SUR UN

CAS PARTICULIER DU MOUVEMENT

A CINQ CONDITIONS,

PAR M. Victor ROUQUET,

Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée de Toulouse.

I.

1. Dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (3^e série, t. IX, p. 297 et suivantes), M. Pirondini s'est proposé de résoudre le problème suivant qui fait connaître une nouvelle et remarquable propriété des courbes de M. Bertrand :

Sous quelles conditions une ligne Σ, invariablement liée au trièdre fondamental d'une courbe (O) *et entraînée dans le déplacement de ce trièdre dont le sommet décrit la courbe, est-elle constamment normale aux trajectoires de ses différents points?*

Le trièdre fondamental dont il est question dans cet énoncé est formé, à chaque instant, par la tangente, la normale principale et la binormale au point O de (O).

M. Pirondini démontre d'abord que la courbe (O) ne peut être choisie arbitrairement, car ses deux courbures sont liées par une relation linéaire, ce qui revient à dire qu'elle appartient à la catégorie des courbes de M. Bertrand. De plus, la ligne Σ, invariablement liée à son trièdre fondamental et normale aux trajectoires de ses points, est une droite dont les équations générales renferment deux constantes arbitraires.

Nous nous proposons : 1° de reprendre la démonstration de ce théorème en le complétant sur quelques points; 2° d'étudier les surfaces réglées engendrées par les droites Σ satisfaisant aux conditions du problème proposé.

Pour cette étude, nous nous appuierons, à peu près exclusivement, sur trois équations déduites de celles qu'on trouve aux pages 8 et 10 de la première Partie du grand Traité de M. Darboux et que nous transcrirons ici pour la commodité du lecteur, en expliquant brièvement les notations employées. Ces formules, dans lesquelles les seuls éléments de (O) qui interviennent sont les rayons ρ et τ de courbure et de torsion [1], peuvent être présentées comme il suit :

$$
(\mathrm{A}) \qquad \begin{cases} \Delta X = dx + \left(1 - \dfrac{y}{\rho}\right) ds, \\ \Delta Y = dy + \left(\dfrac{x}{\rho} - \dfrac{z}{\tau}\right) ds, \\ \Delta Z = dz + \dfrac{y}{\tau}\, ds. \end{cases}
$$

Pour les établir, on suppose que, dans une position quelconque du point O qui parcourt la courbe (O), on prend respectivement pour axes des x, des y et des z, la tangente, la normale principale et la binormale de (O) en O. Les lettres x, y, z désignent, à l'instant considéré, les coordonnées d'un point quelconque M de l'espace que l'on fait correspondre à O, de sorte que ces coordonnées doivent être regardées comme des fonctions de l'arc s de (O) compté à partir d'une origine arbitraire. Ceci étant admis, ΔX, ΔY, ΔZ désignent les projections, sur les axes de coordonnées, du déplacement infiniment petit MM$'$ que subit le point M de l'espace lorsque, par l'effet du mouvement de O sur (O), ce point vient occuper la position infiniment voisine O_1.

Le mouvement à cinq conditions auquel se rapporte le problème de M. Pirondini est justement celui du trièdre formé par les axes de coordonnées pour lesquels les formules (A) ont été établies.

2. Nous ferons remarquer tout d'abord que, quelle que soit la courbe (O), on connaît une infinité de droites satisfaisant aux conditions du problème, savoir : 1° les normales à la courbe (O); 2° les parallèles à la binormale situées dans le plan rectifiant.

Les premières, en effet, sont normales à la trajectoire (O) d'un de leurs points O et, par suite, à celles de tous leurs autres points.

---

(1) Nous désignons ici par τ ce que M. Darboux désigne par $-\tau$.

Pour les autres, on s'en rend compte aisément comme il suit :

Les équations instantanées d'une droite L parallèle à la binormale OZ et située dans le plan rectifiant qui, dans ce cas, se confond avec le plan des yz, étant

$$x = l, \qquad y = 0,$$

les coordonnées instantanées d'un point quelconque M de L sont

$$x = l, \qquad y = 0, \qquad z = h,$$

quantités qui restent constantes pendant le mouvement, de telle sorte que les formules (A) donnent, pour ce point M,

$$\Delta Z = 0;$$

il en résulte, comme nous l'avions annoncé, que le déplacement de ce point est constamment normal à la droite L.

La question à résoudre consiste à rechercher dans quel cas il existe d'autres droites ou courbes Σ répondant à la question.

3. Considérons, en premier lieu, une courbe (O) dont les rayons de courbure ρ et τ soient simultanément constants, c'est-à-dire une hélice tracée sur un cylindre de révolution.

Dans le mouvement du trièdre fondamental, tout point M invariablement lié à ce trièdre décrit une hélice de même axe et de même pas que (O). Il en résulte immédiatement que celles des lignes Σ qui sont des droites sont les normales à ces hélices. Elles forment, comme l'on sait, un complexe linéaire qui peut être regardé comme le plus général de son espèce. De plus, dans le système d'axes adopté, ce complexe est défini par l'équation

$$\frac{p}{\rho} - \frac{q}{\tau} + a = 0, \tag{1}$$

en supposant que les équations instantanées d'une de ces droites Σ soient présentées sous la forme

$$\left\{ \begin{aligned} x &= ay + p, \\ z &= by + q. \end{aligned} \right. \tag{2}$$

Pour exprimer, en effet, que les équations (2) sont celles d'une droite Σ, il faut écrire qu'on peut trouver, sur cette droite, un point $M(x, y, z)$, tel que le déplacement de ce point soit normal à la droite, ce qui donne la condition

$$a.\Delta X + \Delta Y + b.\Delta Z = 0,$$

laquelle, en tenant compte des formules (A) et des équations (2), est indépendante de x, y, z et fournit la condition (1).

Envisageons maintenant les lignes courbes qui sont des lignes Σ. Il est évident que ces lignes sont celles dont les tangentes appartiennent au complexe linéaire précédemment défini. On peut donc énoncer la proposition suivante qui, d'ailleurs, n'est pas nouvelle et peut aisément se déduire d'une remarque faite par M. Picard dans son *Traité d'Analyse* (t. I, p. 315).

Dans le mouvement du trièdre fondamental d'une hélice tracée sur un cylindre de révolution, les lignes Σ, *invariablement liées à ce trièdre, qui sont normales aux trajectoires de leurs différents points, sont celles dont les tangentes appartiennent au complexe linéaire défini par les normales à l'hélice proposée.*

4. Considérons, en second lieu, le cas général dans lequel les rayons de courbure ρ et τ de (O) ne sont pas simultanément constants.

Tout déplacement infiniment petit du trièdre fondamental $Oxyz$ est un déplacement hélicoïdal dont l'axe est parallèle à la caractéristique du plan rectifiant. Dans un tel déplacement, les droites normales aux trajectoires de leurs différents points forment un complexe linéaire défini par l'équation (1). Pour le déplacement suivant, on a un autre complexe, ρ et τ ayant varié, et ainsi de suite.

La question est donc de savoir dans quel cas les complexes en nombre infini, qui correspondent aux diverses valeurs de ρ et de τ, ont une ou plusieurs droites communes, en outre de celles qui correspondent aux valeurs générales

$$a = p = q = 0,$$

lesquelles sont les normales à la courbe (O) en O, ainsi que des parallèles à la binormale situées dans le plan rectifiant, qui sont fournies par des valeurs infinies de b, la valeur de a étant nulle, p et q restant quelconques, mais finis.

La condition nécessaire et suffisante cherchée est qu'il existe une relation linéaire entre les courbures $\frac{1}{\rho}$ et $\frac{1}{\tau}$.

Si l'on suppose, en effet, que tous ces complexes aient une droite commune autre que celles dont on vient de parler, l'équation (1) de ce complexe sera vérifiée pour des valeurs constantes et non toutes nulles de a, p, q. Par suite, il existe une relation linéaire entre les courbures.

Réciproquement, si l'on a, entre ces courbures, une relation linéaire

$$\frac{A}{\rho} + \frac{B}{\tau} = C, \tag{3}$$

A, B, C étant des constantes non nulles simultanément, on satisfera à l'équation de ce complexe, quelles que soient les valeurs de ρ et de τ, en posant

$$p = \lambda A, \qquad q = -\lambda B, \qquad a = -\lambda C,$$

et, dès lors, tous les complexes auront en commun une infinité de droites représentées par les équations

$$\left\{ \begin{aligned} x &= -\lambda(Cy - A), \\ z &= by - \lambda B, \end{aligned} \right. \tag{4}$$

renfermant deux paramètres arbitraires λ et b. Ces droites, normales aux trajectoires de leurs différents points dans toutes les positions du système mobile, forment une congruence linéaire ayant pour directrices les droites D et D′ définies par les équations

$$(\mathrm{D}) \qquad x = 0, \qquad y = \frac{A}{C},$$

$$(\mathrm{D}') \qquad y = 0, \qquad Bx + Az = 0.$$

D'ailleurs, il n'existe pas de courbe proprement dite qui réponde à la question, car les tangentes de toute courbe Σ devraient posséder la propriété requise dans l'énoncé, ce qui, d'autre part, est impossible, puisque les droites d'une congruence linéaire ne peuvent être les tangentes d'une courbe proprement dite.

Si, maintenant, on se rappelle que toute courbe dont les courbures ont entre elles une relation linéaire est une courbe de M. Bertrand, on peut énoncer le théorème suivant donné, en partie, par M. Pirondini :

Lorsque, dans le mouvement du trièdre fondamental d'une courbe (O) *dont les deux courbures ne sont pas simultanément constantes, une ligne* Σ, *invariablement liée à ce trièdre et distincte des normales à la courbe* *proposée ou des parallèles à la binormale situées dans le plan rectifiant, reste constamment normale aux trajectoires de tous ses points :*

1° *La courbe* (O) *est une courbe de M. Bertrand;*

2° *La ligne* Σ *est l'une quelconque des droites de la congruence ayant pour directrices les droites fixes* D *et* D′ *définies ci-dessus.*

5. Ces droites D et D′ dépendent très simplement, comme on va le voir, de la binormale de la courbe donnée (O) et de la binormale de la courbe conjuguée (O′).

Supposons, en premier lieu, qu'aucun des coefficients A, B, C de la relation (3) ne soit nul. On pourra mettre cette relation sous la forme

$$\frac{\sin\omega}{\rho} + \frac{\cos\omega}{\tau} = \frac{\sin\omega}{h}. \tag{5}$$

On sait que h représente la longueur constante du segment OO′ que l'on doit porter, à partir de O, sur la normale principale Oy, pour obtenir la courbe (O′) conjuguée de (O), qui appartient à la même catégorie que celle-ci. De plus, ω désigne l'angle constant formé par les plans osculateurs aux deux courbes (O) et (O′) en leurs points correspondants. (O. Bonnet.)

Les équations des droites D et D′ deviennent alors

$$(\mathrm{D}) \qquad x = 0, \qquad y = h,$$

$$(\mathrm{D}') \qquad y = 0, \qquad x\cos\omega + z\sin\omega = 0.$$

On en déduit immédiatement que les directrices D et D′ de la congruence linéaire formée par les droites Σ sont les parallèles aux binormales de chacune des courbes (O) et (O′) qui rencontrent la courbe conjuguée, savoir en O′ pour la première, D, et en O pour la seconde, D′.

Cette conclusion convient au cas où la courbe (O) est à courbure constante, pour lequel $\cos\omega = 0$, ou $\omega = \frac{\pi}{2}$.

Dans le cas des courbes à torsion constante, $\sin\omega$ et h ont des valeurs nulles, de manière que

$$\tau = \lim \frac{h}{\sin\varpi}.$$

Alors, les deux courbes conjuguées se confondent ainsi que les directrices.

En revenant à l'équation générale (1) du complexe, on a évidemment, pour les équations de la congruence,

$$p = 0, \qquad q = a\tau,$$

de telle sorte que les équations générales des droites Σ peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} x &= ay, \\ z &= by + a\tau, \end{aligned}$$

a et b étant arbitraires. Toutes ces droites rencontrent l'axe des z, c'est-à-dire la binormale de (O), avec laquelle se confondent les droites D et D'.

Enfin, si le rapport des courbures de (O) est constant, ce qui exige que cette courbe soit une hélice tracée sur un cylindre, d'ailleurs arbitraire, on a $C = 0$. La droite D est rejetée à l'infini, ainsi que la courbe conjuguée (O'). Les équations de D' sont toujours

$$(\mathrm{D}') \qquad y = 0, \qquad z = -\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}x = \frac{\tau}{\rho}x.$$

Cette droite D' se confond, par suite, avec la caractéristique du plan rectifiant $z\mathrm{O}x$, car on sait que, pour une courbe quelconque, cette caractéristique fait, avec la tangente $\mathrm{O}x$, un angle μ tel que

$$\operatorname{tang}\mu = \frac{\tau}{\rho}.$$

II.

6. Abandonnant ici la suite des recherches par lesquelles M. Pirondini a terminé son intéressant Mémoire, nous nous proposons d'étudier les surfaces réglées engendrées par les droites de la congruence (D, D'). Nous démontrerons que ces surfaces sont applicables sur des surfaces réglées de M. Bertrand, c'est-à-dire qu'on peut les déformer, avec conservation des génératrices rectilignes, de manière que ces génératrices deviennent des normales principales de deux de leurs trajectoires orthogonales convenablement choisies [1].

---

[1] Ces surfaces réglées, dont les génératrices sont les normales principales de deux de leurs trajectoires orthogonales, courbes de M. Bertrand conjuguées, peuvent aussi être re-

Nous traiterons d'abord le cas où la courbe (O) est une courbe générale de M. Bertrand, en sorte que $\sin\omega$ et h seront différents de zéro, h étant fini.

Considérons une droite s'appuyant sur les droites D et D′ qu'elle rencontre respectivement en G et G′. Les équations de GG′ seront les suivantes :

$$(6) \qquad \begin{cases} x = \alpha u, \\ y = h + \beta u, \\ z = z_0 + \gamma u, \end{cases}$$

dans lesquelles α, β, γ sont les cosinus directeurs de la direction GG′, la variable u désignant la distance GM du point $G(0, h, z_0)$ au point $M(x, y, z)$ de la droite. En particulier, les coordonnées du point G′, où la droite rencontre le plan zOx, sont définies par les relations

$$(G') \qquad \begin{cases} u = -\dfrac{h}{\beta}, \\ y = 0, \\ x = -\dfrac{\alpha}{\beta} h, \qquad z = z_0 - \dfrac{\gamma}{\beta} h. \end{cases}$$

Pour obtenir la relation qui doit exister entre les paramètres de cette droite, il reste à écrire que ce point G′ appartient à D′ dont l'équation dans le plan zOx est (n° 5)

$$x\cos\omega + z\sin\omega = 0.$$

On trouve ainsi la condition cherchée, que nous écrirons ainsi

$$(7) \qquad \gamma = \frac{\beta}{h} z_0 - \alpha \cot\omega,$$

et à laquelle il faut joindre la relation générale

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

---

gardées comme des surfaces réglées dont deux asymptotiques coupent les génératrices à angle droit. En tous les points de ces courbes, les rayons de courbure principaux de la surface réglée sont égaux et de signes contraires, de telle sorte que la surface réglée est inscrite à des surfaces minima admettant ces courbes pour asymptotiques. Nous avons donné le moyen de construire ces surfaces minima (*Mémoires de l'Académie des Sciences de Toulouse*, 9^e série, t. IV, p. 261 et 263).

Dans le mouvement qui amène le point O de (O) à la position infiniment voisine O_1, les projections, sur les axes instantanés du déplacement de M, supposé lui aussi mobile sur GG′, sont données par les formules (A), savoir :

$$\Delta \text{ de } M \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta X &= \alpha\, du + \left(1 - \frac{h}{\rho} - \frac{\beta u}{\rho}\right) ds, \\ \Delta Y &= \beta\, du + \left[u\left(\frac{\alpha}{\rho} - \frac{\gamma}{\tau}\right) - \frac{z_0}{\tau}\right] ds, \\ \Delta Z &= \gamma\, du + \left(\frac{\beta u}{\tau} + \frac{h}{\tau}\right) ds. \end{aligned} \right.$$

Il résulte de là que le carré de l'élément linéaire de la surface réglée a pour valeur

$$dS^2 = \overline{\Delta X}^2 + \overline{\Delta Y}^2 + \overline{\Delta Z}^2 = du^2 + (L u^2 - 2 M u + N)\, ds^2,$$

en posant

$$\begin{aligned} L &= \frac{\beta^2}{\rho^2} + \left(\frac{\alpha}{\rho} - \frac{\gamma}{\tau}\right)^2 + \frac{\beta^2}{\tau^2}, \\ M &= \frac{\beta}{\rho}\left(1 - \frac{h}{\rho}\right) + \frac{z_0}{\tau}\left(\frac{\alpha}{\rho} - \frac{\gamma}{\tau}\right) - \frac{\beta h}{\tau^2}, \\ N &= \left(1 - \frac{h}{\rho}\right)^2 + \frac{z_0^2}{\tau^2} + \frac{h^2}{\tau^2}; \end{aligned}$$

car le terme en *du ds* s'évanouit identiquement, ce qui prouve, d'une autre manière, l'orthogonalité des lignes ayant respectivement pour équations

$$u = \text{const.}, \qquad s = \text{const.},$$

c'est-à-dire de la génératrice GG′ et des trajectoires de ses différents points.

En vertu de la relation (5), d'où l'on déduit

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{h} - \frac{\cot\omega}{\tau},$$

et de la relation (7), les valeurs de L, M, N se simplifient.

Introduisons d'abord les quantités auxiliaires

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} A &= \frac{1}{\sin^2\omega} + \frac{z_0^2}{h^2}, \\ B &= \beta \cot\omega + \frac{\alpha z_0}{h}, \end{aligned} \right.$$

qui restent constantes pendant le mouvement et qui vérifient la relation

$$A(\alpha^2+\beta^2)-B^2=1; \tag{9}$$

on trouve, après quelques réductions,

$$(10)\quad \begin{cases} L = \dfrac{1}{Ah^2}\left[\left(\dfrac{A\beta h}{\tau}-B\right)^2+1\right], \\ M = -\dfrac{1}{\tau}\left(\dfrac{A\beta h}{\tau}-B\right), \\ N = \dfrac{Ah^2}{\tau^2}, \\ LN-M^2 = \dfrac{1}{\tau^2}. \end{cases}$$

D'autre part, la valeur de dS^2 prend la forme

$$dS^2 = du^2 + L\,ds^2[(u-u_0)^2+p^2], \tag{11}$$

où l'on a posé

$$(12)\quad \begin{cases} u_0 = \dfrac{M}{L}, \\ p = \dfrac{\sqrt{LN-M^2}}{L} = \dfrac{1}{L\tau}. \end{cases}$$

La comparaison de cette valeur de dS^2 avec celle de l'Ouvrage de M. Darboux conduit aux conclusions suivantes :

1° u_0 désigne la distance du point G au point central de la génératrice et, par suite, la première des équations (12) est celle de la ligne de striction de la surface;

2° p désigne le paramètre de distribution [1];

3° La variable v de M. Darboux est liée à l'arc s par la relation

$$dv = ds\sqrt{L},$$

où la seule fonction de s est la torsion $\frac{1}{\tau}$, puisque A, B, β et h restent constantes pendant le déplacement.

Les formules précédentes vont nous permettre de démontrer la propriété

---

[1] Dans l'Ouvrage de M. Darboux u_0 et p sont désignées respectivement par α et β (*voir* III^e Partie, p. 305).

essentielle des surfaces considérées, qui consiste dans la proposition dont voici l'énoncé :

7. Théorème. — *La surface réglée engendrée par toute droite* Σ *peut être déformée, avec conservation des génératrices, en une surface de M. Bertrand, de telle sorte que les deux courbes de cette nouvelle surface admettant les génératrices pour normales principales sont les transformées des trajectoires des points* G *et* G′ *où* Σ *rencontre* D *et* D′.

Pour le démontrer, nous nous appuierons sur le résultat suivant trouvé par Bour et rappelé par M. Darboux (*Leçons sur la théorie générale des surfaces*, IIIe Partie, p. 309).

Il existe toujours une déformation d'une surface gauche telle que ses génératrices rectilignes deviennent les normales principales d'une de leurs trajectoires orthogonales arbitrairement choisie ([1]). Pour que ses génératrices puissent devenir les normales principales de *deux* de ces trajectoires, en d'autres termes, pour que la surface puisse être déformée en une surface réglée de M. Bertrand, il faut et il suffit que l'on ait entre u_0 et p une relation de la forme

$$(u_0 - m)^2 + (p - n)^2 = q,$$

m, n, q étant des constantes.

A cet énoncé, on doit ajouter que, si la condition précédente est satisfaite, les valeurs de u fournissant les trajectoires orthogonales qui se transforment ainsi en courbes de M. Bertrand sont données par les équations

$$u_1 + u_2 = 2m,$$
$$u_1 u_2 = m^2 + n^2 - q.$$

Dans le cas actuel les valeurs de u_0 et p (12) conduisent, par l'élimination de τ, à la relation demandée

$$u_0^2 + p^2 + \frac{h}{\beta}(u_0 + Bp) = 0,$$

d'où l'on déduit la première partie de la proposition. En outre,

$$u_1 + u_2 = -\frac{h}{\beta},$$
$$u_1 u_2 = 0.$$

([1]) La détermination de la surface transformée exige l'intégration d'une équation de Riccati (Darboux, *loc. cit.*, p. 308).

L'une des valeurs, u_1 par exemple, étant nulle, on voit que l'une des trajectoires qui se transforment en courbes de M. Bertrand, est la ligne décrite par le point G. Par analogie, l'autre trajectoire doit être le lieu du point G', comme le montre, d'ailleurs, la valeur de $u_2 = -\frac{h}{\beta}$. Toutes les parties de la proposition sont donc établies.

8. Ce résultat peut être obtenu autrement. Je vais d'abord faire voir que, pendant le mouvement, les plans tangents à la surface réglée en G et G' sont invariablement liés au système mobile et, par suite, qu'ils forment entre eux un angle constant. A chaque instant, en effet, ces plans tangents sont déterminés par la droite GG' et les déplacements des points G et G'. Comme ces déplacements sont normaux à GG', l'angle θ des plans tangents est le même que celui des tangentes aux trajectoires des points G et G'. On obtient les directions de ces tangentes en faisant successivement $u = 0$, $u = -\frac{h}{\beta}$ dans les formules donnant les Δ du point M. On en déduit que les cosinus directeurs de la tangente à (G) en G sont proportionnels à

$$\cot\omega, \quad -\frac{z_0}{h}, \quad 1,$$

de telle sorte, comme nous l'avions annoncé, que cette tangente est invariablement liée à la figure mobile. Pareillement, on trouve que les cosinus directeurs de la tangente à (G') en G' sont proportionnels à

$$\beta, \quad -\alpha, \quad 0.$$

Conséquemment, eu égard aux valeurs de A et B,

$$\cos\theta = \frac{\beta\cot\omega + \frac{\alpha z_0}{h}}{\sqrt{\cot^2\omega + \frac{z_0^2}{h^2} + 1}} \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \frac{B}{\sqrt{1+B^2}}.$$

Par suite, on a la relation

$$B = \cot\theta,$$

qui donne l'interprétation géométrique de l'auxiliaire B et, ensuite, celle de A, puisque, d'après (8),

$$A = \frac{1 + B^2}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{1}{\sin^2\theta \sin^2\varphi},$$

φ désignant l'angle de GG' avec OZ.

La constance de l'angle de ces plans tangents ou de ces déplacements peut aussi se déduire de ce que le plan normal à (G) en G passe par la droite D', et que le plan (G', D) est pareillement normal à la trajectoire de G'. Ces plans normaux sont ainsi invariablement liés à lafigure mobile. Leur angle est donc constant et, d'ailleurs, il est égal à θ.

Ceci posé, on sait qu'on peut déformer la surface réglée primitive de manière que les nouvelles génératrices rectilignes, étant les transformées de celles de la surface proposée, soient aussi les normales principales de la transformée de (G). Dans cette déformation, les angles formés par les plans tangents le long d'une même génératrice ne changent pas. Il s'ensuit que la transformée de (G') admettra aussi les nouvelles génératrices pour normales principales et sera ainsi la conjuguée de la transformée de (G), puisque l'angle des plans tangents, le long de ces transformées, aura la même valeur constante θ que pour les courbes (G) et (G').

On voit, de plus, que le rayon de courbure R et le rayon de torsion T de l'une de ces transformées sont liés par l'équation

$$\frac{\sin\theta}{R} + \frac{\cos\theta}{T} = \frac{\sin\theta}{l},$$

l désignant la distance $GG' = -\frac{h}{\beta}$, puisque θ est la valeur constante de l'angle formé, après la déformation, par les plans osculateurs des transformées de courbes (G) et (G'). Cette relation prend la forme

$$\frac{1}{R} + \frac{B}{T} = -\frac{\beta}{h},$$

qui conduit à quelques conséquences intéressantes.

1° Considérons l'hyperboloïde H, lieu des droites d'intersection des plans rectangulaires passant par D et D'. Toute droite de cet hyperboloïde appartenant à un autre système que D et D' rencontre ces deux droites. Elle est, par suite, une ligne Σ. Pour cette ligne on a

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

ou encore

$$B = 0.$$

Dès lors, les transformées des courbes décrites par les points où cette droite rencontre D et D′ sont des courbes à courbure constante.

2° Pour obtenir des courbes dont les transformées soient des hélices, c'est-à-dire des lignes dans lesquelles le rapport des courbures soit constant, il est nécessaire et suffisant que l'on ait $\beta = 0$, c'est-à-dire que la droite Σ soit parallèle à la bi-normale OZ en étant située dans le plan rectifiant, puisqu'elle doit rencontrer D′. Dans ce cas, la surface réglée de M. Bertrand, transformée de celle qui est engendrée pendant le mouvement, est un héli-coïde gauche à plan directeur.

On voit enfin qu'il n'existe pas de transformée à torsion constante, car l'angle θ formé par deux plans passant par D et D′ ne peut être nul. Cette conclusion résulte aussi de ce que les points G et G′ ne peuvent se confondre.

9. Lorsque le point G′ vient en O ou le point G en O′, les courbes (G′) ou (G) se confondent avec (O) ou (O′) et sont, par suite, des courbes de M. Bertrand. On peut se demander si ces courbes particulières sont les seules de cette catégorie parmi les trajectoires des points des droites D et D′.

Nous allons faire voir qu'en général tout point de D, autre que O′, ou tout point de D′, autre que O, engendre une ligne pour laquelle il n'existe pas de relation linéaire entre les courbures. A cause du rôle identique des lignes D et D′, il suffira de le vérifier pour l'une d'elles.

Soit, par exemple, un point G de D dont la cote z_0 ne soit pas nulle, et cherchons à déterminer les éléments des courbures de sa trajectoire (G).

Nous avons vu que les cosinus directeurs de la tangente à (G) en G sont proportionnels aux quantités

$$\cot\omega, \quad -\frac{z_0}{h}, \quad 1.$$

Il en résulte que l'équation du plan normal est

$$X\cot\omega - \frac{z_0}{h}Y + Z = 0,$$

ce qui permet de vérifier que ce plan normal contient D′.

La caractéristique de ce plan normal, c'est-à-dire la droite polaire de G, sera représentée par l'équation précédente jointe à celle-ci

$$z_0\left(\frac{1}{h}-\frac{\cot\omega}{\tau}\right)X+\left(\cot\omega-\frac{h}{\tau\sin^2\omega}\right)Y-\frac{z_0}{\tau}Z-h\cot\omega=0,$$

obtenue par la méthode ordinaire. Or, ce second plan est perpendiculaire au premier, comme on le voit immédiatement.

Donc :

1° Le rayon de courbure ρ_1 de (G) en G est égal à la distance de G à ce second plan, ce qui donne, après quelques réductions,

$$\rho_1=\frac{h\left(\cot\omega-\frac{Ah}{\tau}\right)}{\sqrt{A\left(\frac{h}{\tau\sin\omega}-\cos\omega\right)^2+\frac{z_0^2}{h^2}\sin^2\omega}};$$

2° Les équations de la normale principale, qui se confond, dans ce cas, avec la perpendiculaire abaissée de G sur le second plan, sont

$$\frac{X}{z_0\left(\frac{1}{h}-\frac{\cot\omega}{\tau}\right)}=\frac{Y-h}{\cot\omega-\frac{h}{\tau\sin^2\omega}}=-\frac{Z-z_0}{\frac{z_0}{\tau}}.$$

Ces dernières équations montrent que la normale principale est distincte de GG′ et, même, qu'elle n'est pas invariablement liée au trièdre mobile, car le point où elle coupe le plan zOx change pendant le mouvement, puisque les coordonnées dépendent de τ qui varie avec s.

De plus, dans le calcul de la torsion τ_1 de (G), la dérivée de τ s'introduirait évidemment et, par suite, il n'existe pas, généralement du moins, de relation indépendante de τ entre ρ_1 et τ_1. *A fortiori*, il n'y a pas de relation linéaire entre les courbures $\frac{1}{\rho_1}$ et $\frac{1}{\tau_1}$ de la ligne (G).

10. Les équations (10), (11), (12), (13) définissent deux des trois fonctions nécessaires et suffisantes pour déterminer la forme de la surface réglée étudiée [1]. Il reste à calculer la troisième fonction que M. Darboux désigne par V et qui est la courbure géodésique de l'indicatrice sphérique du cône directeur.

---

[1] *Voir* M. Darboux, *loc. cit.*, p. 307.

Le résultat que l'on trouve n'est pas assez simple pour qu'il y ait quelque intérêt à le développer. Je me bornerai, ce qui est le seul point important, à donner cette valeur de V pour la surface réglée de M. Bertrand transformée de la première, en m'appuyant, d'une part, sur ce que les transformées des lignes (G) et (G′) sont des asymptotiques de la nouvelle surface et, d'autre part, sur ce que l'équation différentielle des asymptotiques d'une surface réglée est, eu égard à la notation employée [1],

$$2p\frac{du}{dv} + u_0\frac{dp}{dv} - p\frac{du_0}{dv} - u\frac{dp}{dv} + \mathrm{V}[(u-u_0)^2 + p^2] = 0.$$

Dans le cas présent, une des lignes asymptotiques de la surface transformée correspond à la valeur $u = 0$. Par suite, la valeur de la fonction V, relative à cette dernière surface, sera fournie par l'équation

$$\mathrm{V} = -\frac{u_0\dfrac{dp}{dv} - p\dfrac{du_0}{dv}}{u^2 + p^2} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{L}}}\frac{d}{ds}\left(\text{arc tang}\frac{u_0}{p}\right),$$

puisque

$$dv = ds\sqrt{\mathrm{L}}.$$

En vertu des formules (12) et (13) et des valeurs (10) de M et de L, on trouve aisément que

$$\mathrm{V} = -\frac{\beta\left(\dfrac{1}{\tau}\right)'}{h\mathrm{L}^{\frac{3}{2}}}, \tag{13}$$

où $\left(\frac{1}{\tau}\right)'$ désigne la dérivée de $\frac{1}{\tau}$ prise par rapport à s.

En particulier, cette formule s'applique à la surface réglée engendrée par la normale $\mathrm{O}y$ commune aux deux courbes conjuguées (O) et (O′), en introduisant les hypothèses

$$\alpha = \gamma = 0, \qquad z_0 = 0, \qquad \beta = 1,$$

car cette surface est une surface réglée de M. Bertrand.

11. Nous étudierons maintenant le cas particulier où la courbe (O) est à torsion constante, cas dans lequel les équations des numéros précédents ne conviennent pas.

---

[1] DARBOUX, *loc. cit.*, p. 308.

Lorsque la courbe (O) a une torsion constante τ, nous avons vu (n° 5) que toutes les droites Σ rencontrent la bi-normale Oz en un point G dont la cote z_0 est telle que

$$z_0 = a\tau;$$

et, puisque a est manifestement égal au rapport des cosinus directeurs α et β, on a la relation

$$z_0 = \tau\frac{\alpha}{\beta}.$$

Les équations instantanées d'une droite Σ sont alors les suivantes

$$\begin{aligned} x &= \alpha u, \\ y &= \beta u, \\ z &= z_0 + \gamma u, \end{aligned}$$

les quantités α, β et z_0 vérifiant la relation ci-dessus.

Les projections du déplacement du point M de cette droite, tel que $GM = u$, sont, d'après les formules (A),

$$\Delta \text{ de M} \qquad \left\{ \begin{aligned} \Delta X &= \alpha\, du + \left(1 - \frac{\beta u}{\rho}\right) ds, \\ \Delta Y &= \beta\, du + \left[u\left(\frac{\alpha}{\rho} - \frac{\gamma}{\tau}\right) - \frac{\alpha}{\beta}\right] ds, \\ \Delta Z &= \gamma\, du + \frac{\beta u}{\tau}\, ds. \end{aligned} \right.$$

Dès lors le carré de l'élément linéaire de la surface réglée aura pour expression

$$dS^2 = du^2 + ds^2(Lu^2 - 2Mu + N),$$

ou

$$(14) \qquad dS^2 = du^2 + L\, ds^2[(u - u_0)^2 + p^2],$$

en posant d'abord

$$(15) \qquad \left\{ \begin{aligned} L &= \beta^2\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\tau^2}\right) + \left(\frac{\alpha}{\rho} - \frac{\gamma}{\tau}\right)^2, \\ M &= \frac{\beta}{\rho} + \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\alpha}{\rho} - \frac{\gamma}{\tau}\right), \\ N &= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta^2}, \end{aligned} \right.$$

d'où l'on déduit comme ci-dessus,

$$LN - M^2 = \frac{1}{\tau^2}$$

et ensuite

$$(16) \qquad \left\{ \begin{aligned} u_0 &= \frac{M}{L}, \\ p &= \frac{\sqrt{LN - M^2}}{L} = \frac{1}{L\tau}. \end{aligned} \right.$$

Dans ces formules, la courbure $\frac{1}{\rho}$ est la seule quantité qui varie pendant le mouvement. La première des équations (16) représente la ligne de striction de la surface réglée, et la seconde fournit le paramètre de distribution.

Le théorème général du n° 7 s'applique à ce cas, car l'élimination facile de ρ, entre les équations (16), conduit à la relation

$$u_0^2 + p^2 - \frac{p\tau}{\beta}(\alpha^2 + \beta^2) = 0.$$

Donc, la surface réglée engendrée par toute droite Σ est applicable sur une surface réglée de M. Bertrand. D'après ce qui a été rappelé au n° 7, les trajectoires orthogonales qui se transforment en courbes de cette même dénomination sont définies par les relations

$$u_1 + u_2 = 0,$$
$$u_1 u_2 = 0,$$

d'où l'on déduit

$$u_1 = u_2 = 0.$$

Il en résulte que ces deux courbes se confondent en une seule qui est la trajectoire du point G. Les courbes transformées, qui sont des courbes de M. Bertrand conjuguées, se confondent et, conséquemment, sont des courbes à torsion constantes, ce qui était à prévoir, puisque dans le cas actuel les droites D et D′ coïncident.

12. On reconnaît, d'ailleurs, que la trajectoire de G n'est pas, elle-même, une courbe à torsion constante, et que la surface primitive n'est pas non plus une surface de M. Bertrand, en supposant, bien entendu, que G soit distinct de O.

Effectivement, le plan normal à (G) en G a pour équation

$$\beta X - \alpha Y = 0,$$

et sa caractéristique, droite polaire de la courbe, est définie par l'équation précédente jointe à celle-ci

$$\alpha\frac{X}{\rho}+\beta\frac{Y}{\rho}-\alpha\frac{Z}{\tau}-\beta=0,$$

qui représente un plan perpendiculaire au premier. Donc, le rayon de courbure ρ_1 de (G) est la distance de G au second plan, savoir,

$$\rho_1=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\beta\tau\sqrt{\frac{(\alpha^2+\beta^2)}{\rho^2}+\frac{\alpha^2}{\tau^2}}};$$

et les équations de la normale principale, qui est aussi la perpendiculaire abaissée de G sur ce plan, sont

$$\frac{X}{\frac{\alpha}{\rho}}=\frac{Y}{\frac{\beta}{\rho}}=\frac{Z-z_0}{-\frac{\alpha}{\tau}}.$$

Cette droite change pendant le mouvement. Elle ne se confond pas conséquemment avec la droite Σ. De plus, il est manifeste que, dans le calcul de la torsion τ_1, de G, la dérivée de ρ s'introduira et, par suite, la relation entre $\frac{1}{\rho_1}$ et $\frac{1}{\tau_1}$ ne sera pas, généralement du moins, indépendante de la fonction ρ et, *a fortiori*, ne sera pas linéaire.

13. Dans le cas particulier où la droite Σ est parallèle à la bi-normale, elle doit être située dans le plan rectifiant ainsi qu'on peut s'en rendre compte directement.

En effet, si l'on désigne par x_0 et y_0 les coordonnées du pied H, sur le plan xOy, d'une droite L parallèle à Oz, et par u la distance HM comptée de cette droite, les coordonnées du point M auront pour valeurs

$$x=x_0,\qquad y=y_0,\qquad z=u,$$

et les projections de son déplacement sur les axes instantanés seront (dans l'hypothèse où le point M se meut aussi sur L)

$$\Delta \text{ de M}\quad\left\{\begin{aligned}\Delta X&=\left(1-\frac{y_0}{\rho}\right)ds,\\ \Delta Y&=\left(\frac{x_0}{\rho}-\frac{u}{\tau}\right)ds,\\ \Delta Z&=du+\frac{y_0}{\tau}ds.\end{aligned}\right.$$

On en déduit l'expression de dS^2 pour la surface réglée engendrée par L. Pour que la droite L soit normale aux trajectoires de ses différents points, il faut que le coefficient de $du\,ds$ soit nul; c'est-à-dire, comme nous l'avions annoncé, que l'on ait $y_0 = 0$, ou bien encore que la droite L soit située dans le plan xOz.

Si cette condition est remplie, on a

$$dS^2 = du^2 + \frac{ds^2}{\tau^2}\left[\left(u - \frac{\tau x_0}{\rho}\right)^2 + \tau^2\right],$$

d'où

$$u_0 = \frac{\tau x_0}{\rho},$$
$$p = \tau.$$

On en déduit que la surface réglée, engendrée par une droite Σ parallèle à la bi-normale de la courbe à torsion constante donnée et située dans le plan rectifiant, est telle que son paramètre de distribution a une valeur constante égale au rayon de torsion, et que la ligne de striction de cette surface réglée appartient à la développable enveloppe du plan rectifiant de (O).

14. La valeur de la fonction V relative à la surface transformée est toujours déduite de la formule

$$V = \frac{1}{\sqrt{L}}\frac{d}{ds}\left(\text{arc tang}\frac{u_0}{p}\right)$$

qui donne, pour le cas où la droite Σ rencontre Oz à distance finie,

$$V = \frac{\beta\left(\frac{1}{\rho}\right)'}{\tau L^{\frac{3}{2}}}, \tag{17}$$

et, pour le cas particulier examiné en dernier lieu,

$$V = -\frac{\tau x_0 \rho'}{x_0^2 + \rho^2}, \tag{17'}$$

les dérivées $\left(\frac{1}{\rho}\right)'$ et ρ' étant prises par rapport à s.

15. Nous terminerons par l'étude du cas où le rapport des courbures

de (O) est constant, ce qui revient à dire que cette courbe est une hélice tracée sur un cylindre arbitraire.

D'après ce qui a été dit au n° 5, les équations d'une droite Σ peuvent alors s'écrire

$$\begin{aligned} x &= l, \\ y &= \beta u, \\ z &= l \operatorname{tang}\mu + \gamma u, \end{aligned}$$

$\alpha = 0$, β, γ désignant encore les cosinus directeurs de Σ, u la distance G′M du point $M(x, y, z)$ de la droite au point G′ où elle rencontre la droite D′ qui se confond, comme on sait, avec la caractéristique du plan rectifiant.

Dans ce cas, la courbe (G′) n'est autre évidemment que l'hélice (O) déplacée parallèlement aux génératrices du cylindre qui la contient, et toutes les droites Σ aboutissant au même point G′ de D′ sont les normales de (G′).

On a, pour les projections du déplacement d'un point quelconque M de Σ,

$$\Delta \text{ de M} \qquad \left\{ \begin{aligned} \Delta X &= \left(1 - \frac{\beta u}{\rho}\right) ds, \\ \Delta Y &= \beta\, du - \frac{\gamma u}{\tau} ds, \\ \Delta Z &= \gamma\, du + \frac{\beta u}{\tau} ds, \end{aligned} \right.$$

puisque $\operatorname{tang}\mu = \frac{\tau}{\rho}$. Conséquemment, le carré de l'élément linéaire de la surface réglée engendrée par Σ a pour valeur

$$(18) \qquad dS^2 = du^2 + ds^2(L u^2 - 2 M u + N) = du^2 + L\, ds^2[(u - u_0)^2 + p^2];$$

en posant d'abord

$$(19) \qquad \left\{ \begin{aligned} L &= \frac{\beta^2}{\rho^2} + \frac{1}{\tau^2} = \frac{1}{\tau^2}(\beta^2 \operatorname{tang}^2\mu + 1), \\ M &= \frac{\beta}{\tau} \operatorname{tang}\mu, \\ N &= 1, \end{aligned} \right.$$

d'où l'on déduit, comme dans le cas général,

$$LN - M^2 = \frac{1}{\tau^2}.$$

et ensuite

$$(20)\qquad \begin{cases} u_0 = \dfrac{\mathrm{M}}{\mathrm{L}} = \dfrac{\beta\tau \operatorname{tang}\mu}{\beta^2 \operatorname{tang}^2\mu + 1}, \\ p = \dfrac{\sqrt{\mathrm{LN} - \mathrm{M}^2}}{\mathrm{L}} = \dfrac{1}{\mathrm{L}\tau} = \dfrac{\tau}{\beta^2 \operatorname{tang}^2\mu + 1}. \end{cases}$$

La première équation (20) est celle de la ligne de striction. On voit de plus que

$$\frac{u_0}{p} = \beta \operatorname{tang}\mu \ (^1),$$

de telle sorte que ce rapport est constant [1].

La courbe (G′) étant identique à (O), il est clair que la surface décrite par Σ n'est pas une surface de M. Bertrand, à moins que Σ ne soit parallèle à Oy, puisque, excepté dans ce dernier cas, cette droite est distincte de la normale principale de (G′).

16. La surface réglée, dont il est question ci-dessus, est applicable sur une surface réglée de M. Bertrand dont l'une des asymptotiques normales aux génératrices rectilignes est rejetée à l'infini, la seconde asymptotique conjuguée de la première étant une nouvelle hélice, telle que l'angle μ' sous lequel ses tangentes coupent les génératrices du cylindre qui la contient soit défini par la relation

$$\operatorname{tang}\mu' = \beta \operatorname{tang}\mu,$$

la torsion de cette transformée de (G′) étant la même que celle de (G′) ou de (O) aux points correspondants, lesquels sont fournis par les mêmes valeurs de s.

C'est ce que l'on vérifie sans difficulté en remarquant, d'une part, que la valeur de $d\mathrm{S}^2$ peut être mise sous la forme

$$d\mathrm{S}^2 = du^2 + \left[\left(\frac{u}{\tau}\beta \operatorname{tang}\mu - 1\right)^2 + \frac{u^2}{\tau^2}\right] ds^3,$$

et, d'autre part, sous celle-ci

$$d\mathrm{S}^2 = du^2 + \left[\left(\frac{u}{\tau}\operatorname{tang}\mu' - 1\right)^2 + \frac{u^2}{\tau^2}\right] ds^2,$$

---

[1] Il est aisé de démontrer que, pour une position donnée de la figure mobile, les points centraux de toutes les droites Σ aboutissant en un même point G′ de D′ appartiennent à une circonférence.

qui convient à la surface réglée engendrée par Oy, en supposant que μ devienne égal à μ', le rayon de torsion τ conservant la même valeur que pour (O).

Dans le cas où (O) est une hélice, la valeur de V relative à la surface de M. Bertrand transformée de celle qui est engendrée par une droite Σ, savoir

$$V = \frac{1}{\sqrt{L}} \frac{d}{ds}\left(\text{arc tang} \frac{u_0}{p}\right),$$

devient $V = 0$, puisque le rapport $\frac{u_0}{p}$ est constant.

Le cône directeur de la surface transformée se réduit à un plan, ce qui pouvait être prévu, attendu que cette surface transformée est engendrée par les normales principales d'une hélice.