

5. *Légitimité de l'application du théorème rappelé au début.* — Pour simplifier l'exposition, nous désignerons, dans ce qui suit, par $|f|'$ la somme des modules des termes de f développé par rapport à tous ses arguments.

On peut supposer qu'à l'intérieur de certains cercles, de rayons ρ pour les x , R pour les u , les F_i soient holomorphes et que, de plus, les dérivées partielles vérifient les inégalités

$$\left| \frac{\partial F_i}{\partial u_l} \right|' < R' S,$$

S étant constant, si l'on a

$$|x| \leq \rho \quad \text{et} \quad |u| \leq R' \leq R.$$

Il résulte des hypothèses faites plus haut que, si ρ est suffisamment petit, on peut fixer deux nombres g et γ , le second plus grand que \mathfrak{r} , de sorte que l'on ait

$$\begin{aligned} |x_r^{(k)} - x_r'^{(k)}|' &< \rho'^2 g, \\ |x_i'^{(k)}|' + |x_i^{(k)} - x_i'^{(k)}|' &< \frac{\rho'}{\gamma}, \end{aligned}$$

pour

$$|x| \leq \rho' \leq \rho.$$

Enfin, il est important de faire la remarque suivante : y_1, y_2, \dots, y_n ; $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ étant des fonctions de certaines variables indépendantes, on a

$$\begin{aligned} &|f(y_1 + \lambda_1, y_2 + \lambda_2, \dots, y_n + \lambda_n) - f(y_1, y_2, \dots, y_n)|' \\ &< \sum_i |\lambda_i|' \left| \frac{\partial f(|y_1|' + |\lambda_1|', |y_2|' + |\lambda_2|', \dots, |y_n|' + |\lambda_n|')}{\partial y_i} \right|'. \end{aligned}$$

Cela posé, imaginons qu'il existe un nombre ρ_i inférieur à ρ , tel que l'on ait

$$\begin{aligned} |u_{l_{t-2}}|' &< \rho' \mathfrak{N}_{t-2}, \\ |\delta_{l_{t-1}}|' &< \rho' \mathfrak{X}_{t-1}, \end{aligned}$$

dès que $|x| \leq \rho' \leq \rho_i$, \mathfrak{N}_{t-2} et \mathfrak{X}_{t-1} étant des constantes.

Nous allons faire voir que, sous certaines conditions, les séries $|G_i|'$ relatives aux équations qui définissent les δ_{it} sont convergentes à l'intérieur et sur le contour des cercles de rayon ρ_i ; nous en déduirons la même propriété pour les $|\delta_{it}|'$, ainsi qu'une limite supérieure de ces quantités.

On a d'abord, pour $|x| \leq \rho' \leq \rho_i$,

$$|\delta_{l_{t-1}}^{(k)} - \delta_{l_{t-1}}'^{(k)}|' < \sum_r |x_r^{(k)} - x_r'^{(k)}|' \left| \frac{\partial \delta_{l_{t-1}}(|x_i'^{(k)}|' + |x_i^{(k)} - x_i'^{(k)}|')}{\partial x_r} \right|'.$$

Et comme

$$|x_r^{(k)} - x_r'^{(k)}|' < \rho'^2 g$$

et

$$|x_i'^{(k)}|' + |x_i^{(k)} - x_i'^{(k)}|' < \frac{\rho'}{\gamma};$$

il en résulte que

$$(7) \quad |\delta_{i't-1}^{(k)} - \delta_{i't-1}'^{(k)}|' < \frac{n \rho'^2 g \gamma \mathfrak{C}_{t-1}}{\gamma - 1}.$$

D'autre part, on sait que

$$(8) \quad |\mathbf{F}_i(x_s, |u_{i't-1}^{(k)}|') - \mathbf{F}_i(x_s, |u_{i't-2}^{(k)}|')|' < \sum_i |\delta_{i't-1}^{(k)}|' \left| \frac{\partial \mathbf{F}_i(x_j, |u_{i't-2}^{(k)}|' + |\delta_{i't-1}^{(k)}|')}{\partial u_{i't-2}^{(k)}} \right|'.$$

Or,

$$|u_{i't-2}^{(k)}|' + |\delta_{i't-1}^{(k)}|' < \frac{\rho' (\mathfrak{N}_{t-2} + \mathfrak{C}_{t-1})}{\gamma},$$

quand

$$|x| \leq \rho' \leq \rho_1.$$

Si donc on suppose

$$(9) \quad \frac{\rho_1}{\gamma} (\mathfrak{N}_{t-2} + \mathfrak{C}_{t-1}) \leq \mathbf{R},$$

les deux membres des inégalités (8) sont définis pour $|x| \leq \rho_1$, et l'on a dans ces conditions, si $|x| \leq \rho' \leq \rho_1$,

$$(10) \quad |\mathbf{F}_i(x_s, |u_{i't-1}^{(k)}|') - \mathbf{F}_i(x_s, |u_{i't-2}^{(k)}|')|' < \frac{\rho'^2}{\gamma^2} m p \mathbf{S} \mathfrak{C}_{t-1} (\mathfrak{N}_{t-2} + \mathfrak{C}_{t-1}).$$

On conclut des inégalités (7) et (10) qu'il existe deux constantes **A** et **B**, indépendantes de ρ' , \mathfrak{C}_{t-1} et \mathfrak{N}_{t-2} , telles que l'on ait dans les équations (6)

$$|\mathbf{G}_i|' < \rho'^2 \mathfrak{C}_{t-1} [\mathbf{A} + \mathbf{B} (\mathfrak{N}_{t-2} + \mathfrak{C}_{t-1})],$$

en faisant toujours les mêmes hypothèses sur les x .

Il résulte de là que, dans les mêmes cercles de rayon ρ_1 , les δ_{it} sont définis et que l'on a

$$|\delta_{it}|' < \rho'^2 \mathbf{P} \mathfrak{C}_{t-1} [\mathbf{A} + \mathbf{B} (\mathfrak{N}_{t-2} + \mathfrak{C}_{t-1})].$$

Pour déduire de ces propriétés que les suites de fonctions δ satisfont aux conditions requises par le théorème rappelé au début, il suffit de montrer que l'inégalité (9), qui peut être vérifiée pour les premières valeurs de t si ρ_1 est assez petit, le sera ensuite indéfiniment.

De la limite supérieure trouvée pour $|\delta_{it}|'$, on conclut qu'on peut prendre pour \mathfrak{X}_t

$$\rho_1 \mathbf{P} \mathfrak{X}_{t-1} [\mathbf{A} + \mathbf{B} (\mathfrak{X}_{t-2} + \mathfrak{X}_{t-1})],$$

de sorte que la formule générale permettant de calculer \mathfrak{X}_t , en supposant l'inégalité (9) constamment vérifiée, sera

$$(11) \quad \mathfrak{X}_t = \rho_1 \mathbf{P} \mathfrak{X}_{t-1} \left[\mathbf{A} + \mathbf{B} \sum_1^{t-1} \mathfrak{X}_j \right].$$

Or, posons

$$f(j) = \frac{\lambda}{j(j+1)},$$

λ étant positif; si \mathbf{A}' et \mathbf{B}' désignent deux quantités positives satisfaisant à la condition

$$6\mathbf{A}' + 3\mathbf{B}'\lambda - 2 < 0,$$

on a toujours

$$f(t) > \left[\mathbf{A}' + \mathbf{B}' \sum_1^{t-1} f(j) \right] f(t-1).$$

Donc, si nous supposons $\mathfrak{X}_1 \leq \frac{\lambda}{2}$ et

$$3\rho_1 \mathbf{P} (2\mathbf{A} + \lambda \mathbf{B}) - 2 \leq 6\mathbf{A}' + 3\mathbf{B}'\lambda - 2,$$

on aura $\mathfrak{X}_t < f(t)$. Par suite, la série

$$\sum_1^{\infty} \mathfrak{X}_t$$

sera convergente, et l'inégalité (9) sera constamment satisfaite si

$$\rho_1 \leq \frac{\gamma \mathbf{R}}{\lambda}.$$

A ces diverses conditions, qui se réduisent à prendre ρ_1 assez petit (1),

(1) Il suffit que ρ_1 soit inférieur à ρ , et au plus égal au plus petit des deux nombres $\frac{2\mathbf{A}' + \lambda \mathbf{B}'}{\mathbf{P}(2\mathbf{A} + \lambda \mathbf{B})}$, $\frac{\gamma \mathbf{R}}{\lambda}$, λ étant au moins égal à $2\mathfrak{X}_1$. Or, \mathfrak{X}_1 peut être défini par rapport aux

les séries $\sum_1^{\infty} |\delta_{it}|'$ sont à l'intérieur et sur le périmètre des cercles de rayons ρ_i , des sommes au plus égales à λ . La deuxième partie de la démonstration est donc faite.

6. *Conclusion.* — Le dernier point est immédiat. On a, en effet, en vertu des relations (4),

$$u_{it} = \sum^{k,i} a_{kli} u_{it}^{(k)} + \sum a_{kli} [u_{it-1}^{(k)} - u_{it-1}^{(k)}] + \psi_i + \mathbf{F}_i(x_s, u_{it-1}^{(k)}).$$

Comme les u_{it} tendent vers des fonctions u_i on a, à la limite,

$$u_i = \sum^{k,i} a_{kli} u_{it-1}^{(k)} + \psi_i + \mathbf{F}_i(x_s, u_{it-1}^{(k)}),$$

et le théorème est établi.

7. *Remarque.* — En terminant, il n'est pas inutile de remarquer que les δ_{it} commencent par des termes de degré t , de sorte que les modifications qu'on fait subir successivement aux valeurs approchées portent sur des parties de plus en plus éloignées, des portions de plus en plus grandes des développements étant ainsi définitivement acquises.

cercles de rayons ρ ; il reste alors les conditions

$$\rho_1 \begin{cases} < \rho, \\ < \frac{1}{3P(A + B\mathfrak{R}_1)}, \\ \leq \frac{\gamma R}{2\mathfrak{R}_1}. \end{cases}$$



CHAPITRE III.

EXAMEN D'ÉQUATIONS QUI ÉCHAPPENT AU CAS PRÉCÉDENT.

1. Les conditions imposées aux fonctions de substitution dans l'énoncé du théorème fondamental qui a fait l'objet des deux premiers Chapitres, ne permettent pas, en particulier, de supposer qu'une dérivée d'une de ces fonctions devienne égale à 1 à l'origine. Or, c'est là un cas spécial qui est intéressant. Nous allons l'examiner sur quelques types d'équations, en nous servant encore des méthodes d'approximations successives.

2. *Rappel d'un théorème général.* — Voici un théorème, nécessaire pour ce qui suit, et qui se rattache étroitement à celui qui nous a servi de point de départ dans le Chapitre précédent :

Si les fonctions $f_1, f_2, \dots, f_q, \dots$ des variables x_1, \dots, x_n sont holomorphes dans certaines aires (A) avec des rayons de convergence admettant un minimum différent de 0; et si, dans les aires (A), accrues d'anneaux dont l'épaisseur n'est nulle en aucun point, les maxima des modules de ces fonctions sont tous inférieurs à 1 et forment une série convergente, le produit infini

$$(1 + f_1)(1 + f_2) \dots (1 + f_q) \dots$$

est holomorphe dans les aires (A).

Il suffit, en effet, d'établir la même propriété pour la série

$$L(1 + f_1) + L(1 + f_2) + \dots + L(1 + f_q) + \dots$$

Or cette série est comparable à la suivante

$$f_1 + f_2 + \dots + f_q + \dots,$$

qui jouit de la propriété indiquée en vertu du théorème qu'on a rappelé plus haut. La proposition est donc établie.

3. Cela posé, soit une fonction holomorphe à l'origine, et de la forme

$$(1) \quad \varphi(z) = z + g_1 z^2 + g_{i+1} z^{i+1} + \dots$$

Nous désignerons $\varphi(z)$ par z_1 , $\varphi(z_1)$ par z_2 , ..., $\varphi(z_{p-1})$ par z_p , et par $f_p(z)$, $f(z_p)$; $f(z)$ étant une fonction quelconque, et $z_0 = z$.

Relativement à une pareille fonction $\varphi(z)$, nous allons établir la proposition suivante :

THÉORÈME I. — *Si l'on prend un point quelconque à l'intérieur d'un cercle assez petit ayant son centre à l'origine, il arrivera nécessairement que les transformés successifs de ce point, soit par $\varphi(z)$, soit par la fonction inverse, soit même par toutes deux, ont le point O pour point limite.*

Examen d'un cas simple. — Considérons d'abord la substitution particulière suivante

$$(2) \quad z_1^{i-1} = \frac{z^{i-1}}{1 - h z^{i-1}},$$

où h est une constante quelconque, et où l'on adopte la détermination de z_1 telle que $\left(\frac{dz_1}{dz}\right)_0 = 1$.

En premier lieu, si $i = 2$, la transformation (2) conserve les cercles tangents à l'origine à la droite

$$z = \frac{t}{h},$$

t étant une variable réelle. Si l'on prend un point P dans le plan, ses transformés, directs et inverses, sont situés sur celui des cercles précédents qui passe par P; les uns et les autres ont l'origine pour point limite.

En second lieu, si i est quelconque, la transformation (2) laisse invariables les courbes dont l'équation, en coordonnées polaires, est

$$(3) \quad \rho^{i-1} = \pm k \sin(i-1)(\omega - \alpha),$$

α et k étant deux constantes, la première fixe, la seconde arbitraire. Ces courbes ont la forme de rosaces à $2(i-1)$ branches, qui se coupent à l'origine sous des angles égaux, les branches des différentes courbes étant tangentes entre elles en ce point. Même remarque au sujet des transformés d'un point que dans le cas précédent.

Lorsque z est très petit, la substitution (2) fait correspondre à un point P d'une des courbes (3) un point P₁ situé sur la même boucle; si l'on fait varier z , par continuité cette propriété subsiste; de plus, le sens de par-

cours de P à P_i est le même sur deux courbes infiniment voisines : nous l'appellerons *le sens direct*.

Extension au cas général. — Considérons à présent $\varphi(z)$. Partant d'une valeur de z , nous serons conduits à une même valeur par les substitutions (1) et (2), si nous prenons

$$h = \frac{\varphi^{i-1} - z^{i-1}}{\varphi^{i-1} z^{i-1}};$$

h est une fonction de z , holomorphe et de la forme

$$(i-1)g_i + \dots,$$

tant que $\varphi(z)$ est lui-même holomorphe, et ne s'annule pas en d'autre point que l'origine. A chaque point P est ainsi liée une courbe Γ (3) telle que P et P_i soient sur Γ ; nous appellerons *arc direct* relatif à P l'arc de Γ allant de P à O en passant d'abord par P_i .

De même, si l'on prend la fonction inverse de φ , que je désigne par z_{-i} , on a des propriétés analogues aux précédentes. A chaque point P correspond une courbe Γ' (3) telle que P et son transformé P_{-i} par φ_{-i} soient sur Γ' ; l'arc inverse relatif à P est l'arc de Γ' allant de P à O , en passant par P_{-i} .

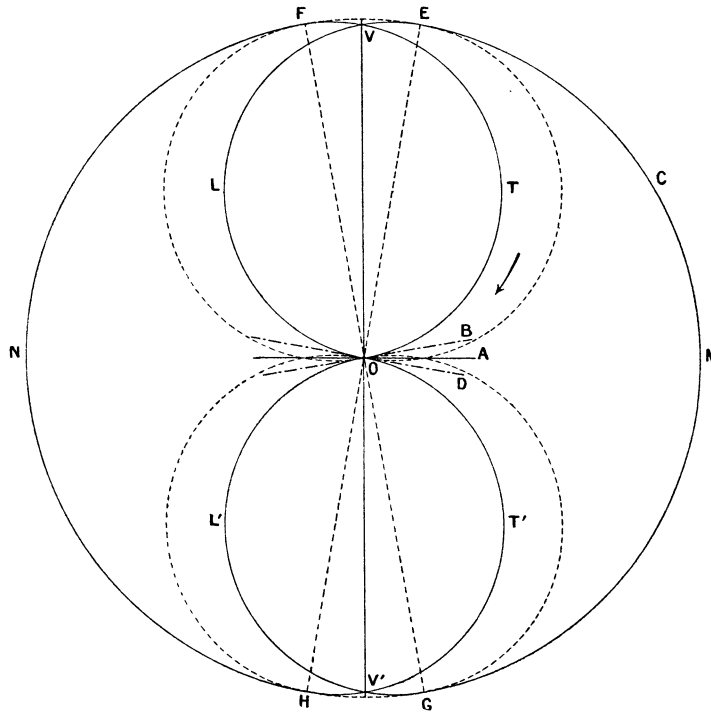
Ici, on a

$$h = -(i-1)g_i + \dots$$

D'ailleurs, pour z infiniment petit, toutes les courbes Γ et Γ' diffèrent infiniment peu de celles qu'on obtient en donnant à h la valeur constante $(i-1)g_i$ (deux valeurs de h , de rapport réel, conduisent aux mêmes courbes). L'angle d'écart d'une tangente à l'origine à l'une quelconque de ces courbes et de la tangente correspondante aux courbes limites n'atteindra pas $\frac{\pi}{2(i-1)}$ si $|z|$ est assez petit. Soit un cercle C de centre O à l'intérieur duquel la condition précédente d'une part est réalisée, et d'autre part les fonctions z_i et z_{-i} sont holomorphes et ne s'annulent qu'au centre. Supposons $i = 2$; les raisonnements s'étendront d'eux-mêmes au cas de i quelconque. On a marqué (fig. 1) la tangente OA aux cercles limites, l'angle BOD qui comprend les tangentes à toutes les courbes Γ et Γ' ; parmi toutes ces courbes, celles qui sont tangentes à C sont donc nécessairement intermédiaires soit entre les circonférences OE, OF ; soit entre OG ,

OH. Admettons que le sens direct soit celui de la flèche. Il est clair que, pour tout point situé dans la région OLEMGL'O, l'arc direct est tout

Fig. 1.



entier dans la même région. De même, pour tout point de la région OTFNHT'O, l'arc inverse est aussi entièrement dans cette région nouvelle.

Si l'on effectue, plusieurs fois de suite, la substitution (1), on a

$$z_1^{i-1} = \frac{z^{i-1}}{1 - h z^{i-1}}, \quad z_2^{i-1} = \frac{z_1^{i-1}}{1 - h_1 z_1^{i-1}}, \quad \dots, \quad z_n^{i-1} = \frac{z_{n-1}^{i-1}}{1 - h_{n-1} z_{n-1}^{i-1}},$$

et, par suite,

$$z_n^{i-1} = \frac{z^{i-1}}{1 - (h + h_1 + \dots + h_{n-1}) z^{i-1}}.$$

Supposons le cercle C assez petit pour que, pour tout point de ce cercle

$$\left| \frac{h(z)}{(i-1)g_i} - 1 \right| < K < 1,$$

K étant une constante, et pour que la condition analogue soit vérifiée pour la substitution inverse.

Nous avons prouvé l'existence à l'intérieur de C de deux régions R + R', R + R'' ayant une partie commune R, pouvant d'ailleurs être formées de portions distinctes et avoir une étendue plus grande que celle qu'on leur a reconnue, et qui jouissent de cette propriété : tous les transformés directs des points de R + R' sont à l'intérieur de R + R'; tous les transformés inverses des points de R + R'' sont dans R + R'.

Prenons un point situé dans R + R'; on aura donc, quel que soit l'entier positif p,

$$\left| \frac{h(z_p)}{(i-1)g_i} - 1 \right| < K < 1,$$

et, si l'on pose $\frac{h(z)}{(i-1)g_i} - 1 = \delta(z)$,

$$(4) \quad z_n^{i-1} = \frac{z^{i-1}}{1 - n(i-1)g_i z^{i-1} \left[1 + \frac{\delta + \delta_1 + \dots + \delta_{n-1}}{n} \right]}.$$

Comme

$$\left| \frac{\delta + \delta_1 + \dots + \delta_{n-1}}{n} \right| < K,$$

z_n^{i-1} et, par suite, z_n tendent vers 0 quand n croît indéfiniment.

De même $z_{-n}(z_{-p} = z_{-(p-1)}(z_{-1}))$ tend vers 0 pour n infini, quand z est pris dans la région R + R''.

Si donc on considère le cercle de diamètre VV', il se trouve bien dans les conditions annoncées au début de ce numéro.

4. *Théorème concernant la limite de $n z_n^{i-1}$.* — Nous pouvons déduire de ce qui précède un théorème qui a été démontré par M. Lémeray (1) et qu'on peut énoncer de la manière suivante :

THÉORÈME II. — Dans la région R + R', on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n z_n^{i-1} = - \frac{1}{(i-1)g_i} = - \frac{i!}{(i-1) \left(\frac{d^i z_1}{dz^i} \right)_0},$$

et dans la région R + R''

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n z_{-n}^{i-1} = + \frac{1}{(i-1)g_i} = - \frac{i!}{(i-1) \left(\frac{d^i z_{-1}}{dz^i} \right)_0}.$$

(1) *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXIII, n° 9 et 10.

Bornons-nous au premier cas. On peut trouver un cercle C' tel que l'on ait à l'intérieur

$$|\delta| < \varepsilon.$$

Les transformés du point P choisi seront, à partir du $p^{\text{ième}}$, tous dans ce cercle. Par suite

$$\left| \frac{\delta + \delta_1 + \dots + \delta_{n-1}}{n} \right| < \frac{Kp + \varepsilon(n-p)}{n}.$$

Le second membre ayant n pour infini, ε pour limite, il en résulte qu'à partir d'une certaine valeur de n , $n z_n^{i-1}$ diffère de $\frac{1}{(i-1)g_i}$ d'une quantité inférieure à un nombre fixe arbitrairement choisi : c'est dire que $n z_n^{i-1}$ a $-\frac{1}{(i-1)g_i}$ pour limite.

5. *Remarque sur le théorème précédent.* — Peut-on en conclure que z_n^{i-1} est comparable à $\frac{1}{n}$ dans le domaine $R + R'$? Évidemment non; car le nombre p du numéro précédent peut croître indéfiniment, et il est visible que ce fait se produit si l'on fait tendre z vers 0 suivant certaines lignes.

Démonstration d'un théorème important. — D'une manière précise, cherchons une portion du plan telle que l'on ait constamment

$$\left| \frac{z_n^{i-1}}{\frac{1}{n}} \right| < K',$$

c'est-à-dire

$$\left| \frac{1}{n z^{i-1}} - (i-1)g_i \left[1 + \frac{\delta + \delta_1 + \dots + \delta_{n-1}}{n} \right] \right| > \frac{1}{K'},$$

K' étant une constante positive quelconque.

Considérons le cercle de centre $(i-1)g_i$, de rayon $K(i-1)|g_i| + \frac{1}{K}$, puis la symétrique C' de son inverse par rapport à 0, la puissance étant 1. C' sera extérieur à C et vu de 0 sous un angle aussi petit que l'on veut, pourvu qu'on ait choisi assez petits K , $\frac{1}{K}$ et le rayon de C . Il suffit évidemment que z^{i-1} soit extérieur à l'angle qu'on vient de définir, c'est-à-dire que z soit extérieur aux angles qu'on en déduit par la transformation $z^{i-1} = z$. Ces angles interceptent dans R des portions (aussi petites qu'on a voulu) situées du côté des arcs inverses, et que j'appelle S'' . De même z_{-1}

nous conduirait à enlever des parties que j'appelle S' . Outre S' et S'' , R comprend une région S , limitée par des espaces angulaires en o . Ainsi :

THÉORÈME III. — Dans $S + S' + R'$, on a

$$|z_n^{i-1}| < \frac{K'}{n},$$

et dans $S + S'' + R''$

$$|z_{-n}^{i-1}| < \frac{K'}{n},$$

quel que soit z dans la région considérée, et quel que soit n .

Cette propriété nous sera très précieuse.

6. Application à une équation particulière. — Soit l'équation

$$(5) \quad u(z) = u(z_1) + L(z).$$

Supposons la fonction $L(z)$ donnée, définie dans $S + S' + R'$ et telle qu'on ait constamment

$$\left| \frac{L(z)}{z^t} \right| < M,$$

t étant un nombre positif fixe, supérieur à $i - 1$. Il est clair que la série

$$L(z) + L(z_1) + \dots + L(z_n) + \dots$$

fournira une solution de l'équation (5), holomorphe à l'intérieur de

$$S + S' + R'.$$

Toute autre solution ne différera de la précédente que par une fonction restant invariable par la substitution $\varphi(z)$.

Si $L(z)$ satisfait à une condition analogue dans $S + S'' + R''$, la série

$$- \{L(z_{-1}) + L(z_{-2}) + \dots + L(z_{-n}) + \dots\}$$

donne dans ce domaine une solution holomorphe de la même équation.

Alors, de deux choses l'une : ou la différence des deux solutions se réduit dans S à une constante, qu'on peut supposer nulle, ou elle définit dans S une fonction holomorphe, admettant la substitution $\varphi(z)$. Dans le premier cas, on dispose dans le cercle C d'une fonction qui n'est pas uniforme, ou bien qui est holomorphe dans tout le cercle. La première hypothèse est évidemment réalisée si $L(z)$ n'est pas uniforme. Quand la fonction est uniforme, elle est nécessairement holomorphe en o , ce point ne pouvant

être ni pôle, ni point singulier essentiel isolé, puisqu'on connaît un maximum du module de la fonction dans le voisinage de l'origine.

Il est même facile de voir (1) que la solution de (5), que nous avons trouvée dans $S + S' + R'$, tend vers 0 avec z . Et c'est la seule qui soit dans ce cas : on a, en effet,

$$u(z) = u(z_n) + L(z) + L(z_1) + \dots + L(z_{n-1}),$$

égalité qui établit la proposition. Remarque analogue pour $S + S'' + R''$.

En particulier, s'il existe une solution holomorphe en 0, ce qui ne peut arriver que si $L(z)$ est lui-même holomorphe en ce point, elle est nécessairement fournie par les deux séries trouvées respectivement dans

$$S + S' + R' \quad \text{et} \quad S + S'' + R''.$$

Réciproquement, si $L(z)$ est de la forme

$$a_i z^i + \dots,$$

et si, quand z tend vers 0 dans la région S'' par exemple, la série qui correspond à $S + S' + R'$, et qui est aussi définie dans S'' , tend aussi vers 0, il existe une fonction $u(z)$, représentée dans la région S à la fois par les deux séries, et, par conséquent, définie et holomorphe dans le cercle C .

7. *Application à une autre équation.* — Soit l'équation

$$(6) \quad u(z) = A(z) u(z_1),$$

où

$$A(z) = 1 + f(z).$$

Si la fonction $f(z)$ donnée est définie dans $S + S' + R'$, si elle reste inférieure à 1 en valeur absolue et si l'on a constamment

$$\left| \frac{f(z)}{z^i} \right| < M \quad (i > i - 1),$$

le produit infini

$$A(z) A(z_1) \dots A(z_n) \dots$$

fournira une solution de (6) holomorphe à l'intérieur de $S + S' + R'$.

Les mêmes circonstances se présentent avec les équations (5) et (6) qui se ramènent d'ailleurs l'une à l'autre.

(1) Cela résulte de ce que, dans $S + S' + R'$, on a, ρ étant assez petit et H désignant une constante, $|z_n| < H|z|$ pour $|z| < \rho$ et n quelconque.

Si le produit

$$\frac{1}{\mathbf{A}(z_{-1}) \mathbf{A}(z_{-2}) \dots \mathbf{A}(z_{-n}) \dots}$$

donne une solution dans $S + S'' + R''$, ou le quotient des deux produits

$$\dots \mathbf{A}(z_{-n}) \dots \mathbf{A}(z_{-1}) \mathbf{A}(z) \mathbf{A}(z_1) \dots \mathbf{A}(z_n) \dots$$

se réduit à une constante qu'on peut supposer égale à 1 dans S , et l'on dispose alors d'une solution dans C , ou il constitue dans cette région une fonction admettant la substitution $\varphi(z)$.

Dans le premier cas, la solution trouvée est encore ou holomorphe en o , ou non uniforme.

Cherchons s'il existe, dans $S + S' + R'$, une solution de (6) tendant vers une limite différente de o (et qu'on peut prendre égale à 1), quand z tend vers o . On aura nécessairement

$$u(z) = \mathbf{A}(z) \mathbf{A}(z_1) \dots \mathbf{A}(z_{n-1}) u(z_n),$$

et puisque $u(z_n)$ tend vers 1, quand n croît indéfiniment, $u(z)$ devra être défini par le produit

$$\mathbf{A}(z) \mathbf{A}(z_1) \dots \mathbf{A}(z_n) \dots$$

D'ailleurs, il satisfait à la question, car il tend vers 1, quand z tend vers o .

D'une manière plus générale, cherchons, dans la même région, une solution telle que $\frac{u(z)}{z^c}$ tende vers 1 pour z infiniment petit, c étant une constante réelle quelconque. Nous ne supposons plus que $\mathbf{A}(z)$ satisfasse aux conditions du début, mais nous supposons ces conditions réalisées par la fonction $F(z)$ définie par l'égalité

$$\left[\frac{\varphi(z)}{z} \right]^c \mathbf{A}(z) = 1 + F(z).$$

Pour une pareille solution on aurait

$$u(z) = z^c \times \left(\frac{z_1}{z} \right)^c \mathbf{A}(z) \times \left(\frac{z_2}{z_1} \right)^c \mathbf{A}(z_1) \times \dots \times \left(\frac{z_n}{z_{n-1}} \right)^c \mathbf{A}(z_{n-1}) \times \frac{u(z_n)}{z_n^c};$$

$u(z)$ est donc nécessairement égal au produit infini

$$z^c \times \left(\frac{z_1}{z} \right)^c \mathbf{A}(z) \times \left(\frac{z_2}{z_1} \right)^c \mathbf{A}(z_1) \times \dots \times \left(\frac{z_n}{z_{n-1}} \right)^c \mathbf{A}(z_{n-1}) \times \dots,$$

qui est évidemment une solution de (6). D'ailleurs, elle répondra à la question, car le produit infini qui suit z^c a 1 pour limite, lorsqu'on fait

tendre z vers o . Des remarques analogues s'appliquent à la substitution inverse.

Occupons-nous, en particulier, des solutions holomorphes ou méromorphes en o . Ces dernières se ramènent aux premières : bornons-nous donc à celles-ci. Il ne peut en être question que si $\mathbf{A}(z)$ est lui-même holomorphe. Une pareille solution, commençant par

$$z^q + \dots,$$

sera nécessairement représentée dans $\mathbf{S} + \mathbf{S}' + \mathbf{R}'$ par le produit

$$z^q \times \left(\frac{z_1}{z}\right)^q \mathbf{A}(z) \times \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^q \mathbf{A}(z_1) \times \dots,$$

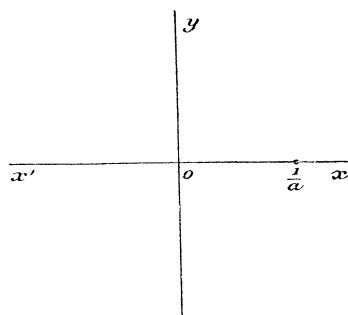
et dans $\mathbf{S} + \mathbf{S}'' + \mathbf{R}''$ par

$$z^q \frac{1}{\left(\frac{z}{z_{-1}}\right)^q \mathbf{A}(z_{-1}) \times \left(\frac{z_{-1}}{z_{-2}}\right)^q \mathbf{A}(z_{-2}) \times \dots}.$$

D'ailleurs, le quotient de ces deux fonctions devra être constant dans \mathbf{S} , pour qu'il y ait bien une solution holomorphe en o .

8. *Exemple.* — Soit $z_1 = \frac{z}{1 - az}$. Pour fixer les idées, supposons a positif. Ici la région $\mathbf{R} + \mathbf{R}'$ est formée de tout le plan, sauf la demi-droite ox ,

Fig. 2.



la région $\mathbf{R} + \mathbf{R}''$ de tout le plan, sauf la demi-droite ox' . \mathbf{S}'' est un angle aussi petit que l'on veut, comprenant ox , de même \mathbf{S}' un angle comprenant ox' .

Proposons-nous de résoudre l'équation

$$u(z) = u(z_1) + z^2.$$

La série

$$z^2 + z_1^2 + \dots + z_n^2 + \dots$$

en donne une solution holomorphe dans la région $S + S' + R'$, et c'est la seule qui tende vers 0, quand z tend lui-même vers 0 dans ce domaine. De même la série

$$- \{ z_{-1}^2 + z_{-2}^2 + \dots + z_{-n}^2 + \dots \}$$

fournit une solution analogue dans $S + S'' + R''$.

D'ailleurs, ces deux solutions sont distinctes, car leur différence

$$F(z) = \dots + z_{-n}^2 + \dots + z^2 + \dots + z_n^2 + \dots$$

admet une infinité de pôles sur $x'x$ et l'origine est un point singulier essentiel isolé. Cette fonction n'est autre que

$$\frac{\pi^2}{a^2} \left[1 + \cot^2 \frac{\pi}{a z} \right].$$

Pour le voir, il suffit d'observer que

$$F(z) = z^2 \left\{ 1 + \sum_1^{+\infty} \frac{d \left[\frac{2z}{1 - n^2 a^2 z^2} \right]}{dz} \right\}.$$

L'équation proposée n'a donc pas de solution holomorphe en 0.

Soit maintenant l'équation

$$u(z) = u(z_1) + \frac{z^2}{1 + \frac{a}{2} z}.$$

Considérons un petit cercle entourant le point $-\frac{2}{a}$, et les transformées inverses de ce petit cercle. En les enlevant de la région $S + S' + R'$, on obtient dans la partie restante, au moyen de la série

$$\frac{z^2}{1 + \frac{a}{2} z} + \frac{z_1^2}{1 + \frac{a}{2} z_1} + \dots + \frac{z_n^2}{1 + \frac{a}{2} z_n} + \dots,$$

une solution holomorphe et tendant vers 0 avec z , et c'est la seule qui remplisse ces conditions.

En opérant de même dans la région $S + S'' + R''$, on a la série

$$- \left\{ \frac{z_{-1}^2}{1 + \frac{a}{2} z_{-1}} + \dots + \frac{z_{-n}^2}{1 + \frac{a}{2} z_{-n}} + \dots \right\},$$

qui joue un rôle analogue.

Leur différence $F(z)$ est encore une fonction uniforme, présentant en o un point singulier essentiel, ayant une infinité de pôles sur x', x . D'ailleurs, on a

$$F(z) = \frac{4\pi}{a^2 \sin \frac{2\pi}{az}}.$$

En effet

$$\frac{z_n^2}{1 + \frac{a}{2} z_n} = \frac{z^2}{[1 - naz][1 - (n - \frac{1}{2})az]} = \frac{2}{a} \left\{ \frac{z}{1 - naz} - \frac{z}{1 - (n - \frac{1}{2})az} \right\},$$

et, si l'on groupe les termes qui correspondent à des coefficients de az , égaux au signe près, on retrouve le développement de $\frac{4\pi}{a^2 \sin \frac{2\pi}{az}}$ en série de

fractions par une formule connue.

L'équation proposée n'avait donc pas encore de solution holomorphe à l'origine.

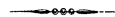
Remarque. — De l'expression de $\frac{\pi^2}{a^2 \sin^2 \frac{\pi}{az}}$ on tire, en remplaçant a par 1 et z par 2,

$$\pi^2 = 4 \sum_{-\infty}^{+\infty} n \frac{1}{(1 - 2n)^2} = 8 \left\{ \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2p+1)^2} + \dots \right\}.$$

De même, de celle de $\frac{4\pi}{a^2 \sin \frac{2\pi}{az}}$ on conclut, en prenant $a = 2$ et $z = 2$,

$$\pi = 4 \sum_{-\infty}^{+\infty} n \frac{1}{(1 - 4n)[1 - 2(2n - 1)]} = 8 \left\{ \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \dots \right\}.$$

Dans les Chapitres qui vont suivre, nous allons développer les applications des résultats précédents à certaines équations qui ont été déjà l'objet des recherches de divers géomètres, notamment Abel et M. Schröder. Nous examinerons d'abord, dans l'hypothèse d'une seule variable, le cas, laissé jusqu'ici de côté, où le module de la substitution est égal à l'unité au point limite. Nous étendrons ensuite les résultats déjà obtenus aux cas de plusieurs variables.



SECONDE PARTIE.

APPLICATIONS.



CHAPITRE IV.

ÉQUATIONS D'ABEL ET DE M. SCHRÖDER DANS LE CAS D'UNE SUBSTITUTION $\varphi(z)$, TELLE QUE LE MODULE DE LA DÉRIVÉE AU POINT LIMITE SOIT ÉGAL A L'UNITÉ.

1. *Équations d'Abel et de M. Schröder.* — L'équation d'Abel est

$$(1) \quad f[\varphi(z)] = f(z) + a,$$

où $\varphi(z)$ est donné, $f(z)$ inconnu, a une constante qu'on peut prendre égale à 1.

L'équation de M. Schröder

$$(2) \quad f[\varphi(z)] = af(z),$$

où les lettres ont la même signification, mais où a est une constante quelconque, se rattache de suite à la précédente. En prenant le logarithme d'une solution de l'équation (2), on a une solution de l'équation (1).

Ces équations ont une grande importance. D'abord, ce sont les plus simples qui se présentent relativement à une substitution donnée $\varphi(z)$, et leurs solutions peuvent être considérées comme des généralisations des fonctions périodiques. Puis elles apportent une grande simplification dans l'étude des équations fonctionnelles, où ne figure qu'une pareille substitution $\varphi(z)$; car, si l'on prend comme nouvelle variable une solution de l'équation (2), la nouvelle substitution sera $z_1 = az$. Les mêmes remarques s'appliquent au cas de plusieurs variables indépendantes.

En se bornant à une fonction $\varphi(z)$ holomorphe au voisinage d'un point racine x de $\varphi(z) = z$, l'étude des solutions (1) et (2) a été faite ⁽¹⁾ par

⁽¹⁾ Voir les Mémoires déjà cités.

M. Kœnigs quand $\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)_x$ n'est pas nul, ni égal à 1 en valeur absolue. M. Grévy a, dans sa Thèse, résolu la question lorsque cette dérivée est nulle. Nous allons étudier le même problème en supposant le module de $\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)_x$ égal à 1 et son argument commensurable avec 2π .

Voici d'abord une observation générale : résoudre une équation fonctionnelle telle que (1) ou (2) a un sens précis *quand on ne cherche que des solutions uniformes*. Mais considérons une fonction non uniforme au point x ; ce chemin qui conduit d'un point à son transformé, n'étant pas défini, il n'y a pas lieu de faire correspondre une détermination de $f[\varphi(z)]$ à une de $f(z)$. Il faudra donc simplement, pour que l'équation soit vérifiée, qu'elle soit satisfaite par des déterminations quelconques d'une fonction et de sa transformée. C'est là la seule convention qu'on puisse poser *a priori*.

La remarque suivante est immédiate. Si $b(z)$ désigne une solution de l'équation d'Abel, pour laquelle $a = 1$, et si $\Omega(z)$ est une fonction quelconque de période 1, la solution générale de l'équation (1) est

$$ab(z) + \Omega[b(z)],$$

et celle de l'équation (2) est $B^\alpha(z)\Omega[b(z)]$, $B(z)$ étant une solution arbitraire pour laquelle la quantité α correspondante est différente de 1.

2. *Cas où la dérivée est égale à l'unité.* — Supposant, comme d'habitude, le point racine de la substitution à l'origine, nous considérons d'abord le cas où

$$\left[\frac{d\varphi(z)}{dz}\right]_0 = 1.$$

Soient donc

$$0 = \left(\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right)_0 = \dots = \left(\frac{d^{i-1}\varphi}{dz^{i-1}}\right)_0 \quad \text{et} \quad g = \frac{1}{i!} \left(\frac{d^i\varphi}{dz^i}\right)_0.$$

L'équation de M. Schröder n'admet évidemment pas de solution holomorphe ou méromorphe à l'origine. S'il existe une solution, elle vérifiera aussi l'équation

$$(3) \quad \frac{df[\varphi]}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dz} = a \frac{df(z)}{dz}.$$

Si l'on connaît une fonction u telle que l'on ait

$$(4) \quad u(z) = \frac{u(\varphi)}{\frac{d\varphi}{dz}},$$

on en déduira

$$(2)' \quad \frac{df[\varphi]}{d\varphi} u(\varphi) = a \frac{df(z)}{dz} u(z),$$

de sorte que $\frac{df(z)}{dz} u(z)$ sera aussi solution de (2). Il est naturel de supposer qu'elles sont égales. On sera alors conduit à considérer l'équation

$$(5) \quad \frac{df(z)}{f(z)} = \frac{dz}{u(z)}.$$

Cherchons donc une solution de l'équation (4). On désignera par $z_1 = \varphi(z)$, z_2, \dots, z_n les itératives de φ , par z_{-1}, z_{-2}, \dots celles de sa fonction inverse. Il est facile de voir que, s'il y a une solution holomorphe en o de cette équation, elle a nécessairement comme terme de degré le moins élevé un terme en z^i , z^i lui-même, par exemple. Elle sera donc (Chap. III) définie, si elle existe, dans $S + S' + R'$ par

$$z^i \frac{\left(\frac{z_1}{z}\right)^i}{\frac{dz_1}{dz}} \frac{\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^i}{\frac{dz_2}{dz_1}} \dots$$

D'ailleurs, cette expression représente une solution holomorphe de (4) dans ce domaine, car si l'on pose

$$\frac{\left(\frac{z_1}{z}\right)^i}{\frac{dz_1}{dz}} = 1 + F(z),$$

$F(z)$ est une fonction holomorphe n'ayant pas de terme de degré inférieur à i . De même, à l'intérieur de la région $S + S'' + R''$, le produit infini

$$\frac{z_{-1}^i}{\frac{dz_{-1}}{dz}} \frac{\left(\frac{z_{-2}}{z_{-1}}\right)^i}{\frac{dz_{-2}}{dz_{-1}}} \frac{\left(\frac{z_{-3}}{z_{-2}}\right)^i}{\frac{dz_{-3}}{dz_{-2}}} \dots$$

fournit une solution holomorphe de l'équation (4).

Difficulté inhérente à ce cas. — A coup sûr, pour une infinité de fonctions φ , les deux solutions trouvées coïncident dans S et l'équation proposée admet une solution holomorphe en o . Il est possible que cette propriété ait lieu pour toutes les fonctions φ ; mais je n'ai pas pu élucider cette question.

Remarque concernant la limite de $\frac{u(z)}{z^i}$. — On sait que, si l'on pose

$$(6) \quad u(z) = z^i v(z),$$

chaque fonction v tend vers τ quand z tend vers o , dans le domaine où elle a été primitivement définie.

Un corollaire de cette proposition, c'est qu'il n'existe pas dans $S + S' + R'$ de solution holomorphe de l'équation (4), dont le rapport à z^i tende vers o avec z .

En effet, s'il existait une pareille solution que j'appelle $z^i X(z)$, on aurait

$$X(z) = X(z_n) \frac{\left(\frac{z_1}{z}\right)^i}{\frac{dz_1}{dz}} \frac{\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^i}{\frac{dz_2}{dz_1}} \dots \frac{\left(\frac{z_n}{z_{n-1}}\right)^i}{\frac{dz_n}{dz_{n-1}}}.$$

Quand n croîtrait indéfiniment, il devrait en être de même du coefficient de $X(z_n)$, ce qui n'a pas lieu.

Forme intéressante donnée à une condition.

On peut mettre sous une forme simple la condition pour que les deux fonctions u ne soient pas distinctes. Comme elles sont respectivement les limites, pour n infini, de

$$\frac{z_n^i dz}{dz_n} \quad \text{et de} \quad \frac{z_{-n}^i dz}{dz_{-n}},$$

il faut et il suffit que l'on ait

$$(7) \quad \lim_{n=\infty} \left| \frac{dz_n}{dz_{-n}} \right| = \tau.$$

Conclusion relative à l'équation (4).

On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME I. -- L'équation (4) admet respectivement, dans les do-

maines $S + S' + R'$, $S + S'' + R''$, deux solutions holomorphes, telles que leur rapport à z^i tende vers 1 quand z tend vers 0 dans le domaine correspondant. La condition pour que ces deux fonctions coïncident, et elles définissent alors une fonction holomorphe en 0, est que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{dz_n}{dz_{-n}} \right| = 1.$$

3. *Retour à l'équation de M. Schröder.* — Reprenons l'équation (5). A chaque fonction $u(z)$, elle fait correspondre, dans son domaine, une solution de l'équation (2), holomorphe à l'intérieur. La différence

$$Lf[\varphi(z)] - Lf(z)$$

est, en effet, constante, puisqu'on a

$$\frac{df[\varphi]}{f[\varphi]} - \frac{df(z)}{f(z)} = \frac{d\varphi}{u(\varphi)} - \frac{dz}{u(z)} = 0.$$

Les logarithmes de ces nouvelles fonctions donnent à leur tour, dans les deux régions, des solutions de l'équation d'Abel. Il est clair qu'elles coïncideront ou seront différentes en même temps que les fonctions u .

Nous allons donner de ces solutions de l'équation d'Abel des expressions analytiques. Dans ce but, nous énoncerons d'abord des théorèmes qui présenteront d'autres conséquences intéressantes.

Théorèmes concernant certaines limites.

THÉORÈME II. — *On peut trouver un polynôme de degré i en $\frac{1}{z}$:*

$$P(z) = \frac{d_i}{z^i} + \frac{d_{i-1}}{z^{i-1}} + \dots + \frac{d_1}{z} \quad (d_i \neq 0)$$

tel que l'expression

$$\frac{d\varphi(z)}{dz} P(z_1) - P(z)$$

soit une fonction holomorphe à l'origine, n'ayant pas de terme de degré inférieur à $i - 1$.

La vérification se fait sans difficulté.

Il en résulte que, z étant dans la région $R + R'$, les quantités

$$n \left[\frac{d\varphi(z_n)}{dz_n} P(z_{n+1}) - P(z_n) \right], \quad \frac{1}{z_n^{i-1}} \left[\frac{d\varphi(z_n)}{dz_n} P(z_{n+1}) - P(z_n) \right]$$

ont des limites, quand n croît indéfiniment.

Posons

$$(8) \quad \psi(z) = \frac{d_i}{(i-1)z^{i-1}} + \frac{d_{i-1}}{(i-2)z^{i-2}} + \dots + \frac{d_2}{z}.$$

Du théorème précédent, on conclut de suite celui-ci :

THÉORÈME III. — *Il est possible de trouver un système de constantes $d_i (d_i \neq 0)$, d_{i-1}, \dots, d_1 , telles que la différence*

$$-\psi(z_1) + d_1 \mathbf{L} z_1 - [-\psi(z) + d_1 \mathbf{L} z] - 1$$

soit une fonction $\mathbf{F}(z)$, holomorphe en 0, et n'ayant pas de termes de degré inférieur à i .

Conséquences. — De la relation

$$-\psi(z_1) + d_1 \mathbf{L} z_1 = -\psi(z) + d_1 \mathbf{L} z + 1 + \mathbf{F}(z)$$

on déduit

$$-\psi(z_n) + d_1 \mathbf{L} z_n - n = -\psi(z) + d_1 \mathbf{L} z + \mathbf{F}(z) + \mathbf{F}(z_1) + \dots + \mathbf{F}(z_{n-1})$$

et, par suite,

$$nz_n^{i-2} + \frac{d_i}{(i-1)z_n} = -\frac{d_{i-2}}{i-2} - \left[\frac{d_{i-2}}{i-3} z_n + \dots + d_2 z_n^{i-3} \right] + z_n^{i-2} \psi(z) \\ - z_n^{i-2} \{ \mathbf{F}(z) + \mathbf{F}(z_1) + \dots + \mathbf{F}(z_{n-1}) \} + d_1 z_n^{i-2} \mathbf{L} \frac{z_n}{z}.$$

Donc

$$(9) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left[nz_n^{i-2} + \frac{d_i}{(i-1)z_n} \right] = -\frac{d_{i-1}}{i-2}.$$

On trouverait de même

$$(10) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left[nz_n^{i-3} + \frac{d_i}{(i-1)z_n^2} + \frac{d_{i-1}}{(i-2)z_n} \right] = -\frac{d_{i-2}}{i-3}.$$

Et ainsi de suite. Finalement

$$(11) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} [n + \psi(z_n) - d_1 \mathbf{L} z_n] = \psi(z) - d_1 \mathbf{L} z \\ - \{ \mathbf{F}(z) + \mathbf{F}(z_1) + \dots + \mathbf{F}(z_p) + \dots \}$$

Ces résultats, auxquels il faut joindre celui de M. Lémery

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nz_n^{i-1} = -\frac{d_i}{i-1},$$

et la relation

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dz} \frac{1}{z_n^{i-1}} = - (i-1) \frac{v(0)}{u(z)}$$

sont les analogues de ceux trouvés par M. Kœnigs dans le cas où

$$\left| \frac{d\varphi(z)}{dz} \right| \neq 1.$$

Ils sont, comme le théorème de M. Lémeray, susceptibles d'un énoncé plus précis :

THÉORÈME IV. — *Dans la région S + S' + R', on a, K' étant une certaine constante, les inégalités*

$$\begin{aligned} \left| n z_n^{i-2} + \frac{d_i}{(i-1)z_n} \right| < K', \\ \left| n z_n^{i-3} + \frac{d_i}{(i-1)z_n^2} + \frac{d_{i-1}}{(i-2)z_n} \right| < K', \\ \dots\dots\dots \end{aligned}$$

Enfin, si de la région S + S' + R' on détache un petit secteur de manière à en isoler l'origine, on a

$$| n + \psi(z_n) - d_1 L z_n | < K'.$$

Des propriétés analogues ont lieu relativement à la région S + S'' + R'' (1).
Applications à quelques équations. — Grâce aux inégalités précédentes, on peut construire des fonctions satisfaisant à certaines équations fonctionnelles.

Posons

$$\begin{aligned} E_{p,n} &= n z_n^{i-p} + \frac{d_i}{(i-1)z_n^{p-1}} + \frac{d_{i-1}}{(i-2)z_n^{p-2}} + \dots & (2 \leq p \leq i), \\ G_{p,q}(z) &= z^{i+q-p} + \sum_1^{\infty} \frac{z_n^q E_{p,n}}{n} & (q > 0), \\ H_{p,q}(z) &= \sum_0^{\infty} z_n^q E_{p,n} & (q > i-1). \end{aligned}$$

Pour $p < i$, les fonctions précédentes sont holomorphes dans S + S' + R';

(1) Il est possible que le cercle par rapport auquel on considère, ici et dans des cas semblables, les régions S, S', ... soit de rayon plus petit que celui considéré au Chapitre III. Mais ce point est sans intérêt dans la question.

pour $p = i$, dans la même région dont on a isolé l'origine. D'ailleurs :

$$\mathbf{G}_{2,1}(z) = \mathbf{G}_{2,1}(z_1) + z^{i-1},$$

$$\mathbf{G}_{2,2}(z) = \mathbf{G}_{2,2}(z_1) + z^i + \frac{d_i z}{i-1} - \frac{d_i}{i-1} \sum_2^{+\infty} \frac{z_n}{(n-1)n},$$

$$\mathbf{G}_{2,3}(z) = \mathbf{G}_{2,3}(z_1) + z^{i+1} + \frac{d_i z_1^2}{i-1} - \frac{d_i}{i-1} \sum_2^{+\infty} \frac{z_n^2}{(n-1)n},$$

.....

$$\mathbf{H}_{2,i}(z) = \mathbf{H}_{2,i}(z_1) + \frac{d_i}{i-1} z^{i-1} + z_1^{2i-2} + z_2^{2i-2} + \dots + z_n^{2i-2} + \dots,$$

$$\mathbf{H}_{2,i+1}(z) = \mathbf{H}_{2,i+1}(z_1) + \frac{d_i}{i-1} z^i + z_1^{2i-1} + z_2^{2i-1} + \dots + z_n^{2i-1} + \dots,$$

.....;

$$\mathbf{G}_{3,1}(z) = \mathbf{G}_{3,1}(z_1) + z^{i-2} + \frac{d_i}{(i-1)z_1} - \frac{d_i}{i-1} \sum_2^{+\infty} \frac{1}{(n-1)n z_n},$$

$$\mathbf{G}_{3,2}(z) = \mathbf{G}_{3,2}(z_1) + z^{i-1} + \frac{d_{i-1}}{i-2} z_1 - \frac{d_{i-1}}{i-2} \sum_2^{+\infty} \frac{z_n}{(n-1)n},$$

.....;

$$\mathbf{H}_{3,i}(z) = \mathbf{H}_{3,i}(z_1) + \frac{d_i}{i-1} z^{i-2} + \frac{d_{i-1}}{i-2} z^{i-1} + z_1^{2i-3} + z_2^{2i-3} + \dots + z_n^{2i-3} + \dots,$$

$$\mathbf{H}_{3,i+1}(z) = \mathbf{H}_{3,i+1}(z_1) + \frac{d_i}{i-1} z^{i-1} + \frac{d_{i-1}}{i-2} z^i + z_1^{2i-2} + z_2^{2i-2} + \dots + z_n^{2i-2} + \dots,$$

.....;

$$\mathbf{G}_{i,1}(z) = \mathbf{G}_{i,1}(z_1) + z \psi(z) - d_1 z_1 \mathbf{L} z_1 + d_1 \sum_2^{+\infty} \frac{z_n \{ \mathbf{L} z_n - \psi(z_n) \}}{(n-1)n},$$

.....;

$$\mathbf{H}_{i,i}(z) = \mathbf{H}_{i,i}(z_1) + z^i \psi(z) - d_1 z^i \mathbf{L} z + z_1^i + z_2^i + \dots + z_n^i + \dots,$$

.....

Il faut y joindre les fonctions déjà définies auxquelles donne lieu l'expression

$$\mathbf{E}_1 = n z_n^{i-1}.$$

On a

$$\mathbf{G}_{1,1}(z) = \mathbf{G}_{1,1}(z_1) + z^i$$

.....

Ces fonctions ne sont d'ailleurs pas toutes distinctes. On a, par exemple,

$$(i-1)d_{i-1}\{G_{2,2}(z) - G_{1,1}(z)\} - (i-2)d_i\{G_{3,2}(z) - G_{3,1}(z)\} = 0.$$

Mais nous ne les étudierons pas en détail. Il est à noter, néanmoins, que, lorsque $i > 2$, la fonction $G_{2,i}(z)$ vérifie l'équation

$$\tilde{x}(z) = \tilde{x}(z_1) + z^m,$$

pour $m = i - 1$, alors que, *a priori*, on ne pouvait affirmer l'existence de solution holomorphe, dans l'un ou l'autre des deux domaines, que pour $m > i - 1$, car z_n^{i-1} est comparable à $\frac{1}{n}$. Ce cas se présente aussi pour $i = 2$, lorsque $d_1 = 0$.

i étant quelconque, si l'on suppose $d_1 = 0$, et si l'on considère l'équation

$$\tilde{x}(z) = \tilde{x}(z_1) + A(z),$$

où $A(z)$ est une fonction holomorphe à l'origine ou méromorphe, le pôle étant au plus d'ordre $i - 2$, on a dans $S + S' + R'$ une solution formée de la somme d'une fonction vérifiant une équation de même forme, où $A(z)$ est de degré i au moins (étudiée au Chapitre précédent), et d'un polynome

$$\lambda_1 G_{i,1}(z) + \lambda_2 G_{i,2}(z) + \dots + \lambda_{2(i-1)} G_{i,2(i-1)}(z),$$

les λ étant des constantes.

Des considérations analogues s'appliquent à l'autre région.

Expression analytique d'une solution de l'équation d'Abel. — Revenons à la relation

$$-\psi(z_n) + d_1 L z_n - n = -\psi(z) + d_1 L z + F(z) + F(z_1) + \dots + F(z_{n-1}).$$

On en déduit

$$-\psi(z_{n+1}) + d_1 L z_{n+1} - n = -\psi(z_1) + d_1 L z_1 + F(z_1) + \dots + F(z_n),$$

et, par suite

$$\begin{aligned} & -\psi(z_1) + d_1 L z_1 - 1 + \{ -\psi(z_n) + d_1 L z_n - n - [-\psi(z_{n+1}) + d_1 L z_{n+1} - (n+1)] \} \\ & = -\psi(z) + d_1 L z + F(z). \end{aligned}$$

La quantité entre crochets tend vers 0 quand n croît indéfiniment. Donc la série

$$F(z) + F(z_1) + \dots + F(z_n) + \dots$$

définit dans $S + S' + R'$ une fonction holomorphe $\tilde{f}(z)$ telle que la fonction

$$b(z) = -\psi(z) + d_1 Lz + \tilde{f}(z)$$

vérifie l'équation d'Abel,

$$b(z_1) = b(z) + 1;$$

$b(z)$ n'est autre chose que la fonction primitive de $\frac{1}{u(z)}$.

On peut évidemment former, d'une manière semblable, une autre fonction $b(z)$ dans $S' + S'' + R''$. Pour qu'elles soient confondues dans S , il faut et il suffit que

$$\dots F(z_{-n}) + F(z_{-(n-1)}) + \dots + F(z) + \dots + F(z_n) + \dots$$

y soit identiquement nul, ou bien que l'on ait

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \psi(z_{-n}) - \psi(z_n) + d_1 L \frac{z_n}{z_{-n}} - 2n \right\} = 0.$$

C'est une nouvelle forme de la condition trouvée plus haut.

THÉORÈME V. — *Il existe dans $S + S' + R'$ une fonction $b(z)$ vérifiant l'équation*

$$b(z_1) = b(z) + 1.$$

Elle est formée de la somme d'une fonction holomorphe dans cette région, tendant vers 0 avec z , et de l'expression $-\psi(z) + d_1 Lz$.

On peut en définir une autre analogue dans $S + S'' + R''$. Pour qu'elles constituent une seule fonction, la condition, qui est la même qu'au théorème I, peut se mettre sous la forme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{ \psi(z_{-n}) - \psi(z_n) - 2n \} = \text{const.}$$

z étant dans S .

4. *Examen plus approfondi du cas où l'équation (4) admet une solution holomorphe.* — Le cas où ces conditions sont réalisées, c'est-à-dire où l'équation (4) admet une solution holomorphe, est particulièrement intéressant. Reprenons la question dans cette hypothèse.

Supposons donc qu'il existe une fonction u , holomorphe à l'origine, telle que l'on ait

$$(4) \quad u(z) = \frac{u(\varphi)}{\frac{d\varphi}{dz}}.$$

Comme $\frac{dz}{d\varphi} = 1 - igz^{i-1} + \dots$, cette fonction, définie à une constante près, est de la forme

$$u(z) = \frac{1}{h} [c_i z^i + c_{i+1} z^{i+1} + c_{i+2} z^{i+2} + \dots];$$

$\frac{c_i}{h}$ est arbitraire et différent de 0. On en déduit

$$(2)' \quad \frac{df[\varphi]}{d\varphi} u(\varphi) = a \frac{df(z)}{dz} u(z),$$

et l'on est donc conduit à considérer l'équation

$$(5) \quad \frac{df(z)}{f(z)} = \frac{dz}{u(z)} = h \left[\frac{d_i}{z^i} + \frac{d_{i-1}}{z^{i-1}} + \dots + \frac{d_1}{z} + d_0 + e_1 z + e_2 z^2 + \dots \right] dz,$$

où $d_i \neq 0$. On en tire

$$(6) \quad Lf(z) = \lambda - h\psi(z) + h[d_1 Lz + \tilde{f}(z)],$$

λ étant une constante arbitraire, $\tilde{f}(z)$ une fonction holomorphe nulle à l'origine, et $\psi(z)$ désignant encore

$$\frac{d_i}{(i-1)z^{i-1}} + \frac{d_{i-1}}{(i-2)z^{i-2}} + \dots + \frac{d_2}{z}.$$

On a donc

$$(7) \quad f(z) = e^\lambda e^{-h\psi(z)} z^{hd_i} e^{h\tilde{f}(z)}.$$

D'ailleurs, ces fonctions $f(z)$ vérifient l'équation (2). Nous le savons déjà et, de plus, une vérification directe serait ici facile (1).

Si $d_i \neq 0$, une infinité de fonctions $f(z)$ ne sont pas uniformes. Pour fixer les idées, adoptons comme détermination de φ^{hd_i} l'expression z^{hd_i} , multipliée par une quantité ayant 1 pour limite quand z tend vers 0. On aura alors

$$f(\varphi) = e^{hg d_i} f(z).$$

Changer la détermination de φ^{hd_i} , c'est simplement changer le multiplicateur dans l'égalité précédente.

On a en évidence dans l'expression de $f(z)$ la partie uniforme, formée du produit d'une fonction holomorphe, et d'une fonction à point singulier

(1) C'est à l'aide d'une équation analogue à l'équation (5) que M. Grévy a étudié ce problème quand $\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)_0 = 0$.

essentiel $e^{-h\psi(z)}$, et la partie non uniforme z^{hd} . D'ailleurs, en choisissant pour h une valeur de la forme $\frac{p}{d_1}$, p étant un entier positif ou négatif, on obtient une fonction uniforme.

On n'a que des fonctions uniformes, si $d_1 = 0$. Il est facile d'exprimer d_1 en fonction des coefficients de φ . Par exemple, si $i = 2$, et si l'on pose

$$\varphi = z + g_2 z^2 + g_3 z^3 + \dots,$$

il vient

$$d_1 = -d_2 \frac{g_3 - g_2^2}{g_2^2},$$

et toutes les fonctions sont uniformes si $g_3 - g_2^2 = 0$.

Les expressions Lf , qui sont solutions de l'équation d'Abel, se composent de la somme d'une fonction méromorphe et du terme logarithmique $hd_1 Lz$, ce dernier disparaissant aussi avec d_1 . On peut écrire

$$Lf(\varphi) = Lf + hg d_i.$$

Comme d_i est arbitraire, nous prendrons comme précédemment $gd_i = 1$; on aura donc

$$b(z) = -\psi(z) + d_1 Lz + \tilde{f}(z),$$

et l'on désignera par $B(z)$, $e^{b(z)}$, de sorte que

$$f(z) = e^\lambda B^h(z).$$

On saura former les solutions générales des équations d'Abel et de M. Schröder.

Existe-t-il des fonctions uniformes qui restent invariables lorsqu'on effectue la substitution $\varphi(z)$? Si $d_1 = 0$, toute fonction uniforme de $b(z)$, de période 1, répondra à la question. Sinon, il faudra prendre une fonction uniforme de $b(z)$, de périodes 1 et $2\pi d_1 \sqrt{-1}$. Il y a donc une condition de possibilité : d_1 ne doit pas être purement imaginaire et incommensurable avec $\frac{1}{\pi}$. Dans le cas où $i = 2$, cela revient à dire qu'il ne faut pas que

$$\pi \frac{g_3 - g_2^2}{g_2^2} \sqrt{-1}$$

soit réel et irrationnel.

5. *Exemple I.* — Reprenons la substitution $z_1 = \frac{z}{1 - az}$, où a est positif. On a, dans $S + S' + R'$, une solution de l'équation

$$X(z) = X(z_1) + z$$

par la série

$$z + \left\{ z_1 + \frac{1}{a} \right\} + \left\{ z_2 + \frac{1}{2a} \right\} + \dots + \left\{ z_n + \frac{1}{na} \right\} + \dots,$$

et c'est la seule qui tende vers 0 avec z . De même, dans $S + S'' + R''$, on a

$$\left\{ z_{-1} - \frac{1}{a} \right\} + \left\{ z_{-2} - \frac{1}{2a} \right\} + \dots + \left\{ z_{-n} - \frac{1}{na} \right\} + \dots$$

Elles ne coïncident d'ailleurs pas dans S , car leur différence

$$z + \sum \left(\frac{z}{1 - na z} + \frac{1}{na} \right) \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

a l'origine comme point singulier essentiel. On reconnaît l'expression même du développement de $\frac{\pi}{a} \cot \frac{\pi}{az}$ auquel conduit le théorème de Mittag-Leffler.

Exemple II. — Soit $z_1 = z \sqrt[i]{\frac{a'}{az^i + a'}}$, et prenons comme détermination du radical celle qui se réduit à 1 pour $z = 0$. On aura ici

$$b(z) = \frac{a'}{az^i}.$$

Plus généralement, soit

$$A(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_p z^p,$$

et considérons la fonction z_1 définie par la relation

$$A(z_1) z^{\rho+1} - A(z) z_1^{\rho+1} - z^{\rho+1} z_1^{\rho+1} = 0,$$

et dont la partie principale est z . On a

$$b(z) = \frac{A(z)}{z^{\rho+1}}.$$

Exemple III. — a étant un nombre positif, pour fixer les idées, considérons la fonction $z_1 = \sqrt{a^2 + 2az} - a$, holomorphe dans le voisinage de $z = 0$. Ici

$$\left(\frac{dz_1}{dz} \right)_0 = 1, \quad \left(\frac{d^2 z_1}{dz^2} \right)_0 = -\frac{1}{a}.$$

On a

$$-\psi(z) + d_1 Lz = \frac{2a}{z} + \frac{1}{3} Lz.$$

Si l'on se borne aux valeurs réelles de z , on voit que, si z est positif, z_n

tend vers 0 quand n croît indéfiniment. Donc, dans ces conditions,

$$\lim_{n=\infty} n \left\{ -a + \sqrt{-a^2 + 2a\sqrt{\dots + 2a\sqrt{a^2 + 2a\alpha}}} \right\} = 2a.$$

Exemple IV. — Soit $z_1 = e^z - 1$. On a

$$b(z) = \frac{2}{z} - \frac{2}{3} Lz + \dots$$

Si l'on donne à z une valeur négative, assez petite en valeur absolue, z_n tend vers 0. Par suite, nz_n a alors pour limite -2 ; et $n + \frac{2}{z_n} + \frac{2}{3} Lz_n$, la fonction $-b(z)$.

Exemple V. — $z_1 = \sin z$. On a

$$b(z) = -\frac{6}{z^2} + \frac{Lz}{5} + \dots$$

Quand z est réel, z_n tend vers 0 pour n infini. On a

$$\begin{aligned} \lim_{n=\infty} n \sin^2 \sin \dots \sin z &= -6, \\ \lim_{n=\infty} \left[n z_n + \frac{6}{z_n} \right] &= 0, \\ \lim_{n=\infty} \left[n + \frac{6}{z_n^2} - \frac{Lz_n}{5} \right] &= -b(z). \end{aligned}$$

Exemple VI. — $z_1 = L(1 + z)$. Je considère cette substitution dans le voisinage de l'origine

$$b(z) = \frac{2}{z} - \frac{Lz}{3} + \dots$$

Quand z est positif et petit, z_n a 0 pour limite. et l'on a

$$\begin{aligned} \lim_{n=\infty} n L[1 + L[1 + \dots + L(1 + z) \dots]] &= 2, \\ \lim_{n=\infty} \left\{ n - \frac{2}{z_n} + \frac{Lz_n}{3} \right\} &= -b(z). \end{aligned}$$

Exemple VII. — $z_1 = z + F\left(\frac{1}{z}\right)$, $F\left(\frac{1}{z}\right)$ étant holomorphe à l'infini.

Si l'on pose $z = \frac{1}{z'}$, $z_1 = \frac{1}{z'_1}$, on a

$$z'_1 = \frac{z'}{1 + z' F(z')};$$

z'_1 rentre alors dans le type des substitutions qu'on a considérées. On a

donc des fonctions de la forme

$$b(z) = -\psi\left(\frac{1}{z}\right) - d_1 \mathbf{L}z + \tilde{f}\left(\frac{1}{z}\right).$$

Il y a là une généralisation des fonctions périodiques, la substitution étant $z + \mathbf{F}\left(\frac{1}{z}\right)$ au lieu de $z + \omega$.

Remarque générale. — Les solutions des équations fonctionnelles sont définies dans un petit domaine. On peut prolonger les fonctions ainsi obtenues dans les régions dont les points viennent, après un nombre fini de transformations, tomber dans le domaine primitif. Ceci suppose, bien entendu, que dans ces nouvelles régions, les expressions données qui figurent dans les équations y soient encore définies. Par exemple, soit Γ un cercle à l'intérieur duquel existe une fonction $u(z)$, et considérons une petite région dont la première transformée soit à l'intérieur de Γ . La valeur prolongée de $u(z)$ est $\frac{u(\varphi)}{\frac{d\varphi}{dz}}$. Le problème de l'extension des solutions se

ramène à l'étude des divisions du plan en parties se transformant les unes dans les autres, problème sans doute impraticable en général, si l'on suppose la fonction de substitution donnée par ses développements en série. Mais il est parfois possible d'étendre dans une assez grande région les fonctions dont on a établi l'existence, grâce à des circonstances particulières. En voici un cas :

Exemple VIII. — On donne $z_1 = z + \frac{k^2}{z}$. On en déduit, au moyen du changement de variables de l'exemple précédent,

$$b(z) = \frac{z^2}{2k^2} + \mathbf{L}z + \tilde{f}(z),$$

$$\mathbf{B}(z) = z e^{\frac{z^2}{2k^2}} e^{\tilde{f}(z)}.$$

Si l'on considère un très grand cercle, la partie extérieure se compose de deux régions empiétant l'une sur l'autre et où existent respectivement deux fonctions $\tilde{f}(z)$ holomorphes et peut-être distinctes.

Le lieu des points pour lesquels $|z_1| = |z|$ est l'hyperbole

$$(H) \quad 2(x^2 - y^2) + k^2 = 0$$

(on a posé $z = x + y\sqrt{-1}$).

Si l'on considère la lemniscate

$$(C) \quad 2(x^2 + y^2)^2 + k^2(x^2 - y^2) = 0,$$

qui va aboutir aux sommets de H, les points de la région extérieure à H et à C jouissent des propriétés suivantes :

1° Le transformé P' d'un point P de la région appartient à la même région ;

2° Si l'on se donne un cercle de très grand rayon, et si l'on assujettit P à lui être intérieur, le rapport des distances à l'origine de P' et de P est supérieur à un nombre fixe plus grand que 1, pourvu cependant qu'on laisse de côté une bande très étroite longeant l'hyperbole. Il en résulte que les fonctions $b(z)$ et $B(z)$ peuvent être prolongées à l'extérieur de H et de G.

De plus, on peut déterminer un cercle Γ , de rayon assez petit pour que, son centre étant à l'origine, les transformés de tous ses points se trouvent au delà du cercle à l'extérieur duquel les fonctions étaient primitivement définies. Donc, ce cercle Γ , les portions du plan extérieur à H, à G et au grand cercle dont on vient de parler, forment une région R dans laquelle existent les fonctions $b(z)$ et $B(z)$.

6. *Cas où la dérivée a un argument commensurable avec 2π et un module égal à 1.* — Nous allons considérer à présent une substitution

$$z_1 = \theta_1(z) = l_1 z + l_j z^j + \dots,$$

où $|l_i| = 1$, l'argument de l_i étant commensurable avec 2π . Je suppose que l_i soit racine primitive de l'équation

$$x^n - 1 = 0.$$

On a

$$\varphi(z) = \theta_n(z) = z + l_j l_1^{n-1} [1 + l_1^{j-1} + l_1^{2(j-1)} + \dots + l_1^{(n-1)(j-1)}] z^j + \dots$$

Le coefficient de z^j est nul, à moins que $l_1^{j-1} = 1$, c'est-à-dire à moins que $j - 1$ ne soit un multiple de n . Donc

$$\varphi(z) = z + g_i z^i + \dots \quad (i \geq j).$$

Je suppose qu'il existe une fonction $u(z)$, holomorphe à l'origine, telle que

$$(4) \quad u[\varphi(z)] = u(z) \frac{d\varphi}{dz}.$$

Posons

$$u(\theta_1) = l_1^{i-1} \frac{d\theta_1}{dz} u + w.$$

On en déduit

$$w \frac{d\theta_n}{d\theta} l_1^{(i-1)(n-1)} + w_1 \frac{d\theta_n}{d\theta_2} l_1^{(i-1)(n-2)} + \dots + w_{n-2} \frac{d\theta_n}{d\theta_{n-1}} l_1^{i-1} + w_{n-1} = 0,$$

d'où

$$w \frac{d\theta_{n+1}}{d\theta_1} = w_n.$$

Comme, en vertu de son équation de définition, w n'a pas de terme en z^i , il est identiquement nul. Ainsi donc, on a l'équation

$$(12) \quad u(\theta_1) = l_1^{i-1} u \frac{d\theta_1}{dz}.$$

Elle est analogue à l'équation (4).

7. *Étude d'une équation différentielle.* — Avant d'aller plus loin, considérons la relation

$$(13) \quad k \frac{dy}{u(y)} = \frac{dz}{u(z)},$$

à laquelle nous sommes naturellement conduits, $\frac{1}{u(z)}$ étant toujours de la forme

$$\frac{d_i}{z^i} + \frac{d_{i-1}}{z^{i-1}} + \dots + \frac{d_1}{z} + d_0 + e_1 z + e_2 z^2 + \dots \quad (d_i \neq 0).$$

Cherchons les fonctions y de z , holomorphes à l'origine, leur dérivée première n'y étant pas nulle. La solution générale est fournie par la relation

$$(14) \quad k[-\psi(y) + d_1 Ly + \mathcal{F}(y)] + \psi(z) - d_1 Lz - \mathcal{F}(z) = C,$$

C étant une constante arbitraire. Posons

$$(15) \quad \frac{1}{y} = \frac{1}{az} [1 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b_{i-2} z^{i-2} + \eta(z) z^{i-1}],$$

les b étant des constantes et $\eta(z)$ une fonction holomorphe inconnue.

Soit d'abord $k = 1$. On a à exprimer que $\psi(y) - \psi(z)$ est holomorphe à l'origine, ce qui exige d'abord $a^{i-1} = k$. Si $a = 1$, on constate que b_1 ,

b_2, \dots, b_{i-2} doivent être nuls, et la valeur de $\eta(o)$ est définie par la condition

$$d_i \eta(o) + C = o.$$

Il existe donc une fonction y fournie par l'égalité

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{z} [1 + \eta(z) z^{i-1}],$$

$\eta(o)$ étant arbitraire. Si $\eta(o) = o$, on a simplement $y = z$.

Si l'on prend pour a une autre racine $i - 1^{\text{ième}}$ de 1 , la détermination de b_1, b_2, \dots, b_{i-2} s'effectue comme précédemment, et ces quantités ne sont plus nulles en général. On adoptera une certaine détermination pour La , et $\eta(o)$ sera arbitraire comme C . Mais, si l'on prend la fonction y qui correspond à $C = o$, elle jouit de cette propriété que $y_{i-1} = z$, comme le montre l'équation (14). On a d'ailleurs

$$d_i \eta(o) - d_1 La + C = o.$$

Dans les deux cas qui viennent d'être examinés, c'est seulement lorsque $C = o$ que y ou une de ses itératives se réduit à z .

Soit maintenant $k \neq 1$. Il ne peut y avoir de solution holomorphe que si $d_i = o$, ce que nous supposons. Il existe alors une solution pour laquelle $\eta(o)$ est arbitraire.

8. *Conclusion relative au cas énoncé plus haut.* — Cela posé, revenons à la première question et à l'équation (12). Je dis que, si $\varphi(z)$ ne se réduit pas à z , l_1^{i-1} est égal à 1 . En effet, de l'équation (12), on déduit une fonction $b(z)$ telle que

$$\begin{aligned} l_1^{i-1} b(\theta_1) &= b(z) + C, \\ l_1^{i-1} b(\theta_2) &= b(\theta_1) + C, \\ &\dots\dots\dots, \\ l_1^{i-1} b(\theta_n) &= b(\theta_{n-1}) + C, \end{aligned}$$

et, par suite,

$$(16) \quad b(z_1) = b(z) + C[1 + l_1^{i-1} + \dots + l_1^{(i-1)(n-1)}].$$

C n'était pas nul en vertu d'une remarque précédente et de l'hypothèse que $\varphi(z)$ est différent de z . Son coefficient dans l'équation (16) ne peut être nul, en raison de la même remarque et de la même hypothèse. Donc $l_1^{i-1} = 1$, $i - 1$ est un multiple de n .

Il résulte de là que la fonction $b(z)$ donne une solution de l'équation d'Abel pour θ . En posant

$$\beta(z) = \frac{b(z)}{C},$$

on aura

$$\beta(\theta) = \beta(z) + 1.$$

Si l'on pose

$$\mathfrak{b}(z) = e^{\beta(z)},$$

$\mathfrak{b}(z)$ et $\beta(z)$ joueront, par rapport à $\theta(z)$, le même rôle que $B(z)$ et $b(z)$ par rapport à $\varphi(z)$.

Remarque. — On a laissé de côté le cas où $\varphi(z) = z$. La fonction $u(z)$ est alors arbitraire, et ce que nous avons dit ne subsiste plus. Mais prenons une fonction symétrique quelconque de z , $\theta_1(z)$, $\theta_2(z)$, ..., $\theta_{n-1}(z)$, et ne se réduisant pas à une constante; elle restera invariable pour la substitution $\theta_1(z)$. Par exemple, choisissons

$$F = z\theta_1\theta_2\dots\theta_{n-1}.$$

Les racines $n^{\text{ièmes}}$, qui sont holomorphes à l'origine, se permutent circulairement par la même substitution. Soit G l'une d'entre elles. On a

$$(17) \quad G(\theta_1) = l_1 G(z).$$

Elle satisfait à l'équation de M. Schröder. On trouve donc ici, sans difficulté, les solutions générales de cette équation et de celle d'Abel.

Pour former de pareilles substitutions θ_1 , il suffit de se donner arbitrairement une fonction $G(z)$, $\left[\left(\frac{dG(z)}{dz}\right)_0 \neq 0\right]$ et de résoudre l'équation (17). On remarquera l'analogie qui existe entre ces fonctions θ et les racines de l'unité.

9. *Remarque sur le cas précédent.* — On peut s'affranchir de la restriction faite au début du n° 6. Il existe dans la région $S + S' + R'$ une fonction $u(z)$ de la forme $z^i v(z)$ où $v(z)$ est holomorphe et tend vers 0 avec z , qui vérifie l'équation (4). Je dis que *pour des valeurs assez petites de z , $u(\theta_1)$ est défini en même temps que $u(z)$* . En effet, il ne pourrait y avoir doute que si l'argument α de l_1 était un multiple impair de l'angle ω de deux tangentes consécutives aux rosaces limites relatives à φ (1).

(1) Voir le Chapitre III.

Cela n'est pas : z étant dans le domaine considéré, supposons qu'on fasse croître p indéfiniment dans les expressions

$$\varphi_{pn}(z), \quad \varphi_{p(n+1)}(z), \quad \dots, \quad \varphi_{p(n+n-1)}(z),$$

comme elles peuvent s'écrire

$$\varphi_{pn}(z), \quad \varphi_{pn}(z_1), \quad \dots, \quad \varphi_{pn}(z_{n-1});$$

elles représentent des transformés directs de z, z_1, \dots, z_{n-1} qui tendent vers 0. L'argument du rapport de deux consécutifs d'entre eux $\frac{\varphi_{pn}(z_1)}{\varphi_{pn}(z)}$, c'est-à-dire de $\frac{\theta_1(z_{pn})}{z_{pn}}$, tend donc à la fois vers α et vers un multiple *pair* de ω . La fonction ω est donc encore définie et l'on a bien

$$\omega \frac{d\theta_{n+1}}{d\theta_1} = \omega_n.$$

Or $\frac{\omega}{z^i}$ tendrait vers 0 avec z , comme étant la différence de deux fonctions qui tendent vers 1. Donc, en vertu d'une remarque faite au n° 2, $\omega(z)$ est identiquement nul. On a donc encore

$$(14) \quad b(z_1) = b(z) + C[1 + l_1^{i-1} + \dots + l_1^{(i-1)(n-1)}].$$

Or, on peut démontrer directement que $i - 1$ est un multiple de n . En effet, les n points considérés plus haut

$$\varphi_{pn}(z), \quad \varphi_{pn}(z_1), \quad \dots, \quad \varphi_{pn}(z_{n-1}),$$

sont infiniment voisins de n demi-droites tangentes aux arcs des rosaces limites, sens direct. Si toutes ces demi-droites ont été utilisées, $n = i - 1$; sinon, en opérant de nouveau en partant d'un point voisin de celles qui restent, et cela autant de fois qu'il sera nécessaire, on voit que $i - 1$ est multiple de n .

Le raisonnement se poursuit donc comme plus haut. A chacune des deux régions fondamentales correspondent des fonctions $\beta(z)$ et $\mathfrak{w}(z)$ qui pourront, bien entendu, être confondues.



CHAPITRE V.

PROBLÈME DE L'ITÉRATION DANS LE CAS EXCEPTIONNEL DÉJÀ CONSIDÉRÉ.
TRAJECTOIRE D'UNE FONCTION.

1. *Itération de la fonction $\varphi(z)$.* — On sait que le problème de l'itération d'une fonction $\varphi(z)$ consiste dans la détermination, pour chaque valeur réelle de t , d'une fonction $\varphi_t(z)$ telle que l'on ait

$$\varphi_t[\psi_t(z)] = \varphi_{t+t'}(z).$$

On pose

$$\varphi_1(z) = \varphi(z) \quad \text{et} \quad \varphi_0(z) = z.$$

Nous considérerons toujours les fonctions $\varphi(z)$ de la forme $z + g_i z^i + \dots$

Prenons dans la région $S + S' + R'$ un point z' . On peut, dans la même région, décrire autour de z' un petit contour C tel qu'il n'y ait ni sur lui, ni à son intérieur, d'autre point z pour lequel on ait $b(z) = b(z')$. z' est, de plus, racine simple de l'équation précédente, puisque $\frac{db(z)}{dz}$ est de la forme $\frac{1}{z^i \varphi(z)}$, $\varphi(z)$ étant holomorphe. Si donc on fait décrire au point z le contour C , d'une part le module de $b(z) - b(z')$ aura un minimum différent de 0; d'autre part, son argument variera de 2π . Soit maintenant l'expression $b(z) - b(z') - t$. Son argument variera aussi de 2π , si t est assez petit en valeur absolue. Il en résulte que l'équation

$$b[\varphi_t(z)] = b(z) + t$$

définit une itérative $\varphi_t(z)$, en supposant que t soit une quantité réelle de module inférieur à un certain nombre T . On peut même supposer T fixe pour tous les points z à l'intérieur d'une portion P de la région considérée *de laquelle on aura déduit une zone limite.*

Or, si l'on prend les transformés z'_1, z'_2, \dots, z'_n des points tels que z' , et ceux C_1, C_2, \dots, C_n des contours tels que C , le nombre T reste le même pour tous, car le minimum du module de $b(z) - b(z')$ n'a pas varié de l'un à l'autre. Donc, on peut décrire un contour intérieur à celui de $S + S' + R'$, aussi voisin de celui-ci que l'on veut, passant par l'origine,

tel que tous les transformés directs des points intérieurs soient encore à son intérieur, et définissant enfin une région I pour laquelle T est invariable.

Cela posé, partons d'un point z' de I, et faisons varier t , nous obtenons un point z qui décrit une courbe. Lorsque, étant arrivés en un point z'' , nous avons atteint la valeur limite T, nous recommençons à partir de ce point, et nous pourrions ainsi prolonger la courbe tant que nous n'aurons pas quitté le domaine I. Je dis que, lorsque t varie dans le même sens, le point se déplace dans un sens bien déterminé. En effet, $u(z)$ ne s'annule qu'en o. D'ailleurs, pour un certain sens, on doit obtenir les transformés directs. Donc, lorsque t croît, et il pourra croître indéfiniment, le mobile qui décrit la courbe passe par tous les transformés des points qu'il a une fois rencontrés. Le sens ainsi défini, et qui est le même pour des courbes infiniment voisines, est le sens direct.

Ces courbes peuvent être prolongées dans le sens inverse jusqu'à l'origine, lorsqu'elles sont situées dans S, au moyen de la transformation $\varphi_{-1}(z)$ indéfiniment répétée. C'est le même procédé qui sert à prolonger, par exemple, les fonctions $u(z)$ et $b(z)$ relatives à $S + S' + R'$ dans la région S'' .

On peut raisonner de même relativement à la région $S + S'' + R''$. Par suite, on a défini : 1° pour chaque valeur réelle de t une itérative au moins φ_t dont l'ensemble satisfait évidemment aux conditions posées au début; 2° des courbes passant par les transformés d'un point.

Nous allons reprendre la question des itératives en supposant $u(z)$ holomorphe en o, et nous ne chercherons que des fonctions holomorphes en ce point.

2. *Cas où une fonction u est holomorphe en o.* — 1° p étant un entier positif, soit à déterminer φ_p . On sait qu'il existe une fonction φ_p , et on peut la former. Si l'on connaît $b(z)$, on a

$$b[\varphi_p] = b(z) + p,$$

équation qui définit φ_p , pourvu qu'on pose la condition

$$\left(\frac{d\varphi_p}{dz}\right)_0 = 1 \quad (\text{Chap. IV, n° 7}).$$

2° Cherchons $\varphi_{\frac{1}{p}}$. C'est chercher une fonction θ , telle que

$$\theta_p(z) = \varphi(z).$$

Elle vérifie nécessairement une équation de la forme

$$b(\theta) = b(z) + C,$$

d'où l'on tire

$$b(\theta_p) = b(z) + pC;$$

θ_p sera précisément φ si $pC = 1$, et si de plus $\left(\frac{d\theta_p}{dz}\right)_0 = 1$, c'est-à-dire si l'on a pris (même numéro) $a^p = 1$. On doit de plus avoir $a^{i-1} = 1$. On peut toujours satisfaire à ces deux conditions en prenant $a = 1$. Donc il existe une fonction $\varphi_{\frac{1}{p}}$ commençant par z et définie par l'équation

$$(1) \quad b\left(\varphi_{\frac{1}{p}}\right) = b(z) + \frac{1}{p}.$$

Il n'y a pas d'autre solution, si p et $i - 1$ sont premiers entre eux. Dans le cas contraire, on aura d'autres fonctions $\varphi_{\frac{1}{p}}$ définies par cette même équation (1) et commençant par az ($a \neq 1$). Le nombre total des solutions est égal au plus grand commun diviseur de p et de $i - 1$. En particulier, si $i = 2$, ce qui est le cas général, il n'y a jamais qu'une solution.

3° p et q étant deux entiers positifs, premiers entre eux, déterminons $\varphi_{\frac{p}{q}}$, c'est-à-dire une fonction θ telle

$$\theta_q(z) = \varphi_p(z).$$

On devra avoir

$$b(\theta) = b(z) + C$$

et

$$b(\theta_q) = b(z) + qC.$$

Mais

$$b(\varphi_p) = b(z) + p.$$

Il faut, par suite, que $C = \frac{p}{q}$ et de plus que $\left(\frac{d\theta_q}{dz}\right)_0 = 1$. Comme précédemment, on pourra encore prendre $a = 1$, et il y aura d'autres solutions si q et $i - 1$ ne sont pas premiers entre eux.

4° t étant un nombre irrationnel positif, on posera, en général,

$$(2) \quad b(\varphi_t) = b(z) + t,$$

en choisissant $a = 1$.

Enfin, si t est négatif, on doit avoir

$$\varphi_{-t}(\varphi_t) = z.$$

E.64

L. LEAU.

Donc

$$b(z) = b(\varphi_t) - t,$$

et, par suite,

$$b(\varphi_t) = b(z) + t.$$

De plus, si

$$\varphi_{-t} = az + \dots,$$

il faudra prendre

$$\varphi_t = -az + \dots$$

Ainsi donc, c'est l'équation (2) qui servira à définir φ_t pour toutes les valeurs réelles de t ; et l'on prendra $a = 1$, sauf, si l'on veut, dans les cas indiqués plus haut. t' et t'' étant alors deux valeurs quelconques de t , on déduit de l'équation (2)

$$b[\varphi_t(\varphi_{t'})] = b[\varphi_{t+t'}],$$

et par suite

$$\varphi_t(\varphi_{t'}) = \varphi_{t+t'},$$

en vertu des hypothèses faites.

Remarque I. — Étant donnée une fraction $\frac{p}{q}$, nous l'avons supposée réduite à sa plus simple expression pour définir $\varphi_{\frac{p}{q}}$; c'est que la détermination de $\varphi_{\frac{p}{q}}$ par l'égalité

$$\left(\frac{\varphi_p}{q}\right)_q = \varphi_p$$

conduirait à un plus ou moins grand nombre de relations, suivant la valeur de q . Ainsi, si q est premier avec $i - 1$, $\varphi_{\frac{p}{q}}$ n'aurait qu'une valeur, tandis que $\varphi_{\frac{p(i-1)}{q(i-1)}}$ en aurait $i - 2$ autres en dehors de celle-là.

Remarque II. — Il n'est pas étonnant que, lorsqu'on ne faisait pas d'hypothèse sur $u(z)$, on n'ait trouvé qu'une itérative pour chaque valeur de t dans le domaine I; car, lorsqu'il y en a plusieurs, leurs valeurs, pour t très petit même, ne sont pas infiniment voisines.

3. *Trajectoires.* — La notion des trajectoires d'une fonction $\varphi(z)$ semble intéressante pour l'étude des équations fonctionnelles où elle figure comme fonction de substitution. Il faut entendre par le mot *trajectoires* des courbes telles que tous les transformés par φ , d'un point quelconque pris sur l'une d'entre elles, soient encore sur cette même courbe. On peut

encore dire qu'elles sont individuellement invariantes par la substitution donnée.

Nous allons chercher à définir un faisceau de trajectoires dans le voisinage d'un point racine que l'on placera à l'origine, en écartant le cas où, $\left| \frac{d\varphi}{dz} \right|_0$ étant égal à 1, l'argument serait incommensurable avec 2π .

Premier cas : $\left(\frac{d\varphi}{dz} \right)_0 = a$ n'est ni nul, ni égal à 1 en module. M. Koenigs (1) a établi la formule d'itération

$$(3) \quad \mathbf{B}(\varphi_t) = a^t \mathbf{B}(z),$$

où $\mathbf{B}(z)$ est de la forme $z + c_2 z^2 + \dots$

Considérons un cercle \mathbf{C} ayant son centre à l'origine, à l'intérieur duquel $\mathbf{B}(z)$ soit holomorphe et ne s'annule qu'en \mathbf{O} , et $\frac{d\mathbf{B}(z)}{dz}$ n'ait pas de racine. Adoptons une détermination pour $\mathbf{L}a$.

Si l'on prend un point z à l'intérieur de \mathbf{C} , l'équation (3) définit une fonction φ_t holomorphe de t au voisinage de $t = 0$, où elle se réduit à z .

On a

$$z_t = z + \mathbf{L}a \frac{\mathbf{B}(z)}{\frac{d\mathbf{B}(z)}{dz}} t + \dots,$$

et l'on peut construire la courbe ainsi définie dans le voisinage de z . Prenant alors sur elle un point z' , on raisonne sur ce point comme sur le premier et l'on pourra donc prolonger la courbe indéfiniment, tant qu'on ne sortira pas de \mathbf{C} . On aura ainsi une trajectoire de φ , ou du moins une portion de trajectoire.

Si $\mathbf{L}a$ est réel, on obtient un faisceau de courbes passant toutes par l'origine qui est leur seul point commun.

Si $\mathbf{L}a$ est imaginaire ces courbes, qui ne se coupent pas, ont l'origine comme point asymptote.

Pour z voisin de 0 , on a approximativement

$$\left(\frac{dz_t}{dt} \right)_0 = z \mathbf{L}a.$$

Par suite, la forme limite du faisceau est, dans le premier cas, un faisceau

(1) *Annales de l'École Normale*, 1885.

de droites passant par 0; dans le second, un faisceau de spirales logarithmiques. Cette forme limite est réalisée pour les substitutions telles que

$$z_1 = bz.$$

Remarque. — Comme il existe pour La une infinité de déterminations, nous avons obtenu une infinité de faisceaux de trajectoires. Ce sont les trajectoires des groupes de transformations définis par l'équation (3). On peut en trouver bien d'autres systèmes. Il suffit pour cela de considérer l'équation

$$(4) \quad \mathbf{B}(\varphi_t) = a^t \mathbf{B}(z) + \mathbf{F}(z, t),$$

où \mathbf{F} s'annule pour toutes les valeurs entières et positives de t . Cette remarque s'applique aussi aux autres cas. Mais nous considérerons toujours comme trajectoires principales celles qu'on définit par les formules d'itération.

Deuxième cas. — Les dérivées de φ sont nulles jusqu'à l'ordre i exclusivement, à l'origine. M. Grévy (1) a démontré l'existence d'une fonction $u(z)$ nulle à l'origine, qui est racine simple et où elle est holomorphe, telle que l'on ait

$$(5) \quad \frac{d\varphi(z)}{u(\varphi)} = i \frac{dz}{u(z)}.$$

On en déduit, par des raisonnements analogues à ceux du Chapitre précédent, qu'on peut trouver une fonction $f(z)$, intégrale de $\frac{1}{u(z)}$ à un facteur constant près, qui jouit des propriétés suivantes :

1° On a

$$f(\varphi) - if(z) = 1;$$

2° L'équation

$$f(y) - pf(z) = C,$$

où C est une constante et p un entier positif, définit une fonction y , holomorphe à l'origine, qui est racine d'ordre p ;

3° L'égalité

$$(6) \quad f(\varphi_t) - i^t f(z) = \frac{i^t - 1}{i - 1}$$

fournit la formule d'itération pour φ .

Il en résulte que l'équation (6) permettra de construire, à l'intérieur d'un

(1) *Thèse*, p. 41.

certain cercle C , les faisceaux de trajectoires principales. Il est naturel de considérer ici spécialement celui qui correspond à la valeur réelle de Li . On a

$$\left(\frac{dz_t}{dt}\right)_0 = Li \frac{f(z) + \frac{1}{i-1}}{\frac{df(z)}{dz}}.$$

On en conclut les mêmes propriétés que plus haut pour ces courbes, au sujet de leur prolongement.

Troisième cas : $\left[\frac{d\varphi(z)}{dz}\right]_0 = 1$. — Nous conservons les notations du Chapitre IV.

Nous avons déjà vu que, dans le domaine I , une équation

$$(7) \quad b[\varphi_t] = b(z) + t$$

définit une fonction φ_t holomorphe de z et de t . Nous savons que les trajectoires peuvent être (pour celles situées dans S) prolongées dans le sens inverse jusqu'à l'origine.

On peut opérer de même dans le domaine analogue à I et que j'appelle I' . On obtient ainsi deux faisceaux de trajectoires [pouvant être définis d'une manière unique, si les deux fonctions $b(z)$ coïncident] et qui, dans R , sont telles que lorsque deux courbes des deux faisceaux ont un point commun, elles ont aussi en commun tous ses transformés directs et inverses.

On a

$$\left(\frac{d\varphi_t}{dt}\right)_{t=0} = u(z).$$

Les trajectoires ont la forme de rosaces à $2(i-1)$ branches (du moins, celles qui sont entièrement à l'intérieur du cercle fondamental), qui se coupent à l'origine sous des angles égaux; les branches des différentes trajectoires sont tangentes entre elles en ce point; celles d'un même faisceau s'enveloppent les unes les autres. On peut partir de courbes d'amplitude aussi faible que l'on veut; on arrive progressivement à des courbes tangentes à C ; puis on ne trouve plus que des portions de trajectoires arrêtées au cercle limite.

Pour z voisin de o , on peut prendre, quel que soit le faisceau,

$$\left(\frac{d\varphi_t}{dt}\right)_{t=0} = c_i z^i.$$

En coordonnées polaires, l'équation de ces courbes est

$$(8) \quad \rho^{i-1} = \pm k \sin(i-1)(\omega - \alpha).$$

Nous savons que l'on trouve ces courbes en partant de

$$z_1^{i-1} = \frac{z^{i-1}}{1 - \alpha z^{i-1}}.$$

Il est à remarquer que les régions R, R', R'' sont délimitées au moyen des trajectoires.

Quatrième cas : $\left| \frac{d\varphi(z)}{dz} \right|_0 = 1$, l'argument étant commensurable avec 2π .

En répétant n fois la substitution φ , on obtient une substitution $\Phi(z)$ rentrant dans le type précédent.

Les transformés d'un point z sont de la forme

$$\Phi_k(z), \quad \Phi_k(z_1), \quad \dots, \quad \Phi_k(z_{n-1}),$$

k étant un entier positif ou négatif. Donc, il suffit de prendre, relativement à Φ , l'ensemble des trajectoires passant par les points z, z_1, \dots, z_{n-1} pour avoir une trajectoire relative à φ .

4. *Introduction des faisceaux isothermes.* — Dans les différents cas examinés, on a trouvé une fonction analytique $b(z)$, telle que

$$b[\varphi(z)] = K b(z) + 1,$$

et les trajectoires sont définies par

$$b(\varphi_t) = K^t b(z) + \frac{K^t - 1}{K - 1}.$$

En général, $K = 1$ et la seconde formule se réduit à

$$b(\varphi_t) = b(z) + t.$$

Posons

$$b(z) = Z = X + Y\sqrt{-1}$$

et

$$b(\varphi) = Z_1 = X_1 + Y_1\sqrt{-1}.$$

On a

$$X_1 = KX + 1,$$

$$Y_1 = KY$$

et

$$X_t = K^t X + \frac{K^t - 1}{K - 1},$$

$$Y_t = K^t Y.$$

Si $K = 1$, les trajectoires sont maintenant les parallèles à l'axe des X ; elles forment un système isotherme coupant individuellement sous un angle constant le réseau orthogonal et isotherme formé par les parallèles aux axes de coordonnées et obtenu en égalant à des constantes les parties réelles et imaginaires de Z .

Si K est différent de 1 (entier positif), les trajectoires jouissent des mêmes propriétés : ces lignes sont des droites passant par un point fixe de l'axe des X .

Or, si l'on effectue une transformation analytique, un faisceau isotherme est transformé en un faisceau de même nature. Donc :

THÉORÈME I. — *Si l'on considère le réseau orthogonal et isotherme obtenu en égalant à des constantes les parties réelles et imaginaires de $b(z)$, les trajectoires de la fonction φ constituent un système isotherme, dont les courbes coupent individuellement sous un angle constant celles de chaque famille du réseau. Cet angle reste généralement invariable ($K = 1$), quand on passe d'une trajectoire à une autre. De plus, la transformation φ , et chacune de ses itératives, conserve le réseau défini par $b(z)$.*

5. Il est naturel de chercher si les trajectoires d'une fonction φ forment l'unique système d'isothermes qui reste invariant, lorsqu'on effectue les transformations du groupe continu relatif à $\varphi(z)$.

En effectuant le même changement de variables que plus haut, et mettant l'équation des faisceaux cherchés sous la forme

$$X + G(Y) = \text{const.},$$

on trouve, par un calcul simple, si $K = 1$,

$$\frac{dG(Y)}{dY} = \text{tang } a(Y - b),$$

a et b étant des constantes arbitraires; et si $K \neq 1$, on a, entre autres,

$$G(Y) = aY,$$

a étant encore arbitraire.

Une autre question se présente. Étant donné le réseau orthogonal et isotherme défini en égalant à des constantes les parties réelles et imaginaires d'une fonction $f(z)$, quelles sont les substitutions par rapport auxquelles il est invariant?

En transformant encore le réseau dans le réseau des parallèles aux axes, on trouve facilement que les substitutions cherchées vérifient l'équation

$$f(z_1) = af(z) + b,$$

où a et b sont des constantes, la première réelle.

Inversement, si la substitution z_1 est donnée, l'équation précédente définit les fonctions $f(z)$ correspondantes.

Considérons, en particulier, le cas où $z_1 = z + \omega$ (qui rentre dans ceux qu'on a examinés). On aura, en posant $f(z) + A = F(z)$

$$F(z + \omega) = aF(z) + b + A(1 - a).$$

Si $a \neq 1$, on peut prendre $b + A(1 - a) = 0$, et l'on a

$$F(z + \omega) = aF(z),$$

et, si $a = 1$,

$$f(z + \omega) = f(z) + b;$$

de sorte que les fonctions

$$LF(z) - \frac{La}{\omega}z,$$

dans le premier cas, et

$$f(z) - \frac{b}{\omega}z$$

dans le second, sont des fonctions de période ω .

Exemple. — On considère le réseau formé des hyperboles équilatères qui ont les axes de coordonnées pour axes ou pour asymptotes. Il s'obtient en partant de $f(z) = z^2$. Donc les substitutions qui le conservent sont définies par l'équation (1)

$$z_1^2 = az^2 + b,$$

où a est réel. Si b est nul, on a simplement une transformation homothétique par rapport à l'origine. Si $a = 1$, z^2 joue le rôle de la fonction $b(z)$ du Chapitre précédent. Si $a \neq 1$, il existe une constante A telle que $z^2 + A$ vérifie l'équation de M. Schröder.

(1) M. Königs a considéré cet exemple de substitution.

tions de la forme

$$\begin{aligned} x_1^{(2)} &= a_{11}^{(1)} x_1 + \dots + a_{1n}^{(1)} x_n, \\ &\dots\dots\dots, \\ x_n^{(2)} &= a_{n1}^{(1)} x_1 + \dots + a_{nn}^{(1)} x_n, \end{aligned}$$

en posant $f^{(p)}(x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}) = f^{(p+1)}(x_1, \dots, x_n)$; et les modules des $a^{(1)}$ sont encore inférieurs à $\frac{1}{n}$.

D'une manière générale, cette condition est satisfaite à la $p^{\text{ième}}$ substitution obtenue

$$\begin{aligned} x_1^{(p)} &= a_{11}^{(p-1)} x_1 + \dots + a_{1n}^{(p-1)} x_n, \\ &\dots\dots\dots, \\ x_n^{(p)} &= a_{n1}^{(p-1)} x_1 + \dots + a_{nn}^{(p-1)} x_n. \end{aligned}$$

Or on peut trouver n formes linéaires distinctes X_1, X_2, \dots, X_n , telles que

$$X_1^{(1)} = s_1 X_1, \quad \dots, \quad X_n^{(1)} = s_n X_n.$$

On en déduit

$$X_1^{(p)} = s_1^p X_1, \quad \dots, \quad X_n^{(p)} = s_n^p X_n,$$

de sorte que les racines de l'équation caractéristique relative à la $p^{\text{ième}}$ transformation, $\Delta^{(p)}(s) = 0$, sont s_1^p, \dots, s_n^p .

Si l'une des quantités s_1, \dots, s_n avait un module plus grand que 1, une racine de $\Delta^{(p)}(s) = 0$ croîtrait indéfiniment avec p , ce qui est impossible.

Cas étendu où l'on peut appliquer le théorème fondamental des Chapitres I et II. — Ces deux propriétés établies, il résulte de la première que $\Delta_\alpha(k)$ ne sera jamais nul, si l'on n'a aucune relation de la forme

$$(5) \quad k = s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_2} \dots s_n^{\alpha_n},$$

où les α_i sont des entiers positifs ou nuls de somme plus grande que 1.

Dans cette hypothèse, nous pouvons appliquer le théorème fondamental du Chapitre I [et il existera donc une relation holomorphe de l'équation (2) relative à k] si tous les a sont en valeur absolue inférieurs à $\frac{1}{n}$, ou si, tous les a_{pq} étant nuls pour $p \neq q$, les a_{pp} (c'est-à-dire s_1, s_2, \dots, s_n) sont d'un module inférieur à 1. En particulier, toutes les racines de l'équation caractéristique pourront être distinctes et satisfaire aux conditions précédentes. Les n solutions dont on disposera alors seront indépendantes. Si l'on admet pour un instant, ce qui sera prochainement établi, qu'on peut effectuer un changement linéaire des variables de manière que les nouvelles quantités a soient nulles sauf les a_{pp} , ce fait devient évident.

On peut alors choisir les fonctions trouvées B_1, B_2, \dots, B_n comme variables. Toute autre solution est alors de la forme

$$B_1^{\beta_1} B_2^{\beta_2} \dots B_n^{\beta_n} \mathcal{F}(x_1, \dots, x_n),$$

avec la valeur de $k : s_1^{\beta_1} \dots s_n^{\beta_n}$; \mathcal{F} désigne une fonction quelconque restant invariable par la substitution (1). Posons

$$\frac{LB_1}{Ls_1} = b_1, \quad \dots, \quad \frac{LB_n}{Ls_n} = b_n;$$

on a

$$b_1^{(1)} = 1 + b_1, \quad \dots, \quad b_n^{(1)} = 1 + b_n.$$

Toute solution de l'équation d'Abel s'obtient par la formule

$$b_1 + \Omega(b_1, b_2, \dots, b_n),$$

Ω étant une fonction quelconque qui demeure invariable quand on ajoute 1 à tous ses arguments. L'expression \mathcal{F} n'est autre qu'une pareille fonction Ω . Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Premier résultat.

THÉORÈME I. — *Si les racines de l'équation caractéristique sont différentes de 0 et ne vérifient aucune des relations*

$$s_i = s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_2} \dots s_n^{\alpha_n},$$

où les α sont des entiers positifs ou nuls et si, de plus, les modules de s_1, s_2, \dots, s_n sont inférieurs à 1, l'équation de M. Schröder admet n solutions holomorphes distinctes B_1, \dots, B_n dont les dérivées ne sont pas toutes nulles à l'origine.

On en déduit aisément la forme des solutions générales de cette équation et de celle d'Abel.

3. Avant d'examiner différents cas plus particuliers, nous allons établir le lemme suivant :

LEMME DE M. POINCARÉ. — Soient les n formes linéaires

$$(6) \quad y_p = a_{p1}x_1 + \dots + a_{pq}x_q + \dots + a_{pn}x_n \quad (p = 1, 2, \dots, n).$$

Supposons qu'on effectue simultanément les substitutions

$$(7) \quad \begin{cases} x'_i = h_{i1}x_1 + \dots + h_{in}x_n \\ y'_i = h_{i1}y_1 + \dots + h_{in}y_n \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

de manière qu'on ait

$$(8) \quad y'_p = a'_{p1} x'_1 + \dots + a'_{pn} x'_n.$$

Désignons par s_1, s_2, \dots, s_n les racines de l'équation caractéristique relative aux a :

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} a_{11} - s & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - s \end{vmatrix} = 0;$$

il est possible de choisir des substitutions (7) indépendantes, de telle sorte que :

1° $a'_{pq} = 0$ pour $q > p$;

2° $a'_{pp} = s_p$;

3° $a'_{pq} = 0$ pour $q < p$, à l'exception des a'_{pq} pour lesquels $s_p = s_q$.

De plus, en imaginant les racines égales affectées d'indices successifs, soit une racine d'ordre r :

$$s_m = s_{m+1} = \dots = s_{m+j-1} = \dots = s_{m+r-1},$$

et supposons que le déterminant principal de $\Delta(s_m)$ soit de degré

$$n - j (j \leq r),$$

on aura $a'_{pq} = 0$ pour

$$m < p \leq m + j - 1, \quad m \leq q < m + j - 1.$$

Cette proposition, dans le cas où les s sont tous distincts, est fréquemment employée (1).

Elle a été énoncée dans ses parties essentielles par M. Poincaré (2), qui s'en est servi dans l'étude d'un système d'équations fonctionnelles.

En voici une démonstration, basée sur les remarques suivantes :

Plusieurs substitutions effectuées successivement sont équivalentes à une seule.

Les racines de l'équation $\Delta(s) = 0$ se conservent avec leur degré de multiplicité après de pareilles transformations.

En écrivant de deux manières différentes $\frac{\partial y'_i}{\partial x_q}$, on obtient les relations

$$\sum_p h_{ip} a_{pq} = \sum_r h_{rq} a'_{ir}$$

(1) Voir, par exemple, PICARD, *Traité d'Analyse*, t. III, p. 13 et 199.

(2) *Journal de Liouville*, p. 319; 1890.

qui, développées, deviennent

$$(9) \quad \begin{cases} a_{1q}h_{11} + a_{2q}h_{11} + \dots + a_{nq}h_{1n} = s_1 h_{1q}, \\ a_{1q}h_{21} + a_{2q}h_{22} + \dots + a_{nq}h_{2n} = a'_{21}h_{1q} + s_2 h_{2q}, \\ \dots, \\ a_{1q}h_{n1} + a_{2q}h_{n2} + \dots + a_{nq}h_{nn} = a'_{n1}h_{1q} + a'_{n2}h_{2q} + \dots + s_n h_{nq}. \end{cases}$$

Un cas particulier suffira à mettre le raisonnement en évidence.

Supposons que s_1 soit une racine d'ordre 5 et que le degré du déterminant principal de $\Delta(s_1)$, soit $n - 3$. On peut d'abord, par une substitution préalable, admettre que

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = s_1,$$

les autres éléments des trois premières lignes de $\Delta(s_1)$ étant tous nuls. On a ainsi

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} s_1 - s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_1 - s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_1 - s & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \delta(s) & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix};$$

$\delta(s) = 0$ admet s_1 comme racine double.

Or, dans les conditions actuelles, pour satisfaire aux systèmes fournis par les trois premières équations (9), il suffit de prendre

$$h_{1p} = h_{2p} = h_{3p} = 0,$$

pour $p > 3$ et

$$\begin{array}{ccc} h_{11}, & h_{12}, & h_{13}, \\ h_{21}, & h_{22}, & h_{23}, \\ h_{31}, & h_{32}, & h_{33} \end{array}$$

quelconques, leur déterminant étant seulement assujetti à être différent de 0.

Cherchons à satisfaire, en outre, aux quatrièmes équations (9). Puisque $\delta(s_1) = 0$, on peut certainement trouver un système de valeurs de $h_{44}, h_{45}, \dots, h_{4n}$, de manière à satisfaire à ces équations pour $q \geq 4$; et si on laisse h_{41}, h_{42}, h_{43} arbitraires, on obtient trois relations de la forme

$$a'_{41}h_{1q} + a'_{42}h_{2q} + a'_{43}h_{3q} = \Lambda_q \quad (q = 1, 2, 3),$$

qui déterminent $a'_{41}, a'_{42}, a'_{43}$. Il est clair qu'on peut adjoindre aux h déjà

choisis d'autres tels que leur déterminant général soit différent de 0. Cette substitution effectuée, et les mêmes notations que plus haut étant prises, on a

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} s_1 - s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_1 - s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_1 - s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & s_1 - s & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \delta(s) & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Pour satisfaire aux trois premières équations (9), on adopte pour

$$h_{kp} \quad (k = 1, 2, 3)$$

les mêmes valeurs que précédemment.

Pour satisfaire aux quatrièmes équations, on prend

$$0 = h_{45} = h_{46} = \dots = h_{4n}, \quad h_{44} \neq 0,$$

et h_{41}, h_{42}, h_{43} arbitrairement.

Nous cherchons, cette fois, à vérifier de plus les cinquièmes équations. $\delta(s_i)$ étant nul, il existe un système de nombres $h_{55}, h_{56}, \dots, h_{5n}$ qui les vérifie pour $q \geq 5$; et, si on laisse quelconques $h_{51}, h_{52}, \dots, h_{54}$, on aura, pour déterminer, a'_{51}, \dots, a'_{54} des relations

$$a'_{51} h_{1q} + a'_{52} h_{2q} + a'_{53} h_{3q} + a'_{54} h_{4q} = A_q \quad (q = 1, 2, 3, 4),$$

admettant une solution unique. Ici encore, nous pourrions compléter le système des h , de manière à définir une véritable substitution.

En ce qui concerne s_1 , la proposition est donc établie.

Il est important d'observer qu'on ne pourrait pas trouver des quantités h_{6q} qui vérifieraient les nouvelles relations

$$a_{1q} h_{61} + \dots + a_{nq} h_{6n} = a'_{61} h_{1q} + a'_{62} h_{2q} + \dots + a'_{65} h_{5q} + s_1 h_{6q}$$

ou, plus exactement, on n'obtient de pareilles égalités que par des combinaisons linéaires et homogènes des cinq premières.

On voit facilement que le raisonnement indiqué s'applique successivement aux différentes racines de l'équation $\Delta(s) = 0$.

Remarque. — Nous utiliserons moins l'énoncé même du lemme précédent que le fait qu'il est possible d'obtenir les égalités (9), les a' ayant les

valeurs indiquées, et qu'il n'est pas possible d'avoir plus de r relations distinctes relatives à une racine d'ordre r .

4. *Classification des racines de l'équation caractéristique.* — Dans ce qui suit, nous supposerons essentiellement que les α satisfont aux conditions du théorème déjà plusieurs fois rappelé, c'est-à-dire que les racines de l'équation caractéristique sont distinctes et inférieures à 1 en module ou que les α sont, en valeur absolue, plus petits que $\frac{1}{n}$. De plus, les valeurs de s sont toutes différentes de 0.

Cela posé, les relations de la forme (5) intervenant dans l'application du théorème fondamental, il est naturel de penser qu'elles vont jouer un rôle important et, par suite, de classer d'après elles les racines de l'équation caractéristique. Ces relations sont nécessairement en nombre limité, car des expressions de la forme $s_1^{\alpha_1} \dots s_n^{\alpha_n}$ tendraient vers 0 quand $\alpha_1 + \dots + \alpha_n$ croît indéfiniment.

Voici quelques remarques immédiates :

Dans le second membre d'une relation résolue par rapport à s_i ne peut pas figurer cette racine, car de

$$s_i = s_1^{\alpha_1} \dots s_i^{\alpha_i} \dots s_n^{\alpha_n}$$

on déduirait

$$1 = s_1^{\alpha_1} \dots s_i^{\alpha_i-1} \dots s_n^{\alpha_n},$$

ce qui est impossible, puisque

$$|s_1^{\alpha_1} \dots s_i^{\alpha_i-1} \dots s_n^{\alpha_n}| < 1.$$

Si s_i est résolu par rapport à s_j , s_j ne l'est certainement pas par rapport à s_i ; supposons en effet que

$$s_i = s_1^{\alpha_1} \dots s_j^{\alpha_j} \dots s_n^{\alpha_n},$$

$$s_j = s_1^{\alpha'_1} \dots s_i^{\alpha'_i} \dots s_n^{\alpha'_n};$$

on en conclurait

$$s_i = s_1^{\alpha_1} \dots s_{j-1}^{\alpha_{j-1}} s_{j+1}^{\alpha_{j+1}} \dots s_n^{\alpha_n} (s_1^{\alpha'_1} \dots s_i^{\alpha'_i} \dots s_n^{\alpha'_n})^{\alpha_j}.$$

Plus généralement, si s_i est résolu par rapport à s_j , s_j par rapport à s_k , etc., aucun de ces nombres ne l'est par rapport à s_i .

Nous allons en conclure la possibilité de *classer les s en espèces telles qu'une racine ne s'exprime qu'au moyen de celles des espèces précédentes.*

Soit

$$b(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) = \mathbf{1} + b(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Par exemple, on peut prendre

$$b(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\mathbf{L}f_1}{\mathbf{L}k}.$$

Et posons

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_m &= f_m + f_{m-1}c_1^{m-1}b + f_{m-2}(c_1^{m-2}b + c_2^{m-2}b^2) + \dots \\ &\quad + f_{m-i}(c_1^{m-i}b + c_2^{m-i}b^2 + \dots + c_i^{m-i}b^i) + \dots \\ &\quad + f_1(c_1^1b + c_2^1b^2 + \dots + c_j^1b^j + \dots + c_{m-1}^1b^{m-1}). \end{aligned}$$

Nous allons voir qu'on peut choisir les constantes c à deux indices de manière que l'on ait

$$\mathbf{B}_m^{(1)} = k\mathbf{B}_m.$$

Cette relation développée s'écrit

$$\begin{aligned} &\{ \alpha'_{m1}f_1 + \alpha'_{m2}f_2 + \dots + \alpha'_{m,m-1}f_{m-1} + kf_m \} \\ &\quad + \{ \alpha'_{m-1,1}f_1 + \alpha'_{m-1,2}f_2 + \dots + \alpha'_{m-1,l}f_l + \dots + \alpha'_{m-1,m-2}f_{m-2} + kf_{m-1} \} \\ &\quad \times \{ c_1^{m-1}(\mathbf{1} + b) \} + \dots \\ &\quad + \{ \alpha'_{m-i,1}f_1 + \alpha'_{m-i,2}f_2 + \dots + \alpha'_{m-i,l}f_l + \dots + \alpha'_{m-i,m-i-1}f_{m-i-1} + kf_{m-i} \} \\ &\quad \times \{ c_1^{m-i}(\mathbf{1} + b) + c_2^{m-i}(\mathbf{1} + b)^2 + \dots + c_j^1(\mathbf{1} + b)^j + \dots + c_{m-1}^1(\mathbf{1} + b)^{m-1} \} \\ &\quad + \dots \\ &\quad + kf_1 \{ c_1^1(\mathbf{1} + b) + c_2^1(\mathbf{1} + b)^2 + \dots + c_j^1(\mathbf{1} + b)^j + \dots + c_{m-1}^1(\mathbf{1} + b)^{m-1} \} \\ &= kf_m + kf_{m-1}c_1^{m-1}b + kf_{m-2}(c_1^{m-2}b + c_2^{m-2}b^2) + \dots \\ &\quad + kf_{m-i}(c_1^{m-i}b + c_2^{m-i}b^2 + \dots + c_s^{m-i}b^s + \dots + c_i^{m-i}b^i) + \dots \\ &\quad + kf_1(c_1^1b + c_2^1b^2 + \dots + c_j^1b^j + \dots + c_{m-1}^1b^{m-1}). \end{aligned}$$

Les produits des termes en k avec les termes de degré le plus élevé dans les développements de $(\mathbf{1} + b)^j$ disparaissent.

Nous allons déterminer les c par cette condition que les coefficients des expressions de la forme $f_{m-j}b^p$ ($p < j$) soient nuls. Dans un pareil coefficient peuvent entrer des termes de deux sortes, les uns contiennent k , les autres une lettre α' . Pour que le $i^{\text{ème}}$ produit du premier membre contienne un terme de la première sorte, il faut que $i = j$; les c qui y figurent sont alors $c_{p+1}^{m-j}, c_{p+2}^{m-j}, \dots, c_j^{m-j}$.

Pour qu'il donne un terme de la seconde sorte, il faut que $j > i$ et $p \leq i$;

donc $p \leq i < j$; on aura donc des c tels que

$$c_p^{m-i}, c_{p+1}^{m-i}, \dots, c_{p+s}^{m-i}, \dots, c_i^{m-i}$$

avec $m - i > m - j$.

Il est évident que lorsque dans une équation une seule quantité c sera inconnue et sera contenue dans un terme de la première sorte, elle se trouvera déterminée.

Or, supposons connus tous les $c_h^{h'}$ où $h' > m - j$, et remplaçons successivement p par $j - 1, j - 2, j - 3, \dots, 0$. En égalant à 0 le coefficient de $f_{m-j} b^p$, on aura des équations qui ne contiendront comme inconnues que

$$c_j^{m-j}; c_{j-1}^{m-j}, c_j^{m-j}; \dots; c_1^{m-j}, c_2^{m-j}, \dots, c_j^{m-j}$$

inconnues se trouvant dans les conditions précédentes, et l'on pourra ainsi calculer successivement

$$c_j^{m-j}, c_{j-1}^{m-j}, \dots, c_1^{m-j}.$$

On voit donc que lorsqu'on connaît les $c_h^{h'}$ où $h' > m - j$, on peut calculer les c_h^{m-j} . D'ailleurs c_1^{m-1} se tire de l'égalité

$$k c_1^{m-1} = a'_{m,m-1}.$$

Nous pouvons, par suite, énoncer le théorème suivant :

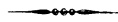
THÉORÈME II. — *A une racine k de première espèce et d'ordre r correspondent r fonctions holomorphes f_1, f_2, \dots, f_r , de chacune desquelles on déduit une fonction B vérifiant l'égalité*

$$B^{(1)} = k B.$$

B_m est de la forme

$$f_m + f_{m-1} g_{m,1} + \dots + f_{m-i} g_{m,i} + \dots + f_1 g_{m,m-1},$$

où $g_{m,i}$ désigne un polynome de degré i au plus en b , à coefficients numériques qui peuvent être calculés sans la connaissance des fonctions f .



CHAPITRE VII.

RACINES D'ESPÈCES SUPÉRIEURES. — CONCLUSION.

1. On se propose, dans le Chapitre actuel, d'étudier les racines d'espèces supérieures, et de tirer ensuite les conclusions relatives à l'équation de M. Schröder.

Pour passer des fonctions holomorphes que nous définirons aux solutions qu'on en peut déduire, nous aurons à nous appuyer sur un théorème que nous allons énoncer tout d'abord.

Théorème auxiliaire.

THÉORÈME I. — Soient p racines de première espèce k_1, k_2, \dots, k_p d'ordres r_1, r_2, \dots, r_p , de l'équation caractéristique, et k une autre racine quelconque, telle que $k = k_1^{\alpha_1} k_2^{\alpha_2} \dots k_p^{\alpha_p}$. Soient, d'autre part, $f_{11}, f_{12}, \dots, f_{1r_1}; f_{21}, \dots, f_{2r_2}; \dots; f_{p1}, \dots, f_{pr_p}$ les fonctions holomorphes qui leur correspondent.

t étant un entier non négatif quelconque et Q_α un polynôme de la forme

$$\sum f_{11}^{\sigma_{11}} f_{12}^{\sigma_{12}} \dots f_{1r_1}^{\sigma_{1r_1}} \dots f_{pr_p}^{\sigma_{pr_p}} \sum_0^{t + \sum \alpha_h r_h - \sum j \sigma_{hj}} C_{\sigma_{11} \sigma_{12} \dots \sigma_{pr_p}}^i b^i,$$

où

$$\sigma_{11} + \sigma_{12} + \dots + \sigma_{1r_1} = \alpha_1 \dots \sigma_{p1} + \sigma_{p2} + \dots + \sigma_{pr_p} = \alpha_p,$$

on peut trouver un polynôme P_α , et un seul de la forme

$$\sum f_{11}^{\mu_{11}} f_{12}^{\mu_{12}} \dots f_{1r_1}^{\mu_{1r_1}} \dots f_{pr_p}^{\mu_{pr_p}} \sum_1^{1 + t + \sum \alpha_h r_h - \sum j \mu_{hj}} c_{\mu_{11} \mu_{12} \dots \mu_{pr_p}}^i b^i,$$

où

$$\mu_{11} + \mu_{12} + \dots + \mu_{1r_1} = \alpha_1 \dots \mu_{p1} + \dots + \mu_{pr_p} = \alpha_p,$$

tel que l'on ait

$$P_\alpha^{(1)} - k P_\alpha = Q_\alpha.$$

La démonstration repose sur ce fait qu'il existe des constantes A pour

lesquelles

$$\begin{aligned} f_{11}^{(1)} &= K_1 f_{11}, \\ f_{12}^{(1)} &= K_1 f_{12} + A_{21}^1 f_{11}, \\ &\dots\dots\dots, \\ f_{1r_1}^{(1)} &= K_1 f_{1r_1} + A_{r_1 1}^1 f_{11} + \dots + A_{r_1 r_1 - 1}^1 f_{1r_1 - 1}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Les détails du calcul, un peu fastidieux, ont été rejetés dans une Note, à la fin.

2. *Proposition concernant les formes linéaires.* — Pour établir l'existence des solutions holomorphes déjà annoncées au Chapitre précédent, nous nous servons des propriétés suivantes :

Première propriété. — Si l'on a n formes linéaires distinctes

$$\begin{aligned} F_1 &= h_{11}x_1 + h_{12}x_2 + \dots + h_{1n}x_n, \\ F_2 &= h_{21}x_1 + h_{22}x_2 + \dots + h_{2n}x_n, \\ &\dots\dots\dots, \\ F_n &= h_{n1}x_1 + h_{n2}x_2 + \dots + h_{nn}x_n, \end{aligned}$$

et si, α étant un entier positif, et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n$ des indéterminées, on considère les coefficients du polynome

$$P = (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n)^\alpha,$$

en $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, comme des variables indépendantes, les coefficients du polynome en $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$,

$$Q = (\mu_1 F_1 + \mu_2 F_2 + \dots + \mu_n F_n)^\alpha,$$

sont des formes linéaires *distinctes* de ces variables.

Soient, en effet, n nombres différents k_1, k_2, \dots, k_n , et tels que les coefficients du polynome en r_1, r_2, \dots, r_n , abstraction faite du facteur numérique,

$$R = (k_1 r_1 + k_2 r_2 + \dots + k_n r_n)^\alpha,$$

soient tous différents. Les égalités

$$\begin{aligned} F_1(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) &= k_1 F_1(x_1, \dots, x_n), \\ &\dots\dots\dots, \\ F_n(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) &= k_n F_n(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

définiront une substitution $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ à déterminant non nul.

Les coefficients du polynome $Q : G_1, G_2, \dots, G_n$ satisfèront à des équations analogues où k_1, \dots, k_n seront remplacés par les coefficients de R débarrassés des facteurs numériques. Les dérivées respectives d'ordre α des polynomes G par rapport à x_1, x_2, \dots, x_n sont donc déterminées par des systèmes d'équations homogènes, le déterminant des coefficients étant l'expression $\Delta_\alpha(s)$ relative à $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$, où l'on remplace s par $k_1^\alpha, k_1^{\alpha-1}k_2, \dots$, quantités distinctes. Il en résulte, en vertu du lemme du Chapitre précédent, que ces dérivées forment un déterminant différent de 0, c'est-à-dire que les coefficients de Q sont des formes distinctes par rapport à ceux de P .

Il est clair que si l'on a des formes F en nombre inférieur à u , et si l'on ne considère que quelques-uns des produits auxquels elles donnent lieu, la propriété subsiste, car il est facile de compléter le système de ces formes.

Proposition relative à un certain déterminant.

Deuxième propriété. — Reprenant les notations du lemme du Chapitre précédent, si l'on suppose s_1 racine d'ordre r de multiplicité, et le déterminant principal de $\Delta(s_1)$ de degré $n - j$ ($j \leq r$), on peut trouver j expressions linéaires, nécessairement indépendantes

$$c_{p1}h_{1q} + c_{p2}h_{2q} + \dots + c_{pr}h_{rq} \quad (p = 1, 2, \dots, j),$$

telles que le déterminant D ayant pour éléments les déterminants caractéristiques relatifs aux systèmes

$$a_{1q}x_1 + \dots + (a_{qq} - s_1)x_q + \dots + a_{nq}x_n = c_{p1}h_{1q} + c_{p2}h_{2q} + \dots + c_{pr}h_{rq} \\ (q = 1, 2, \dots, n; \quad p \text{ fixe})$$

soit différent de 0.

En effet, on sait, d'après le lemme rappelé, qu'il existe au plus $r - j$ expressions, E_1, E_2, \dots, E_{r-j} pour lesquelles les déterminants caractéristiques relatifs à chacune d'elles sont tous nuls. On peut donc en trouver j autres

$$E_{r-j+1}, E_{r-j+2}, \dots, E_r,$$

distinctes entre elles et des précédentes. Le déterminant D correspondant est différent de 0. Car, s'il en était autrement, il existerait une même relation linéaire entre les éléments de ses lignes. On en déduirait donc qu'il existe une expression

$$\lambda_1 E_{r-j+1} + \dots + \lambda_j E_r,$$

pour laquelle les caractéristiques seraient tous nuls; elle se réduirait, par suite, à une combinaison linéaire et homogène de E_1, E_2, \dots, E_{r-j} , ce qui est contre l'hypothèse. La proposition est donc établie.

3. *Racines de deuxième espèce dans un cas particulier.* — Considérons d'abord une racine simple k , donnant lieu à une seule relation

$$k = k_1^\alpha;$$

k_1 est une racine de première espèce, d'ordre r . Soient f_1, f_2, \dots, f_r les fonctions holomorphes correspondantes à k_1 . Si l'on cherche à calculer les coefficients d'une fonction f telle que

$$f^{(1)} = kf,$$

on pourra être arrêté seulement au calcul des dérivées d'ordre α . Nous allons ajouter au second nombre un polynôme de degré α , tel que le calcul reste possible.

Si l'on considère les fonctions f_1, f_2, \dots, f_r , elles sont réduites aux termes du premier degré, des formes distinctes; par suite (première propriété), les termes de degré α des coefficients du polynôme

$$(\mu_1 f_1 + \dots + \mu_r f_r)^\alpha$$

en μ_1, \dots, μ_r sont des formes linéaires distinctes par rapport aux coefficients du polynôme $(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n)^\alpha$ en $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. D'ailleurs, si n' désigne le degré du déterminant $\Delta_\alpha(s)$ et si

$$\Delta_\alpha(s) = \begin{vmatrix} d_{11} - s & d_{12} & \dots & d_{1n'} \\ d_{21} & d_{22} - s & \dots & d_{2n'} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n'1} & d_{n'2} & \dots & d_{n'n'} - s \end{vmatrix};$$

si, de plus, on désigne par r' le degré de multiplicité de la racine k_1^α de $\Delta_\alpha(s) = 0$ (nombre des combinaisons complètes de r objets α à α), par $n' - j$ le degré du déterminant principal de $\Delta_\alpha(k_1^\alpha)$, et enfin par $h_{11}, h_{12}, \dots, h_{1n}$ les dérivées d'ordre α , à l'origine, de f_1^α , par $h_{21}, h_{22}, \dots, h_{2n}$ celles de $f_1^{\alpha-1} f_2$, etc., on a évidemment, d'après les équations fonctionnelles que vérifient f_1, f_2, \dots, f_r ,

$$\begin{aligned} h_{11}d_{1q} + h_{12}d_{2q} + \dots + h_{1n'}d_{n'q} &= kh_{1q}, \\ h_{21}d_{1q} + h_{22}d_{2q} + \dots + h_{2n'}d_{n'q} &= d'_{21}h_{1q} + kh_{2q}, \\ \dots & \\ h_{r'1}d_{1q} + h_{r'2}d_{2q} + \dots + h_{r'n'}d_{n'q} &= d'_{r'1}h_{1q} + \dots + d'_{r'r'-1q}h_{r'-1q} + kh_{r'q}. \end{aligned}$$

Puisque les h admettent un déterminant de degré r' différent de 0, on peut (deuxième propriété) trouver j expressions linéaires

$$c_{p1}h_{1q} + \dots + c_{pr'}h_{r'q} \quad (p = 1, 2, \dots, j),$$

telles que le déterminant D , ayant pour éléments les déterminants caractéristiques relatifs à ces expressions, soit différent de 0. C'est dire qu'on peut trouver j polynomes de degré α , H_1, H_2, \dots, H_j en f_1, f_2, \dots, f_r , de sorte que les déterminants caractéristiques relatifs à l'expression

$$m_1 H_1 + m_2 H_2 + \dots + m_j H_j + L$$

soient tous nuls, L étant un polynome *quelconque* en x_1, x_2, \dots, x_n et m_1, m_2, \dots, m_j des constantes convenablement choisies. Pour les calculer par cette condition, on est, en effet, amené à résoudre un système de j équations du premier degré à déterminant différent de 0.

Ainsi donc, *on peut choisir un polynome u , homogène et de degré α par rapport aux fonctions f_1, f_2, \dots, f_r , de telle sorte que le calcul d'une fonction f satisfaisant à l'équation*

$$f^{(1)} = kf + u$$

ne soit pas arrêté aux dérivées d'ordre α , et que, par suite, *il existe une solution de l'équation fractionnelle précédente et même j pareilles solutions*. Nous en adopterons une.

Pour déduire de cette fonction f une solution de l'équation de M. Schröder, il suffit de trouver une expression P_α telle que

$$P_\alpha^{(1)} = kP_\alpha - u.$$

Si $f + P_\alpha$ n'est pas identiquement nulle, ce sera une fonction répondant à la question. Or, nous savons (théorème I) qu'il existe une expression P_α . Donc :

THÉORÈME II. — *A une racine simple k de seconde espèce, donnant lieu à une seule relation*

$$k = k_1^r,$$

et k_1 étant d'ordre r , correspondent une fonction holomorphe f et une expression P_α telles que $f + P_\alpha$ soit solution de l'équation

$$B^{(1)} = kB.$$

P_α est un polynome homogène de degré α par rapport aux fonctions f_i ,

f_2, \dots, f_r relatives à k_1 , le coefficient d'un terme de la forme

$$(f_1)^{\mu_1} (f_2)^{\mu_2} \dots (f_r)^{\mu_r}$$

étant un polynome en $b(x_1, x_2, \dots, x_n)$, à coefficients constants, sans terme indépendant, et de degré

$$r\alpha + 1 - (\mu_1 + 2\mu_2 + \dots + r\mu_r).$$

4. *Cas général des racines de deuxième espèce.* — Le cas particulier qu'on vient d'étudier suggère naturellement une méthode générale. k étant encore une racine simple, nous supposerons qu'on a encore une seule relation

$$k = k_1^{\alpha_1} k_2^{\alpha_2} \dots k_p^{\alpha_p},$$

où k_1, k_2, \dots, k_p sont respectivement racines d'ordres

$$r_1, r_2, \dots, r_p;$$

k est racine de l'équation

$$\Delta_\alpha(s) = 0 \quad (\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p),$$

l'ordre de multiplicité étant le produit des nombres de combinaisons complètes de r_1 objets α_1 à α_1 , de r_2 à α_2 , ..., de r_p à α_p .

Soient

$$f_{11}, f_{12}, \dots, f_{1r_1}; f_{21}, f_{22}, \dots, f_{2r_2}; \dots; f_{p1}, f_{p2}, \dots, f_{pr_p}$$

les fonctions holomorphes qui correspondent respectivement à k_1, k_2, \dots, k_p . Si $n' - j$ est encore le degré du déterminant principal de $\Delta_\alpha(k)$, on voit, en raisonnant comme plus haut, qu'on peut former j polynomes H_1, H_2, \dots, H_j , homogènes par rapport aux f , respectivement de degrés $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ par rapport aux fonctions f_1, f_2, \dots, f_p , et tels qu'il existe un système de constantes m_1, m_2, \dots, m_j pour lesquelles les déterminants caractéristiques relatifs à l'expression

$$m_1 H_1 + m_2 H_2 + \dots + m_j H_j + L$$

soient tous nuls, L désignant un polynome donné quelconque en x_1, x_2, \dots, x_n . On en conclut, de même que précédemment, qu'il y a j solutions holomorphes (à dérivées non toutes nulles à l'origine) de l'équation

$$f^{(1)} = kf + u,$$

u étant un polynome en $f_{11}, f_{12}, \dots, f_{pr_p}$ de la nature indiquée pour les H .

Ensuite, en vertu du théorème I, on peut déterminer un polynome P_α ,

de degrés $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ respectivement par rapport à f_1, f_2, \dots, f_p , le coefficient d'un terme de la forme

$$(f_{11})^{\mu_{11}} (f_{12})^{\mu_{12}} \dots (f_{1r_1})^{\mu_{1r_1}} \dots (f_{pr_p})^{\mu_{pr_p}}$$

étant un polynome en b , à coefficients constants, sans terme indépendant, et de degré $1 + \sum \alpha_i r_i - \sum_{ij} j \mu_{ij}$, de telle sorte qu'on ait l'identité

$$\mathbf{P}_\alpha^{(1)} = k \mathbf{P}_\alpha - u.$$

Il en résulte qu'il existe au moins une solution de l'équation de M. Schröder, de la forme $f + \mathbf{P}_\alpha$.

5. Étant donnée une relation $k = k_1^{\alpha_1} k_2^{\alpha_2} \dots k_p^{\alpha_p}$, nous dirons qu'elle est d'ordre α , si $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p = \alpha$. Cela posé, supposons, k étant toujours une racine simple, qu'il y ait des relations d'ordres $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ ($\alpha < \beta < \gamma \dots$).

Nous nous proposerons de rendre successivement possible le calcul des dérivées d'ordre $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ de la fonction f , dans l'équation

$$f^{(1)} = kf + \mathbf{U},$$

en construisant convenablement l'expression \mathbf{U} , de manière, bien entendu, qu'il soit ensuite possible d'appliquer à cette expression le théorème I.

Pour le calcul des dérivées d'ordre α , il suffit de former une somme de polynomes $u_1 + u_2 + \dots$ constitués respectivement comme il a été dit, dans le numéro précédent, au moyen des fonctions qui correspondent aux racines figurant dans les diverses relations d'ordre α . Nous savons, d'ailleurs, comment l'on détermine les coefficients de ces polynomes.

Le calcul devient possible jusqu'aux dérivées d'ordre β . Nous opérerons de nouveau par le même procédé, introduisant une nouvelle somme $v_1 + v_2 + \dots$ relative aux relations d'ordre β . En continuant de cette manière, on obtient l'expression

$$\mathbf{U} = u_1 + u_2 + \dots + v_1 + v_2 + \dots + w_1 + w_2 + \dots$$

Il existe donc au moins une solution holomorphe de l'équation

$$f^{(1)} = kf + \mathbf{U},$$

à dérivées non toutes nulles à l'origine. Il suffit alors de déterminer, au

moyen du théorème I, les polynomes $P_{\alpha_1}, P_{\alpha_2}, \dots$ tels que

$$\begin{array}{lll} P_{\alpha_1}^{(1)} - kP_{\alpha_1} = -u_1, & P_{\alpha_2}^{(1)} - kP_{\alpha_2} = -u_2, & \dots, \\ P_{\beta_1}^{(1)} - kP_{\beta_1} = -v_1, & P_{\beta_2} - kP_{\beta_2} = -v_2, & \dots, \\ P_{\gamma_1}^{(1)} - kP_{\gamma_1} = -w_1, & P_{\gamma_2}^{(1)} - kP_{\gamma_2} = -w_2, & \dots, \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, & \dots, \end{array}$$

pour obtenir au moins une solution de la forme

$$f + P_{\alpha_1} + P_{\alpha_2} + \dots + P_{\beta_1} + P_{\beta_2} + \dots + P_{\gamma_1} + P_{\gamma_2} + \dots$$

6. Supposons enfin que k soit une racine d'ordre r . Nous aurions cette fois, en nous reportant au Chapitre précédent, n° 5, à déterminer r fonctions f_1, \dots, f_r , telles que

$$\begin{array}{l} f_1^{(1)} = kf_1, \\ f_2^{(1)} = a'_{21}f_1 + kf_2, \\ \dots\dots\dots, \\ f_p^{(1)} = a'_{p1}f_1 + a'_{p2}f_2 + \dots + a'_{pp-1}f_{p-1} + kf_p \end{array} \quad (p \leq r).$$

Pour ces différentes équations, nous nous trouverons, en général, arrêtés exactement de la même manière que pour la première. De la même manière également, nous allons modifier les seconds membres en ajoutant des expressions dont la formation a été, à maintes reprises, indiquée.

Nous aurons ainsi le système

$$\begin{array}{ll} f_1^{(1)} = kf_1 & + U_1, \\ f_2^{(1)} = a'_{21}f_1 + kf_2 & + U_2, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots, \\ f_r^{(1)} = a'_{r1}f_1 + a'_{r2}f_2 + \dots + a'_{rr-1}f_{r-1} + kf_r & + U_r, \end{array}$$

qui admet au moins une solution formée de fonctions f_1, f_2, \dots, f_r ; les dérivées de chacune d'elles n'étant pas toutes nulles à l'origine.

Cela posé, à une fonction f_m , nous chercherons à faire correspondre une solution de la forme

$$\begin{array}{l} f_m + f_{m-1}c_1^{m-1}b + f_{m-2}(c_1^{m-2}b + c_2^{m-2}b^2) + \dots \\ + f_{m-i}(c_1^{m-i}b + c_2^{m-i}b^2 + \dots + c_i^{m-i}b^i) + \dots + f_1(c_1^1b + \dots + c_{m-1}^1b^{m-1}) \\ + P_m. \end{array}$$

Les constantes c étant déterminées comme au passage cité, P_m devra

vérifier l'équation

$$\mathbf{P}_m^{(1)} - k\mathbf{P}_m = - \{ \mathbf{U}_m + \mathbf{U}_{m-1}c_1^{m-1}(1+b) + \dots + \mathbf{U}_1[c_1^1(1+b) + \dots + c_{m-1}^1(1+b)^{m-1}] \}.$$

On peut dissocier, en quelque sorte, cette relation en un certain nombre d'autres analogues, en ne retenant successivement des \mathbf{U} que les polynomes relatifs à chacune des relations qui expriment k en fonction des autres racines. L'application du théorème I permet donc de former des expressions qui satisfont à ces diverses relations, et dont la somme sera \mathbf{P}_m . Il existe donc au moins r solutions de la forme indiquée.

7. *Racines d'espèces supérieures à la deuxième.* — Pour éviter une complication inutile des notations, nous nous bornerons à considérer une racine de troisième espèce dans un cas particulier. La méthode générale apparaîtra suffisamment sur cet exemple.

Soit donc k une racine de troisième espèce d'ordre r , et la relation

$$k = k_1^\alpha l^\beta,$$

k_1 étant une racine de première espèce, et l une de seconde pour laquelle on a l'unique relation

$$l = k_{1_1}^{\gamma_1} k_{1_2}^{\gamma_2} \dots k_{1_h}^{\gamma_h}.$$

Nous supposons qu'il n'y a, relativement à k , pas d'autres relations que la première, et celle-ci

$$k = k_1^\alpha k_{1_1}^{\beta\gamma_1} k_{1_2}^{\beta\gamma_2} \dots k_{1_h}^{\beta\gamma_h}.$$

Appelons $f_1, f_2, \dots, f_r; f_{1_1}, \dots, f_{1_j}; \dots; f_{h_1}, \dots, f_{h_j}; \mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_r$, les fonctions holomorphes qui correspondent respectivement à

$$k_1, k_{1_1}, \dots, k_{1_h}, l.$$

On sait qu'on a des relations de la forme

$$\begin{aligned} f_p^{(1)} &= k_1 f_p + d_{p1} f_1 + \dots + d_{pp-1} f_{p-1}, \\ \mathbf{F}_p^{(1)} &= l \mathbf{F}_p + e_{p1} \mathbf{F}_1 + e_{p2} \mathbf{F}_2 + \dots + e_{pp-1} \mathbf{F}_{p-1} \\ &\quad + \sum \mathbf{D}_{\lambda_{1_1} \dots \lambda_{j_1} \dots \lambda_{h_1}}^p f_{1_1}^{\lambda_{1_1}} \dots f_{1_{j_1}}^{\lambda_{j_1}} \dots f_{h_1}^{\lambda_{h_1}}. \end{aligned}$$

On peut déterminer au moins un système de fonctions holomorphes

$\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_r$, à dérivées non toutes nulles à l'origine, telles que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1^{(1)} &= k\mathcal{F}_1 && + \mathbf{U}_1, \\ \mathcal{F}_2^{(1)} &= a'_{21}\mathcal{F}_1 + k\mathcal{F}_2 && + \mathbf{U}_2, \\ &\dots\dots\dots && \dots\dots, \\ \mathcal{F}_r^{(1)} &= a'_{r1}\mathcal{F}_1 + \dots + k\mathcal{F}_r && + \mathbf{U}_r; \end{aligned}$$

les fonctions \mathbf{U} étant formées, par le procédé habituel, au moyen des fonctions f et \mathbf{F} , de sorte que l'on a, pour l'une quelconque d'entre elles,

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_m &= \sum f_1^{\mu_1} \dots f_{r_1}^{\nu_1} \mathbf{F}_1^{\nu_1} \dots \mathbf{F}_{r_2}^{\nu_{r_2}} \mathbf{A}_{\mu_1 \dots \mu_{r_1} \nu_1 \dots \nu_{r_2}} \\ &+ \sum f_1^{\mu_1} \dots f_{r_1}^{\nu_1} f_{11}^{\lambda_1} \dots f_{hjh}^{\lambda_{jh}} \mathbf{A}'_{\mu_1 \dots \mu_{r_1} \nu_1 \dots \nu_{r_2}}. \end{aligned}$$

On cherche encore une solution de la forme

$$\mathcal{F}_m + \mathcal{F}_{m-1} c_1^{m-1} b + \mathcal{F}_{m-2} [c_1^{m-2} b + c_2^{m-2} b^2] + \dots + \mathcal{F}_1 [c_1^1 b + \dots + c_{m-1}^1 b^{m-1}] + \mathbf{P}_m,$$

les constantes c à deux indices sont déterminées comme plus haut.

Ainsi, \mathbf{P}_m doit satisfaire à l'équation

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_m^{(1)} - \mathbf{P}_m &= - \{ \mathbf{U}_m + \mathbf{U}_{m-1} c_1^{m-1} (1 + b) + \dots \\ &+ \mathbf{U}_1 [c_1^1 (1 + b) + \dots + c_{m-1}^1 (1 + b)^{m-1}] \}^1. \end{aligned}$$

Le seul changement, par rapport à l'équation obtenue au numéro précédent, consiste en ceci : que les \mathbf{U} contiennent maintenant des fonctions \mathbf{F} relatives à une racine qui n'est pas de première espèce.

Considérons seulement la partie des fonctions \mathbf{U} présentant cette particularité. Nous avons à résoudre une équation telle que

$$\mathbf{X}_m^{(1)} - \mathbf{X}_m = \sum f_1^{\mu_1} \dots f_{r_1}^{\nu_1} \mathbf{F}_1^{\nu_1} \dots \mathbf{F}_{r_2}^{\nu_{r_2}} \sum_0^{m-1} \xi_{\mu_1 \dots \mu_{r_1} \nu_1 \dots \nu_{r_2}}^i b^i = \mathfrak{A}_m,$$

les ξ étant les constantes. On emploiera le procédé de réduction suivant : Cherchons, par l'application du théorème I, à déterminer \mathbf{X}_m , comme si les f et \mathbf{F} correspondaient à des racines de première espèce. Soit \mathfrak{L}_m la solution ainsi définie, et posons

$$\mathbf{X}_m = \mathfrak{L}_m + \mathbf{Y}_m,$$

\mathbf{Y}_m devra vérifier la relation

$$\mathbf{Y}_m^{(1)} - \mathbf{Y}_m = \mathfrak{B}_{m,1} + \mathfrak{B}_{m,2} + \dots$$

$\mathfrak{B}_{m,1}, \mathfrak{B}_{m,2}, \dots$ sont des expressions analogues à \mathfrak{A}_m , les coefficients des

fonctions holomorphes étant des polynomes en b ; mais *le degré de ces expressions, par rapport aux F , a respectivement diminué de 1, 2, ... unités*; ces fonctions étant remplacées par des polynomes relatifs aux f_{11}, \dots, f_{hjn} , comme cela résulte des égalités fonctionnelles qu'elles vérifient.

Écrivons

$$Y_{m,1}^{(1)} - Y_{m,1} = 0b_{m,1},$$

$$Y_{m,2}^{(1)} - Y_{m,2} = 0b_{m,2},$$

.....

On en déduira

$$Y_m = Y_{m,1} + Y_{m,2} + \dots$$

Or, pour résoudre ces équations, on se trouve dans les mêmes conditions qu'au début, avec cette différence que le degré, par rapport aux F , des expressions données a diminué. En procédant de proche en proche, nous serons ramenés à un problème déjà résolu. Il est donc possible de déterminer P_m . On est ainsi conduit, relativement aux racines d'espèces supérieures, au même résultat que pour les deux premières.

8. *Résumé.* — Ainsi, aux n racines de l'équation

$$\Delta_1(s) = 0,$$

on a pu faire correspondre au moins n fonctions holomorphes, desquelles on a déduit n solutions de l'équation de M. Schröder. *Ces solutions sont distinctes.* En effet, les fonctions holomorphes ont été définies, en prenant, pour point de départ, ce fait que leurs dérivées à l'origine constituaient un système de valeurs de h vérifiant le système (9) du Chapitre précédent, dans les conditions du lemme de M. Poincaré.

9. *Discussion de différentes hypothèses.* — On a déterminé toutes les solutions holomorphes, dont les dérivées à l'origine ne sont pas toutes nulles. Il y en a au moins autant que de racines distinctes de première espèce de l'équation en s . *S'il y en a davantage, il y en a une infinité.* C'est qu'en effet, dans le calcul des dérivées d'un certain ordre, il y a indétermination.

Supposons, en particulier, toutes les racines égales et tous les mineurs de $\Delta_1(k)$ nuls, sauf ceux du dernier ordre.

C'est le cas où, après transformation linéaire convenable, la substitution

donnée prend la forme

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= kx_1 + \dots, \\ \varphi_2 &= kx_2 + \dots, \\ &\dots\dots\dots, \\ \varphi_n &= kx_n + \dots, \end{aligned}$$

les termes non écrits étant de degrés supérieurs au premier. Il y a n solutions holomorphes distinctes B_1, B_2, \dots, B_n , et toute expression homogène, par rapport à elles, est encore une solution; par exemple

$$\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 + \dots + \lambda_n B_n,$$

où les λ sont des constantes arbitraires.

Dans le cas où l'équation caractéristique n'a que des racines de première espèce, toutes les solutions holomorphes se déduisent très simplement des fonctions qu'on a fait correspondre aux racines. Soit, par exemple, à chercher une pareille solution, α étant le premier entier pour lequel les dérivées de cet ordre ne soient pas toutes nulles à l'origine. On doit avoir

$$F^{(1)} = kF;$$

k est racine de l'équation

$$\Delta_\alpha(s) = 0$$

et s'exprime au moyen des racines de $\Delta_1(s) = 0$. Il peut y avoir plusieurs expressions de cette nature

$$k_1^{\alpha_1}, k_2^{\alpha_2}, \dots, k_p^{\alpha_p}, l_1^{\beta_1}, l_2^{\beta_2}, \dots, l_q^{\beta_q}, \dots, (\alpha_1 + \dots + \alpha_p = \beta_1 + \dots + \beta_q = \alpha).$$

Les racines $k_1, \dots, k_p, l_1, \dots, l_q, \dots$ sont respectivement d'ordres $r_1, \dots, r_p, r'_1, \dots, r'_q, \dots$

Soient

$$f_{11}, f_{12}, \dots, f_{1,r_1}; f_{2,1}, \dots; f_{p,1}, \dots, f_{p,r_p}; f'_{1,1}, \dots, f'_{q,r'_q}$$

les fonctions holomorphes correspondantes.

Si l'on considère le polynome

$$\begin{aligned} &(\lambda_{11}f_{11} + \dots + \lambda_{1r_1}f_{1r_1})^{\alpha_1} \dots (\lambda_{p1}f_{p1} + \dots + \lambda_{pr_p}f_{pr_p})^{\alpha_p} \\ &+ (\lambda'_{11}f'_{11} + \dots + \lambda'_{1r'_1}f'_{1r'_1})^{\beta_1} \dots (\lambda'_{q1}f'_{q1} + \dots + \lambda'_{qr'_q}f'_{qr'_q})^{\beta_q} \\ &+ \dots\dots\dots, \end{aligned}$$

les coefficients des λ et des λ' sont des fonctions \mathcal{F} dont les dérivées d'ordre α

CHAPITRE VIII.

RELATIONS ENTRE L'ÉQUATION DE M. SCHRÖDER ET CERTAINES ÉQUATIONS
LINÉAIRES ET HOMOGÈNES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

1. M. Appell ⁽¹⁾ a montré les relations intéressantes qui existent entre les équations différentielles linéaires et l'équation de M. Schröder dans le cas d'une variable. Dans le cas de plusieurs variables, il y a, entre cette équation fonctionnelle et les équations linéaires et homogènes aux dérivées partielles du premier ordre, des rapports que nous allons signaler rapidement.

Les substitutions dont il s'agira seront de la nature de celles étudiées au Chapitre précédent. De plus, on suppose que l'équation caractéristique n'a que des racines de première espèce. Nous allons examiner successivement deux problèmes.

2. PREMIER PROBLÈME. — *Étant donnée une équation aux dérivées partielles ou un système complet qui admet une substitution également donnée, quelle simplification apporte à son intégration la connaissance de quelques-unes des solutions de l'équation de M. Schröder?*

Soit la substitution

$$(1) \quad x_1^{(1)} = \varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, x_n^{(1)} = \varphi_n(x_1, \dots, x_n),$$

et prenons d'abord le cas où les racines s_1, s_2, \dots, s_n de l'équation caractéristique sont distinctes. Appelons $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ les fonctions holomorphes correspondantes.

On donne l'équation

$$(2) \quad X_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0,$$

dont les coefficients sont réguliers à l'origine, mais non tous nuls, et l'on suppose qu'elle admet la substitution (1).

Si l'on choisit $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ comme nouvelles variables, la relation (2)

⁽¹⁾ *Acta mathematica*, t. XV.

sous la forme (2)', on constate aisément, en raisonnant comme plus haut, qu'il n'y a qu'un coefficient Y qui ne s'annule pas à l'origine et que c'est précisément *un coefficient relatif à une racine simple*.

THÉORÈME III. — *Les racines de l'équation caractéristique n'étant pas toutes distinctes, $n - 1$ des fonctions f , la $n^{\text{ième}}$ correspondant à une racine simple, donnent une solution (2).*

3. Nous allons reprendre l'équation (2) en faisant d'autres hypothèses sur les X . Mais auparavant nous allons voir comment on peut étendre simplement les notions et les propriétés fondamentales de la divisibilité aux fonctions holomorphes, *nulles à l'origine*.

Rappelons le théorème suivant de M. Weierstrass :

Si la fonction $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, nulle à l'origine, est telle que le développement de $F(x_1, 0, 0, \dots, 0)$ commence par un terme en x_1^p , on a

$$\begin{aligned} & F(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= [x_1^p + f_1(x_2, \dots, x_n)x_1^{p-1} + \dots + f_p(x_2, \dots, x_n)]K(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned}$$

les fonctions f et K étant holomorphes et, de plus, nulles, sauf la dernière, à l'origine (1).

Cela posé, deux fonctions, dont le quotient est holomorphe et non nul à l'origine, sont, au point de vue de la divisibilité, considérées comme équivalentes. Par exemple, la fonction F du théorème précédent et le polynôme

$$x_1^p + f_1 x_1^{p-1} + \dots + f_p$$

sont équivalents. Si le quotient $\frac{F}{\Phi}$ est holomorphe à l'origine, Φ divise F . Si F n'admet d'autre diviseur qu'elle-même (ou une fonction équivalente), elle est dite *première*. Ainsi,

$$x_1 + f(x_2, \dots, x_n) \quad [f(0, 0, \dots, 0) = 0]$$

est dans ce cas. Lorsque tout diviseur de F et de Φ divise R et réciproquement, R est le plus grand commun diviseur de F et de Φ . Si tout diviseur commun est différent de 0 à l'origine, F et Φ sont premiers entre eux.

F étant supposé de la forme

$$x_1^p + f_1(x_2, \dots, x_n)x_1^{p-1} + \dots + f_p(x_2, \dots, x_n)$$

(1) Voir PICARD, *Traité d'Analyse*, t. II, p. 246.

(les f nuls à l'origine), tout diviseur de F peut être ramené à une forme analogue. Soit, en effet, Φ un diviseur de F ; on a $F = \Phi Q$, $\Phi(x_1, 0, \dots, 0)$ n'est pas nul, puisque Q est holomorphe. Donc Φ peut s'écrire

$$[x_1^q + g_1(x_2, \dots, x_n)x_1^{q-1} + \dots + g_q(x_2, \dots, x_n)]K(x_1, \dots, x_n),$$

$K(0, \dots, 0)$ étant différent de 0. Φ est donc équivalent au premier facteur.

De plus, $q \leq p$, sans quoi $\frac{F}{\Phi}$ ne serait pas holomorphe. Il résulte de là que si F n'est pas premier, il est décomposable en un produit de facteurs premiers, de même forme, et cela d'une seule manière (1). Ce dernier point s'établit aisément, en remarquant que si P et Q sont des fonctions premières entre elles, de même forme que F , en opérant comme s'il s'agissait de trouver le plus grand commun diviseur de deux polynômes en x_1 , on a la relation

$$PQ_1 + QP_1 = R,$$

Q, Q_1, R étant des fonctions holomorphes, cette dernière indépendante de x_1 . Par suite P et Q ne peuvent s'annuler quand on y remplace x_1 par une même fonction de x_2, \dots, x_n .

Considérons maintenant une fonction F quelconque. On pourra, au besoin après un changement de variables linéaire et homogène, la mettre sous la forme PK , P étant de la forme

$$x_1^p + l_1 x_1^{p-1} + \dots + l_p \quad \text{et} \quad K(0, \dots, 0) \neq 0.$$

Donc F est décomposable et d'une seule manière en facteurs premiers, à un facteur près différent de 0 à l'origine. De là l'existence d'un plus grand commun diviseur entre deux fonctions. De là aussi cette propriété : si une fonction divise un produit de deux autres et si elle est première avec l'une d'elles, elle divise l'autre.

4. Ces remarques faites, je suppose que dans l'équation (2) les X sont holomorphes et nuls à l'origine. De plus, les racines de l'équation caractéristique de la substitution sont distinctes. Comme précédemment, on est ramené aux relations

$$(6) \quad \frac{s_1 Y_1}{Y_1^{(1)}} = \frac{s_2 Y_2}{Y_2^{(1)}} = \dots = \frac{s_n Y_n}{Y_n^{(1)}}.$$

(1) A noter que, lorsqu'on a obtenu l'égalité $F = P_1 P_2 \dots P_m K$, P_1, P_2, \dots, P_m étant des facteurs premiers de la forme indiquée et K une fonction holomorphe différente de 0 à l'origine, K est nécessairement égal à 1.

On peut admettre que les fonctions Y_1, Y_2, \dots, Y_n sont premières entre elles. Je dis que la valeur commune des rapports (6) est une fonction holomorphe différente de 0. Considérons, par exemple, l'identité

$$Y_2^{(1)} = \frac{s_2}{s_1} Y_2 \frac{Y_1^{(1)}}{Y_1}.$$

Si Y_1 ne divise pas $Y_1^{(1)}$, il y a un diviseur de Y_1 qui doit diviser Y_2 , et pour la même raison Y_3, \dots . Dans cette hypothèse, Y_1, Y_2, \dots, Y_n ne seraient donc pas premiers entre eux. Donc on a

$$Y_1^{(1)} = s_1 Y_1 \lambda(y_1, \dots, y_n);$$

la fonction λ étant holomorphe et évidemment différente de 0 à l'origine.

Bornons-nous au cas simple où l'une des quantités Y, Y_1 par exemple, commence par un terme du premier degré. On a

$$Y_1 = [y_i + f(y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n)] K(y_1, \dots, y_n) \quad [K(0) \neq 0].$$

Par suite

$$Y_1^{(1)} = [s_i y_i + f(s_1 y_1, \dots, s_{i-1} y_{i-1}, s_{i+1} y_{i+1}, \dots, s_n y_n)] K^{(1)}.$$

Donc

$$f^{(1)} = s_i f.$$

f ne contenant pas y_i , cette égalité n'est possible que si f est identiquement nul. Donc

$$Y_1 = y_i K \quad \text{et} \quad K^{(1)} = \frac{s_1}{s_i} K \lambda.$$

Posons

$$Y_p = Z_p K.$$

Les relations (6) deviendront

$$(6)' \quad \frac{s_1 Z_1}{Z_1^{(1)}} = \frac{s_2 Z_2}{Z_2^{(1)}} = \dots = \frac{s_n Z_n}{Z_n^{(1)}} = \frac{s_1}{s_i}.$$

Si tous les Z commencent par des termes du premier degré, il faudra, en général, que $i = 1$; alors on aura

$$Z_1 = m_1 y_1, \quad Z_2 = m_2 y_2, \quad \dots, \quad Z_n = m_n y_n,$$

et, par suite, les rapports de $n - 1$ des fonctions

$$y_1^{\frac{1}{m_1}}, \quad y_2^{\frac{1}{m_2}}, \quad \dots, \quad y_n^{\frac{1}{m_n}}$$

à la dernière fournissent un système d'intégrales distinctes.

Ce résultat est bien d'accord avec ce que l'on sait sur ces équations, d'après M. Poincaré (1).

Il peut arriver que $i \neq 1$; et cela, dans le cas où les points figuratifs des racines de l'équation caractéristique sont les sommets de polygones réguliers ayant leur centre à l'origine, le module de $\frac{s_i}{s_1}$ étant l'unité, et son argument étant un commun multiple des angles au centre de ces polygones. Les racines peuvent être alors distribuées en cycles tels qu'en multipliant l'une quelconque par $\frac{s_i}{s_1}$ on obtienne la suivante du même cycle. Rien n'empêche de supposer les indices tels que s_1, s_2, \dots, s_p forme un de ces cycles. Il est facile de voir : 1° que l'on doit avoir

$$Z_1 = m_1 y_2, \quad Z_2 = m_2 y_3, \quad \dots, \quad Z_p = m_p y_1, \quad \dots;$$

2° Qu'au cycle considéré correspondent p fonctions linéaires et homogènes distinctes de $y_1, \dots, y_p : f_1, f_2, \dots, f_p$ telles que si l'on forme les fonctions

$$f_1^{\frac{\theta}{m_1 m_2 \dots m_p}}, \quad f_2^{\frac{\theta^2}{m_1 m_2 \dots m_p}}, \quad \dots, \quad f_p^{\frac{\theta^p}{m_1 m_2 \dots m_p}},$$

où θ est racine $p^{\text{ième}}$ primitive de l'unité, et les fonctions analogues, le rapport de $n - 1$ d'entre elles à la $n^{\text{ième}}$ donne un système d'intégrales. Donc :

THÉORÈME IV. — *Si les racines de l'équation caractéristique sont distinctes et si les coefficients de (2) sont holomorphes et nuls à l'origine, les coefficients des termes du premier degré formant un déterminant différent de 0, si de plus on considère les fonctions holomorphes qui correspondent aux racines, ou, dans un cas particulier, des combinaisons linéaires de ces fonctions, à des puissances convenables, les rapports de $n - 1$ d'entre elles à la dernière fournissent des intégrales distinctes.*

Si les Z ne commencent pas tous par des termes du premier degré, i est sûrement différent de 1, et les quantités $\frac{s_p s_i}{s_1}$ se réduisent, pour les différentes valeurs de p supérieures à 1, à des racines ou à des produits de racines (à un produit au moins pour une valeur de p). Supposons, par

(1) *Thèse.* Les principaux résultats de ce Mémoire sont exposés dans le *Traité d'Analyse* de M. Picard, t. III, Chap. I.

exemple, que $\frac{s_2 s_i}{s_1}$ s'exprime ainsi de plusieurs manières : à chaque pareille expression

$$s_{\mu_1}^{\alpha_1} s_{\mu_2}^{\alpha_2} \dots s_{\mu_t}^{\alpha_t}$$

correspond une solution holomorphe de l'équation de M. Schröder

$$y_{\mu_1}^{\alpha_1} \dots y_{\mu_t}^{\alpha_t}.$$

Z_2 est alors un polynôme linéaire et homogène par rapport à ces fonctions. L'équation proposée se ramène donc à la forme

$$Z_1 \frac{\partial F}{\partial y_1} + \dots + Z_n \frac{\partial F}{\partial y_n} = 0,$$

où les Z sont des polynômes par rapport aux y dont les modes de composition possibles sont déterminés dès qu'on connaît les racines de l'équation caractéristique.

En particulier, prenons le cas de deux variables. $\frac{s_2^2}{s_1}$ doit se réduire à un produit de puissances de s_1 et de s_2 ; on a donc nécessairement

$$s_2^2 = s_1^{p+1} \quad (p \geq 2).$$

Exemple. — On donne

$$(1 + x_1) \arcsin x_2 \frac{\partial F}{\partial x_1} + a L^2 (1 + x_1) \sqrt{1 - x_2^2} \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0,$$

a étant une constante, et l'on sait que cette équation admet la substitution

$$\begin{aligned} 8 \arcsin x_2^{(1)} &= \arcsin x_2, \\ 4 L(1 + x_1^{(1)}) &= L(1 + x_1). \end{aligned}$$

On en conclut l'intégrale

$$2 a L^3 (1 + x_1) - 3 \arcsin^2 x_2.$$

Remarque. — Dans le cas de deux variables, si $s_2^2 = s_1^{p+1}$, l'équation proposée admet le groupe continu à un paramètre a

$$\begin{aligned} y_1^{(1)} &= a^2 y_1, \\ y_2^{(1)} &= a^{p+1} y_2, \end{aligned}$$

qui conserve la relation $s_2^2 = s_1^{p+1}$.

DEUXIÈME PROBLÈME. — On donne une substitution, peut-on simplifier la recherche des solutions de l'équation de M. Schröder, si l'on connaît les

intégrales d'une équation aux dérivées partielles ou d'un système complet admettant la substitution?

Je suppose les racines de l'équation caractéristique distinctes.

L'équation (2) étant donnée, si l'on connaît un système d'intégrales distinctes F_2, \dots, F_n , il existe $n - 1$ solutions y_2, \dots, y_n cherchées, qui sont des fonctions de F_2, \dots, F_n . On a d'ailleurs

$$\begin{aligned} F_2^{(1)} &= \mathfrak{F}_2(F_2, \dots, F_n), \\ &\dots\dots\dots, \\ F_n^{(1)} &= \mathfrak{F}_n(F_2, \dots, F_n), \end{aligned}$$

et les \mathfrak{F} sont connus. Donc on est ramené, pour déterminer y_2, \dots, y_n , à la résolution d'une équation de M. Schröder dans le cas de $n - 1$ variables.

Soit maintenant le système complet (4). On a les intégrales F_{p+1}, \dots, F_n ; la détermination de y_{p+1}, \dots, y_n se ramène donc à la résolution de l'équation fonctionnelle pour $n - p$ variables.

Si l'on connaît n systèmes complets, admettant chacun une seule intégrale, et si toutes ces intégrales sont distinctes, on est conduit à n équations de M. Schröder dans le cas d'une variable unique.



NOTE.

Nous allons démontrer le théorème I du Chapitre VII.

On a

$$\begin{aligned}
 (1) \quad P_{\alpha}^{(1)} - kP_{\alpha} &= \sum (k_1 f_{11})^{\mu_{11}} (k_1 f_{12} + A_{21}^1 f_{11})^{\mu_{12}} (k_1 f_{1r_1} + A_{r_1 1}^1 f_{11} + \dots + A_{r_1 r_1 - 1}^1 f_{1r_1 - 1})^{\mu_{1r_1}} \\
 &\quad \times (k_2 f_{21})^{\mu_{21}} \dots (k_2 f_{2r_2} + A_{r_2 1}^2 f_{21} + \dots + A_{r_2 r_2 - 1}^2 f_{2r_2 - 1})^{\mu_{2r_2}} \\
 &\quad \dots \dots \dots \\
 &\quad \times (k_p f_{p1})^{\mu_{p1}} \dots (k_p f_{pr_p} + A_{p1}^p f_{p1} + \dots + A_{pr_p - 1}^p f_{pr_p - 1})^{\mu_{pr_p}} \\
 &\quad \times \sum_1^{1+t+\sum \alpha_i r_i - \sum j \mu_{ij}} c_{\mu_{11} \mu_{12} \dots \mu_{1r_1} \dots \mu_{p1} \mu_{p2} \dots \mu_{pr_p}}^i (1+b)^i \\
 &= k \sum f_{11}^{\mu_{11}} f_{12}^{\mu_{12}} \dots f_{1r_1}^{\mu_{1r_1}} f_{21}^{\mu_{21}} \dots f_{2r_2}^{\mu_{2r_2}} \dots f_{pr_p}^{\mu_{pr_p}} \sum_1^{1+t+\sum \alpha_i r_i - \sum j \mu_{hj}} c_{\mu_{11} \mu_{12} \dots \mu_{pr_p}}^i b^i.
 \end{aligned}$$

Dans cette expression, considérons le coefficient C de

$$f_{11}^{\sigma_{11}} \dots f_{1r_1}^{\sigma_{1r_1}} \dots f_{pr_p}^{\sigma_{pr_p}} b^m.$$

Il y a lieu d'abord d'observer que les termes de $P_{\alpha}^{(1)}$, obtenus en prenant les produits des plus hautes puissances de k_1, k_2, \dots, k_p par la plus haute puissance de b dans $(1+b)^i$, disparaissent avec les termes correspondants de kP_{α} . Les autres coefficients sont des polynomes par rapport aux k_1, \dots, k_p, A et c ; ils sont linéaires et homogènes par rapport aux c . Un terme d'un pareil polynome peut contenir une lettre A ou n'en pas contenir. Il est dit de *seconde* ou de *première sorte*, suivant le cas.

Pour que C contienne un terme de première sorte, il faut que les μ soient égaux aux σ correspondants et que

$$m < 1 + t + \sum \alpha_h r_h - \sum j \sigma_{hj}.$$

A ces conditions, on aura des termes contenant des quantités c_{σ}^i où

$$m < i \leq 1 + t + \sum \alpha_h r_h - \sum j \sigma_{hj}.$$

Quels sont, dans C, les termes de seconde sorte? Soit ν_{hj} l'exposant de la puissance de f_{hq} prise dans

$$(k_h f_{hr_h} + A_{r_{h1}}^h f_{h1} + \dots + A_{r_{hr_h-1}}^h f_{hr_h-1})^{\mu_{hj}},$$

et formons le Tableau

	f_{h1}	f_{h2}	\dots	f_{hq}	\dots	f_{hr_h}
μ_{h1}	ν_{h11}					
μ_{h2}	ν_{h21}	ν_{h22}				
\dots	\dots	\dots				
μ_{hj}	ν_{hj1}	ν_{hj2}	\dots	$\nu_{hj q}$		
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots		
μ_{hr_h}	$\nu_{hr_h 1}$	$\nu_{hr_h 2}$	\dots	$\nu_{hr_h q}$	\dots	$\nu_{hr_h r_h}$
	σ_{h1}	σ_{h2}	\dots	σ_{hq}	\dots	σ_{hr_h}

Il faut que l'on n'ait pas à la fois, pour les p valeurs de h ,

$$\mu_{h1} = \nu_{h11}, \quad \mu_{h2} = \nu_{h22}, \quad \dots, \quad \mu_{hr_h} = \nu_{hr_h r_h}.$$

Les σ étant donnés, il faut prendre pour ν des valeurs telles que les sommes des éléments des colonnes soient égales aux σ correspondants. Les μ sont ensuite, sous la condition qu'on vient d'énoncer, égaux aux sommes des éléments des lignes. Si l'on obtient le système donné, on avait affaire à un terme de la seconde sorte, pourvu, bien entendu, que

$$m \leq 1 + t + \sum \alpha_h r_h - \sum j \mu_{hj}.$$

Dans ce terme, on aura un c_μ^i où

$$m \leq i \leq 1 + t + \sum \alpha_h r_h - \sum j \mu_{hj}.$$

Or, il résulte visiblement du Tableau que

$$\sum j \mu_{hj} \geq \sum j \sigma_{hj},$$

l'égalité n'ayant lieu que lorsque les μ sont égaux aux σ . Donc, qu'il s'agisse d'un terme de première ou de deuxième sorte, on doit avoir

$$m < 1 + t + \sum \alpha_h r_h - \sum j \sigma_{hj}.$$

Le minimum de $\sum j\sigma_{hj}$ dans l'expression (1) entière est

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p = \alpha,$$

et son maximum $\sum r_h \alpha_h$, de sorte que, si l'on pose

$$(2) \quad d = 1 + t + \sum \alpha_h r_h - \sum j\sigma_{hj} - m,$$

on a à coup sûr les inégalités

$$(3) \quad 1 \leq d \leq 1 + t - \alpha + \sum \alpha_h r_h$$

et

$$(4) \quad \left. \begin{array}{l} 1 + t - d \\ 0 \end{array} \right\} \leq m \leq 1 + t + \sum \alpha_h r_h - \alpha - d.$$

Inversement, si l'on choisit une valeur de d , puis une valeur de m satisfaisant aux inégalités (3) et (4), il y a certainement, dans l'expression (1), des termes correspondants et, de plus, *il figure parmi eux au moins un terme de première sorte*. On déduit, en effet, des inégalités (4) et de l'égalité (2)

$$\alpha \leq \sum j\sigma_{hj} \leq \sum \alpha_i r_i.$$

Il y a donc au moins un système de valeurs de σ , appartenant à des termes de (1). Et puisque, en vertu de (3), $1 \leq d$,

$$m < d + m = 1 + t - \sum \alpha_h r_h - \sum j\sigma_{hj},$$

ce qui prouve l'existence de termes de la première sorte.

Cela posé, considérons une valeur de d , puis une de m , et enfin un système de nombres σ . Si l'on augmente d de 1 et qu'on diminue m de 1, on ne modifie pas les σ . Posons $d' = d + 1$, $m' = m - 1$. Supposons qu'on puisse choisir la valeur d' , à chaque m correspondra un nombre m' acceptable (et on les aura tous ainsi), sauf à la valeur $m = 1 + t - d$, si $1 + t - d = 0$. Voyons quelle modification ce changement apporte aux coefficients des

$$f_{11}^{\sigma_1} \dots f_{pp}^{\sigma_p} b^m.$$

Termes de la première sorte. — On avait c_σ^i où $m < i \leq d + m$; on aura c_σ^i où $m - 1 < i \leq d + m$. Les termes supplémentaires seront par suite c_σ^m , et cela si $m \geq 1$; il en existera donc dès que $1 + t - d > 0$. Donc,

à chaque expression nouvelle $f_{i_1}^{\sigma_{i_1}} \dots f_{p_1}^{\sigma_{p_1}} b^m$, introduite correspond un nouveau coefficient dans les termes de première sorte.

Termes de la deuxième sorte. — On avait c_{μ}^i où

$$m \leq i \leq 1 + t + \sum \alpha_h r_h - \sum j \mu_{hj}.$$

On aura c_{μ}^i où

$$m - 1 \leq i \leq 1 + t + \sum \alpha_h r_h - \sum j \mu_{hj}.$$

On pourra donc avoir des coefficients supplémentaires c_{μ}^{m-1} , si $m \geq 2$.

Ces remarques faites, pour qu'on puisse avoir l'identité annoncée dans l'énoncé du théorème, il suffit que les équations obtenues en égalant les coefficients des expressions $f_{i_1}^{\sigma_{i_1}} \dots f_{p_1}^{\sigma_{p_1}} b^m$ dans les deux membres admettent une solution par rapport aux c . Or on va ranger ces équations dans un ordre tel que lorsqu'on passe de l'une d'elles à la suivante, il s'introduit une nouvelle inconnue, et cela dans un terme de la première sorte : on pourra donc ainsi calculer successivement toutes les inconnues.

Soit d'abord $d = 1$. Posons $m = t + \theta$, θ prenant l'une après l'autre les valeurs 0, 1, 2, ... Les coefficients entrant dans un terme de la première sorte sont les c_{σ}^i , où

$$t + \theta < i \leq 1 + t + \theta,$$

c'est-à-dire où $i = 1 + t + \theta$. Quant aux autres c_{μ}^i , on a pour eux

$$t + \theta \leq i \leq 1 + t + \sum \alpha_h r_h - \sum j \mu_{hj} < 1 + t + \theta$$

ou bien

$$i = t + \theta.$$

Si l'on appelle $d_1 + m_1$ la quantité

$$1 + t + \sum \alpha_h r_h - \sum j \mu_{hj},$$

on a

$$d_1 + m_1 < d + m = 1 + t + \theta.$$

Pour $\theta = 0$, il n'y a pas de valeur de $d_1 + m_1$, puisque $d + m$ est minimum. Donc, au début, pas de termes de seconde sorte.

En général, soit

$$d_1 + m_1 = 1 + t + \theta_1;$$

les coefficients de deuxième sorte correspondants ont été calculés comme

coefficients de première sorte pour $d = 1$, $m = t + \theta_1$ ($\theta_1 \leq \theta - 1$). Donc, si l'on considère les équations obtenues en prenant $d = 1$, puis $m = t$, $t + 1$, $t + 2$, ..., celles qui correspondent à une même valeur de m étant classées dans un ordre arbitraire, elles déterminent successivement autant de quantités c inconnues.

On opérera de même en prenant $d = 2$, puis $d = 3$, etc. D'une manière générale, supposons écrites toutes les équations jusqu'à certaines valeurs de d et de m , et remplaçons d par $d + 1$, et m par $m - 1$ (si $m > 0$). Nous savons qu'à chaque nouvelle équation introduite correspond une nouvelle inconnue dans un terme de première sorte. Mais, ceux de seconde sorte ne contiennent que des quantités connues. En effet, supposant $m \geq 2$, soit une quantité $c_{\mu}^{m'-m-1}$ d'un terme de seconde sorte. Comme plus haut, $d_1 + m_1 < d + m$. La quantité en question a donc figuré dans les termes de première sorte, quand on remplace m par $m - 2$ et d par $d_1 + m_1 - (m - 2)$, nombre au plus égal à $d + 1$ et au moins égal à 1. Elle a, par suite, été calculée avant qu'on arrive aux équations qui correspondent à $d + 1$ et à $m - 1$.

L'identité annoncée est donc établie. Il est d'ailleurs aisé de voir que le polynôme P_{α} est unique, c'est-à-dire que *toutes les quantités c* ont été calculées par le procédé indiqué.

