveau la valeur AA″, sous l'influence du couple C. Peu importe que A′ et A″ soient à droite ou à gauche de A.

En d'autres termes, c'est au point B′ que, suivant M. Wiedemann, va passer la courbe A‴*b*‴B‴. Or le cycle n'est pas fermé; ni B′A″B″, ni B″A‴*b*‴ ne sont typiques : le point d'intersection des courbes est au-dessous du point B′ et les limitations imposées par M. Wiedemann ne l'empêchent pas.

PARCOURS A VITESSE NULLE, MAIS NON TYPIQUES.

Le problème de la forme des courbes devient immédiatement plus compliqué : il est nécessaire de distinguer plusieurs cas.

Courbe typique du fil neuf.

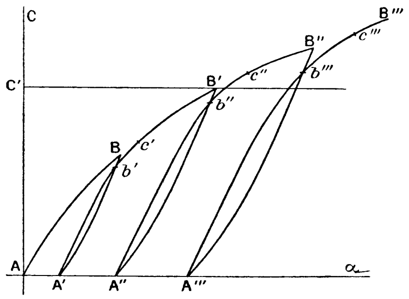
Prenons un fil qui n'a jamais servi ou qui vient d'être recuit à haute température; supposons-le parfaitement homogène et tordons-le. La courbe décrite est parfaitement déterminée. Cependant elle n'a plus la forme typique $C = \Phi(\alpha)$: la partie rectiligne est beaucoup plus courte, l'infléchissement se produit plus tôt, presque au début. C'est donc une nouvelle courbe caractéristique que nous appellerons *courbe typique du fil neuf* et représenterons par le symbole $C = \Phi_1(\alpha)$. L'expérience montre que, pour $\alpha = 0$, on a $d\Phi_1/d\alpha = d\Phi/d\alpha = \Gamma$: la tangente à l'origine de cette nouvelle courbe a l'inclinaison caractéristique.

A priori cette courbe, pour répondre à sa définition, doit être décrite d'un coup : on part du couple nul et l'on tord indéfiniment (la rupture ne se produit d'ailleurs que pour des torsions énormes). Ceci fait, par aucun procédé, sinon le recuit, il n'est possible d'obtenir à nouveau une portion de cette courbe.

On a essayé d'écarter ces restrictions : MM. Wiedemann et Cantone ont énoncé à plusieurs reprises comme rigoureuses des règles approchées. Leur appareil de mesure était à indications discontinues et leur technique limitait la précision de leurs expériences.

Reportons-nous à la *fig.* 7 : supposons qu'au lieu de décrire d'un coup

Fig. 7.



la courbe typique du fil neuf, nous nous arrêtions au point B, décrivions la boucle BA′b', continuions suivant $b'c'$B′, décrivions la boucle B′A″b'', ... D'après MM. Wiedemann et Cantone :

Les points b', b'', ... coïncident avec les points B, B′, ...

Les portions AB, b'B′, b''B″, ... forment une seule et même courbe qui est la courbe typique du fil neuf.

A cause de leur appareil, ils décrivent toujours les courbes intermédiaires BA′b', B′A″b'', ... jusqu'au couple nul : mais cette limitation est évidemment arbitraire. M. Wiedemann (*Pogg. Ann.*, t. CVI, Règle 6) généralise la règle qui devient encore moins admissible. « Quand on tord, dit-il, par l'action de forces supérieures à celles qu'on a précédemment employées à tordre ou à détordre, l'effet est le même que si l'on tordait pour la première fois. » Il suffirait donc, par exemple, qu'on n'eût jamais dépassé le couple C′

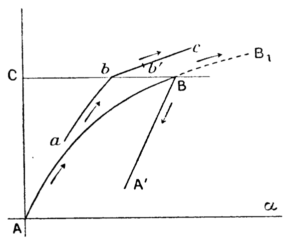
correspondant au point B′, pour que, si, dans un parcours quelconque postérieur, on traversait l'horizontale C′B′, la courbe de torsion, à partir de cette horizontale vers le haut, soit la continuation de la courbe ABB′, typique pour le fil neuf : ce qui n'est pas.

L'expérience montre que les points b', b'', ... sont au-dessous de B′, B″, ... (*fig.* 7). Il n'y a pas de doutes, si l'on emploie des appareils à indications continues, puisqu'il suffit de constater, dans des conditions identiques, si le couple redevient exactement le même à deux passages successifs par un même azimut dans le même sens.

Malgré cela, la seconde Règle pourrait subsister en partie. Rien n'empêche que, par un raccordement $b'c'$, le parcours ne vienne se superposer suivant c'B′ au prolongement analytique de la courbe typique du fil neuf AB; de sorte que l'on aurait cette courbe $C = \Phi_1(\alpha)$, tracée dans le plan par portions successives, AB, c'B′, c''B″, ... Ce point est difficile à décider expérimentalement, car, pour voir si c'B′ est la continuation de AB, il faudrait connaître d'avance la courbe $C = \Phi_1(\alpha)$ et avec une grande approximation. Or elle ne peut se décrire qu'une fois; il faut ensuite recuire le fil. Donc il serait nécessaire de recuire le fil plusieurs fois de suite exactement de la même manière, ce qui est presque impossible.

La seconde Règle, très improbable, devient à coup sûr insoutenable

Fig. 8.



avec la généralisation de Wiedemann. En effet, décrivons (*fig.* 8) AB sur la courbe typique du fil neuf, arrêtons en B et décrivons des parcours BA′, etc.; sans même dépasser le couple $-$ C égal et de signe contraire au couple C correspondant au point B, on peut, après un nombre plus ou moins grand de parcours, revenir suivant ab en un point b dont la distance au point B peut être considérable. La tangente à la courbe ab au point b est très différente de la tangente en B à la courbe AB. Or, l'expérience montre qu'il n'y a pas en b de point anguleux. Donc : 1° le point b ne coïncide pas avec B; 2° la courbe au delà du point b n'est même pas le résultat de la translation parallèle de la courbe BB_1.

Il est évident que moins les boucles sont étendues et nombreuses, mieux s'appliquent les Règles de MM. Wiedemann et Cantone. Nous reviendrons, plus loin, sur le cas de la courbe typique du fil neuf, dentelée par des parcours très petits mais très nombreux.

Voici encore quelques énoncés dus à M. Wiedemann qui se déduisent immédiatement des principes posés [Règles 1, 2, 3 (*Pogg. Annalen*, t. CVI)] :

Les torsions temporaires produites par des poids croissants sur un cylindre tordu pour la première fois augmentent plus vite que ces poids.

Les torsions permanentes croissent encore bien plus vite.

Pour détordre il faut une force bien moins considérable que pour tordre.

On trouve, dans la *Physique* de Jamin et Bouty, un énoncé plus complet que voici :

« Quand, après avoir tordu un fil par un couple C suffisant pour qu'il conserve une torsion permanente notable, on le tord en sens contraire par un couple médiocre, la torsion temporaire produite par celui-ci se superpose à la torsion permanente acquise sans la détruire; car, si l'on supprime l'action de ce couple, le fil revient à sa position d'équilibre modifiée. Toutefois, pour détruire la torsion permanente, il suffit de faire agir, en sens contraire, un couple C'' inférieur à C. »

Cet énoncé n'apprend rien de plus que le précédent; il montre nettement les vices de la terminologie de Wiedemann et conjointement le rôle erroné qu'il fait jouer à la soi-disant torsion permanente. On ne détruit pas les effets de la torsion permanente en s'arrangeant de manière à repasser, pour le couple nul, par le point du plan d'où l'on est parti au début de l'expérience. A ce nouveau passage, le fil n'a plus ses propriétés initiales; on ne peut plus, par exemple, lui faire parcourir de nouveau la courbe typique du fil neuf. M. Cantone tombe dans la même erreur, quand il s'imagine qu'on peut ramener un métal à l'état neuf par des parcours symétriques par rapport au couple nul et d'amplitudes décroissantes : il ne fait que résoudre ce problème tout différent, *amener en un point de l'axe des azimuts la position d'équilibre du fil,* ce qu'on peut toujours faire d'une infinité de manières (*Journal de Physique;* 1896).

Parcours quelconques à vitesse nulle non typiques. Accommodation.

Entre la courbe typique du fil neuf $C = \Phi_1(\alpha)$ et les courbes typiques des cycles fermés $C = \Phi(\alpha)$, il y a toute une série d'intermédiaires. Les transformations par lesquelles les courbes de torsion se rapprochent de la forme typique Φ peuvent s'appeler *accommodation*. Quand les courbes d'aller et de retour d'un cycle ne sont plus identiques, le cycle n'est plus fermé; il est animé dans le plan d'un mouvement rampant. On trouvera l'énoncé des lois de ces mouvements dans notre Mémoire, § XV et suiv., ainsi que l'étude de toutes les dissymétries qui se produisent par le fait des premières torsions du fil neuf.

Rappelons que les courbes Φ et Φ_1 ont la même tangente Γ à l'origine; que toutes les courbes intermédiaires des cycles non fermés admettent eux aussi cette même tangente. A partir de cette tangente Γ à l'origine, c'est sur Φ_1 que le γ décroît le plus rapidement, sur Φ que le γ décroît le plus lentement; toutes les courbes des cycles non fermés jouissent de propriétés intermédiaires.

Nous sommes, maintenant, à même de juger les deux propositions suivantes :

M. Warburg, pour expliquer certains phénomènes (*Wied. Ann.*, t. X), émet l'hypothèse que le fil, primitivement isotrope, cesse de l'être par la torsion, de sorte que le coefficient de torsion devient moindre dans un sens que dans l'autre. Tout au contraire, l'expérience montre que, même dans le cas d'une dissymétrie évidente due aux torsions premières, le Γ reste le même sur toutes les courbes.

M. Wiedemann, dans la Règle 4 de son Mémoire (*Pogg. Ann.*, t. CVI) parle de la fermeture des cycles : « Par suite de torsions répétées, dit-il, les torsions s'approchent de plus en plus d'être proportionnelles au poids tordant. Elles sont d'ailleurs *supérieures* à la première torsion produite par ces poids. » La seconde partie de la Règle, évidemment fausse, est religieusement répétée par les Traités classiques : on croirait à un lapsus, s'il n'y avait en regard la même proposition pour le magnétisme.

PARCOURS A VITESSE NON NULLE.

CYCLES FERMÉS.

Lorsque la vitesse de torsion n'est plus nulle, le quotient $\frac{dC}{d\alpha}$ peut prendre, en chaque point du plan, toutes les valeurs entre $-\infty$ et $+\infty$. Bornons-nous d'abord aux cycles fermés et choisissons pour la loi de torsion $\alpha = f(t)$ des formes simples.

Oscillations sinusoïdales.

Le cas le plus simple est celui des oscillations sinusoïdales : par un procédé quelconque on suppose la torsion entretenue indéfiniment suivant la loi $\alpha = A \sin \omega t$; on se propose d'étudier la forme du chemin parcouru. Ce problème est plus général que celui à la solution duquel se sont attachés tous les expérimentateurs; car on peut pratiquement obtenir de tels cycles fermés entre deux couples qui ne sont pas égaux et de signes contraires, à la condition de ne pas se servir de la méthode jusqu'à présent toujours employée (disque suspendu à l'extrémité du fil et dont on étudie plus ou moins complètement la loi du mouvement). D'autre part, les expériences faites par cette dernière méthode ne satisfont pas aux conditions exigées : les cycles ne sont pas fermés. La loi d'oscillation a la forme $\alpha = A f_1(t) \sin \omega t$, où f_1 est une fonction décroissante du temps : il y a amortissement et l'énergie n'est pas restituée.

Pour parcourir un cycle fermé, il faut dépenser un certain travail qui est mesuré par l'aire enveloppée par les courbes de torsion : proposition générale et tout à fait indépendante de la forme des courbes. Ainsi dans le cas des cycles sinusoïdaux, si l'on admet avec Coulomb, pour unique cause de l'absorption d'énergie, un frottement proportionnel à la vitesse, la courbe de torsion $C = \varphi(\alpha)$ est une ellipse. Cette ellipse admet comme diamètre des cordes verticales la droite $C = \Gamma\alpha$; son aire est proportionnelle à l'inverse de la période et au carré de l'amplitude.

Il est donc inutile de chercher à vérifier expérimentalement que l'amortissement pendant les oscillations peut être calculé d'après la connaissance de la forme des courbes de torsion; car le résultat n'est pas douteux, à supposer qu'on puisse donner aux expériences une précision suffisante. Mais nous avons démontré (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse;* 1897) à quel point l'air intervient pour amortir les oscillations de grande amplitude et que la correction de son effet est impossible dans l'état actuel de nos connaissances.

Nous avons à résoudre un double problème tout différent :

Les courbes de torsion sont-elles indépendantes de la période, pour une amplitude donnée? Si ces courbes sont indépendantes de la période, peut-on calculer l'amortissement pendant les oscillations *par la connaissance des courbes du cycle fermé parcouru à vitesse nulle* entre les mêmes couples? D'après le plus ou moins de concordance entre les amortissements mesurés expérimentalement pendant les oscillations pour différentes périodes et la mesure de l'aire du cycle fermé à vitesse nulle, on pourrait essayer de répondre aux questions posées.

Peut-être est-ce là le problème que M. Cantone cherchait à résoudre (*Nuovo Cimento,* 4e série, t. I); mais, si le principe de la méthode est inattaquable, elle ne pouvait rien donner telle qu'il l'a appliquée. Les deux termes de la comparaison sont entachés d'erreurs. Les parcours sont décrits d'une manière discontinue, sans aucune précaution qui permette de les assimiler à des parcours à vitesse nulle ou sinusoïdaux à longue période. Pendant l'oscillation la partie de l'amortissement qui est due au fil est presque impossible à distinguer dans l'amortissement total, à moins qu'il ne soit très grand, auquel cas la condition fondamentale que le cycle est fermé n'est pas satisfaite. Il est tout à fait inadmissible de déclarer, comme le fait M. Cantone, que cette correction est négligeable.

M. Cantone conclut de ses expériences que l'amortissement est dû, en majeure partie, à l'hystérésis. Cette expression (retard), qui implique l'idée de temps, doit signifier ici que le temps se trouve précisément à exclure, que la perte d'énergie ou la forme des courbes qui limitent l'aire du cycle sont à peu près indépendantes de la période.

Voici longtemps que M. Wiedemann était arrivé à la même conclusion, et il ne semble pas, malgré le grand nombre de ses expériences, que M. Cantone ait beaucoup avancé la question. Dans les § 21 et suivants de son Mémoire (*Wied. Ann.,* t. VI), M. Wiedemann dit que l'on ne peut pas attribuer la perte d'énergie à un frottement intérieur fonction de la vitesse seule; que les effets dus à la vitesse n'entrent que pour une faible part dans la perte d'énergie en d'autres termes, modifient peu les courbes qui limitent le cycle. Mais M. Wiedemann attribue à ces courbes une forme qu'elles n'ont pas, et les expériences sur lesquelles il appuie son opinion prêtent aux mêmes critiques que celles de M. Cantone qui sont tout à fait analogues.

Pour résoudre le problème que nous avons posé, il n'y a pas le choix des méthodes. Il faut déterminer directement $C = \varphi(\alpha)$ en faisant varier la période et l'amplitude d'oscillation et mesurant à chaque instant l'azimut et le couple. Nous avons déjà montré que l'expérience est possible (*Annales de Toulouse;* 1897); nous reviendrons sur la technique et les résultats dans un prochain Mémoire.

Pour le moment on peut seulement affirmer : que les courbes dépendent de la période surtout à leurs extrémités où le point anguleux est remplacé par un arrondissement continu; que pour des cycles de plus en plus petits les courbes sont modifiées de moins en moins par la période; que la majeure partie de la perte d'énergie est indépendante de la période; enfin, l'extrapolation indiquerait que pour les petits parcours l'aire du cycle est proportionnelle au cube de l'amplitude, ou, ce qui revient au même, la variation relative d'amplitude $\frac{\Delta A}{A}$ est proportionnelle à l'amplitude.

Si cette extrapolation restait légitime jusqu'aux plus petites amplitudes, l'amortissement devrait diminuer très rapidement et devenir pratiquement insensible bien avant que les amplitudes ne soient nulles. Or il semble établi qu'il n'en est point ainsi par les remarquables expériences de Tomlinson (*Phil. Trans.*, 1886). Pour de très petites oscillations, Tomlinson trouve que l'aire des cycles est proportionnelle seulement au carré de l'amplitude. De plus, cette aire s n'est pas indépendante de la période τ; on aurait $s = a + b\tau - c\tau^2$.

La méthode de Tomlinson est celle des oscillations; comme les amplitudes sont très petites, l'auteur a pu éliminer exactement l'influence de l'air. Bien que cette correction soit parfois les deux tiers du phénomène total, il n'y a aucune raison de suspecter les résultats.

Il résulte de ceux-ci :

Que, même pour des parcours très petits, les deux courbes ascendante et descendante limitant le cycle ne se superposent pas exactement;

Que cette non-superposition subsiste encore pour une période très grande;

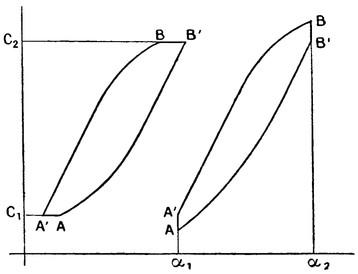
Que, dans le cas de parcours extrêmement petits, la période intervient et a relativement plus d'influence que dans le cas des grands parcours.

La perte d'énergie est ainsi due en partie à une viscosité qui n'a pas les caractères de la viscosité imaginée par Coulomb. D'autres règles énoncées par Tomlinson conduisent à cette même conclusion que les règles applicables à de grands parcours ne sont pas applicables aux petits. Pour trancher définitivement la question, il faudrait opérer dans le vide dans le cas des petites oscillations où la détermination directe des courbes $C = \varphi(\alpha)$ devient incertaine. Il n'y aurait pas des difficultés insurmontables, et l'on éviterait au moins en partie l'action de l'air, dont il est si malaisé de tenir compte.

Parcours alternatifs à vitesse constante avec arrêts aux extrémités.

Un autre cas très important comprend les phénomènes que les Allemands appellent *Elastische Nachwirkung*. Entre deux couples C_1 et C_2, on décrit la branche AB (*fig.* 9) avec une vitesse uniforme $v = \frac{d\alpha}{dt}$; on s'arrête en B un temps T, et l'on parcourt à couple constant le chemin BB′ : on

Fig. 9. Fig. 10.



détord suivant B′A jusqu'au couple C_1; on s'arrête un temps T. Si l'opération a été répétée un certain nombre de fois, le cycle se ferme. On peut décrire des parcours analogues entre deux azimuts déterminés α_1 et α_2, la vitesse restant constante, ainsi que les temps d'arrêt aux extrémités (*fig.* 10).

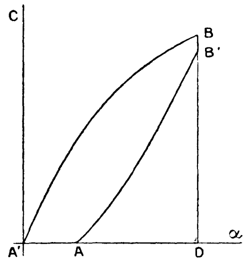
Quand la courbe se ferme, il n'y a plus identité entre les courbes A′B et B′A; elles ne sont pas superposables (leurs origines A′ et B′ étant naturellement amenées l'une sur l'autre et l'une des courbes subissant autour de cette origine une rotation de 180°). Le cycle peut être pratiquement fermé, bien que les deux longueurs AA′ et BB′ soient notablement différentes. Quand la vitesse n'est pas nulle, il n'y a plus de courbes typiques; la forme des courbes, dans un même cycle fermé, dépend de la vitesse v de torsion et de la durée T des arrêts.

Ces phénomènes ont été découverts par Weber et étudiés par un grand nombre de savants, dans un cas particulier mal commode et suivant une méthode défectueuse. Voici, par exemple, comment opérait Kohlrausch qui a publié sur ce sujet la série de Mémoires la plus complète (principalement *Pogg. Ann.*, t. CXXVIII-CLVI).

L'extrémité supérieure du fil est attachée dans l'axe d'un cylindre qui permet de le tordre d'un angle connu. Son extrémité inférieure porte une pièce de cuivre munie d'un bras horizontal qui, dans la position initiale d'équilibre, s'appuie sans force contre une pièce fixe. La masse de cuivre plonge en partie dans un godet d'huile; le miroir qu'elle porte sert à mesurer ses petits déplacements angulaires. Lorsqu'on tord le fil par en haut, le bras appuie sur son buttoir et maintient constant l'azimut de l'extrémité inférieure du fil.

Pour faire une expérience (*fig.* 11), on tord par en haut d'un certain

Fig. 11.



angle AD $= \alpha_1$; cette torsion se fait à la main suivant une loi indéterminée. On décrit ainsi la branche A'B. On maintient l'azimut constant pendant un temps T, le couple décroît suivant BB'. On détord à la main de l'angle primitif. Cette détorsion correspond à des phénomènes compliqués; il faut la diviser en deux parties dont les grandeurs sont mesurées par les droites DA et AA'. Pendant la détorsion DA, le couple diminue jusqu'à o; pendant la détorsion complémentaire mesurée par AA' $=$ A'D $-$ AD, le bras horizontal inférieur ne s'applique plus contre son buttoir. Le point figuratif du phénomène reste en A, puisque alors l'extrémité inférieure suit l'extrémité supérieure et se déplace d'un angle égal. En fait, il se produit de petites oscillations rapidement éteintes par l'huile, mais qui peuvent troubler profondément les résultats.

Ces préliminaires effectués, l'expérience consiste à déterminer la loi suivant laquelle le point A se déplace à couple nul vers le point A' : le cycle se ferme ou ne se ferme pas suivant les cas.

Ainsi le cycle est décrit entre couple inférieur nul et azimut constant α_1; les branches A'B et BA' sont parcourues avec des vitesses inconnues et quelconques; enfin, avant qu'on puisse faire une mesure, il se produit des oscillations autour du point A. Il serait étonnant qu'on parvienne dans ces conditions à des lois simples et générales.

Soit x le déplacement du miroir de A vers A′ compté en unités et à partir d'une origine arbitraire. Soient α l'angle de torsion, T le temps pendant lequel la torsion α a été maintenue. Kohlrausch a cherché à relier ces quantités par une expression de la forme suivante :

$$x = t^{\delta}\,\mathrm{T}^{\beta}(\mathrm{A}\alpha_1 + \mathrm{B}\alpha_1^2), \qquad 0 < -\delta < 1, \qquad 0 < \beta < 1.$$

Si le phénomène était observé pendant un temps très long, Kohlrausch employait une formule plus compliquée

$$x = e^{-at^{\delta}}\,\mathrm{T}^{\beta}(\mathrm{A}\alpha_1 + \mathrm{B}\alpha_1^2).$$

Ces formules représentent bien les expériences, sans nous apprendre quoi que ce soit sur le phénomène; car il est évident que celui-ci est la résultante d'une série d'actions dont la technique de Kohlrausch ne permet pas de séparer les effets.

Reprenons les parcours simples représentés dans les *fig.* 9 et 10. Il est naturel de chercher à relier la loi suivant laquelle les portions rectilignes du cycle sont parcourues, aux propriétés de la courbe avant le point d'arrêt et à la vitesse v avec laquelle elle est parcourue. Or les propriétés de la courbe sont, comme première approximation, déterminées par la valeur du couple au point d'arrêt et l'inclinaison de la tangente; donc la loi à chercher doit contenir, comme première approximation, la vitesse v, le couple C et l'inclinaison $\frac{d\mathrm{C}}{d\alpha}$ de la tangente au point d'arrêt. Si l'expérience montre qu'une telle relation n'existe pas, alors seulement on devra chercher quelque chose de plus compliqué, introduire plus intimement la forme de la courbe, en admettant l'influence de la courbure au point d'arrêt, ce qui revient à faire intervenir $\frac{d^2\mathrm{C}}{d\alpha^2}$.

C'est la marche que nous avons suivie dans notre Mémoire (§ XXVI et suivants). La formule de Kohlrausch est loin de contredire cette manière de voir; car, en admettant pour représenter la courbe B′A une expression de la forme $\mathrm{C} = \Gamma\alpha - \mathrm{M}\alpha^2 - \mathrm{N}\alpha^3$, l'origine des coordonnées étant transportée au point B′ et les axes tournés de 180°, on a, pour le point A,

$$\gamma = \frac{d\mathrm{C}}{d\alpha} = \Gamma - 2\mathrm{M}\alpha - 3\mathrm{N}\alpha^2; \qquad \text{d'où} \qquad \Gamma - \gamma = 2\mathrm{M}\alpha + 3\mathrm{N}\alpha^2.$$

La différence entre Γ et le γ au point A est quadratique en α et la loi de Kohlrausch pourrait s'énoncer en disant que, toutes choses égales d'ailleurs, le mouvement de A vers A' se fait avec des vitesses proportionnelles à la différence entre la tangente et la courbe de torsion en A et la tangente caractéristique de la courbe. C'est une loi que nous avons énoncée.

Le problème, pour être complètement résolu, exige encore des travaux longs, minutieux, mais surtout dirigés systématiquement.

L'expression *effet tardif élastique* établit entre ces derniers phénomènes et ceux qui existent constamment quand la vitesse est variable, une distinction tout arbitraire. On a généralement $dC = \frac{\partial C}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial C}{\partial t} dt$; on ne conçoit pas l'utilité de donner un nom spécial à l'un des coefficients différentiels $\frac{\partial C}{\partial t}$, seulement lorsque le premier coefficient est nul. Il suffit de dire, sans introduire un nom spécial, que la variation de couple se fait à azimut constant ou à couple constant.

CYCLES NON FERMÉS.

Dans ce groupe doivent théoriquement rentrer *tous* les parcours que l'expérience permet d'obtenir, puisqu'en somme *tous* les cas déjà traités sont des cas limites qu'on ne peut strictement atteindre. Pratiquement, nous ferons rentrer, dans ce groupe, les expériences où les conditions précédemment énoncées ne sont pas du tout réalisées, et nous n'indiquerons que les plus simples.

Courbe du fil neuf à vitesse constante.

La courbe pour une vitesse constante v a une forme typique que nous représenterons par le symbole $C = \Phi_1(\alpha, v)$. L'influence de la vitesse v de torsion, insensible au début, n'apparaît que pour les torsions considérables. Encore est-il difficile de la mettre en évidence pour les raisons indiquées (p. 18).

La courbe générale du fil neuf $C = \Phi_1(\alpha, v)$ ne peut être parcourue qu'une fois. Si l'on ajoute des boucles, elles doivent être parcourues à vitesse constante v, et les arrêts doivent avoir la même durée T, si l'on ne veut pas rendre le problème inextricable. Le premier exemple d'un tel cas se trouve dans Wiedemann (§ 3, *Wied. Ann.*, t. VI); malheureusement, les conditions que nous venons d'énoncer ne sont pas satisfaites, et l'on ne peut rien conclure de cette expérience. *A fortiori*, dans le cas des vitesses non nulles, les règles énoncées par Wiedemann sur le parcours de la courbe des fils neufs par fragments sont inexactes.

Courbe du fil neuf à vitesse ondulatoire.

Un autre mode simple de décrire la courbe d'un fil neuf est d'employer une vitesse de la forme $v = v_0 + a \sin \omega t$; la courbe obtenue, très curieuse, est étudiée dans notre Mémoire (§ XLI). Les vitesses constante, sinusoïdale et ondulatoire sont pratiquement les trois seules formes que l'expérience permet de réaliser commodément et avec rigueur.

Courbes quelconques à vitesse non nulle.

Le mode de fixation des cycles dont les courbes sont parcourues à vitesse non nulle est naturellement très compliqué. On doit se borner à l'étude bien définie des cas les plus simples qui sont : Les oscillations sinusoïdales à amplitude constante ou variable suivant une loi simple ;

Les parcours à vitesse constante et arrêts de durée constante aux extrémités entre azimuts ou couples constants.

La majeure partie des travaux écrits sur la question ne pourront jamais être utilisés, parce que la manière de décrire les cycles n'a pas été déterminée avec assez de soin.

INTRODUCTION D'UNE NOUVELLE VARIABLE.

Le problème, déjà compliqué quand on suppose variable la torsion seule, devient presque inextricable, quand on ajoute une seconde variable, telle que la température, l'aimantation, la tension, etc. On est toujours forcé de maintenir la torsion comme variable, parce qu'un fil qui n'a jamais été tordu ne se tord pas au changement ni de température, ni de tension, etc. Le nombre des expériences sur l'influence d'une seconde variable est énorme : elles ne nous apprennent généralement rien, parce qu'elles sont faites dans des conditions telles qu'on ne peut y démêler l'influence entre les différentes causes.

Pour débrouiller la question, il faudrait se limiter à l'un ou l'autre des cas généraux suivants. Supposons qu'il s'agisse de l'action de la température.

Premier cas : cycles fermés.

On ferme un cycle à vitesse nulle ou à vitesse suivant une loi déterminée, pour une valeur T_1 de la température : on détermine la forme I du cycle.

On passe suivant une loi arbitraire de la température T_1 à la température T_2.

On cherche la nouvelle forme II du cycle.

On revient suivant une loi arbitraire de la température T_2 à la température T_1.

On cherche la nouvelle forme I′ du cycle, etc.

On peut admettre, comme première approximation, que les formes I et II des cycles sont indépendantes de la loi arbitraire de passage de T_1 à T_2, parce que ces cycles sont fermés, à la condition qu'on passe de T_1 à T_2 sans sortir de l'intervalle $T_1 T_2$. Il se peut qu'en revenant à la température T_1, la forme I′ ne coïncide pas avec I. Il faut recommencer la double série d'expériences jusqu'à ce que I^n coïncide avec I^{n+1} ; on compare alors les formes I^{n+1} et II^{n+1}.

Second cas : variations continues de la seconde variable.

En opérant sur des cycles fermés, on peut faire passer la seconde variable de sa première à sa seconde valeur suivant une loi arbitraire et, par conséquent, non déterminée expérimentalement. Ce n'est plus admissible si les parcours sont quelconques ou si le phénomène dépend, évidemment, de cette loi de variation. Alors il faut prendre pour la seconde variable les mêmes précautions que pour la torsion ; c'est-à-dire connaître à chaque instant le mode de variation. On ne peut tolérer en aucun cas des variations brusques. Que penserait-on du savant qui, pour étudier la compressibilité du plomb, taperait sur un morceau de plomb à coups de marteau ? C'est pourtant avec cette précision que la plupart des expériences ont été faites : cycles non fermés, parcours quelconques mal déterminés, variation brusque de la seconde variable.

Non seulement la seconde variable doit toujours varier d'une manière continue, mais on doit s'efforcer de rendre cette loi de variation, analogue à la loi de variation de l'azimut. Par exemple, on tord un fil suivant la loi sinusoïdale $\alpha = A \sin \omega t$ et l'on veut opérer à aimantation variable. La plupart des expérimentateurs aimantent et désaimantent toutes les n secondes et parviennent ainsi à d'inutiles généralités. Il serait plus naturel de produire une aimantation représentée par la loi $I = I_0 + I_1 \sin(\omega' t - \varphi)$, ω' étant égal à ω, φ ayant une valeur bien déterminée. Ce résultat est assez difficile à obtenir expérimentalement, mais les phénomènes compliqués ne s'étudient pas avec des appareils rudimentaires. On pourrait ensuite chercher l'influence d'un battement entre les deux variables (ω' peu différent de ω); enfin, troisième cas sur lequel nous reviendrons plus loin, on pourrait prendre ω' très grand vis-à-vis de ω.

Pour montrer comment ont été généralement faites les expériences, on peut citer celles de Wiedemann sur la tension (§ 8 à 14, *Wied. Ann.*, t. VI).

Dans les § 8, 9, 10, Wiedemann ferme des cycles *entre le couple nul et un azimut invariable,* sans spécifier la vitesse avec laquelle les parcours sont décrits. Ceci fait, il modifie la tension tantôt à un bout, tantôt à l'autre bout du cycle, pendant l'arrêt, et détermine les mouvements rampants qui se produisent alors par la répétition du cycle.

Au § 11, il reprend les mêmes expériences entre le couple nul et un couple invariable; la définition du cycle est un peu plus simple, mais les vitesses ne sont pas mieux connues que précédemment.

Au § 12, il s'agit d'un fil neuf et de parcours analogues à ceux de la *fig.* 7; les boucles paires sont faites avec une tension, les impaires avec une autre : il est difficile de choisir un cas plus compliqué.

Enfin, au § 14, la tension varie pendant des parcours à couple constant; c'est ici qu'il serait encore plus nécessaire de définir la loi de variation de la tension.

Il est inutile de discuter les résultats d'ailleurs assez vagues de ces expériences; on ne sait pas bien à quoi ils correspondent.

Il est de même regrettable que, dans ses expériences sur l'influence de la température, M. Cantone n'ait pas défini et fermé ses cycles. Pour que l'aire des cycles soit définie, faut-il encore connaître la loi suivant laquelle les parcours sont décrits; cette loi intervient de plus en plus à mesure que la température augmente et que le fil devient plus pâteux.

Heureusement, dans les expériences de M. Tomlinson, bien des précautions étaient rendues inutiles par la nature du phénomène lui-même. L'amortissement pour de petites oscillations est assez faible pour que le cycle puisse être considéré comme fermé.

Il serait donc à souhaiter que les savants abandonnent, dans ces recherches difficiles, des errements qui enlèvent toute valeur à tant de patientes recherches.

EFFETS D'ÉBRANLEMENT ET FATIGUE D'ÉLASTICITÉ.

M. Wiedemann appelle *effets d'ébranlement* (*Erschütterungswirkung*), des actions « par lesquelles les molécules sont rendues plus mobiles et se placent plus facilement dans les positions d'équilibre correspondant aux forces agissantes. Ces actions n'ont aucune composante en concordance directe avec le sens actuel du déplacement des molécules et sont indépendantes des forces qui produisent les déformations actuelles. » (*Wied. Ann.*, t. VI, § 16). Une telle définition ne nous apprend pas grand'chose. Assurément, une tension et une torsion peuvent n'avoir aucune composante commune *si l'on n'introduit pas de liaisons;* mais, dans un système dont les liaisons sont inconnues, une tension peut avoir comme seul résultat une torsion et l'on ne peut *a priori* les considérer comme indépendantes. Il faudrait, d'ailleurs, donner une mesure de la mobilité des molécules et expliquer cette mobilité.

Les secousses ou ébranlements ne sont pas quelque chose de particulier : ils consistent en l'action de causes définissables, mais utilisées d'une manière non définie. Par exemple, un choc est un ébranlement; mais c'est aussi une succession dans un ordre inconnu de vibrations longitudinales et transversales, de tensions et de pressions exercées suivant des lois quelconques. Cet ensemble ne doit pas être traité comme un tout mais décomposé en phénomènes plus simples et expérimentalement plus abordables.

La seule définition admissible pour les ébranlements est la suivante : un ébranlement simple est l'action d'une petite cause appliquée suivant une loi sinusoïdale à très courte période. L'effet d'un ébranlement est celui d'une dentelure des courbes de torsion, ou, si l'on veut, du remplacement d'une courbe continue par une courbe présentant un très grand nombre de boucles très petites.

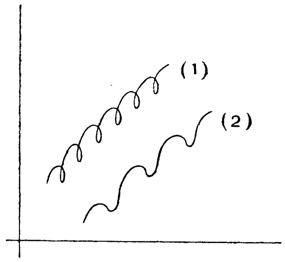
Voici une application de ce qui précède. M. Wiedemann (*Pogg. Ann.*, t. CVI) donne les Règles suivantes :

9. Des secousses pendant l'action d'un couple augmentent la torsion du fil.

10. La torsion permanente du fil après suppression du couple est diminuée par l'action des secousses.

Admettons qu'il soit possible d'assimiler l'effet des secousses à l'influence d'une vitesse de torsion non plus constante, mais donnée par la formule $v = v_0 + v_1 \sin\omega t$, ω ayant une valeur très grande. La courbe de torsion présente une sorte de dentelure qui, suivant les valeurs relatives de v_0 et v_1, a l'aspect de l'une des courbes (1) et (2) de la *fig.* 13. Or, cette den-

Fig. 12.



telure a précisément les effets exigés par la Règle 9 : le couple correspondant à un azimut donné est diminué, ou, ce qui revient au même, la torsion du fil est augmentée.

Supposons que, conformément à la Règle 10, on supprime le couple et qu'alors on ébranle le fil. C'est comme si l'on décrivait de petits parcours autour de la position d'équilibre actuelle; à cause de la dissymétrie imposée à ces parcours par le fait de la première torsion, ce que Wiedemann appelle *torsion permanente* diminuera.

Au lieu d'assimiler l'effet d'ébranlement à une variation rapide et ondulatoire de la vitesse, nous pourrions tout aussi bien l'assimiler à une variation rapide et ondulatoire de la tension, de la température, etc. Il est nécessaire de reprendre systématiquement l'étude de ces prétendus effets d'ébranlement.

Il nous reste à dire quelques mots du phénomène appelé *fatigue d'élasticité* par Lord Kelvin et dont voici la définition précise. On impose à un fil un parcours sinusoïdal d'amplitude constante. Dans une première expérience, la torsion est entretenue pendant plusieurs heures ou plusieurs jours; on mesure l'aire S_1 du cycle. Puis le fil est abandonné à lui-même pendant plusieurs jours, on lui impose alors le même cycle et, après l'avoir répété un certain nombre de fois pour le fermer, on mesure son aire S_2.

D'après Lord Kelvin $S_1 > S_2$.

On peut définir le phénomène un peu différemment. Imposons un cycle déterminé à un fil neuf : il se ferme pratiquement après quelques parcours, dix par exemple. Son aire S_2 reste invariable pendant un certain temps. D'après Lord Kelvin le fil se fatigue; peu à peu S_2 augmente. Il se produirait donc un phénomène inverse du phénomène d'accommodation. Le repos restituerait au fil ses qualités premières. Avant de discuter les faits, il faudrait être sûr de leur existence; or, dans la plupart des cas, M. Tomlinson la considère comme douteuse.

Dans toutes ces expériences qui durent des heures et des jours, il faudrait éliminer, comme le conseillait M. Brillouin (*Journal de Physique,* t. VII, 2e série), les oscillations de température; maintenir celle-ci constante par une étuve analogue à celle que M. Gouy vient de proposer tout récemment.