MÉMOIRE

SUR LES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE

DONT L'INTÉGRALE EST DE LA FORME

$$h(x)[y-g_1(x)]^{\lambda_1}[y-g_2(x)]^{\lambda_2}\ldots[y-g_n(x)]^{\lambda_n}=C,$$

PAR M. P. PAINLEVÉ,

Professeur adjoint à la Faculté des Sciences de Paris.

1. Dans mes recherches sur les équations du premier ordre dont l'intégrale ne prend qu'un nombre fini de valeurs autour des points critiques mobiles, j'ai été amené à m'occuper des équations différentielles

$$\frac{dy}{dx}=\frac{P(y,x)}{Q(y,x)}\equiv\frac{a_p y^p+\ldots\ldots\ldots\ldots+a_0}{y^q+b_{q-1}y^{q-1}+\ldots+b_0} \tag{1}$$

(où les a, b sont des fonctions analytiques quelconques de x), dont l'intégrale se laisse mettre sous la forme

$$C=h(x)[y-g_1(x)]^{\lambda_1}\ldots[y-g_n(x)]^{\lambda_n}\equiv F(y,x); \tag{2}$$

les g et h sont certaines fonctions de x, les λ des constantes numériques et C la constante d'intégration, [les $g(x)$ sont, bien entendu, supposés distincts]. Une Note récente de M. Korkine (*voir* les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 26 mai 1896) me donne l'occasion de rassembler les résultats un peu épars que j'ai obtenus sur cette classe d'équations [1].

Je rappelle d'abord quelques définitions et résultats bien simples, mais qui jouent dans la suite un rôle fondamental.

[1] *Voir* mon *Mémoire sur les équations du premier ordre*, Chap. V; les *Comptes rendus* du 18 janvier 1892 et de juin, juillet 1896; enfin mes *Leçons de Stockholm* (octobre 1895), 10 et 11e Leçons.

2. Je nomme *valeur remarquable* de la constante C toute valeur numérique C_i de C finie et différente de zéro, pour laquelle l'équation (2) en y a, quel que soit x, au moins une *racine multiple* (d'ordre l, $l > 1$), soit $y = k(x)$; ou encore toute valeur C_i qui satisfait à la même condition pour l'équation transformée en $\frac{1}{y} = z$ $\Big[$c'est-à-dire pour laquelle l'équation (2), où l'on change y en $\frac{1}{z}$, admet $z = 0$ comme racine multiple d'ordre l, quel que soit $x\Big]$. Dans l'un et l'autre cas, j'appelle l *l'ordre de multiplicité* de la solution *remarquable* $y = k(x)$ ou $y = \infty$.

Ces définitions admises, soit $S(y, x)$ le produit $\Pi[y - k(x)]^{l-1}$ étendu à *toutes* les solutions remarquables (finies), et soit s la somme $\Sigma(l-1)$ étendue à toutes les solutions remarquables (y compris, s'il y a lieu, la solution $y = \infty$). Représentons enfin par

$$\frac{A\,dy - B\,dx}{(y-g_1)(y-g_2)\ldots(y-g_n)}$$

la différentielle totale $\frac{dF}{F}$ de $\log F(y, x)$. Si la fraction $\frac{P}{Q}$ rationnelle en y est irréductible (comme on le peut toujours supposer), on a identiquement

$$(3)\qquad \begin{cases} A(y, x) \equiv \alpha(x)\,S(y, x)\,Q(y, x), \\ B(y, x) \equiv \alpha(x)\,S(y, x)\,P(y, x). \end{cases}$$

Si r désigne le plus grand des deux nombres q et $p - 2$, r et n sont reliés par l'égalité

$$(4)\qquad r = n - 1 - s, \quad \text{pour} \quad \Sigma\lambda \neq 0,$$

$$(5)\qquad r = n - 2 - s, \quad \text{pour} \quad \Sigma\lambda = 0.$$

En effet, si l'on effectue sur y une transformation homographique à coefficients numériques quelconques, l'intégrale (2) prend une forme $(2)'$ où le nombre n' des facteurs $(y - g)$ est égal à n si $\Sigma\lambda$ est nul, et à $(n + 1)$ si $\Sigma\lambda$ n'est pas nul. D'autre part, on a, dans tous les cas,

$$(6)\qquad r = n' - 2 - s.$$

Pour la démonstration de ces résultats, je renvoie à mon *Mémoire sur les équations du premier ordre* (p. 190-193). La formule (6) n'est, d'ailleurs, qu'une généralisation d'une formule bien connue de M. Darboux. J'appellerai, dans ce qui suit, r le degré du coefficient différentiel $\frac{P}{Q}$.

Observons que, quand on a effectué préalablement sur y une transformation homographique à coefficients numériques quelconques, $\Sigma\lambda$ est nul, p est égal à $q+2$, q égal à $n-2-s$; enfin $y=\infty$ n'est pas solution de (1) du moment que (1) ne se réduit pas à $y'=0$.

3. Quand l'intégrale de (1) est de la forme (2), le binome $P\,dx-Q\,dy$ admet, d'après cela, le *multiplicateur* $\dfrac{\alpha S(y,x)}{(y-g_1),\ldots,(y-g_n)}\equiv M(y,x)$, où le degré du numérateur αS est *au plus égal à* $n-1-r$, et où S n'est divisible par aucun des facteurs $y-g_i$. Si le binome $P\,dx-Q\,dy$ admet deux multiplicateurs *distincts* [1] M et M_1 qui soient des fractions rationnelles en y, le quotient $\dfrac{M}{M_1}$ est une intégrale première de (1) et en même temps une fraction rationnelle en y, soit $R(y,x)$. On a donc

$$R(y,x)=\text{const.},\tag{7}$$

et cette égalité montre que $y(x)$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs autour des points critiques mobiles.

Quand il en est ainsi, on peut toujours supposer la forme (7) *irréductible;* autrement dit, si ν désigne le nombre de valeurs de $y(x)$ qui se permutent effectivement autour des points critiques mobiles, il est loisible de donner à l'intégrale la forme

$$\rho(y,x)=c,\tag{8}$$

où ρ est une fonction rationnelle en y de degré ν. Toutes les formes (7) s'obtiennent alors en prenant pour R une fonction *rationnelle* quelconque de ρ, soit $R=\varphi(\rho)$. Toutes les formes *irréductibles* de l'intégrale s'obtiennent en effectuant sur ρ une transformation homographique à coefficients numériques (*voir* mon *Mémoire sur les équations du premier ordre,* Chap. I). Toutes les formes (2) de l'intégrale s'obtiennent en prenant pour F

$$F=\gamma(\rho-\alpha_1)^{\mu_1}(\rho-\alpha_2)^{\mu_2}\ldots(\rho-\alpha_j)^{\mu_j},\tag{9}$$

$\alpha_1,\ldots,\alpha_j,\ \mu_1,\ldots,\mu_j,\ \gamma$ étant des constantes numériques arbitrairement choisies [2].

---

[1] J'entends : qui ne diffèrent pas seulement par un facteur *constant.*

[2] Soit, en effet, x_0 une valeur de x pour laquelle les déterminations considérées des coefficients de ρ et de F sont holomorphes; soit y_1^0 une valeur d'une intégrale $y_1(x)$ pour

Dans le cas où le binome $P\,dx - Q\,dy$ n'admet, au contraire, *qu'un seul multiplicateur qui soit rationnel en* y [1], F ne saurait être algébrique en y. Toutes les formes (2) qu'on peut donner à l'intégrale se déduisent d'une d'entre elles en remplaçant F et C par γF^{μ}, γC^{μ} (γ et μ désignant deux constantes numériques quelconques). Car soient $F = C$, $F_1 = C_1$ deux formes (2) données à l'intégrale de (1); à F et à F_1 correspondent respectivement deux multiplicateurs M, M_1 rationnels en y, et l'on a

$$\frac{dF}{F} = M(P\,dx - Q\,dy), \qquad \frac{dF_1}{F_1} = M_1(P\,dx - Q\,dy).$$

Par hypothèse, $\frac{M_1}{M}$ est une constante μ; d'où la relation

$$\mu\frac{dF}{F} = \frac{dF_1}{F_1} \quad \text{ou} \quad F_1 = \gamma F^{\mu}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Ces remarques préliminaires vont nous permettre de traiter complètement plusieurs questions importantes.

PREMIER PROBLÈME.

4. Le problème que nous traiterons en premier lieu s'énonce ainsi :

Étant donnée une équation (1), 1° *reconnaître si son intégrale peut se mettre sous la forme* (2) *où l'entier n est donné, et où les* λ *sont des*

$x = a_0$, et soient c_0, C_0 les valeurs de ρ et de F pour $x = x_0$, $y = y_1^0$. Partons du point x_0 dans le plan des x et revenons-y (sans tourner autour d'aucun point critique fixe), de manière à obtenir successivement en x_0 les ν valeurs $y_1^0, \ldots, y_\nu^0$ de $y_1(x)$ qui se permutent autour des points critiques mobiles. On a

$$\rho(y_i^0, x_0) = c_0, \qquad F(y_i^0, x_0) = C_0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu),$$

en choisissant convenablement la détermination des $(y_i^0 - g_1^0)^{\lambda_1}\ldots$. Par suite,

$$\begin{aligned} C_0^\nu = F(y_1^0, x_0)\ldots F(y_\nu^0, x_0) &= h_0^\nu \prod_{j=1}^{j=n} [(y_1^0 - g_j^0)\ldots(y_\nu^0 - g_j^0)]^{\lambda_j} \\ &= h_0^\nu \beta_1(c_0, x_0)^{\lambda_1}\ldots\beta_n(c_0, x_0)^{\lambda_n}, \end{aligned}$$

les β étant rationnels en c_0, ou enfin, comme x_0 doit disparaître,

$$C = \beta_1(c)^{\mu_1}\ldots\beta_j(c)^{\mu_j},$$

les β étant rationnels en c et les μ désignant des constantes numériques. C. Q. F. D.

(1) Abstraction faite de ceux qui s'en déduisent en multipliant M par un facteur constant.

constantes numériques inconnues, les g_j, h des fonctions inconnues de x; 2° quand il en est ainsi, calculer les g_i, h en fonction des coefficients de (1).

Quand l'intégrale de (1) peut se mettre sous la forme (2), le binome $P\,dx - Q\,dy$ admet un multiplicateur M de la forme

$$\frac{\alpha(x)\,S(y,x)}{(y-g_1)\dots(y-g_n)} \equiv \frac{\alpha(x)\,S(y,x)}{N(y,x)},$$

où S est un polynome en y de degré $(n-r-1)$ au plus, dont aucune racine ne coïncide avec $y=g_1$ ou $y=g_2$, ..., $y=g_n$. Inversement, s'il existe un tel multiplicateur M (où les n fonctions g_i sont distinctes), l'intégrale de (1) se laisse mettre sous la forme (2). En effet, considérons la différentielle totale exacte

$$J = \frac{\alpha S}{N(y,x)}(P\,dx - Q\,dy).$$

Pour x constant, l'intégrale $\int \frac{\alpha S Q\,dy}{N(y,x)}$ peut s'écrire

$$\int\left[\frac{\lambda_1}{y-g_1}+\frac{\lambda_2}{y-g_2}+\dots+\frac{\lambda_n}{y-g_n}\right]dy = \Sigma\lambda_i\log(y-g_i)+\varphi(x).$$

Je dis que les λ_i sont des constantes numériques; en effet, si λ_1, par exemple, dépendait de x, on aurait

$$\frac{d\lambda_1}{dx}\log(y-g_1)+\psi(y,x) \equiv -\frac{\alpha SP}{N},$$

ψ désignant une fonction de y rationnelle pour $y=g_1$, égalité absurde si $\frac{d\lambda_1}{dx}$ n'est pas nul. Il suit de là que J est de la forme

$$\Sigma\lambda_i\log(y-g_i)+\varphi(x),$$

et l'égalité $e^J = \text{const.}$ donne, en posant $h=e^\varphi$,

$$h(x)(y-g_1)^{\lambda_1}\dots(y-g_n)^{\lambda_n} = C,$$

les λ étant des constantes.

Pour que l'intégrale de l'équation (1) se laisse mettre sous la forme (2), il faut donc et il suffit que l'équation aux multiplicateurs M, à savoir

$$\frac{\partial \log M}{\partial x} Q + \frac{\partial \log M}{\partial y} P + \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \tag{10}$$

admette une solution de la forme $\frac{K(y, x)}{(y-g_1)\ldots(y-g_n)}$, où K désigne un polynome en y de degré $n-r-1$ au plus, et les g des fonctions *distinctes* de x. Si l'on remplace M par une telle expression dans l'équation (10), on obtient un certain système de relations algébriques (m) entre les fonctions g_i, les coefficients $k_j(x)$ de K, les dérivées premières g'_i, k'_j et les coefficients $a(x)$, $b(x)$ de l'équation (1) et leurs dérivées premières. On sait reconnaître algébriquement si ces relations différentielles (m) entre les g_i, k_j sont compatibles (les g_i étant supposés distincts). Quand il en est ainsi, l'intégrale de (1) peut se mettre sous la forme (2); mais deux cas sont à distinguer suivant que les relations (m) définissent ou non plusieurs multiplicateurs M distincts.

Dans le second cas, la fraction $\frac{K(y, x)}{(y-g_1)\ldots(y-g_n)}$ étant supposée irréductible, les fonctions $g_1, \ldots, g_n$ sont données *algébriquement* en fonction des coefficients a, b de (1) (et de leurs dérivées), ainsi que les rapports des constantes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. D'autre part, une fois les g_i, λ_i déterminés, h est donné par *une quadrature logarithmique;* car soit

$$h(x)(y-g_1)^{\lambda_1}\ldots(y-g_n)^{\lambda_n} = \text{const.}, \qquad h_1(x)(y-g_1)^{\lambda_1}\ldots(y-g_n)^{\lambda_n} = \text{const.}$$

deux formes de l'intégrale; toute solution $y(x)$ de (1) vérifie la relation $\frac{h(x)}{h_1(x)} = \text{const.}$, ce qui est absurde si $\frac{h}{h_1}$ n'est pas une constante absolue; la fonction h vérifie donc une relation

$$\frac{dh}{dx} = h\varphi(x),$$

où φ désigne une fonction algébrique des coefficients de l'équation (1) (et de leurs dérivées).

Dans le premier cas, les relations (m) définissent plusieurs multiplicateurs distincts, l'intégrale générale $y(x)$ de (1) ne prend qu'un nombre fini ν de valeurs autour des points critiques mobiles ($\nu \leqq 2n-r-1$). On sait reconnaître, *à l'aide d'un nombre fini d'opérations algébriques,* si l'intégrale générale $y(x)$ d'une équation (1) donnée ne prend qu'un nombre *donné* ν de valeurs autour des points critiques mobiles, et *ramener, dans ce cas, l'équation à une équation de Riccati*

$$\frac{du}{dx} = \alpha u^2 + \beta u + \gamma \tag{11}$$

par une transformation

$$u = \frac{y^\nu + A_{\nu-1} y^{\nu-1} + \ldots + A_1 y}{B_{\nu-1} y^{\nu-1} + \ldots + B_1 y + 1} \equiv L(y, x), \tag{12}$$

les A, B, α, β, γ s'exprimant *rationnellement* en fonction des coefficients de (1) (et de leurs dérivées) ([1]).

En définitive, *on sait reconnaître algébriquement si l'intégrale d'une équation* (1) *donnée peut se mettre sous la forme* (2) *où l'entier n est donné, et la détermination des fonctions g_i, h dépend soit d'une quadrature, soit d'une équation de Riccati.*

Observons que les g_i s'obtiennent *algébriquement* et h par une *quadrature*, à moins que l'intégrale ne puisse se mettre sous une forme (2), *où tous les exposants λ soient des entiers* (*positifs ou négatifs*).

5. *Remarques.* — Complétons ce théorème par quelques remarques : tout d'abord, *quand l'intégrale de* (1) *peut se mettre sous une forme* (2) *où tous les λ sont distincts, les g_i se calculent algébriquement en fonction des coefficients de* (1) (*et de leurs dérivées*), *à moins que l'équation* (1) *ne soit une équation de Riccati.*

La chose résulte de ce qui précède si la forme (2) est irréductible à une forme (2)' où les λ soient des entiers. Supposons, au contraire, que l'intégrale de (1) puisse se mettre sous la forme

$$\rho(y, x) = c,$$

où ρ est rationnel en y; toutes les formes (2) se déduisent d'une forme irréductible, soit $\rho = c$, par une transformation

$$F = \gamma(\rho - \alpha_1)^{\mu_1} \ldots (\rho - \alpha_j)^{\mu_j},$$

les α, μ, γ étant des constantes. Soit ν le degré de ρ en y; il est loisible de

---

([1]) *Voir* mon *Mémoire sur les équations du premier ordre* (Chap. V).

supposer que le numérateur et le dénominateur de ρ ont leurs ν racines finies et distinctes; si c_1 est une valeur *remarquable* de la constante, une solution de (1), soit $y_1(x)$, vérifie l'égalité $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$, d'après la relation

$$L(y, x) = u = \frac{\varphi(x)c + \psi}{\varphi_1(x)c + \psi_1};$$

y_1 et la fonction u correspondante $[u(x) = L(y_1, x)]$ sont donc connues algébriquement en fonction des coefficients; il suit de là que, *s'il existe une valeur remarquable, l'équation* (1) *s'intègre par deux quadratures; s'il existe deux valeurs remarquables, par une quadrature; s'il en existe trois, l'équation* (1) *s'intègre algébriquement*. (*Voir* le Mémoire cité, p. 190-193.)

Ceci posé, ν est supérieur à 1 si l'équation (1) n'est pas une équation de Riccati. Considérons toutes les valeurs c' de c pour lesquelles les racines $y(x)$ de l'égalité $\rho = c$ sont toutes de multiplicité différente; ces valeurs sont toutes des valeurs remarquables de la constante, sauf peut-être une seule pour laquelle une racine au moins devient infinie; mais, dans ce cas, $u = \infty$ est une solution de l'équation de Riccati (11) qui se réduit à une équation *linéaire*. On connaît donc autant de solutions de l'équation (11) qu'il y a de valeurs c' distinctes. S'il y en a trois, l'équation (1) s'intègre algébriquement. S'il y en a deux, on peut faire en sorte que ce soient $c = 0$, $c = \infty$. La fonction

$$F = \gamma(\rho - \alpha_1)^{\mu_1} \ldots (\rho - \alpha_j)^{\mu_j} \equiv h(x)\,\Pi(y - y_i)^{\lambda_i}$$

aura des exposants λ_i égaux, à moins que les constantes $\alpha_1, \ldots, \alpha_j$ ne se réduisent à la seule valeur zéro. La fonction F se réduit donc à $\gamma\rho^\mu$, γ désignant une constante. D'autre part, si l'on écrit ρ sous la forme

$$k(x)\frac{[y - l_1(x)]\ldots[y - l_\nu(x)]}{[y - m_1(x)]\ldots[y - m_\varpi(x)]} \qquad (\varpi \leqq \nu),$$

les $l_1, \ldots, l_\nu, m_1, \ldots, m_\varpi$ (qui ne sont pas tous distincts) sont connus algébriquement, car les valeurs $y = l_i$ (ou $y = m_i$) vérifient l'équation (12) où l'on remplace u par la solution connue u_1 de (11) correspondant à $c = 0$ (ou par la solution u_2 correspondant à $c = \infty$). La fonction $k(x)$ est donnée moyennant la quadrature logarithmique qui achève l'intégration de l'équation de Riccati (11) dont on connaît deux solutions.

Enfin, s'il existe moins de deux valeurs c' de c, il est impossible (ν étant plus grand que 1) de donner à l'intégrale la forme (2) où tous les λ soient distincts. Nous avons donc bien démontré ce théorème :

Quand l'intégrale d'une équation donnée (1) *peut se mettre sous une forme* (2) *où tous les exposants sont distincts, les fonctions* g_i *se calculent algébriquement et* $h(x)$ *par une quadrature logarithmique. La seule équation de Riccati fait exception à ce théorème.*

Une autre conséquence des propriétés des valeurs *remarquables* de la constante est la suivante : quand l'intégrale d'une équation (1) se laisse mettre sous la forme (2), n est au moins égal à $r+1$ si $\Sigma\lambda \neq 0$ [1] et à $r+2$ si $\Sigma\lambda = 0$. *Les fonctions g, h s'obtiennent par deux quadratures au plus, sauf dans le cas où n est précisément égal à sa limite inférieure* ($r+1$ *pour* $\Sigma\lambda \neq 0$, $r+2$ *pour* $\Sigma\lambda = 0$). En effet, dès que n dépasse sa limite inférieure, il existe au moins une valeur remarquable.

6. Quand l'intégrale de (1) se laisse mettre sous la forme (2), où F n'est ni rationnel en y ni réductible à la forme rationnelle, les g_i se calculent algébriquement. S'il existe une valeur remarquable c_1, une intégrale $y_1(x)$ vérifie la relation

$$\frac{\partial \log F}{\partial y}(y, x) = 0$$

et, par suite, se calcule algébriquement. La fonction h vérifie l'égalité

$$h(x)(y_1 - g_1)^{\lambda_1} \ldots (y_1 - g_n)^{\lambda_n} = c_1.$$

Convenons d'appeler fonction *quasi algébrique* des variables $x, y, \ldots, v$ toute fonction Φ qui s'exprime algébriquement en $\rho_1^{\lambda_1}, \ldots, \rho_n^{\lambda_n}$, les $\rho_1, \ldots, \rho_n$ désignant des fonctions algébriques de $x, y, \ldots, v$, les λ des constantes. Appelons de même équation *quasi algébrique* toute relation obtenue en annulant une telle fonction Φ. Quand l'intégrale d'une équation (1) se laisse mettre sous la forme $P(x, y) = \text{const.}$, où P est une fonction *quasi algébrique* de y et des coefficients de (1) (et de leurs dérivées), nous dirons que l'équation (1) s'intègre *quasi algébriquement.*

Ces définitions adoptées, proposons-nous de *reconnaître si une équation* (1) *donnée admet une intégrale première de la forme* (2) *où*

---

[1] r désigne toujours le *degré* du coefficient différentiel de (1); *voir* p. 2.

L'ENTIER n EST INDÉTERMINÉ, *sans s'intégrer algébriquement ni quasi algébriquement.*

Deux hypothèses sont possibles, suivant que la forme (2) est irréductible ou réductible à la forme rationnelle en y. Dans le premier cas, il ne saurait exister de valeur remarquable de la constante, autrement l'équation (1) s'intégrerait quasi algébriquement; par suite l'entier n est égal à $r+1$ ou à $r+2$ suivant que $\Sigma\lambda$ est ou non différent de zéro; il est donc limité. Dans le second cas, l'intégrale étant mise sous forme irréductible $\rho(x, y) = c$, il ne saurait exister plus de deux valeurs remarquables de c; il est donc loisible d'admettre qu'en dehors des valeurs $c = 0$, $c = \infty$ il n'y a pas de valeurs remarquables, et si l'on écrit

$$\rho \equiv h(x) \prod_{i=1}^{i=n} (y - y_i)^{\lambda_i},$$

n est encore égal à $r+1$ ou $r+2$. Nous savons donc résoudre *algébriquement* la question précédente.

En particulier, *étant donnée une équation* (1) *dont les coefficients sont algébriques en x, on sait reconnaître, à l'aide d'un nombre fini d'opérations algébriques, si son intégrale $y(x, \mathrm{C})$, est une fonction transcendante qui ne prend autour des points critiques mobiles qu'un nombre fini,* NON DONNÉ, *de valeurs.*

7. Proposons-nous, en dernier lieu, de *déterminer si l'intégrale d'une équation* (1) *donnée peut se mettre sous une forme* (2) (*où n est inconnu*) *irréductible à la forme rationnelle en y.*

Considérons d'abord une équation (1) où P et Q soient des polynomes en x, y, tels que les deux courbes $\mathrm{P} = 0$, $\mathrm{Q} = 0$ du plan des x, y aient toutes leurs intersections (à distance ou infinie) *distinctes*. A chaque intersection M de ces deux courbes, M. Poincaré fait correspondre un exposant σ facile à calculer; par un tel point M il ne passe que deux courbes intégrales d'aspect algébrique, à moins que l'exposant σ ne soit un nombre réel, commensurable et positif, auquel cas M est un *nœud algébrique*. Moyennant la seule hypothèse qu'*aucun des exposants σ ne soit réel, commensurable et positif,* on peut résoudre *algébriquement* le problème précédent. En effet, il est loisible de mettre F sous la forme

$$h(x)\, p_1(x, y)^{\lambda_i} \ldots p_j(x, y)^{\lambda_j};$$

les p_i désignent des polynomes en y, dont les coefficients dépendent algébriquement de x, le premier de ces coefficients étant l'unité, et les λ sont des constantes entre lesquelles n'existe aucune relation linéaire et homogène à coefficients entiers. Le nombre j est au moins égal à 2; sinon, F serait réductible à la forme rationnelle. Ceci posé, je dis d'abord que les p_i sont *rationnels* en x; en effet, dans l'hypothèse où nous nous plaçons, il n'existe (à un facteur constant près) qu'un seul multiplicateur $M(y, x)$ rationnel en y, soit

$$\frac{\alpha(x)[y^s + k_{s-1}(x)\,y^{s-1} + \ldots + k_0(x)]}{y^n + l_{n-1}(x)\,y^{n-1} + \ldots + l_0(x)};$$

les fonctions k, l sont connues rationnellement à l'aide des coefficients de (1) et de leurs dérivées, donc sont rationnelles en x. Les racines $y = g_i(x)$ du dénominateur de M qui donnent lieu au même résidu λ de la fraction MQ en y, sont déterminées par une relation algébrique $\varpi(x, y) = 0$, où ϖ est un polynome en y dont les coefficients dépendent rationnellement des coefficients de (1), de leurs dérivées et de la constante λ. Chaque polynome p_i est un produit de tels polynomes ϖ. *Donc les p_i sont rationnels en x.*

Les deux courbes algébriques $p_1 = 0$, $p_2 = 0$ par exemple (mises sous forme entière) ne peuvent se couper qu'en un des points M communs aux courbes $P = 0$, $Q = 0$. Or, par chacun de ces points M (à distance finie ou non) ne passent que deux courbes intégrales d'aspect algébrique, et l'on calcule immédiatement le nombre τ d'intersections confondues en M de ces deux branches. En faisant la somme de ces nombres τ pour tous les points M, on a une limite supérieure du nombre des points communs aux diverses courbes algébriques $p_i = 0$, donc une limite supérieure du degré en x, y de ces courbes. D'où ce théorème :

Quand aucun des exposants des points singuliers n'est un nombre réel, commensurable et positif, on sait reconnaître algébriquement si l'intégrale de (1) *se laisse mettre sous une forme* (2) *irréductible à la forme rationnelle, sans que l'entier n soit donné.*

Le même raisonnement et le même résultat subsistent évidemment si, dans l'équation (1) donnée, P et Q sont des fonctions algébriques quelconques de x, telles seulement que *l'équation* (1) *ne possède aucun nœud algébrique (à distance finie ou infinie).*

8. *Cas où h est égal à* 1. — Insistons sur le cas particulier où, dans l'équation (2), la fonction h est égale à 1; autrement dit, étudions les équations (1) dont l'intégrale se laisse mettre sous la forme

$$(2)' \qquad C = (y - g_1)^{\lambda_1} \ldots (y - g_n)^{\lambda_n} \equiv F(y, x).$$

Dans ce cas $y = \infty$ est toujours [1] une intégrale de (1). Si la forme (2)′ est irréductible à une forme $\rho = c$ où ρ est rationnel en y, les g_i s'obtiennent algébriquement. Sinon, l'équation (1) se ramène algébriquement à une équation de Riccati (11) qui admet l'intégrale $u = \infty$, c'est-à-dire se réduit à une *équation linéaire*. Donc, *quand l'intégrale d'une équation* (1) *donnée se laisse mettre sous la forme* (2)′, *cette intégrale s'obtient algébriquement, ou par deux quadratures au plus.*

Si $\Sigma\lambda$ n'est pas nul, ces deux quadratures se réduisent à une seule. En effet, soit, dans l'égalité (12), $B_{\nu-i}$ le premier des coefficients $B_{\nu-1}$, $B_{\nu-2}$, ..., qui ne soit pas nul; $B_{\nu-i}$ est connu rationnellement en fonction des coefficients de (1). En remplaçant u par $v = uB_{\nu-i}$, on a

$$\frac{y^\nu + A^1_{\nu-1}(x)\, y^{\nu-1} + \ldots + A^1_1(x)\, y}{y^{\nu-i} + B^1_{\nu-i-1}(x)\, y^{\nu-i-1} + \ldots + B^1_0(x)} = v = c\,\varphi(x) + \varphi_1,$$

ou bien

$$c = \frac{1}{\varphi}\left(\frac{y^\nu + \ldots}{y^{\nu-i} + \ldots}\right).$$

D'autre part, on sait que C est lié à c par une relation de la forme

$$C = C_0 (c - \alpha_1)^{\mu_1} \ldots (c - \alpha_k)^{\mu_k};$$

d'où il suit aussitôt que

$$i(\mu_1 + \ldots + \mu_k) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n,$$

et l'égalité (2)′ doit s'écrire

$$C = C_0\, \varphi^{-\frac{\Sigma\lambda}{i}} (y - g_1)^{\lambda_1} \ldots (y - g_n)^{\lambda_n},$$

---

[1] En effet, si l'on change y en $\frac{1}{z}$, z entre en facteur dans $F\left(\frac{1}{z}, x\right)$ à la puissance $\Sigma\lambda$; donc $z = 0$ est une intégrale si $\Sigma\lambda$ n'est pas nul; si $\Sigma\lambda$ est nul, on a

$$C = (1 - g_1 z)^{\lambda_1} \ldots (1 - g_n z)^{\lambda_n},$$

et $z = 0$ est une intégrale correspondant à $C = 1$.

ce qui exige que φ soit une constante, c'est-à-dire que l'équation linéaire qui donne v se réduise à

$$\frac{dv}{dx} = \gamma(x),$$

γ étant connu rationnellement en fonction des coefficients de (1) (et de leurs dérivées).

9. Observons que quand h est égal à 1, le degré des polynômes en y

$$A = \frac{\partial \log F}{\partial y} \Pi(y - g_i),$$

$$B = \frac{\partial \log F}{\partial x} \Pi(y - g_i),$$

est au plus égal (et est égal en général) à $n - 1$. Quand $\Sigma\lambda$ est nul, le degré de A est au plus égal à $n - 2$; pour que le degré de B s'abaisse d'une unité, il faut que $\Sigma\lambda_i g'_i$ soit nul quel que soit x. Cette remarque faite, établissons ce théorème :

Étant donnée une équation (1) *où le degré en y de* P *est au plus égal au degré en y de* Q, *si cette équation admet une intégrale première de la forme* (2)′, *elle s'intègre algébriquement ou par une seule quadrature.*

D'après ce qui précède, nous n'avons plus à démontrer ce théorème que dans le cas où, la quantité $\Sigma\lambda$ étant nulle, la forme (2)′ est réductible à la forme $\rho(y, x) = c$, où ρ est rationnel en y. Nous pouvons remplacer, dans ce cas, les égalités (11) et (12) par les suivantes

$$\frac{y^\nu + A^1_{\nu-1}(x)\, y^{\nu-1} + \ldots + A^1_1(x)\, y}{y^{\nu-i} + B^1_{\nu-i-1}(x)\, y^{\nu-i-1} + \ldots + B^1_0(x)} = v, \qquad \frac{dv}{dx} = \beta(x) v + \gamma(x).$$

Si, dans l'équation linéaire, on remplace v en x, y, on voit aussitôt que, dans l'équation $\frac{dy}{dx} = \frac{B(y, x)}{A(y, x)}$ ainsi obtenue, le dénominateur est de degré $2\nu - i - 1$, le numérateur renferme un terme de la forme $\beta y^{2\nu - i}$; pour que le degré de P ne dépasse pas celui de Q, il faut donc que β soit nul, c'est-à-dire que v soit donné par l'unique quadrature $v = \int \gamma\, dx$. C. Q. F. D.

10. Démontrons, pour terminer, que *si l'intégrale d'une équation* (1) *quelconque se laisse mettre sous la forme* (2)′ *où tous les* λ *sont distincts, les* g_i *s'obtiennent algébriquement, à moins que l'équation* (1) *ne soit une équation linéaire.*

La chose est démontrée si l'intégrale ne se laisse pas mettre sous la forme $\rho(y, x) = c$, où ρ est rationnel en y. Quand on se trouve au contraire dans ce cas, deux hypothèses sont possibles suivant que, dans la forme irréductible de l'intégrale $\rho(y, x) = c$, le degré ν de ρ en y est égal ou supérieur à 1.

Dans le premier cas, l'intégrale peut s'écrire

$$h(x)\frac{y - k_1(x)}{y - k_2(x)} = c,$$

et comme

$$C = C_0(c - \alpha_1)^{\mu_1}\ldots(c - \alpha_k)^{\mu_k},$$

pour que F soit de la forme $\Pi(y - g_i)^{\lambda_i}$, il faut que $(h - \alpha_1)^{\mu_1}\ldots(h - \alpha_k)^{\mu_k}$ soit une constante, c'est-à-dire que h soit une constante; y vérifie alors *une équation linéaire*.

Quand ν est plus grand que 1 (*voir* p. 8), l'intégrale ne se laisse mettre sous une forme (2) où tous les λ sont distincts que s'il existe au moins deux valeurs de c pour lesquelles on connaît une solution de (1); s'il en existe trois, l'équation (1) s'intègre algébriquement; s'il en existe deux, soit $c = 0$, $c = \infty$, on a

$$C = C_0 c^{\mu},$$

et puisque ρ est de la forme

$$h(x)\frac{[y - l_1(x)]\ldots[y - l_\nu(x)]}{[y - m_1(x)]\ldots[y - m_\varpi(x)]}, \qquad (\varpi \leqq \nu),$$

$h(x)$ doit être une constante; comme les $l(x)$, $m(x)$ sont connus algébriquement (*voir* p. 8), l'équation (1) s'intègre algébriquement. Nous avons donc bien établi que, si les λ_i dans (2)' sont *tous distincts*, les g_i s'obtiennent *algébriquement*, sauf dans le cas où (1) est une équation *linéaire*.

DEUXIÈME PROBLÈME.

11. Quand on effectue sur $y(x)$ une transformation homographique dont les coefficients sont des fonctions arbitrairement choisies de x, l'équation (1) prend la forme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{r+2}\, y^{r+2} + a_{r+1}\, y^{r+1} + \ldots + a_0}{y^r + b_{r-1}\, y^{r-1} + \ldots + b_0};$$

d'autre part, la relation

$$(2) \qquad h(x)[y - g_1]^{\lambda_1}\ldots[y - g_n]^{\lambda_n} = \text{const.}$$

garde la même forme si $\Sigma\lambda$ est nul; elle se transforme en une relation analogue où n est augmenté d'une unité et où $\lambda_{n+1} = -(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)$, si $(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)$ est différent de zéro.

D'après cela, posons-nous le problème suivant :

Problème (A). — *Former toutes les équations*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{r+2}(x)\, y^{r+2} + a_{r+1}(x)\, y^{r+1} + \ldots + a_0(x)}{y^r + b_{r-1}(x)\, y^{r-1} + \ldots + b_0(x)} \tag{1}$$

(de degré r donné) dont l'intégrale générale se laisse mettre sous la forme

$$C = h(x)[y - g_1]^{\lambda_1} \ldots [y - g_n]^{\lambda_n} \equiv F(y, x). \tag{2}$$

où l'entier n est donné, ainsi que les exposants λ, *dont la somme est nulle.*

Tout d'abord, n est au moins égal à $r + 2$. Plus généralement (*voir* p. 2), soit s la somme $\Sigma(l_i - 1)$, où $l_1, \ldots, l_k$ désignent l'ordre de multiplicité des intégrales remarquables $y_1(x), \ldots, y_k(x)$, (y_1 pouvant être l'∞); on a

$$n = r + 2 + s.$$

Pour qu'il existe une intégrale remarquable d'ordre l, $l - 1$ conditions sont nécessaires entre h et les g; il faut :

1° Que le polynome en y

$$\begin{aligned} A(y) &= (y - g_1) \ldots (y - g_n) \frac{\partial}{\partial y} \log F \\ &\equiv \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i [y - g_1] \ldots [y - g_{i-1}][y - g_{i+1}] \ldots [y - g_n] \end{aligned}$$

ait une racine multiple d'ordre $l - 1$, soit $y = y_1$, d'où $l - 2$ conditions *algébriques* obtenues en éliminant y_1 entre les équations

$$A(y_1) = 0, \qquad \frac{\partial A}{\partial y}(y_1) = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial^{l-2} A}{\partial y^{l-2}}(y_1) = 0;$$

2° Que cette racine multiple soit une intégrale remarquable, c'est-à-dire qu'on ait

$$h(x)(y_1 - g_1)^{\lambda_1} \ldots (y_1 - g_n)^{\lambda_n} = C_1 \tag{3}$$

[d'où une relation *quasi algébrique* entre h et les g, obtenue en tirant y_1 de $A(y_1) = 0$ pour porter dans (3)].

D'après cela, considérons un système quelconque d'*entiers positifs* dont la somme soit égale à $n - r - 2$. A chacun de ces systèmes, soit $l_1 - 1, \ldots, l_k - 1$ ou L_k, correspond un type d'équations (1) répondant à la question : ce type s'obtient en prenant pour h et les g des fonctions de x qui satisfont : 1° à $n - r - 2 - k$ relations algébriques (S) qui expriment que $A(y)$ possède k racines distinctes de multiplicité $l_1 - 1, \ldots, l_k - 1$; 2° à k relations quasi algébriques (S') qui expriment que ces k racines sont des intégrales remarquables; ces dernières renferment chacune une constante arbitraire $C_1, \ldots, C_k$. Ces $(n - r - 2)$ relations (S), (S') définissent les $(n + 1)$ fonctions indéterminées $h, g_1, \ldots, g_k$ à l'aide de $(r + 3)$ d'entre elles arbitrairement choisies et des k constantes $C_1, \ldots, C_k$ (dont on peut toujours supposer la première égale à l'unité). Comme les coefficients a, b de (1) s'expriment rationnellement en fonction des h, g_i, $\frac{dh}{dx}$, $\frac{dg_i}{dx}$, on voit que les coefficients des équations (1) cherchées se calculent en fonctions de $(r + 3)$ fonctions arbitraires, de leurs dérivées premières et de $k - 1$ constantes.

En définitive, *à chaque système d'entiers positifs (soit* $l_1 - 1, \ldots, l_k - 1$) *dont la somme est égale à* $n - r - 2$, *correspond un type d'équations* (1) *cherchées qui dépend (sous forme connue) de* $r + 3$ *fonctions arbitraires de* x, *de leurs dérivées premières et de* $(k - 1)$ *constantes arbitraires*. On obtient *toutes* les équations (1) cherchées en épuisant *tous les systèmes d'entiers positifs dont la somme est égale à* $n - r - 2$.

Nous discuterons tout à l'heure la compatibilité des relations entre les g, h. Je ferai auparavant quelques remarques.

Si l'on exprime que $A(y)$ est divisible par *le dénominateur* $Q(y, x)$ du coefficient différentiel de (1), on obtient r nouvelles relations algébriques entre h, les g (et les b), relations où les dérivées des h, g ne figurent pas. Ces relations, jointes au système (S), (S') (ce qui donne en tout $n - 2$ relations algébriques ou quasi algébriques), définissent les $(n+1)$ fonctions $h, g_1, \ldots, g_n$ à l'aide de trois d'entre elles et de $b_{r-1}, \ldots, b_0$. *On peut donc se donner arbitrairement le dénominateur* Q *dans l'équation* (1) *cherchée*, et les coefficients du numérateur dépendent encore *de trois fonctions* (et de constantes) arbitraires.

12. Observons que quand la quantité $\Sigma\lambda$ n'est pas nulle dans l'égalité (2), $y = \infty$ est toujours une solution de (1); autrement dit, le degré du numérateur P est au plus égal à $r + 1$. On aurait donc pu, au lieu du problème (A), se poser le problème suivant :

Problème (B). — *Former toutes les équations*

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{a_{r+1}(x)y^{r+1} + \ldots + a_1(x)y + a_0(x)}{y^r + b_{r-1}(x)y^{r-1} + \ldots + b_0(x)}$$

(de degré n donné), dont l'intégrale générale est de la forme

$$(2) \qquad C = h(x)(y-g_1)^{\lambda_1}\ldots(y-g_n)^{\lambda_n},$$

où l'entier n est donné, ainsi que les exposants λ *(dont la somme est différente de zéro).*

En effectuant sur y une transformation homographique quelconque, on est ramené au problème (A). Mais, inversement, le changement de variable $z = \frac{1}{y-g_n}$ ramène le problème (A) au problème (B), en diminuant n d'une unité. La solution donnée pour (A) subsiste pour (B) : les équations (1) dépendent de $(r+2)$ fonctions arbitraires.

D'ailleurs, on peut limiter encore le problème (B) en observant que le changement de y en $\alpha(x)y + \beta(x)$ ne modifie ni la forme (1) ni la forme (2). Il est loisible, d'après cela, d'augmenter y d'une fonction $\beta(x)$ telle qu'après la substitution, la somme $\Sigma\lambda_i g_i$ soit nulle; ensuite, on peut multiplier y par une fonction $\alpha(x)$ telle que, dans (2), $h(x)$ devienne égal à l'unité. Nous ramenons ainsi la forme (2) à la suivante :

$$(2)' \qquad C = (y-g_1)^{\lambda_1}\ldots(y-g_n)^{\lambda_n}, \quad \text{avec} \quad \Sigma\lambda_i \neq 0, \quad \Sigma\lambda_i g_i = 0.$$

L'équation (1) qui se déduit de (2)' s'écrit

$$(1)' \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{y^n\Sigma\lambda_i g_i + \ldots}{y^n\Sigma\lambda_i + \ldots} \equiv \frac{a_{r-1}(x)y^{r-1} + \ldots + a_0}{y^r + b_{r-1}(x)y^{r-1} + \ldots + b_0}.$$

Inversement, si (1) est de la forme (1)', dans l'égalité (2) h et $\Sigma\lambda g$ sont nécessairement des constantes. Il est loisible enfin de supposer $\Sigma\lambda$ égal à 1. D'où ce nouvel énoncé :

Problème (C). — *Déterminer toutes les équations*

$$(1)' \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{a_{r-1}(x)y^{r-1} + \ldots + a_0}{y^r + b_{r-1}(x)y^{r-1} + \ldots + b_0}$$

(de degré r donné) dont l'intégrale est de la forme

$$(2)' \qquad C = (y-g_1)^{\lambda_1}\ldots(y-g_n)^{\lambda_n} \quad [\text{avec les conditions } \Sigma\lambda_i = 1, \ \Sigma\lambda_i g_i(x) \equiv 0],$$

où l'entier n et les exposants λ *sont donnés.*

Supposons formées toutes les équations $(1)'$ de cette nature; soit $(E_{r,n})$ ces équations. Les problèmes (A) et (B) sont résolus par le fait même. Soit, en effet, une équation (1) quelconque *de degré* r,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_p y^p + \ldots + a_0}{y^q + \ldots + b_0}, \tag{1}$$

r désignant, comme nous l'avons dit, le plus grand des entiers $p-2$, q. Si l'on veut former toutes les équations (1) dont l'intégrale générale est de la forme

$$C = h(x)(y-g_1)^{\lambda_1} \ldots (y-g_n)^{\lambda_n}, \tag{2}$$

deux cas sont à distinguer *suivant que* $\Sigma\lambda$ *est nul ou non.*

Si $\Sigma\lambda$ n'est pas nul [problème (B)], toutes les équations (1) cherchées se déduisent, *par la transformation linéaire la plus générale effectuée sur* y, des équations $(E_{r,n})$ (qui correspondent aux mêmes valeurs des exposants λ).

Si $\Sigma\lambda$ est nul [problème (A)], toutes les équations (1) cherchées se déduisent, *par la transformation homographique la plus générale,* des équations $(E_{r,n-1})$ (qui correspondent aux exposants $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$).

Toute la difficulté revient donc à discuter la solution du problème (C).

13. *Discussion du problème* (C). — La relation entre r et n est, dans le cas qui nous occupe $(\Sigma\lambda \neq 0)$:

$$n = r + 1 - s.$$

Exprimons, comme plus haut, qu'il existe k intégrales remarquables, multiples respectivement d'ordre $l_1, \ldots, l_k$, la somme $l_1 - 1 + \ldots + l_k - 1$ étant égale à $n - r - 1$; nous établissons ainsi, entre $g_1, \ldots, g_n$, $(n-r-1)$ relations algébriques ou quasi algébriques qui, jointes à la condition $\Sigma\lambda_i g_i = 0$, déterminent les g en fonction de r d'entre eux, qu'on peut se donner arbitrairement.

Il est toutefois nécessaire de montrer que le système de $n-r$ relations ainsi obtenues entre les g est bien résoluble par rapport à $(n-r)$ d'entre eux.

Pour cela, appelons $y_1, \ldots, y_k$, $y_{k+1}, \ldots, y_{k+r}$ des fonctions indéterminées de x, et exprimons d'abord que l'expression $\Sigma \dfrac{\lambda_i}{y-g_i}$ est de la forme

$$\frac{c(y-y_1)^{l_1-1}\ldots(y-y_k)^{l_k-1}(y-y_{k+1})\ldots(y-y_{k+r})}{(y-g_1)\ldots(y-g_n)}$$

(où $l_1+\ldots+l_k-k+r$ est égal à $n-1$).

Nous formons ainsi n conditions

$$(\sigma)\quad (i=1,2,\ldots,n),\quad \lambda_i=\frac{c(g_i-y_1)^{l_1-1}\ldots(g_i-y_k)^{l_k-1}(g_i-y_{k+1})\ldots(g_i-y_{k+r})}{(g_i-g_1)\ldots(g_i-g_{i-1})(g_i-g_{i+1})\ldots(g_i-g_n)}.$$

qui entraînent la condition $\Sigma\lambda=c$, en sorte qu'on peut garder seulement les $(n-1)$ premières égalités (σ), en y faisant $c=\Sigma\lambda=1$.

Exprimons maintenant que $\Sigma\lambda_i g_i$ est une constante C_0 et que $y_1,\ldots,y_k$ sont des solutions de $(1)'$. Nous formons ainsi un système total de $n+k$ équations entre les $(n+k+r)$ fonctions inconnues $g_1(x),\ldots,g_n(x)$, $y_1(x),\ldots,y_{k+r}(x)$, à savoir le système

$$(\tau)\quad\left\{\begin{aligned}
\lambda_i &= \frac{(g_i-y_1)^{l_1-1}\ldots(g_i-y_k)^{l_k-1}(g_i-y_{k+1})\ldots(g_i-y_{k+r})}{(g_i-g_1)\ldots(g_i-g_{i-1})(g_i-g_{i+1})\ldots(g_i-g_n)}\\
&\equiv \rho_i(g_1,\ldots,g_n;y_1,\ldots,y_{k+r}),\qquad [i=1,2,\ldots,(n-1)],\\
C_0 &= \Sigma\lambda_i g_i=\rho_n(g_1,\ldots,g_n;y_1,\ldots,y_{k+r})\ (^1),\\
C_j &= (y_j-g_1)^{\lambda_1}\ldots(y_j-g_n)^{\lambda_n}=\rho_{n+j}(g_1,\ldots,g_n;y_1,\ldots,y_{k+r})\\
&\qquad (j=1,2,\ldots,k).
\end{aligned}\right.$$

Pour que la forme $(2)'$ soit l'intégrale d'une équation $(1)'$, il faut et il suffit que, les n fonctions *distinctes* $g_1,\ldots,g_n$ étant substituées dans (τ), les équations ainsi obtenues entre $y_1,\ldots,y_{k+r}$ soient compatibles pour certaines valeurs des constantes $C_0, C_1,\ldots,C_k$.

Ceci posé, je vais montrer que les seconds membres $\rho_1,\ldots,\rho_{n+k}$ des égalités (τ) sont des fonctions *indépendantes* des variables $g_1,\ldots,g_n, y_1,\ldots,$ y_{k+r}.

En effet, supposons qu'un au moins des ρ soit fonction des autres, et ajoutons aux équations (τ) les r équations

$$(\theta)\quad\left\{\begin{array}{l}
C_{k+1}=(y_{k+1}-g_1)^{\lambda_1}\ldots(y_{k+1}-g_n)^{\lambda_n}=\rho_{n+k+1}(g_1,\ldots,g_n;y_1,\ldots,y_{k+r}),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
C_{k+r}=(y_{k+r}-g_1)^{\lambda_1}\ldots(y_{k+r}-g_n)^{\lambda_n}=\rho_{n+k+r}(g_1,\ldots,g_n;y_1,\ldots,y_{k+r}).
\end{array}\right.$$

---

(1) ρ_n s'obtient en remplaçant, dans $\Sigma\lambda_i g_i$, λ_n par $1-(\lambda_1+\ldots+\lambda_{n-1})$, puis $\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1}$ par leurs valeurs en $g_1,\ldots,g_n, y_1,\ldots,y_{k+r}$. La même remarque s'applique à $\rho_{n+1},\ldots,\rho_{n+k}$.

A fortiori, les $(n+k+r)$ fonctions ρ ne sont pas distinctes; admettons qu'elles soient liées par i relations et i seulement. Pour un système quelconque de constantes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, $C_0, \ldots, C_{k+r}$, satisfaisant à ces i relations, les équations (τ), (θ) en $g_1, \ldots, y_{k+r}$ se réduisent à $(n+k+r-i)$ équations distinctes et compatibles qui admettent des solutions où tous les g sont distincts et où i des fonctions $g_1, \ldots, g_n, y_1, \ldots, y_{k+r}$ sont choisies arbitrairement. Comme, d'autre part, les g_i une fois déterminés, les fonctions $y_1, \ldots, y_{k+r}$ le sont évidemment, on pourra se donner arbitrairement i des fonctions g, soit $g_1, \ldots, g_i$.

Mais quand les conditions (τ), (θ) sont vérifiées, le degré r de Q dans $(1)'$ est égal à $n-1-(l_1+l_2+\ldots+l_k-k+r)=0$; P (qui est de degré $r-1$) est donc identiquement nul, et l'équation $(1)'$ se réduit à $\frac{dy}{dx}=0$. Comme cette équation doit admettre la solution $y=g_1(x)$, où g_1 est arbitrairement choisi, la conclusion est absurde. Les fonctions $\rho_1, \ldots, \rho_{n+k}$ de $(g_1, \ldots, y_{k+r})$ sont donc indépendantes. C. Q. F. D.

Il suit de là qu'en laissant de côté certaines valeurs exceptionnelles des constantes λ, C, les conditions (τ) définissent $(n+k)$ des fonctions $g_1, \ldots, g_n, y_1, \ldots, y_{k+r}$ en fonction de r des fonctions g arbitrairement choisies. Donc, *les exposants λ étant donnés, à chaque système d'entiers positifs dont la somme est égale à $n-1-r$, soit $l_1-1, \ldots, l_k-1$, correspond un type d'équations $(1)'$ cherchées qui dépend (par des relations connues explicitement) de r fonctions et de k constantes arbitraires.* Il ne peut y avoir d'exception que pour *des valeurs singulières des exposants λ.*

14. C'est le résultat fondamental auquel nous voulions arriver. Avant de le préciser, nous ferons quelques remarques importantes.

En premier lieu, de quelque manière qu'on choisisse les constantes λ, C, les équations (τ) (¹) sont *ou distinctes ou incompatibles*. En effet, si pour un système λ', C' des constantes λ, C, les équations (τ) se réduisent à $(n+k-i)$ équations compatibles et distinctes, on peut encore ajouter à ces équations les équations (θ), et pour des valeurs convenables des $C_{k+1}, \ldots, C_{k+r}$, le système (τ), (θ) en $g_1, \ldots, y_{k+r}$ admettrait des solutions où un au moins des g serait arbitraire, résultat que nous savons absurde.

Levons maintenant deux objections qu'on peut faire au raisonnement précédent. Il est clair d'abord que, toutes les fois que, dans l'intégrale (2),

(¹) Où les g sont assujettis essentiellement à être distincts.

$g_1, \ldots, g_n$ satisfont aux conditions discutées ci-dessus, l'équation $(1)'$ est au plus de degré r. Mais (sous sa forme irréductible) n'est-elle pas nécessairement de degré inférieur? Autrement dit, les conditions que nous avons écrites, nécessaires et suffisantes pour que le degré ne dépasse pas r, n'entraînent-elles pas d'elles-mêmes un abaissement plus considérable? La réponse est immédiate d'après ce qui précède; s'il en était ainsi, une des équations (θ) serait conséquence des équations (τ), ce qui est impossible. Si donc on prend d'une façon quelconque les r fonctions arbitraires $g_1, \ldots, g_r$ dont dépend la solution de (τ), le degré de l'équation $(1)'$ *irréductible* sera exactement égal à r; il ne s'abaissera que pour un choix particulier des fonctions $g_1, \ldots, g_r$.

15. Une objection plus sérieuse est la suivante : le théorème énoncé plus haut s'applique en particulier *au cas* $r = 0$, c'est-à-dire à l'équation $y' = 0$. Il est d'ailleurs évident qu'on peut toujours écrire l'intégrale de cette équation sous la forme

$$(y - C_1)^{\lambda_1} \ldots (y - C_n)^{\lambda_n} = \text{const.},$$

mais cette forme n'est pas irréductible. On peut se demander s'il n'en est pas toujours ainsi dès que n est très grand par rapport à r; autrement dit, si (dès que n dépasse une certaine limite N par rapport au degré r donné), l'intégrale (2) n'est pas nécessairement réductible à une forme analogue où n est au plus égal à N. Nous allons voir qu'*il n'en est rien, dès que r est plus grand que zéro.*

D'une façon précise, convenons de dire que la forme (2) de l'intégrale est *irréductible*, s'il est impossible de la ramener à une forme analogue où n est diminué au moins d'une unité. Quand la forme (2) est *réductible*, la fonction $y(x, C)$ ne prend qu'un nombre *fini* ν de valeurs autour des points critiques mobiles, et vérifie une relation $\rho(y, x) = \text{const.}$, où ρ est une fraction rationnelle en y de degré ν. De plus, on a (*voir* p. 4)

$$F = \gamma(\rho - c_1)^{\mu_1} \ldots (\rho - c_i)^{\mu_i}. \tag{α}$$

Comme $y = \infty$ est une solution de $(1)'$, on peut supposer le numérateur Π_ν de ρ de degré ν en y et le dénominateur $\Pi_{\nu-j}$ de degré $\nu - j$; on a alors

$$\Sigma\lambda = (\nu - j)\Sigma\mu, \qquad \text{d'où} \qquad \Sigma\mu \neq 0.$$

Il est clair, dès lors, que, *si aucun des rapports* $\frac{\lambda_k}{\lambda_l}$ *n'est commensurable, la forme* (2) *est irréductible,* du moment que ν *dépasse l'unité.*

Tout d'abord, si F est de la forme $\gamma\rho^{\mu_1}$, tous les rapports des λ sont commensurables. Si maintenant i est plus grand que 1, les trois équations en y

$$\Pi_{\nu-j}=0, \qquad \Pi_\nu - c_1\Pi_{\nu-j}=0, \qquad \Pi_\nu - c_2\Pi_{\nu-j}=0$$

doivent respectivement avoir une seule racine distincte d'ordre $\nu - j$ pour la première équation, d'ordre ν pour les deux dernières. D'où l'inégalité

$$r \leqq 2 - \nu;$$

si $\nu = 2$, r est nul; l'équation (1)' devrait coïncider avec l'équation $y' = 0$ pour laquelle $\nu = 1$. Si $\nu = 1$, l'équation (1)' est linéaire et, par suite, r est nul; (1)' coïncide avec $y' = 0$.

Le raisonnement précédent est en défaut quand un des rapports $\frac{\lambda_k}{\lambda_l}$ est *commensurable*, mais il est facile de l'étendre au cas où les λ sont seulement supposés *tous distincts*. En effet, dans ce cas, chacun des polynomes $\Pi_{\nu-j}$, $\Pi_\nu - c_1\Pi_{\nu-j}$, $\Pi_\nu - c_2\Pi_{\nu-j}$ doit avoir toutes ses racines de multiplicités distinctes, donc d'ordre triple au moins (sauf deux au plus dont l'une peut être simple, l'autre double). De là résulte aussitôt l'inégalité

$$r \leqq 2\nu - j - 1 - 3\left[1 + \frac{2(\nu-3)}{3}\right] + 2\frac{j}{3}$$

ou bien

$$r \leqq 2 - \frac{j}{3}$$

ou enfin

$$r \leqq 1.$$

L'égalité (α) est donc impossible pour $r > 1$ à moins toutefois que i ne soit égal à 1 et que (α) donne seulement

$$F = \gamma\rho^{\mu_1},$$

auquel cas on peut supposer que F coïncide avec ρ. Est-il possible, dans ce dernier cas, de *réduire* la forme F = const. de l'intégrale? Pour qu'il en fût ainsi, il faudrait que, pour une valeur au moins c_1 de c, le polynome

$$\Pi_\nu - c\Pi_{\nu-j}$$

eût *moins de racines distinctes* qu'un des polynomes Π_ν, $\Pi_{\nu-j}$. Mais toutes les racines de Π_ν, $\Pi_{\nu-j}$ étant de multiplicité distincte, le nombre des racines distinctes pour chacun de ces polynomes est moindre que $2 + \frac{\nu-3}{3}$; il suit de là qu'on devrait avoir

$$r \leqq 2\nu - j - 1 - 2\left[1 + \frac{2(\nu-3)}{3}\right] + \frac{2j}{3} - \left[\nu - 1 - \frac{\nu-3}{3}\right]$$

ou bien

$$r \leqq 1 - \frac{j}{3} < 1.$$

Nous voyons donc que, *les λ étant tous distincts* [1], *la forme* (2) *est nécessairement irréductible, dès que r est plus grand que* 1.

La proposition subsiste pour $r = 1$, sous la condition que non seulement *les λ soient tous distincts*, mais que de plus *trois quelconques des λ aient une somme différente de zéro.* En effet, le raisonnement précédent s'applique sans modification à l'hypothèse où, dans (α), i est égal à 1, et montre que d'ailleurs i ne saurait dépasser 2 : autrement on aurait

$$r \leqq 2 - \frac{j}{3} - \left[1 + \frac{2(\nu-3)}{3}\right],$$

c'est-à-dire

$$r \leqq 1 - \left(\frac{\mu + 2\nu - 6}{3}\right), \qquad \text{d'où} \qquad \nu \leqq 2;$$

pour $\nu = 2$, on voit aussitôt que les valeurs remarquables c_1, c_2 de c abaissent r à zéro. Enfin, si F est de la forme

$$\gamma(\rho - c_1)^{\mu_1}(\rho - c_2)^{\mu_2},$$

les trois égalités

$$\Pi_{\nu-j} = 0, \qquad \Pi_\nu - c_1 \Pi_{\nu-j} = 0, \qquad \Pi_\nu - c_2 \Pi_{\nu-j} = 0,$$

ne peuvent avoir chacune une racine simple sans que trois exposants λ soient égaux à μ_1, μ_2, $-(\mu_1 + \mu_2)$; il ne saurait donc exister, parmi toutes les racines en question, plus de deux racines simples, ni (pour la même raison) plus de deux racines doubles; d'où l'inégalité

$$r \leqq 1 - \frac{\mu}{3} < 1.$$

16. *Complément à la discussion précédente.* — Revenons aux $(n-1)$

(1) Quand plusieurs λ sont égaux, notamment quand tous les λ sont égaux, l'intégrale (2) est encore en général irréductible, mais ne l'est plus *nécessairement*.

égalités

$$(\sigma)\quad \left\{ \begin{aligned} \lambda_i = {} & \frac{(g_i - y_1)^{l_1-1}\ldots(g_i - y_k)^{l_k-1}(g_i - y_{k+1})\ldots(g_i - y_{k+r})}{(g_i - g_1)\ldots(g_i - g_{i-1})(g_i - g_{i+1})\ldots(g_i - g_n)} \\ & \equiv \rho_i(g_1, \ldots, g_n, y_1, \ldots, y_{k+r}) \qquad [i = 1, 2, \ldots, (n-1)]. \end{aligned} \right.$$

Les $(n-1)$ fonctions ρ sont, avons-nous dit, indépendantes, en sorte que les égalités (σ) permettent de tirer les $(n+k+r)$ variables $g_1, \ldots, g_n$, $y_1, \ldots, y_{k+r}$ en fonction de $k+r+1$ d'entre elles $[k+r+1 \leqq n]$ qu'on peut toujours (d'après une remarque faite) choisir arbitrairement parmi les g. Il ne peut y avoir d'exception que pour certaines valeurs exceptionnelles des λ, soit les valeurs λ', qui satisfont à certaines conditions *évidemment algébriques*.

Si l'on élimine $y_1, \ldots, y_{k+r}$ entre les $(n-1)$ équations (σ), on forme $(n-k-r-1)$ relations algébriques entre les g, soit les relations $(\sigma)'$, qui sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que le polynome

$$A(y) = (y - g_1)\ldots(y - g_n)\sum \frac{\lambda_i}{y - g_i}$$

ait k racines distinctes multiples respectivement d'ordre $l_1, \ldots, l_k$. Ces relations définissent algébriquement les g (essentiellement distincts) en fonction de $(k+r+1)$ d'entre eux, et cela pour tout système de valeurs des exposants λ (1) (sauf peut-être pour certaines valeurs λ' vérifiant des conditions algébriques).

---

(1) On aurait pu démontrer ce résultat directement en établissant le lemme suivant :

Soit $R(y)$ un polynome donné de degré $(n-1)$ en y, $R = y^{n-1} + c_{n-2}\,y^{n-2} + \ldots + c_0$, et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des quantités données, toutes différentes de zéro et dont la somme est égale à l'unité. *On peut toujours trouver des quantités* $g_1, \ldots, g_n$ *distinctes* (dont une prise arbitrairement) *telles qu'on ait identiquement*

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\lambda_i}{y - g_i} \equiv \frac{R(y)}{(y - g_1)\ldots(y - g_n)}.$$

R étant donné, il ne peut y avoir d'exception que pour des valeurs des λ exceptionnelles qui vérifient certaines conditions algébriques.

Pour établir ce lemme, il suffit d'écrire les égalités

$$\lambda_i = \frac{R(g_i)}{(g_i - g_1)\ldots(g_i - g_{i-1})(g_i - g_{i+1})\ldots(g_i - g_n)} \equiv \rho_i(g_1, \ldots, g_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Les fonctions ρ sont liées par la relation $\Sigma\rho_i \equiv \Sigma\lambda_i = 1$; on voit bien aisément qu'il n'existe aucune autre relation identique entre les ρ_i : d'où le théorème.

Si l'on ajoute aux relations $(\sigma)'$ la relation $\Sigma\lambda_i g_i = 0$, le système $(\sigma)''$ ainsi obtenu est un système de $(n-k-r)$ relations compatibles et distinctes (du moment que les λ n'ont pas ces valeurs λ'). En effet, quand on change y en $y+k$, les conditions $(\sigma)'$ restent vérifiées : à toute solution $g_1, \ldots, g_n$ de $(\sigma)'$ correspond donc une solution

$$\overline{g}_1 = 0, \qquad \overline{g}_2 = g_2 - g_1, \qquad \ldots, \qquad g_n = \overline{g}_n - g_1,$$

solution qui dépend de $(r+k)$ fonctions arbitraires $\overline{g}_2, \ldots, \overline{g}_{r+k+1}$; la solution la plus générale de $(\sigma)'$ se déduit de la précédente en posant

$$g_1 = k, \qquad g_2 = \overline{g}_2 + k, \qquad \ldots, \qquad g_n = \overline{g_n} + k,$$

k étant arbitraire. Pour que $\Sigma\lambda g$ soit nul, il faut et il suffit que k soit égal à

$$-\frac{(\lambda_2\overline{g}_2 + \ldots + \lambda_n\overline{g}_n)}{\Sigma\lambda} \equiv f(\overline{g}_2, \ldots, \overline{g}_{k+r+1}),$$

Le système $(\sigma)''$ définit donc les g en fonction algébrique de $(k+r)$ d'entre eux, soient $g_1, \ldots, g_{k+r}$. Dès lors, $y_1, \ldots, y_{k+r}$ sont donnés également en fonction algébrique de $g_1, \ldots, g_{k+r}$, d'après l'identité

$$\begin{aligned}\Sigma\lambda_i(y-g_1)\ldots(y-g_{i-1})(y-g_{i+1})\ldots(y-g_n)\\ \equiv (y-y_1)^{l_1-1}\ldots(y-y_k)^{l_k-1}(y-y_{k+1})\ldots(y-y_{k+r}).\end{aligned}$$

Si maintenant on exprime les g et $y_1, \ldots, y_{k+r}$ en $g_1, \ldots, g_{k+r}$ dans les k équations

$$C_j = (y_j - g_1)^{\lambda_1}\ldots(y_j - g_n)^{\lambda_n} \qquad (j = 1, 2, \ldots, k),$$

les k relations quasi algébriques

$$(\tau)' \qquad C_j = \rho'_j(g_1, \ldots, g_{k+r}) \qquad (j = 1, 2, \ldots, k),$$

ainsi obtenues entre les variables $g_1, \ldots, g_{k+r}$, sont résolubles par rapport à k d'entre elles, et définissent $g_{r+1}, \ldots, g_{r+k}$ en fonction de $g_1, \ldots, g_r$ et de $C_1, \ldots, C_j$. Autrement les ρ'_j ne seraient pas des fonctions indépendantes de $g_1, \ldots, g_{k+r}$, et, par suite, en ajoutant aux relations $(\tau)'$ les relations (θ) (où l'on exprime $g_1, \ldots, y_{k+r}$ en $g_1, \ldots, g_{k+r}$), on formerait un système qui, pour des valeurs convenables des constantes $C_1, \ldots, C_{k+r}$, serait compatible et indéterminé, ce que nous savons être absurde.

Ainsi donc, à tout système d'entiers positifs dont la somme est égale à

$n - r - 1$, soit $l_1 - 1, \ldots, l_k - 1$, correspond un type d'équations $(1)'$ dépendant de r fonctions et de k constantes arbitraires, et cela quels que soient les exposants donnés λ (pourvu qu'ils ne satisfassent pas à certaines relations algébriques, variables avec le système d'entiers $l_1, \ldots, l_k$ considéré).

Quand les λ prennent les valeurs exceptionnelles λ', je dis que le système $(\sigma)'$ est *incompatible* [1]. En effet, si ce système n'est pas incompatible, les équations qui le composent ne sont pas distinctes et équivalent à $(n - k - r - 1 - i)$ équations compatibles et distinctes. Il suit de là, comme on le voit aussitôt, que le système $(\sigma)'$, joint à la relation $\Sigma \lambda_i g_i = 0$, définit les quantités g et $y_1, \ldots, y_{k+r}$ en fonction $(k + r + i)$ d'entre elles, et que les égalités $(\tau)'$ et (θ) entre ces $(k + r + i)$ quantités sont compatibles et indéterminées pour des valeurs convenables des constantes $C_1, \ldots, C_{k+r}$, ce qui est absurde.

Observons enfin que, pour le système L d'entiers $l_1 - 1, \ldots, l_k - 1$ où tous les $l_j - 1$ sont égaux à l'unité, k est égal à $n - r - 1$, et les conditions $(\sigma)'$ s'évanouissent. Il n'existe donc pas, pour ce système L, de valeurs exceptionnelles des λ.

17. *Conclusions.* — Nous sommes en état, maintenant, d'énoncer les conclusions suivantes :

Soit r un entier quelconque $(r > 0)$, n un entier au moins égal à $r + 1$. Il existe une infinité d'équations $(1)'$ irréductibles et de degré r, dépendant de r fonctions et de $(n - r - 1)$ constantes arbitraires, soit

$$(1)' \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{a_{r-1}(x)\, y^{r-1} + \ldots + a_0}{y^r + b_{r-1}(x)\, y^{r-1} + \ldots + b_0},$$

dont l'intégrale peut se mettre sous la forme

$$(2)' \qquad C = [y - g_1(x)]^{\lambda_1} \ldots [y - g_n(x)]^{\lambda_n},$$

---

[1] Soient, par exemple, $n = 7$, $r = 1$, et soit L un système d'un seul entier qui, par suite, est égal à $n - r - 1 = 5$, $(k = 1)$. Pour des valeurs des λ prises au hasard, les conditions $(\sigma)'$, qui expriment que l'égalité en y

$$\frac{\partial}{\partial y} \log F = 0$$

a une racine multiple d'ordre 5, sont compatibles; mais elles sont incompatibles, par exemple, pour les valeurs $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$, $\lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_7 = -1$; autrement un polynôme du quatrième degré aurait une racine sextuple.

où

$$\Sigma\lambda_i = 1, \qquad \Sigma\lambda_i g_i = 0,$$

et cela quels que soient les exposants donnés $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (¹).

La forme (2)′ est *irréductible*, sauf pour des valeurs *exceptionnelles* de $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. En particulier, *la forme* (2) *est irréductible quand tous les* λ *sont distincts* (pourvu que r soit plus grand que 1).

De plus, *à tout système d'entiers positifs dont la somme est égale à* $n-r-1$, *soit* $l_1-1, \ldots, l_k-1$ $(l_1>2)$, *correspondent encore une infinité d'équations* (1)′ *irréductibles et de degré* r, *dépendant de* r *fonctions et de* k *constantes arbitraires, et cela quels que soient les exposants* λ *donnés, pourvu que les* λ *ne satisfassent pas à certaines conditions algébriques* (variables avec le système d'entiers $l_1, \ldots, l_k$ considéré). Pour ces valeurs exceptionnelles λ' des λ, *il n'existe pas* d'équations (1)′ de l'espèce cherchée qui correspondent au système d'entiers $l_1, \ldots, l_k$. Quand les λ n'ont pas reçu de telles valeurs λ', la forme (2) de l'intégrale de (1) est encore *irréductible* en général, en particulier quand les λ sont *tous distincts* (r étant plus grand que 1).

En épuisant tous les systèmes d'entiers $l_1, \ldots, l_k$, *on obtient toutes les équations* (1)′ *dont l'intégrale se met sous la forme* (2)′.

18. La solution générale du problème (A) (*voir* p. 14) s'obtient en effectuant sur y dans les équations précédentes (1)′ *la transformation homographique* la plus générale, ce qui introduit *trois* nouvelles fonctions arbitraires. La solution la plus générale du problème (B) (*voir* p. 17) s'obtient en effectuant sur y la *transformation linéaire* la plus générale, ce qui introduit *deux* nouvelles fonctions arbitraires.

On voit notamment que, *r étant un entier donné et ν un entier* $\left(\textit{supérieur à } \frac{r+2}{2}\right)$ *aussi grand qu'on veut, il existe une infinité d'équations* (1) *irréductibles et de degré r dont l'intégrale générale* $y(x, C)$ *acquiert exactement ν valeurs autour des points critiques mobiles,* soit

$$y' = \frac{a_{r+2}\,y^{r+2} + \ldots\ldots + a_0}{y^r + b_{r-1}\,y^{r-1} + \ldots + b_0}. \tag{1}$$

(¹) Les coefficients de (1)′ sont donnés par des relations (quasi algébriques) explicitement connues en fonction des r fonctions inconnues, de leurs dérivées premières, et des constantes. On peut prendre $b_0, \ldots, b_{r-1}$ comme fonctions arbitraires (*voir* p. 16 et 28).

Ces équations dépendent algébriquement de $r+3$ fonctions arbitraires, de leurs dérivées premières (et de constantes dont le nombre croît avec ν indéfiniment). On peut notamment prendre $b_0, \ldots, b_{r-1}$ comme r des fonctions arbitraires, comme il ressort aisément de la remarque suivante.

Cette remarque est relative au rôle des coefficients $b_{r-1}, \ldots, b_0$ du dénominateur Q de (1)′; ces coefficients, fonctions symétriques de $y_{k+1}, \ldots, y_{k+r}$, s'expriment algébriquement en $g_1, \ldots, g_{k+r}$ (pour chaque système d'entiers $l_1, \ldots, l_k$); de sorte qu'inversement on peut exprimer $g_{k+1}, \ldots, g_r$ en fonction algébrique de $g_1, \ldots, g_k, b_1, \ldots, b_r$ (*voir* la note de la p. 24). Les égalités $(\tau)'$ (p. 25) deviennent alors k égalités quasi algébriques en $g_1, \ldots, g_k, b_1, \ldots, b_r$ qui définissent $g_1, \ldots, g_k$ en fonction de $b_1, \ldots, b_r$ et des constantes $C_1, \ldots, C_k$. On voit ainsi que *les r coefficients* $b_0, \ldots, b_{r-1}$ *étant choisis arbitrairement, à chaque système d'entiers* $l_1, \ldots, l_k$ *correspond un type* (1)′ *qui dépend de k constantes arbitraires* (en laissant de côté les valeurs *exceptionnelles* des λ). Les coefficients $b_0, \ldots, b_{r-1}$ *étant pris au hasard,* ce type d'équations (1)′ et l'intégrale (2) sont en général *irréductibles;* mais pour des choix particuliers de $b_0, \ldots, b_{r-1}$ il n'en est plus ainsi. Par exemple, si l'on donne aux b des valeurs *numériques* quelconques, les valeurs correspondantes des g sont aussi numériques, et l'équation (1)′ (quels que soient les exposants λ) se réduit à $y' = 0$.

En particulier, *les coefficients* $b_0, \ldots, b_{r-1}$ *étant donnés arbitrairement, il existe une infinité d'équations irréductibles* (1)′ $\Big($où $a_{r-1}, \ldots, a_0$ dépendent algébriquement des b, $\dfrac{db}{dx}$ et de constantes dont le nombre croît indéfiniment avec $\nu\Big)$, telles que *l'intégrale* $y(x, C)$ *prenne exactement* ν *valeurs autour des points critiques mobiles,* et cela si grand que soit l'entier donné ν. Il n'y a d'exception que si les b satisfont à certaines conditions particulières.

TROISIÈME PROBLÈME.

19. Le problème que nous venons de discuter, problème qui consiste à former, *sans aucune restriction,* les équations (1) de degré donné dont l'intégrale générale est représentée par (2) où n est donné, comportait évidemment une solution explicite (sous une forme ou sous une autre). Un problème plus difficile consiste à résoudre la même question en astreignant les coefficients de (1) à appartenir *à une classe donnée de fonctions,* par exemple à être *algébriques* en x.

Une comparaison fera nettement ressortir la différence entre les deux problèmes : supposons qu'on se propose de déterminer (sans aucune restriction) toutes les équations différentielles linéaires et homogènes du second ordre (E) dont l'intégrale générale est algébrique. La solution est immédiate : il suffit de prendre au hasard deux fonctions algébriques φ_1, φ_2, et d'éliminer C_1, C_2 entre les équations

$$y = C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2, \qquad \frac{dy}{dx} = C_1\varphi_1' + C_2\varphi_2', \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = C_1\varphi_1'' + C_2\varphi_2'';$$

on obtient ainsi toutes les équations cherchées dont les coefficients sont connus explicitement en fonction de deux fonctions algébriques arbitraires et de leurs dérivées premières et secondes.

Proposons-nous, au contraire, de déterminer toutes les équations (E) intégrables algébriquement, et dont les coefficients appartiennent à une classe *donnée* de fonctions algébriques, *par exemple sont rationnels en* x. Le problème devient beaucoup plus compliqué, et sa solution exige une étude préalable des irrationnelles $y(x)$ engendrées par les équations (E) à coefficients rationnels.

Astreignons donc les coefficients de l'équation (1) à appartenir à une classe *donnée* de fonctions. Pour fixer les idées, nous les astreindrons à être *algébriques* en x. Mais la solution que nous allons indiquer s'appliquerait aussi bien si la classe donnée de fonctions était différente, soit plus restreinte (comme celle des fonctions rationnelles en x), soit plus étendue (comme celle des fonctions algébriques en x et e^x).

Nous nous proposons donc, en définitive, de résoudre le problème suivant :

Former toutes les équations (1)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{r+2}\,y^{r+2} + \ldots + a_0}{y^r + b_{r-1}\,y^{r-1} + \ldots + b_0} \tag{1}$$

de degré r donné ET A COEFFICIENTS ALGÉBRIQUES EN x, *qui admettent l'intégrale première irréductible* [1]

$$F(y, x) \equiv h(x)[y - g_1(x)]^{\lambda_1} \ldots [y - g_n(x)]^{\lambda_n} = \text{const.},$$

où l'entier n et les exposants numériques λ sont donnés.

---

(1) Je rappelle que l'intégrale première $F = \text{const.}$ est *irréductible* si l'on ne peut la remplacer par une intégrale de même forme où n est diminué d'au moins une unité.

L'étude que nous avons faite précédemment (*voir* p. 7-9) des transcendantes engendrées par une telle équation (1) va nous permettre de résoudre explicitement la question.

20. Nous distinguerons deux cas suivant que tous les rapports des exposants λ sont ou non commensurables.

Premier cas. — *Un au moins des rapports* $\frac{\lambda_k}{\lambda_l}$ *n'est pas un nombre réel et commensurable.*

L'intégrale première (2) étant, par hypothèse, irréductible, ne peut être ramenée à la forme rationnelle en y. Nous savons que les g s'expriment alors algébriquement en fonction des coefficients de (1) et de leurs dérivées; ce sont donc ici des fonctions *algébriques de* x. Quant à h, c'est une fonction de la forme $e^{\int H(x)dx}$, où H est algébrique en x. Inversement, toute équation (1) dont l'intégrale générale peut s'écrire

$$e^{\int H(x)dx}(y-g_1)^{\lambda_1}\ldots(y-g_n)^{\lambda_n} = \text{const.},$$

où H, $g_1, \ldots, g_n$ sont algébriques en n, a son second membre algébrique en x.

Ceci posé, il nous est loisible de mettre F sous la forme

$$F = h(x)\, p_1(y, x)^{\mu_1}\ldots p_d(y, x)^{\mu_d} \qquad (d \geqq 2),$$

où les p sont des fonctions rationnelles en y, et où les μ sont des exposants *essentiellement distincts*, j'entends qui ne vérifient aucune relation linéaire et homogène à coefficients entiers. D'une façon plus précise, chaque fraction p_i est de la forme

$$(y-g_{1,i})^{\lambda'_1}\ldots(y-g_{m,i})^{\lambda'_m},$$

les λ' étant des entiers positifs ou négatifs, premiers entre eux, et toutes les fonctions $g_{1,i}, \ldots, g_{m,i}, \ldots, g_{1,j}, g_{2,j}, \ldots$ étant distinctes et en nombre égal à n. Les p_i sont, d'après cela, algébriques en x; h est égal à $e^{\int H(x)dx}$.

Si la somme $\Sigma\lambda$ n'est pas nulle, nous pouvons, en remplaçant y par $y + \frac{\Sigma\lambda g}{\Sigma\lambda}$, faire en sorte que $\Sigma\lambda g$ soit nul [les coefficients de (1) restant algébriques], puis en multipliant y par $\frac{1}{g_1}$ réduire g_1 à l'unité. Si la somme $\Sigma\lambda$ est nulle, nous pouvons, en remplaçant y par $Y = \frac{1}{y-g_1}$, ramener (2) à une forme analogue où n est diminué d'une unité et où $\Sigma\lambda$ n'est plus nul [les coefficients de (1) restant algébriques]. Il nous suffit donc de nous placer dans l'hypothèse *où $\Sigma\lambda$ est égal à* 1, *$\Sigma\lambda g$ égal à zéro, et où g_1 est égal à* 1.

Les fonctions g étant des fonctions *algébriques* indéterminées, soit l_1-1 ..., l_k-1 un système d'entiers positifs dont la somme est égale à $n-1-r$. Exprimons d'abord que le polynome $(y-g_1)\dots(y-g_n)\sum\frac{\lambda_i}{y-g_i}$ a k racines distinctes dont l'ordre de multiplicité est égal respectivement à $l_1-1, \dots, l_k-1$; exprimons ensuite que $\Sigma\lambda g$ est nul. Ces conditions $(\sigma)''$ (*voir* p. 25) définissent algébriquement les g en fonction de $k+r$ d'entre eux $g_1, \dots, g_{k+r}$ [où $g_1=1$]; les fonctions $y_1, \dots, y_{k+r}$ sont elles-mêmes connues algébriquement à l'aide des mêmes fonctions algébriques indéterminées $g_2, \dots, g_{k+r}$.

Écrivons maintenant les k conditions

$$(\tau)'\left\{\begin{aligned} C_j &= h(x)\,p_1(y_j,x)^{\mu_1}\dots p_d(y_j,x)^{\mu_d}\\ &= h(x)\,[\rho_{1,j}(g_2,\dots,g_{k+r})]^{\mu_1}[\rho_{2,j}(g_2,\dots,g_{k+r})]^{\mu_2}\dots[\rho_{d,j}(g_2,\dots,g_{k+r})]^{\mu_d}\\ &\qquad (j=1,2,\dots,k).\end{aligned}\right.$$

Divisons membre à membre les $(j-1)$ dernières de ces égalités par la première, je dis que *chaque égalité*

$$(\tau)'' \qquad \frac{C_j}{C_1}=\left(\frac{\rho_{1,j}}{\rho_{1,1}}\right)^{\mu_1}\dots\left(\frac{\rho_{d,j}}{\rho_{d,1}}\right)^{\mu_d} \qquad (j=2,\dots,k)$$

entraîne les d conditions

$$(\tau)''' \qquad \frac{\rho_{1,j}}{\rho_{1,1}}=c_1, \qquad \frac{\rho_{2,j}}{\rho_{2,1}}=c_2, \qquad \dots, \qquad \frac{\rho_{d,j}}{\rho_{d,1}}=c_d,$$

$c_1, \dots, c_d$ étant d constantes. En effet, les rapports $\frac{\rho_{1,j}}{\rho_{1,1}}\equiv f_1, \dots, \frac{\rho_{d,j}}{\rho_{d,1}}=f_j$ sont des fonctions *algébriques* de x. Si f_1, par exemple, n'est pas une constante, f_1 s'annule au moins pour une valeur x_0 de x, qui peut être un zéro ou un infini de certaines des fonctions $f_2, \dots, f_d$; dans le voisinage de x_0, on a

$$\frac{C_j}{C_1}=(x-x_0)^{\mu_1 m_1+\dots+\mu_d m_d}\,A(x),$$

A étant une fonction de x qui, pour $x=x_0$, n'est ni nulle ni infinie, et $m_1, \dots, m_d$ désignant des nombres réels commensurables, positifs, négatifs ou nuls, dont le premier m_1 est plus grand que zéro. Comme $\mu_1 m_1 + \ldots + \mu_d m_d$ (d'après l'hypothèse faite sur les μ) ne saurait être nul, $\frac{C_j}{C_1}$ ne peut se réduire à une constante.

Il suit de là que si le nombre $(k-1)d$ est supérieur à $k+r-1$, les conditions $(\tau)''$ sont en général *incompatibles*. Si $(k-1)d = k+r-1-r'$ ($r' \geqq 0$), en général les conditions $(\tau)'''$ définissent les g algébriquement en fonction de r' d'entre eux et de $(k-1)d$ constantes arbitraires; h est ensuite défini [1] par l'égalité $h = \rho_{1,1}^{-\mu_1}, \ldots, \rho_{1,d}^{-\mu_d}$ qui donne bien, pour $\frac{h'}{h}$, une fonction algébrique des $g, \frac{dg}{dx}$, donc de x.

Pour passer au cas général où $\Sigma\lambda$ n'est pas nul, il suffit ensuite d'effectuer sur y une transformation linéaire quelconque à coefficients algébriques en x. Pour passer au cas général où $\Sigma\lambda$ est nul, il suffit, après avoir traité le problème particulier ($\Sigma\lambda = 1$, $\Sigma\lambda g = 0$, $g_1 = 1$) pour la valeur $(n-1)$ de l'entier n, d'effectuer sur y la transformation homographique la plus générale à coefficients algébriques en x.

La solution du problème dans le premier cas est ainsi complète. Observons que, les λ étant pris au hasard, d est égal à n; le nombre $(k-1)n-k$ ou $k(n-1)-n$ croît indéfiniment avec n si k n'est pas égal à 1 et, par suite, dépasse r. Pour les valeurs de n très grandes par rapport à r, *les λ ayant des valeurs* QUELCONQUES, le problème posé ne comporte donc, en général, de solution que celle qui correspond à $k=1$, c'est-à-dire la solution où il n'existe qu'une seule solution remarquable qui est d'ordre $n-r$ ou $n-r+1$, suivant que $\Sigma\lambda$ est nul ou différent de zéro.

21. DEUXIÈME CAS. — *Tous les rapports $\frac{\lambda_k}{\lambda_l}$ sont réels et commensurables.*

Il est loisible, dans ce cas, de supposer tous les λ *entiers et premiers entre eux;* F est alors rationnel en y et s'écrit

$$F = h(x)\frac{(y-g_1)^{\lambda_1}\ldots(y-g_m)^{\lambda_m}}{(y-g_{m+1})^{\lambda_{m+1}}\ldots(y-g_n)^{\lambda_n}},$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ étant positifs. Soit N le plus grand des deux entiers $(\lambda_1 + \ldots + \lambda_m)$ et $(\lambda_{m+1} + \ldots + \lambda_n)$; je dis que la fonction $y(x, C)$ prend exactement N

---

[1] Si $n = r+1$, il n'y a pas de valeur remarquable de la constante; on prend au hasard les fonctions algébriques $g_1, \ldots, g_n, \frac{h'}{h}$.

valeurs autour des points critiques mobiles. Admettons, en effet, qu'elle en prenne ν seulement ($\nu < N$); elle vérifierait alors une relation $\rho(y, x) = c$, où ρ est rationnel en y et a ses *deux* termes de degré ν, et l'on aurait

$$F \equiv (\rho - c_1)^{\mu_1}(\rho - c_2)^{\mu_2} \dots (\rho - c_j)^{\mu_j},$$

j étant ou supérieur à 2, ou égal à 2, avec la condition $\mu_1 + \mu_2 \neq 0$. Dans l'un ou l'autre cas, le nombre total des racines distinctes des deux équations (en y), $\rho - c_1 = 0$, $\rho - c_2 = 0$, doit être inférieur à n; l'intégrale de (2) se laisse donc mettre sous la forme

$$c = \frac{\rho - c_1}{\rho - c_2} \equiv \bar{h}(x)\,\Pi[y - \bar{g}(x)]^{\bar{\lambda}},$$

où le nombre des facteurs $y - g$ est moindre que n, ce qui est contre l'hypothèse.

Ce point établi, soit k le nombre des valeurs *remarquables* de C (y compris, s'il y a lieu, les valeurs $C = 0$, $C = \infty$). Envisageons successivement les hypothèses $k > 2$, $k = 2$, $k = 1$, $k = 0$.

I. $k > 2$. — L'intégrale de (1) est algébrique; *h et les g sont algébriques*. La solution du problème se déduit immédiatement de la discussion des pages 14-27 : il suffit de répéter les mêmes conclusions que pour les problèmes (C), (B), (A) (p. 26-27), à cela près que les λ sont supposés des entiers et que les r, $(r + 2)$ ou $(r + 3)$ fonctions arbitraires doivent être prises *algébriques en* x.

II. $k = 2$. — Les valeurs remarquables de C sont nécessairement $C = 0$, $C = \infty$. Autrement, comme on le voit aussitôt, la forme (2) ne serait pas irréductible; n est égal à $r + 2$ ou à $r + 1$, suivant que $\Sigma\lambda$ est nul ou non. Les fonctions $g_1, \dots, g_n$ sont *algébriques* en x; toutes les équations (1) cherchées s'obtiennent en prenant arbitrairement $(n + 1)$ fonctions algébriques $g_1, \dots, g_n$, $H(x)$, et en écrivant l'égalité

$$C = e^{\int H(x)\,dx}(y - g_1)^{\lambda_1} \dots (y - g_n)^{\lambda_n},$$

d'où l'équation (1)

$$y' \sum \frac{\lambda_i}{y - g_i} = - H(x) + \sum \frac{\lambda_i g'_i}{y - g_i}$$

dont les coefficients dépendent algébriquement des g, g' et de H. [En particulier, on peut prendre arbitrairement le dénominateur $Q(y, x)$ du second membre de (1) et a_{r+2}, et il reste encore deux fonctions algébriques arbitraires; a_{r+2} est nul si $\Sigma\lambda$ est différent de zéro.]

III. $k=1$. — La valeur remarquable de la constante est $C=0$ ou $C=\infty$. Soit $C=\infty$; $g_{m+1}, \ldots, g_n$ sont donc *algébriques* en x; les $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ sont égaux à l'unité, et l'intégrale de (1) vérifie les relations

$$\frac{y^\nu + A_{\nu-1}y^{\nu-1} + \ldots + A_0}{(y-g_{m+1})^{\lambda_{m+1}} \ldots (y-g_n)^{\lambda_n}} = u, \qquad \frac{du}{dx} = \alpha u + \beta,$$

où les A, α, β sont algébriques en x. Si m *est inférieur à* $\lambda_{m+1} + \ldots + \lambda_n$, ν est égal à cette dernière somme; $y=\infty$ est une solution de (1), $u=1$ est solution de l'équation linéaire en u; d'où, en changeant u en $u-1$, la forme de l'intégrale

$$e^{\int H(x)\,dx} \frac{y^m + A_{m-1}y^{m-1} + \ldots + A_0}{(y-g_{m+1})^{\lambda_{m+1}} \ldots (y-g_n)^{\lambda_n}} = \text{const.},$$

où *les* A, $g_{m+1}, \ldots, g_n$ *et* H *sont des fonctions algébriques de x arbitrairement choisies* (n est égal à $r+1$). Si m est au moins égal à $\lambda_{m+1} + \ldots + \lambda_n$, toutes les équations (1) cherchées s'obtiennent en prenant *arbitrairement les $n+2$ fonctions algébriques* de x, $A_{m-1}, \ldots, A_0, g_{m+1}, \ldots, g_n$ et α, β, et en remplaçant, dans l'équation linéaire

$$\frac{du}{dx} = \alpha u + \beta,$$

u par $\dfrac{y^m + A_{m-1}y^{m-1} + \ldots + A_0}{(y-g_{m+1})^{\lambda_{m+1}} \ldots (y-g_n)^{\lambda_n}}$ (n est alors égal à $r+2$ ou à $r+1$, suivant que m est égal ou supérieur à $\lambda_{m+1} + \ldots + \lambda_n$). Il est loisible de supposer A_0 égal à zéro, par exemple.

IV. $k=0$. — Tous les λ sont égaux à l'unité, et les nombres m et $m-n$ diffèrent au plus d'une unité; on a donc $n = 2m \pm 1$ ou $n = 2m$.

Si n est égal à $2m$, n est égal à $r+2$ et l'équation (1), la plus générale, s'obtient en remplaçant, dans l'équation de Riccati

$$\frac{du}{dx} = \alpha u^2 + \beta u + \gamma,$$

u par $\dfrac{y^m + A_{m-1}y^{m-1} + \ldots + A_0}{B_m y^m + B_{m-1}y^{m-1} + \ldots + B_0}$, les A, B et α, β, γ étant des fonctions algébriques arbitraires de x. (Il est loisible de supposer $A_0 = 0$, $B_m = 0$, $B_0 = 1$.)

Si n est égal à $2m \pm 1$ (soit $n = 2m - 1$), n est aussi égal à $r + 1$, $y = \infty$ est une solution de (1), et l'équation (1) la plus générale s'obtient en remplaçant, dans l'équation linéaire $\frac{du}{dx} = \alpha u + \beta$, u par

$$\frac{y^m + A_{m-1} y^{m-1} + \ldots + A_0}{y^{m-1} + B_{m-2} y^{m-2} + \ldots + B_0},$$

où α, β et les A, B sont des fonctions algébriques quelconques de x. (Il est loisible de supposer $A_0 = 0$.)

Le problème que nous nous étions posé au début du § 19 est donc *complètement résolu.*

Observons notamment qu'*il existe une infinité d'équations* (1) *de degré donné r en y et algébriques en x, dont l'intégrale $y(x, C)$ prend exactement un nombre donné ν de valeurs autour des points critiques mobiles* (*si grand que soit l'entier ν par rapport à r*). *Dès que ν dépasse $r + 1$*, l'intégrale $y(x)$ est une fonction algébrique de x et de $e^{\int H(x)dx}$, où $H(x)$ est algébrique en x.

Il existe *une infinité* d'équations (1) de degré r en y et algébriques en x, dont l'intégrale peut se mettre sous la forme *irréductible*

$$h(x)(y - g_1)^{\lambda_1} \ldots (y - g_n)^{\lambda_n} = \text{const.},$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des entiers positifs ou négatifs, *et cela si grand que soit n par rapport à r.* Mais *dès que n dépasse* $r + 2$, l'intégrale $y(x)$ est nécessairement algébrique.

22. *Historique.* — Je dirai, en terminant, quelques mots de l'historique de la question. Dans les travaux auxquels j'ai déjà renvoyé (*voir* p. 2), j'ai établi ces deux propositions :

1° Quand l'intégrale d'une équation (1) donnée se laisse mettre sous la forme (2), elle s'obtient algébriquement, ou par quadrature, ou par l'intégration d'une équation de Riccati.

2° Pour que (2) soit l'intégrale première d'une équation (1) irréductible et *de degré* r (1), il faut et il suffit que la somme $\Sigma(l_i - 1)$, étendue à toutes les solutions *remarquables* $y_i(x)$ de multiplicité l_i, soit égale à $(n - 2 - r)$ ou à $(n - 1 - r)$, suivant que $\Sigma\lambda$ est nul ou différent de zéro.

---

(1) r désignant le plus grand des nombres $q, p - 2$ (*voir* p. 2).

Cette relation

$$(a) \qquad r = n - 2 - \Sigma(l_i - 1) \qquad (\text{pour } \Sigma\lambda = 0)$$

est d'ailleurs une extension d'une formule établie par M. Darboux dans son célèbre Mémoire sur les intégrales algébriques des équations $y' = R(y, x)$ où R est rationnel en y, x (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1877).

Les conditions pour qu'il existe une solution *remarquable* de multiplicité l s'expriment par $(l-2)$ relations algébriques et une relation quasi algébrique entre les g, h et la valeur *remarquable* de la constante; il suit de là que les équations (1), *de degré r donné*, dont l'intégrale se laisse mettre sous la forme (2) où n est donné, dépendent de $(n+1)$ fonctions g, h liées par $(n-2-r)$ conditions (pour $\Sigma\lambda = 0$), ou par $(n-1-r)$ conditions (pour $\Sigma\lambda = 0$), donc de $(r+3)$ (ou de $r+2$) fonctions arbitraires, et dépendent, en outre, de constantes arbitraires dont le nombre croît indéfiniment avec n.

Mais, dans mes travaux antérieurs, je m'étais occupé surtout de la nature des intégrations qui relient h et les g aux coefficients de (1), en même temps que de la question de reconnaître si une équation (1) donnée est intégrable sous la forme (2). Je n'avais donc rien dit sur la *compatibilité* des $(n-2-r)$ ou $(n-1-r)$ relations auxquelles conduit le problème inverse, problème qui consiste à former explicitement toutes les équations (1), de degré r donné, intégrables sous la forme (2) où n est donné.

La discussion de ces conditions est développée aux pages 15-27 de ce Mémoire qui renferme aussi la solution du problème analogue, mais plus difficile, où l'on assujettit les coefficients (1) à appartenir à une classe *donnée* de fonctions. Enfin j'ai insisté sur certaines conséquences particulières des résultats généraux que j'avais publiés antérieurement, telles que celle-ci : « Quand tous les exposants λ sont distincts, les y se calculent algébriquement à l'aide des coefficients de (1), et h dépend d'une quadrature. »

Dans une Note récente des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, M. Korkine a étudié les équations

$$(1)' \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{a_r y^r + \ldots + a_r}{y^r + b_{r-1} y^{r-1} + \ldots + b_0} = \frac{P(y, x)}{Q(y, x)}$$

dont l'intégrale peut s'écrire

$$(2)' \qquad (y - g_1)^{\lambda_1} \ldots (y - g_n)^{\lambda_n} = C,$$

en supposant que le polynome $Q(y)$ *a ses racines distinctes et que son degré est au moins égal à celui de* $P(y)$. M. Korkine a énoncé sans démonstration un théorème détaillé d'où il ressort :

1° Que $g_1, \ldots, g_n$ se calculent en fonction de $b_{r-1}, \ldots, b_0, a_r$, par une quadrature;

2° Que les équations $(1)'$, de degré r donné, dont l'intégrale se laisse mettre sous la forme (2) où n et les λ sont donnés, dépendent, sous forme connue, de $(r+1)$ fonctions et de constantes arbitraires.

En se reportant au corps de ce Mémoire (*voir* notamment p. 12-14 et p. 26-28), il est facile de voir que ces résultats concordent avec les miens, si l'on tient compte des hypothèses particulières faites par M. Korkine $(h \equiv 1,\ p \leqq q)$.

J'ajoute enfin que les méthodes développées dans ce Mémoire s'appliquent aussi bien à l'étude beaucoup plus générale des équations

$$(1)'' \qquad F(y', y, x) = 0$$

dont l'intégrale se laisse écrire

$$(2)'' \qquad \int K(y, x)\, dy + L(y, x)\, dx = \text{const.},$$

K *et* L *étant algébriques en* y; autrement dit, à l'étude des équations (1) qui admettent un *facteur intégrant* $M(y, x)$ *algébrique en* y. J'ai démontré (*voir,* par exemple, mes *Leçons de Stockholm,* 10e Leçon, p. 155 et p. 169-170) qu'une telle équation $(1)''$ s'intègre algébriquement ou par quadratures, ou se ramène à une équation de Riccati. Quant à la formation des équations $(1)''$ de degré donné en y' et en y, dont l'intégrale se met sous la forme $(2)''$, c'est un problème plus compliqué que le problème correspondant relatif aux équations (1) intégrables sous la forme (2), mais qui se traite exactement de la même manière et conduit à des résultats analogues. Une égalité, qui généralise l'égalité (a), mais beaucoup plus difficile à établir (*loc. cit.*, p. 168) joue là encore le rôle fondamental. Mais c'est là un point sur lequel je reviendrai ultérieurement.