SUR QUELQUES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

DU SECOND ORDRE,

PAR M. E. VESSIOT,

Chargé d'un Cours complémentaire à la Faculté des Sciences de Toulouse.

Cette étude est divisée en trois parties. La première est consacrée aux équations du second ordre

$$x'' = \varphi(x', x, t) \tag{1}$$

dont l'intégrale générale est de la forme

$$x = \frac{c_1\,\varphi_1(t) + c_2\,\varphi_2(t) + c_3\,\varphi_3(t)}{c_1\,\psi_1(t) + c_2\,\psi_2(t) + c_3\,\psi_3(t)},$$

et que nous appelons, pour abréger, les équations (E). Toute équation (E) est de la forme

$$\mathrm{A}(x'x'' - 2x'^2) + \mathrm{B}x'' + \mathrm{C}xx' + \mathrm{D}x' + \mathrm{P}x^3 + \mathrm{Q}x^2 + \mathrm{R}x + \mathrm{S} = 0, \tag{2}$$

les coefficients A, B, C, D, P, Q, R, S étant liés par deux relations différentielles que nous déterminons. L'intégration d'une telle équation se ramène à celle d'une équation linéaire du troisième ordre, car on peut toujours déterminer, sans intégrations, une transformation

$$x = \frac{\alpha(t)\,y + \beta(t)}{\gamma(t)\,y + \delta(t)},$$

telle que l'équation en y soit identique à celle dont dépendent les dérivées logarithmiques des intégrales d'une équation linéaire du troisième ordre. Un intérêt particulier s'attache, par suite, parmi les équations (E), aux équations de la forme

$$(3) \qquad x'' + 3xx' + x^3 + \lambda(t)(x' + x^2) + \mu(t)x + \nu(t) = 0,$$

puisque toute équation (E) se ramène facilement à ce type. Nous montrons comment l'intégration d'une telle équation (3), équivalente, en général, à celle d'une équation linéaire du troisième ordre, se simplifie par la connaissance d'une ou plusieurs intégrales particulières. Ces réductions tiennent au fond à ce que l'équation (3) possède des systèmes fondamentaux d'intégrales, l'intégrale générale s'exprimant, par des formules connues, au moyen de quatre intégrales particulières quelconques.

Dans un second paragraphe, nous considérons les équations générales (2). Elles conservent leur forme par les transformations de variable et de fonction

$$(4) \qquad x = \frac{\alpha(t)\,y + \beta(t)}{\gamma(t)\,y + \delta(t)}, \qquad t = \varphi(u).$$

Nous indiquons sommairement la détermination des invariants des équations (2) pour ces transformations (4), et donnons, comme application, les conditions sous lesquelles l'équation (2) se ramène à une équation

$$x'' + lxx' + mx' + px^3 + qx^2 + rx + s = 0,$$

à coefficients constants. On sait que ces dernières équations ont été étudiées par M. Picard, et, plus récemment, par M. Mittag-Leffler. La méthode employée est celle dont Laguerre et Halphen se sont servis pour les équations linéaires, et qui a été utilisée notamment, depuis, par M. Appell et M. Painlevé; elle est fondée sur la recherche de formes canoniques pour les équations (2). Nous adoptons, comme forme canonique, dans le cas général, le type

$$x'' + 3xx' + \mathrm{I}x^3 + \mathrm{J}x + \mathrm{K} = 0.$$

Mais, dans des cas particuliers, on le remplace par l'un des suivants :

$$x'' + 3xx' + x^3 + \mathrm{G}x^2 + \mathrm{H} = 0,$$
$$x'' + \mathrm{E}x^3 + \mathrm{F} = 0,$$
$$x'' + x^2 + \mathrm{T} = 0.$$

La troisième partie contient la solution du problème suivant :

Reconnaître si une équation du second ordre (1) *peut s'abaisser au* *premier ordre par une transformation définie par une équation de la forme*

$$V = F(x', x),$$

et déterminer, dans ce cas, les fonctions F *correspondantes.*

En général, toutes ces fonctions F sont fonctions d'une seule d'entre elles, qu'on obtient sans intégration, ou, si l'équation (1) est de la forme

$$x'' = A(x', x)\theta(t) + B(x', x),$$

par une quadrature. On peut donc dire qu'en général il y a zéro solution, ou une seule solution. Une seule équation fait exception, c'est l'équation

$$x'' = x'\theta(t) + x'^2\xi(x),$$

où θ et ξ sont des fonctions quelconques de leurs arguments. Il y a ici une infinité de solutions distinctes, qui s'obtiennent par des quadratures. Cette équation s'intègre du reste elle-même par quadratures, et l'intégrale générale s'exprime, au moyen d'une intégrale particulière quelconque x_0, par une formule

$$x = \Phi(x_0 \mid a, b),$$

où a, b sont des constantes arbitraires, et où la fonction Φ ne dépend pas du choix de l'intégrale particulière x_0. C'est donc encore une équation à solutions fondamentales.

I. — Recherche et étude des équations (E).

1. Parmi les équations différentielles du second ordre, il est naturel de rechercher, comme étant analogues aux équations de Riccati, celles dont l'intégrale générale est de la forme

$$(1) \qquad x = \frac{c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + c_3\varphi_3(t)}{c_1\psi_1(t) + c_2\psi_2(t) + c_3\psi_3(t)},$$

c_1, c_2, c_3 étant des constantes.

Si l'on suppose donnée cette intégrale (1), on trouve immédiatement pour l'équation cherchée :

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} x\psi_1 - \varphi_1 & x'\psi_1 + x\psi'_1 - \varphi'_1 & x''\psi_1 + 2x'\psi'_1 + x\psi''_1 - \varphi''_1 \\ x\psi_2 - \varphi_2 & x'\psi_2 + x\psi'_2 - \varphi'_2 & x''\psi_2 + 2x'\psi'_2 + x\psi''_2 - \varphi''_2 \\ x\psi_3 - \varphi_3 & x'\psi_3 + x\psi'_3 - \varphi'_3 & x''\psi_3 + 2x'\psi'_3 + x\psi''_3 - \varphi''_3 \end{vmatrix} = 0.$$

ce qui donne, en développant, une équation de la forme

$$(3)\qquad A(xx''-2x'^2)+Bx''+Cxx'+Dx'+Px^3+Qx^2+Rx+S=0,$$

où A, B, C, D, P, Q, R, S sont des fonctions de la variable indépendante t.

Mais cette équation dépend de 7 fonctions arbitraires de t, alors que (1) n'en contient que 5. On prévoit donc que l'équation (3), qui comprend évidemment, comme cas particulier, l'équation linéaire du second ordre, avec ou sans second membre, n'aura pour intégrale générale une expression de la forme (1) que si ses coefficients vérifient deux relations. C'est ce que nous établirons en toute rigueur, et nous donnerons, en même temps que ces deux relations, le moyen de ramener la recherche de l'intégrale (1), dans le cas où elle existe, à l'intégration d'une équation linéaire homogène du troisième ordre.

Remarquons auparavant que le problème que nous traitons est un cas particulier d'un problème, plus général, résolu par M. Sophus Lie (1) :

Trouver toutes les équations différentielles du second ordre dont l'intégrale générale est de la forme

$$a\varphi(x,t)+b\psi(x,t)+\chi(x,t)=0,$$

c'est-à-dire qui se ramènent, par une transformation de points

$$X=\frac{\varphi(x,t)}{\chi(x,t)},\qquad T=\frac{\psi(x,t)}{\chi(x,t)},$$

à la forme $\dfrac{d^2X}{dT^2}=0$.

Il nous paraît cependant intéressant de traiter directement la question que nous nous sommes posée, tant à cause de la simplicité de la méthode qui nous servira, que parce qu'elle nous fournira quelques résultats sur les équations générales de la forme (3).

2. Deux remarques vont nous servir de point de départ. D'abord, à la classe d'équations considérée appartient évidemment l'équation

$$(4)\qquad y''+3yy'+y+\lambda(y'^3+y^2)+\mu y+\nu=0,$$

(1) *Archiv for Mathematik og Naturvidenskab.*; 1883. *Classification und Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen*, etc., III.

obtenue en posant

$$y = \frac{z'}{z}, \tag{5}$$

dans l'équation linéaire du troisième ordre

$$z''' + \lambda z'' + \mu z' + \nu = 0. \tag{6}$$

En second lieu, si l'équation proposée a son intégrale générale de la forme (1), il en est de même de la transformée de cette équation obtenue en posant

$$x = \frac{\alpha(t)y + \beta(t)}{\gamma(t)y + \delta(t)}, \tag{7}$$

et réciproquement.

Je dis de plus que, si l'équation (3) a pour intégrale générale (1), on peut disposer de α, β, γ, δ dans la formule (7), de manière que sa transformée en y soit précisément de la forme (4), c'est-à-dire, ait son intégrale générale de la forme

$$y = \frac{c_1\chi_1'(t) + c_2\chi_2'(t) + c_3\chi_3'(t)}{c_1\chi_1(t) + c_2\chi_2(t) + c_3\chi_3(t)}.$$

On a, en effet,

$$y = \frac{\beta - \delta x}{\gamma x - \alpha} = \frac{c_1[\beta\psi_1 - \delta\varphi_1] + c_2[\beta\psi_2 - \delta\varphi_2] + c_3[\beta\psi_3 - \delta\varphi_3]}{c_1[\gamma\varphi_1 - \alpha\psi_1] + c_2[\gamma\varphi_2 - \alpha\psi_2] + c^3[\gamma\varphi_3 - \alpha\psi_3]},$$

et il s'agit de satisfaire aux équations

$$\beta\psi_1 - \delta\varphi_1 = \frac{d}{dt}(\gamma\varphi_1 - \alpha\psi_1),$$

$$\beta\psi_2 - \delta\varphi_2 = \frac{d}{dt}(\gamma\varphi_2 - \alpha\psi_2),$$

$$\beta\psi_3 - \delta\varphi_3 = \frac{d}{dt}(\gamma\varphi_3 - \alpha\psi_3).$$

Elles fourniront des valeurs compatibles pour β et δ, si α et γ vérifient la relation

$$\begin{vmatrix} \psi_1 & \varphi_1 & \gamma\varphi_1' - \alpha\psi_1' \\ \psi_2 & \varphi_2 & \gamma\varphi_2' - \alpha\psi_2' \\ \psi_3 & \varphi_3 & \gamma\sigma_3' - \alpha\psi_3' \end{vmatrix} = 0. \tag{8}$$

Or, cette équation admet toujours pour α, γ une solution (autre que

$\alpha = \gamma = 0$). Les conditions cherchées s'obtiendront donc en exprimant qu'il existe au moins une transformation (7) ramenant l'équation (3) à la forme (4); et, cette transformation une fois connue, l'étude de l'équation donnée est ramenée, comme il a été annoncé, à celle d'une équation linéaire du troisième ordre, l'équation (6). Il résulte de plus, de ce qui précède, que s'il y a une transformation (7) répondant à la question, il y en a une infinité, car α et γ ne sont déterminées qu'à un facteur près $k(t)$.

Mais on peut déterminer ce facteur, en s'imposant la condition

$$\begin{vmatrix} z''_1 & z'_1 & z_1 \\ z''_2 & z'_2 & z_2 \\ z''_3 & z'_3 & z_3 \end{vmatrix} = 1, \tag{9}$$

où l'on a posé, pour abréger l'écriture,

$$z_1 = \gamma\varphi_1 - \alpha\psi_1, \qquad z_2 = \gamma\varphi_2 - \alpha\psi_2, \qquad z_3 = \gamma\varphi_3 - \alpha\psi_3.$$

Si l'on suppose en effet déterminé, par l'équation (8), le rapport $\rho = \frac{\gamma}{\alpha}$, on voit facilement que la condition (9) ne contient pas les dérivées de α. Remarquons enfin que la condition (9) équivaut à ce fait que $\lambda = 0$ dans les équations (4) et (6), et nous pourrons énoncer le résultat suivant :

Pour que l'équation (3) *ait une intégrale générale de la forme* (1), *il faut et il suffit qu'il existe une transformation* (7) *qui la ramène à la forme*

$$y'' + 3yy' + y^3 + Hy + K = 0. \tag{10}$$

Cette transformation, si elle existe, est unique, et une fois qu'elle est connue, en posant

$$y = \frac{z'}{z}, \tag{11}$$

l'équation proposée est ramenée (*sans intégration*) *à l'équation linéaire*

$$z''' + Hz' + Kz = 0. \tag{12}$$

3. Avant d'appliquer le résultat précédent, nous remarquerons que l'équation (3), la plus générale, possède la propriété de se changer en une équation de même forme, pour tout changement de fonction et de variable

indépendante de la forme

$$x = \frac{\alpha(t)y + \beta(t)}{\gamma(t)y + \delta(t)}, \qquad t = \varphi(u).$$

Pour le montrer, il suffit évidemment de vérifier le fait pour chacune des transformations

(I) $$x = \alpha(t)y,$$

(II) $$x = y + \alpha(t),$$

(III) $$x = \frac{1}{y},$$

(IV) $$t = \varphi(u) \quad \text{ou} \quad \frac{du}{dt} = \psi(u),$$

car la transformation précédente est un produit de transformations de ces quatre types. Or, la transformation (I) donne

$$x = \alpha y, \qquad x' = \alpha y' + \alpha' y, \qquad x'' = \alpha y'' + 2\alpha' y' + \alpha y'',$$
$$xx'' - 2x'^2 = \alpha^2(yy'' - 2y'^2) - 2\alpha\alpha'.yy' + (\alpha\alpha'' - 2\alpha'^2)y^2.$$

La transformation (II) donne

$$x = y + \alpha, \qquad x' = y' + \alpha', \qquad x'' = y'' + \alpha'',$$
$$xx'' - 2x'^2 = (yy'' - 2y'^2) + \alpha y'' - 4\alpha' y' + \alpha'' y - 2\alpha'^2.$$

Et la transformation (IV) donne

$$x' = \psi.\frac{dx}{du}, \qquad x'' = \psi^2.\frac{d^2x}{du^2} + \psi\psi'.\frac{dx}{du},$$
$$xx'' - 2x'^2 = \psi^2\left[x\frac{d^2x}{du^2} - 2\left(\frac{dx}{du}\right)^2\right] + \psi\psi'.x\frac{dx}{du}.$$

Le résultat est donc évident pour ces trois transformations.

Quant à la transformation (III), elle donne

$$x = \frac{1}{y}, \qquad x' = -\frac{y'}{y^2}, \qquad x'' = -\frac{yy'' - 2y'^2}{y^3}, \qquad xx'' - 2x'^2 = -\frac{y''}{y^3},$$

et, par suite, la transformée en y est

$$B(yy'' - 2y'^2) + Ay'' + Dyy' + Cy' - Sy^3 - Ry^2 - Qy - P = 0.$$

On conclut de là bien facilement le moyen de faire disparaître le premier terme de l'équation (3). Il suffit, par une transformation de la forme (II), de faire disparaître le second terme, et de passer ensuite à l'équation aux inverses. On voit ainsi que la transformation cherchée est

$$x = \frac{A - Bv}{Av}, \tag{13}$$

et l'équation transformée est

$$v'' + lvv' + mv' + pv^3 + qv^2 + rv + s = 0, \tag{14}$$

avec

$$\left\{\begin{aligned}
l &= \frac{1}{A^2}[AD - BC + 4(AB' - BA')],\\
m &= \frac{C}{A},\\
p &= \frac{1}{A^4}[2(AB'-BA')^2 - (BC-AD)(AB'-BA') + PB^3 - QAB^2 + RA^2B - SA^3],\\
q &= \frac{1}{A^3}[A(AB''-BA'') - (2A'-C)(AB'-BA') - 3PB^2 + 2QAB - RA^2],\\
r &= \frac{1}{A^2}(3PB - QA),\\
s &= -\frac{P}{A}.
\end{aligned}\right. \tag{15}$$

On remarquera enfin que, si l'on fait dans l'équation (14) la transformation

$$v = \frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta}, \qquad t = \varphi(u)$$

le terme en $(yy'' - 2y'^2)$ reparaît, à moins que γ ne soit nul.

4. Tout revient donc à chercher la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une transformation

$$v = \alpha(t)y + \beta(t), \tag{16}$$

ramenant l'équation (14) à la forme (10), et à trouver cette transformation, quand elle existe. Il vient

$$v = \alpha y + \beta, \quad v' = \alpha y' + \alpha' y + \beta', \quad vv' = \alpha^2 yy' + \alpha\beta y' + \alpha\alpha' y^2 + (\alpha\beta' + \beta\alpha')y + \beta\beta',$$
$$v'' = \alpha y'' + 2\alpha' y' + \alpha'' y + \beta'',$$

et, par suite, pour l'équation en y,

$$\alpha y'' + l\alpha^2 yy' + (2\alpha' + l\alpha\beta + m\alpha)y' + p\alpha^3 y^3 + (l\alpha\alpha' + 3p\alpha^2\beta + q\alpha^2)y^2 + \ldots = 0.$$

On a donc les conditions

$$\alpha = \frac{1}{3} l\alpha^2 = p\alpha^3,$$

$$l\alpha\beta + m\alpha + 2\alpha' = 0,$$

$$l\alpha\alpha' + 3p\alpha^2\beta + q\alpha^2 = 0,$$

d'où l'on tire

$$l \neq 0, \qquad \alpha = \frac{3}{l}, \qquad 9p - l^2 = 0,$$

$$l\beta + m - 2\frac{l'}{l} = 0,$$

$$3p\beta + q - l' = 0,$$

ou enfin

$$(17) \qquad \alpha = \frac{3}{l}, \qquad \beta = 2\frac{l'}{l^2} - \frac{m}{l},$$

avec

$$(18) \qquad 9p - l^2 = 0, \qquad l' + lm - 3q = 0.$$

Nous avons supprimé la condition $l \neq 0$, car, si $l = 0$, les deux conditions (18) deviennent $p = q = 0$, et l'équation (14) est linéaire, de sorte que l'équation proposée a bien, dans ce cas, son intégrale générale de la forme (1).

Les conditions (18) sont donc les conditions cherchées, et, si elles sont remplies, les formules (17), jointes aux formules (16), (13) et (15), donnent la transformation qui ramène l'équation (3) à la forme (10), c'est-à-dire à l'équation linéaire (12). Le résultat annoncé est donc établi.

Il est naturel de chercher à exprimer, au moyen des coefficients de l'équation (3), les conditions (18). On trouve sans difficulté

$$\begin{aligned} \mathrm{L} = \mathrm{A}^4(9p - l^2) &= 2(\mathrm{AB'} - \mathrm{BA'})^2 + (\mathrm{AD} - \mathrm{BC})(\mathrm{AB'} - \mathrm{BA'}) - (\mathrm{AD} - \mathrm{BC})^2 \\ &\quad + 9(\mathrm{PB}^3 - \mathrm{QAB}^2 + \mathrm{RA}^2\mathrm{B} - \mathrm{SA}^3), \\ \mathrm{M} = \mathrm{A}^3(l' + lm - 3q)& \\ = \mathrm{A}(\mathrm{AB''} - \mathrm{BA''}) &- 2\mathrm{A'}(\mathrm{AB'} - \mathrm{BA'}) + \mathrm{A}(\mathrm{AD'} - \mathrm{DA'}) + \mathrm{B}(\mathrm{CA'} - \mathrm{AC'}) \\ &\quad + \mathrm{C}(\mathrm{AD} - \mathrm{BC}) + 9\mathrm{PB}^2 - 6\mathrm{QAB} + 3\mathrm{RA}^2, \end{aligned}$$

et il est naturel d'introduire, pour la symétrie,

$$N = B(AB'' - BA'') - 2B'(AB' - BA') - B(BC' - CB') - A(DB' - BD') + D(AD - BC) + 3QB^2 - 6RAB + 9SA^2.$$

Si l'on remarque l'identité

$$L = MB - AN,$$

on voit que les conditions cherchées s'écrivent soit $L = 0$, $M = 0$, soit sous une forme plus symétrique

$$M = N = 0.$$

5. Il résulte de ce qui précède que toute équation (E), dont l'intégrale générale est de la forme (1), se déduit d'une équation linéaire du troisième ordre de la forme

$$(12) \qquad z''' + z'H(t) + zK(t) = 0,$$

par une transformation (connue)

$$(19) \qquad x = \frac{z'\alpha(t) + z\beta(t)}{z'\gamma(t) + z\delta(t)}.$$

L'intégration d'une telle équation est *équivalente* à celle de l'équation (12) qui lui correspond; il est évident, en effet, que la formule (19) donnera l'intégrale générale de l'équation considérée, dès qu'on connaîtra celle de (12). Pour montrer qu'inversement l'intégration de l'équation proposée fournit l'intégrale générale de (12), il suffit de l'établir pour l'équation en $y = \frac{z'}{z}$.

$$(10) \qquad y'' + 3yy' + y^3 + Hy + K = 0.$$

Supposons, à cet effet, que l'on connaisse quatre intégrales quelconques y_1, y_2, y_3, y_4 de cette équation (10); il leur correspond des intégrales de (12) z_1, z_2, z_3, telles que l'on ait

$$(20) \qquad y_1 = \frac{z'_1}{z_1}, \qquad y_2 = \frac{z'_2}{z_2}, \qquad y_3 = \frac{z'_3}{z_3}, \qquad y_4 = \frac{z'_1 + z'_2 + z'_3}{z_1 + z_2 + z_3}.$$

On a donc

$$(y_1 - y_4)z_1 + (y_2 - y_4)z_2 + (y_3 - y_4)z_3 = 0,$$

et en différentiant

$$[y'_1 - y'_4 + y_1(y_1 - y_4)]z_1 + [y'_2 - y'_4 + y_2(y_2 - y_4)]z_2 + [y'_3 - y'_4 + y_3(y_3 - y_4)]z_3 = 0,$$

d'où l'on tire

$$z_1 = \rho\zeta_1, \qquad z_2 = \rho\zeta_2, \qquad z_3 = \rho\zeta_3,$$

ζ_1, ζ_2, ζ_3 étant des fonctions connues, et ρ un facteur à déterminer. Nous remarquons alors que, le terme en z'' manquant dans l'équation (12), et z_1, z_2, z_3 n'étant définies par les relations (20) qu'à un même facteur constant près, on peut s'imposer la relation

$$\begin{vmatrix} z_1 & z'_1 & z''_1 \\ z_2 & z'_2 & z''_2 \\ z_3 & z'_3 & z''_3 \end{vmatrix} = 1,$$

c'est-à-dire, en posant

$$\zeta^3 = \begin{vmatrix} \zeta_1 & \zeta'_1 & \zeta''_1 \\ \zeta_2 & \zeta'_2 & \zeta''_2 \\ \zeta_3 & \zeta'_3 & \zeta''_3 \end{vmatrix},$$

$$\rho\zeta = 1, \qquad z_1 = \frac{\zeta_1}{\zeta}, \qquad z_2 = \frac{\zeta_2}{\zeta}, \qquad z_3 = \frac{\zeta_3}{\zeta}.$$

On a donc bien, en fonction de y_1, y_2, y_3, y_4 et de leurs dérivées, trois intégrales indépendantes de l'équation (12), c'est-à-dire l'intégrale générale de cette équation.

6. Il résulte de la démonstration précédente que *la connaissance de quatre intégrales particulières de l'équation* (E) *conduit, sans intégration, à l'intégrale générale de cette équation.* Et la relation (19) fait prévoir aussi que la connaissance de une, deux ou trois intégrales particulières de l'équation (E) doit entraîner des simplifications dans l'intégration de cette équation; et il suffira encore d'étudier ces simplifications dans le cas de l'équation (10).

Considérons l'équation, un peu plus générale,

$$(4) \qquad y'' + 3yy' + y^3 + \lambda(y' + y^2) + \mu y + \nu = 0,$$

et supposons qu'on en connaisse une intégrale particulière y_1. En posant

$$(21) \qquad y = y_1 + \eta,$$

on trouve pour η une équation de la forme

$$\eta'' + 3\eta\eta' + \eta^3 + \lambda_1(\eta' + \eta^2) + \mu_1\eta = 0.$$

Posant ensuite

$$\eta' + \eta^2 - V\eta = 0, \tag{22}$$

il vient, pour déterminer V, l'équation

$$V' + V^2 + \lambda_1 V + \mu_1 = 0. \tag{23}$$

On aura donc à intégrer cette équation de Riccati, puis l'équation (22), qui, en prenant pour inconnue $\frac{1}{\eta}$, se change en une équation linéaire du premier ordre.

Donc, *quand on connaît une intégrale particulière de l'équation* (E), *l'intégration complète de cette équation se ramène à celle d'une équation de Riccati, et à deux quadratures.*

Si l'on connaît une seconde intégrale particulière de (4), on en déduit une intégrale de (23), qui s'intègre, dès lors, par deux quadratures. Donc, *quand on connaît deux intégrales particulières de l'équation* (E), *l'intégration de cette équation s'achève par quatre quadratures.*

Le même raisonnement indique enfin que, si l'on connaît trois intégrales de l'équation (4), trois quadratures suffisent pour achever l'intégration. Mais en réalité deux seulement sont nécessaires. Pour le voir, nous revenons à l'équation (10), à laquelle du reste l'équation (4) se ramène immédiatement en changeant y en $y - \frac{\lambda}{3}$. Supposons donc connues trois intégrales y_1, y_2, y_3 de l'équation (10), et posons

$$y_1 = \frac{z'_1}{z_1}, \qquad y_2 = \frac{z'_2}{z_2}, \qquad y_3 = \frac{z'_3}{z_3}.$$

Comme au paragraphe précédent, on peut s'imposer la condition

$$\begin{vmatrix} z_1 & z'_1 & z''_1 \\ z_2 & z'_2 & z''_2 \\ z_3 & z'_3 & z''_3 \end{vmatrix} = 1,$$

c'est-à-dire

$$z_1 z_2 z_3 \begin{vmatrix} 1 & y_1 & y'_1 + y_1^2 \\ 1 & y_2 & y'_2 + y_2^2 \\ 1 & y_3 & y'_3 + y_3^2 \end{vmatrix} = 1,$$

ce qui montre que, ayant calculé par deux quadratures z_1 et z_2, z_3 s'en déduit sans quadrature nouvelle. Dès lors, l'intégration de l'équation (12), et, par suite, de l'équation (10), est achevée.

Donc, *quand on connaît trois intégrales particulières de l'équation* (E), *l'intégration de cette équation s'achève par deux quadratures.*

7. L'équation (4) possède encore une propriété remarquable, qui la rapproche de l'équation de Riccati. C'est que *les valeurs de y et y' les plus générales qui y satisfont s'expriment en fonction de quatre systèmes de valeurs particulières* (y_1, y'_1), (y_2, y'_2), (y_3, y'_3), (y_4, y'_4) et de deux constantes arbitraires par des formules dont la forme ne dépend pas du choix de ces quatre solutions particulières.

Pour le voir, introduisons l'équation linéaire

$$z''' + \lambda z'' + \mu z' + \nu z = 0, \tag{6}$$

dont l'équation (4) dérive par la transformation $y = \frac{z'}{z}$. On pourra poser

$$y_1 = \frac{z'_1}{z_1}, \qquad y_2 = \frac{z'_2}{z_2}, \qquad y_3 = \frac{z'_3}{z_3}, \qquad y_4 = \frac{z'_1 + z'_2 + z'_3}{z_1 + z_2 + z_3},$$

et, pour l'intégrale générale,

$$y = \frac{c_1 z'_1 + c_2 z'_2 + c_3 z'_3}{c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3 z_3}.$$

On en conclut

$$z_1(y_1 - y_4) + z_2(y_2 - y_4) + z_3(y_3 - y_4) = 0,$$

$$\begin{aligned} &z_1[y_1(y_1 - y_4) + y'_1 - y'_4] \\ &\quad + z_2[y_2(y_2 - y_4) + y'_2 - y'_4] + z_3[y_3(y_3 - y_4) + y'_3 - y'_4] = 0, \end{aligned}$$

et aussi

$$c_1 z_1(y - y_1) + c_2 z_2(y - y_2) + c_3 z_3(y - y_3) = 0,$$

$$\begin{aligned} &c_1 z_1[y_1(y - y_1) + y' - y'_1] \\ &\quad + c_2 z_2[y_2(y - y_2) + y' - y'_2] + c_3 z_3[y_3(y - y_3) + y' - y'_3] = 0, \end{aligned}$$

d'où l'on tire, en éliminant z_1, z_2, z_3

$$\begin{vmatrix} c_1(y - y_1) & y_1 - y_4 & y_1(y_1 - y_4) + y'_1 - y'_4 \\ c_2(y - y_2) & y_2 - y_4 & y_2(y_2 - y_4) + y'_2 - y'_4 \\ c_3(y - y_3) & y_3 - y_4 & y_3(y_3 - y_4) + y'_3 - y'_4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} c_1[y_1(y - y_1) + y' - y'_1] & y_1 - y_4 & y_1(y_1 - y_4) + y'_1 - y'_4 \\ c_2[y_2(y - y_2) + y' - y'_2] & y_2 - y_4 & y_2(y_2 - y_4) + y'_2 - y'_4 \\ c_3[y_3(y - y_3) + y' - y'_3] & y_3 - y_4 & y_3(y_3 - y_4) + y'_3 - y'_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Il n'y a plus qu'à résoudre en y et y', ce qui donne des expressions homogènes et de degré zéro en $c_1 c_2 c_3$, dont les coefficients sont rationnels en $y_1 y_2 y_3 y_4 y'_1 y'_2 y'_3 y'_4$. Ce sont les expressions annoncées.

On peut encore vérifier que l'équation linéaire

$$\frac{\partial f}{\partial t} + y' \frac{\partial f}{\partial y} - [3yy' + y^3 + \lambda(y' + y^2) + \mu y + \nu] \frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

est une *équation de Lie* [1]. On le voit de la manière la plus simple en faisant

$$y' + y^2 = \mathrm{Y}, \qquad y = \mathrm{X};$$

l'équation précédente devient

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathrm{Y} \frac{\partial f}{\partial \mathrm{X}} - \mathrm{X}\left(\mathrm{X} \frac{\partial f}{\partial \mathrm{X}} + \mathrm{Y} \frac{\partial f}{\partial \mathrm{Y}}\right) + \lambda \mathrm{Y} \frac{\partial f}{\partial \mathrm{Y}} - \mu \mathrm{X} \frac{\partial f}{\partial \mathrm{Y}} - \nu \frac{\partial f}{\partial \mathrm{Y}} = 0,$$

où l'on voit apparaître le groupe projectif à deux variables

$$\frac{\partial f}{\partial \mathrm{X}}, \quad \frac{\partial f}{\partial \mathrm{Y}}, \quad \mathrm{X}\frac{\partial f}{\partial \mathrm{X}}, \quad \mathrm{X}\frac{\partial f}{\partial \mathrm{Y}}, \quad \mathrm{Y}\frac{\partial f}{\partial \mathrm{X}}, \quad \mathrm{Y}\frac{\partial f}{\partial \mathrm{Y}}, \quad \mathrm{X}\left(\mathrm{X}\frac{\partial f}{\partial \mathrm{X}} + \mathrm{Y}\frac{\partial f}{\partial \mathrm{Y}}\right), \quad \mathrm{Y}\left(\mathrm{X}\frac{\partial f}{\partial \mathrm{X}} + \mathrm{Y}\frac{\partial f}{\partial \mathrm{Y}}\right).$$

L'équation (4) partage la propriété que nous venons d'indiquer avec toutes les équations qu'on en déduit, en posant

$$x = \frac{ay + b}{cy + d},$$

a, b, c, d étant quatre constantes arbitraires. On peut du reste démontrer que les équations ainsi formées sont les seules équations de la forme (3) [avec les équations (3) à coefficients constants et les équations linéaires] qui aient une semblable propriété.

II. — Formes canoniques de l'équation $\mathrm{A}(xx'' - 2x'^2) + \mathrm{B}x'' + \mathrm{C}xx' + \mathrm{D}x' + \mathrm{P}x^3 + \mathrm{Q}x^2 + \mathrm{R}x + \mathrm{S} = 0$.

8. Nous avons vu (n° 3) que l'équation

$$\mathrm{A}(xx'' - 2x'^2) + \mathrm{B}x'' + \mathrm{C}xx' + \mathrm{D}x' + \mathrm{P}x^3 + \mathrm{Q}x^2 + \mathrm{R}x + \mathrm{S} = 0 \tag{1}$$

[1] Voir notre travail : *Sur les systèmes d'équations différentielles du premier ordre qui ont des systèmes fondamentaux d'intégrales* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1894).

conserve sa forme par tout changement de fonction et de variable indépendante de la forme

$$(2)\qquad x = \frac{\alpha(t)y + \beta(t)}{\gamma(t)y + \delta(t)}, \qquad t = \varphi(u).$$

Il est donc naturel de chercher à disposer des quatre fonctions indéterminées qui figurent dans ces formules (2) de manière à ramener l'équation (1) à une forme canonique. Nous chercherons cette forme canonique parmi celles pour lesquelles on a $A = 0$; et il résulte dès lors de la remarque faite à la fin du n° 3 que tout revient à étudier les réductions dont est susceptible l'équation

$$(3)\qquad v'' + lvv' + mv' + pv^3 + qv^2 + rv + s = 0,$$

par les transformations

$$(4)\qquad v = \alpha(t)y + \beta(t), \qquad t = \varphi(u) \quad \text{ou} \quad \frac{du}{dt} = \chi(t)$$

[t est la variable indépendante dans (3), u la nouvelle variable indépendante]. Il vient, pour l'équation en y,

$$(5)\qquad \frac{d^2y}{du^2} + \mathcal{L}y\frac{dy}{du} + \mathcal{M}\frac{dy}{du} + \mathcal{P}y^3 + \mathcal{Q}y^2 + \mathcal{R}y + \mathcal{S} = 0,$$

où l'on a posé

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{l\alpha}{\chi},\\
\mathcal{M} &= \frac{1}{\alpha\chi^2}(2\alpha'\chi + \alpha\chi' + l\alpha\beta\chi + m\alpha\chi),\\
\mathcal{P} &= \frac{p\alpha^2}{\chi^2},\\
\mathcal{Q} &= \frac{1}{\alpha\chi^2}(l\alpha\alpha' + 3p\alpha^2\beta + q\alpha^2),\\
\mathcal{R} &= \frac{1}{\alpha\chi^2}[\alpha'' + l(\alpha\beta' + \beta\alpha') + m\alpha' + 3p\alpha\beta^2 + 2q\alpha\beta + r\alpha],\\
\mathcal{S} &= \frac{1}{\alpha\chi^2}(\beta'' + l\beta\beta' + m\beta' + p\beta^3 + q\beta^2 + r\beta + s).
\end{aligned}\right.$$

Nous nous imposons les trois conditions

$$\mathcal{L} = 3, \qquad \mathcal{M} = 0, \qquad \mathcal{Q} = 0,$$

ce qui donne

$$3\frac{\alpha'}{\alpha}+l\beta+\left(\frac{l'}{l}+m\right)=0,$$

$$l\frac{\alpha'}{\alpha}+3p\beta+q=0,$$

$$\chi=\tfrac{1}{3}l\alpha,$$

d'où l'on tire, en supposant

$$l(9p-l^2)\neq 0, \tag{7}$$

les valeurs suivantes pour α, β et u

$$\alpha=e^{-\int\frac{3p(l'+ml)-ql^2}{l(9p-l^2)}dt},\qquad \beta=\frac{l'+lm-3q}{9p-l^2},\qquad u=\tfrac{1}{3}\int l\alpha\,dt; \tag{8}$$

et la forme canonique annoncée est

$$\frac{d^2y}{du^2}+3y\frac{dy}{du}+\mathrm{I}y^3+\mathrm{J}y+\mathrm{K}=0, \tag{9}$$

où l'on a posé

$$\left\{\begin{aligned} &\mathrm{I}=\frac{9p}{l^2},\\ &\mathrm{J}=\frac{9}{l^2\alpha^2}\left[\frac{\alpha''}{\alpha}+l\left(\beta'+\beta\frac{\alpha'}{\alpha}\right)+m\frac{\alpha'}{\alpha}+3p\beta^2+2q\beta+r\right]=\frac{1}{\alpha^2}\mathrm{J}_0,\\ &\mathrm{K}=\frac{9}{l^2\alpha^3}(\beta''+l\beta\beta'+m\beta'+p\beta^3+q\beta^2+r\beta+s)\qquad\quad=\frac{1}{\alpha^3}\mathrm{K}_0, \end{aligned}\right. \tag{10}$$

les quantités I, J_0 et K_0 s'exprimant rationnellement au moyen des coefficients de l'équation (3) et de leurs dérivées. Remarquons que α n'est déterminé qu'à un facteur constant près, et que, par suite, on doit considérer comme équivalentes deux formes canoniques qui diffèrent par le changement de J en $a^2\mathrm{J}$, de K en $a^3\mathrm{K}$, et de u en $\frac{1}{a}u+b$, où a et b sont des constantes.

9. Le résultat précédent fournit en même temps les invariants de l'équation (3) pour les transformations (4), et, par suite, au moyen des formules (15) du n° 3, les invariants de l'équation générale (1) pour les transformations (2). Les invariants fondamentaux sont évidemment la variable canonique u, les invariants I, J, K, et leurs dérivées de tous ordres

par rapport à u. On remarquera que I est rationnel par rapport aux coefficients de l'équation et aux dérivées de ces coefficients, et qu'il en est de même de l'invariant

$$\Omega = \frac{J^3}{K^2}. \tag{11}$$

Nous nous bornerons à appliquer ces remarques pour trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation (1) se ramène par une transformation (2) à une équation de même forme à coefficients constants.

Supposons, à cet effet, que (1) soit à coefficients constants; il en est de même de l'équation (3) correspondante, qui s'en déduit par la formule

$$x = \frac{A - Bv}{Av}.$$

Dès lors, la variable canonique u ne diffère de α que par un facteur constant, et l'on a les relations

$$I = \text{const.}, \qquad \Omega = \text{const.}, \qquad J u^2 = \text{const.} \tag{13}$$

Ce résultat est en défaut, si l'on a

$$3p(l' + ml) - ql^2 = 0,$$

c'est-à-dire, puisque les coefficients sont constants, et que la condition (7) est toujours supposée vérifiée,

$$3pm - ql = 0.$$

On a, dans ce cas,

$$\alpha = \text{const.}$$

et, par suite,

$$I = \text{const.}, \qquad J = \text{const.}, \qquad K = \text{const.} \tag{14}$$

Réciproquement, si les invariants I, J, K sont constants, la transformée canonique de la proposée est à coefficients constants; et si l'on a les relations (13), cette transformée est de la forme

$$\frac{d^2y}{du^2} + 3y\frac{dy}{du} + ay^3 + \frac{b}{u^2}y + \frac{c}{u^3} = 0,$$

où a, b, c sont des constantes. Or cette équation se change, en posant

$$y = \frac{z}{u}, \qquad w = \log u,$$

en une équation à coefficients constants, à savoir

$$\frac{d^2z}{dw^2}+3z\frac{dz}{dw}+az^3-3\left(\frac{dz}{dw}+z^2\right)+(b+2)z+c=0. \tag{15}$$

La condition nécessaire et suffisante cherchée est donc que l'on ait des relations de la forme (13) ou (14).

Il serait facile de conclure de là des cas d'intégrabilité de l'équation (1) en appliquant aux transformées à coefficients constants (9) et (15) les résultats obtenus, sur les équations (3) à coefficients constants, par M. Picard [1] et par M. Mittag-Leffler [2].

10. Les résultats précédents sont en défaut si la condition (7) n'est plus vérifiée. Supposons d'abord

$$9p-l^2=0, \qquad l\neq 0. \tag{16}$$

On obtiendra une forme canonique convenant à ce cas, en faisant, par exemple,

$$\mathcal{L}=3, \qquad \mathcal{P}=1, \qquad \mathfrak{M}=0, \qquad \mathfrak{R}=0;$$

les deux premières de ces conditions étant compatibles à cause de la condition (16) : β se détermine au moyen d'une équation de Riccati, puis α par une quadrature, et l'on obtient alors u par une nouvelle quadrature. La forme canonique est

$$\frac{d^2y}{du^2}+3y\frac{dy}{du}+y^3+\mathrm{G}y^2+\mathrm{H}=0. \tag{17}$$

G et H sont, avec u, les invariants fondamentaux pour ce cas où l'invariant I est égal à l'unité. Il figure du reste deux constantes arbitraires dans l'expression de G et H, et trois dans celle de u. Il y a donc, en réalité, pour une équation (1) donnée, une infinité de formes canoniques (17).

On verra, comme précédemment, que, pour que l'équation donnée soit réductible à une équation à coefficients constants, il faut et il suffit que, dans l'une de ces formes canoniques, les invariants G et H ou bien soient

---

(1) *Mémoire sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables.* [*Journal de Liouville*, t. V (4e série), p. 281-287.]

(2) *Sur l'intégration de l'équation* $y''=\mathrm{A}y^3+\mathrm{B}y^2+\mathrm{C}y+\mathrm{D}+(\mathrm{E}y+\mathrm{F})y'$. (*Acta mathematica,* t. XVIII.)

constants, ou bien satisfassent aux conditions

$$\mathrm{G}u = \text{const.}, \qquad \mathrm{H}u^3 = \text{const.}$$

L'expression de G est simple, c'est

$$\mathrm{G} = -\frac{3}{l^2\alpha}(l' + lm - 3q).$$

Il serait facile d'en conclure de nouveau que la condition $\mathrm{G} = 0$ est, avec $\mathrm{I} = 1$, la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation proposée appartienne à la classe des équations (E), étudiées dans le premier paragraphe.

Passons au cas $l = 0$, en supposant d'abord $p \neq 0$. Nous posons

$$\mathfrak{M} = 0, \qquad \mathfrak{Q} = 0, \qquad \mathfrak{R} = 0,$$

ce qui détermine β sans intégration, puis α par une équation linéaire et homogène du second ordre, et enfin χ par une quadrature. L'équation prend ainsi la forme

$$\frac{d^2y}{du^2} + \mathrm{E}y^3 + \mathrm{F} = 0. \tag{18}$$

Enfin, si l'on a à la fois $l = p = 0$, on peut supposer $q \neq 0$, sans quoi l'équation serait linéaire, et l'on pourra poser

$$\mathfrak{M} = 0, \qquad \mathfrak{Q} = 1, \qquad \mathfrak{R} = 0,$$

ce qui donne α et β sans intégration, puis χ par une quadrature, et l'équation proposée devient simplement

$$\frac{d^2y}{du^2} + y^2 + \mathrm{T} = 0. \tag{19}$$

III. — Sur un cas d'abaissement des équations différentielles du second ordre.

11. Nous avons eu plus haut (n° 6) l'occasion de nous servir de cette propriété de l'équation

$$\eta'' + 3\eta\eta' + \eta^3 + \lambda(\eta' + \eta^2) + \mu\eta = 0,$$

de s'abaisser, par la transformation

$$V = \frac{\eta' + \eta^2}{\eta},$$

à une équation du premier ordre

$$V' + V^2 + \lambda V + \mu = 0.$$

Nous allons considérer maintenant les équations différentielles du second ordre

$$x'' = \varphi(x', x, t), \tag{1}$$

qui jouissent de la propriété analogue que l'équation dont dépend une fonction de x et x',

$$V = F(x', x), \tag{2}$$

soit, pour une forme convenable de la fonction F, une équation du premier ordre

$$V' = G(V, t). \tag{3}$$

L'intégration de l'équation (1) revient alors à celle de l'équation du premier ordre (2), où l'on devra remplacer V par l'intégrale générale de l'équation (3), c'est-à-dire revient à l'intégration successive de deux équations du premier ordre, dès qu'on a déterminé une fonction F répondant à la question.

Nous montrerons que l'on peut toujours, par des différentiations, reconnaître si une équation donnée (1) possède la propriété précédente, et que, en exceptant le cas où la variable indépendante t ne figure pas explicitement dans l'équation proposée (1), et un cas particulier où F se détermine par quadratures, on obtient toujours alors, sans intégration, une fonction F satisfaisant à la question. Nous pouvons donc dire que les équations considérées s'abaissent au premier ordre.

La condition pour que la transformée en V soit du premier ordre s'obtient immédiatement, en écrivant que le déterminant fonctionnel, en x' et x, de F et de

$$V' = \varphi \frac{\partial F}{\partial x'} + x' \frac{\partial F}{\partial x},$$

est nul, ce qui donne

$$(4)\qquad \varphi\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}-\frac{\partial F}{\partial x'}\frac{\partial^2 F}{\partial x'\,\partial x}\right)$$
$$+x'\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial^2 F}{\partial x'\,\partial x}-\frac{\partial F}{\partial x'}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial\varphi}{\partial x'}\frac{\partial F}{\partial x'}\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2=0.$$

En joignant à cette équation la condition

$$(5)\qquad \frac{\partial F}{\partial t}=0,$$

on a les équations du problème. On les transforme, en posant

$$(6)\qquad Z=\frac{\partial F}{\partial x}:\frac{\partial F}{\partial x'},\qquad \text{ou}\qquad \frac{\partial F}{\partial x}-Z\frac{\partial F}{\partial x'}=0,$$

ce qui donne les équations

$$(7)\qquad \varphi\frac{\partial Z}{\partial x'}+x'\frac{\partial Z}{\partial x}-Z^2-Z\frac{\partial\varphi}{\partial x'}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial Z}{\partial t}=0.$$

On en tire, en différentiant par rapport à t la première et posant

$$\psi=\log\frac{\partial\varphi}{\partial t},$$
$$\frac{\partial Z}{\partial x'}-Z\frac{\partial\psi}{\partial x'}+\frac{\partial\psi}{\partial x}=0,$$

et, en différentiant une seconde fois,

$$(8)\qquad Z\frac{\partial^2\psi}{\partial x'\,\partial t}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial t}=0.$$

Si donc $\frac{\partial^2\psi}{\partial x'\,\partial t}$ n'est pas nul identiquement, on tire de là la valeur de Z, qui doit être indépendante de t, de sorte que $\frac{\partial^2\psi}{\partial x'\,\partial t}$, $\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial t}$ doivent être de la forme

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x\ \partial t}=f(t)\frac{\partial H(x',x)}{\partial x'},\qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial t}=f(t)\frac{\partial H(x',x)}{\partial x},$$

et, par suite,

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=f(t)\,H(x',x)+f_1(t),$$

c'est-à-dire

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)_{t=t_0} = a\,\mathrm{H}(x', x) + b,$$

a et b étant deux constantes. On voit donc qu'il suffit de prendre

$$\mathrm{F}(x', x) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)_{t=t_0} = \mathrm{F}_0(x', x),$$

pour avoir une solution du problème et, d'après l'équation (6), la solution la plus générale sera

$$\mathrm{F} = \text{fonct. arbitr. de } \mathrm{F}_0.$$

Quant aux conditions de possibilité, on les obtiendrait en portant la valeur (8) dans les équations (7).

Appliquons, par exemple, ces résultats à

$$x'' = -3xx' - x^3 + \lambda(t)(x' + x^2) + \mu(t)x.$$

Il vient

$$\psi = \log[\lambda'(x' + x^2) + \mu' x],$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\lambda''(x' + x^2) + \mu'' x}{\lambda'(x' + x^2) + \mu' x},$$

$$\mathrm{F}_0 = \frac{a(x' + x^2) + bx}{c(x' + x^2) + dx}, \qquad \mathrm{F} = \text{fonct. arb. de } \left(\frac{x' + x^2}{x}\right).$$

12. Si $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x' \partial t}$ est nul identiquement, on voit facilement, en prenant $\frac{1}{\mathrm{Z}}$ pour inconnue, à la place de Z, que le problème est impossible si l'on n'a pas en même temps $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t} = 0$ (identiquement), c'est-à-dire si φ n'est pas de la forme

$$\varphi = \mathrm{A}(x', x)\,\theta(t) + \mathrm{B}(x', x).$$

Débarrassons-nous d'abord du cas où φ ne contiendrait pas t; la première équation (7) détermine alors seule Z. On intégrera donc d'abord l'équation

$$\varphi(x', x)\frac{\partial f}{\partial x'} + x'\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \tag{9}$$

ce qui revient à chercher, suivant le procédé classique usité pour de telles équations, une intégrale première de l'équation proposée. Prenant alors, dans (7), une intégrale de (9) à la place de l'une des variables x', x, on est conduit, pour déterminer Z, à une équation de Riccati ordinaire, mais qui s'intègre par quadratures, car on a évidemment l'intégrale particulière

$$Z = -\frac{\varphi(x', x)}{x'}.$$

Laissons donc de côté ce cas, dans lequel notre problème n'a plus d'intérêt, et revenons à l'équation

$$x'' = \varphi(x', x, t) = A(x', x)\,\theta(t) + B(x', x).$$

Les équations (7) se remplacent par les suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} & A\frac{\partial Z}{\partial x'} - Z\frac{\partial A}{\partial x'} + \frac{\partial A}{\partial x} = 0, \\ & B\frac{\partial Z}{\partial x'} + x'\frac{\partial Z}{\partial x} - Z^2 - Z\frac{\partial B}{\partial x'} + \frac{\partial B}{\partial x} = 0. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

En écrivant qu'elles forment un système intégrable, on obtient une condition de la forme

$$PZ^2 + QZ + R = 0. \tag{11}$$

Si cette équation n'est pas une identité, elle permet de voir, par des différentiations, si le problème est possible et fournit, dans ce cas, la seule valeur de Z convenant au problème, c'est-à-dire aux équations (10). On en peut conclure l'une des valeurs de F; en effet, la première équation (10) s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{Z}{A}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{A}\right).$$

On déterminera donc, par une quadrature, une fonction $U(x', x)$ telle que

$$dU = \frac{1}{A}\,dx' + \frac{Z}{A}\,dx,$$

et cette fonction U satisfait à la condition

$$\frac{\partial U}{\partial x} = Z\frac{\partial U}{\partial x},$$

c'est-à-dire que $F = U$ est une solution du problème, et la solution la plus générale est

$$F = \text{fonct. arbitr. de } U.$$

13. Supposons enfin que la condition (11) soit une identité, c'est-à-dire que l'on ait les trois identités

$$P = 0, \qquad Q = 0, \qquad R = 0.$$

La première s'écrit, comme le montre un calcul facile,

$$\frac{\partial \log A}{\partial x'} = \frac{1}{x'},$$

de sorte qu'on peut poser

$$A = x' e^{\xi(x)},$$

et les deux autres conditions deviennent alors

$$x'^2 \frac{\partial^2 B}{\partial x'^2} - 2x' \frac{\partial B}{\partial x'} + 2B = 2\xi' x'^2,$$

$$x' \frac{\partial^2 B}{\partial x' \partial x} - 2\frac{\partial B}{\partial x} + B\xi' = \xi'' x'^2.$$

La première a pour intégrale générale

$$B = a(x)x' + b(x)x'^2 + 2\xi' x'^2(\log x' - 1);$$

si l'on porte cette valeur dans la seconde, on a l'identité

$$2\xi'^2 x'^2(\log x' - 1) + (b\xi' + \xi'')x'^2 + (a\xi' - a')x' = 0,$$

d'où l'on conclut

$$\xi = \text{const.}, \qquad a = \text{const.}, \qquad b = \text{fonct. arbit. de } x.$$

Les équations cherchées, correspondant à ce cas particulier, sont donc les équations de la forme

$$(12) \qquad x'' = x'T(t) + x'^2 X(x).$$

L'inconnue Z est alors donnée par les équations (10); on satisfait à la première en posant

$$Z = x'\zeta(x),$$

et la seconde devient alors l'équation de Riccati

$$\zeta' = \zeta^2 + X\zeta - X'.$$

Mais cette équation admet l'intégrale évidente $\zeta = -X$, et si l'on pose

$$\zeta = -X + \zeta_0,$$

ζ_0 est donné par

$$\zeta_0' = \zeta_0^2 - X\zeta_0,$$

de sorte que l'on a

$$Z = x'\zeta(x) = -x'\left[X + \frac{e^{-\int X dx}}{\int e^{\int X dx} dx}\right]. \tag{13}$$

On a ensuite

$$\frac{\partial F}{\partial x} - x'\zeta(x)\frac{\partial F}{\partial x'} = 0,$$

dont on a une solution par une quadrature

$$U = x' e^{\int \zeta(x) dx}, \tag{14}$$

et la solution générale est une fonction arbitraire de U. Le problème se résout donc entièrement par des quadratures, comme nous l'avions annoncé.

14. Si l'on veut seulement intégrer l'équation (12) on prendra la solution la plus simple

$$V = x' e^{-\int X dx},$$

la transformée en V étant

$$V' - T(t)V = 0;$$

on en tire immédiatement

$$V = e^{\int T dt},$$

et, par suite, pour l'intégrale générale de la proposée,

$$\int e^{\int T dt} dt = \int e^{-\int X dx} dx. \tag{15}$$

L'équation (12) s'intègre donc par quadratures, et l'on voit que son intégrale générale est de la forme

$$af(x) + bg(t) + c = 0,$$

c'est-à-dire que les constantes arbitraires y figurent linéairement, de sorte que c'est un cas particulier des équations étudiées par M. Lie (*voir* n° 1) et qui sont réductibles à la forme $y'' = 0$.

On peut enfin remarquer que l'équation (12) possède, comme l'équation étudiée au premier paragraphe,

$$x'' + 3xx' + x^3 + \lambda(t)(x' + x^2) + \mu(t)x + \nu(t) = 0,$$

des systèmes fondamentaux d'intégrales (¹). Si l'on considère, en effet, l'équation linéaire aux dérivées partielles qui lui correspond

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \left[x' \frac{\partial f}{\partial x} + x'^2 \mathrm{X} \frac{\partial f}{\partial x'}\right] + \mathrm{T}(t)x' \frac{\partial f}{\partial x'} = 0,$$

c'est une équation de Lie (²), car les deux transformations infinitésimales

$$\mathrm{X}_1 f = x' \frac{\partial f}{\partial x'}, \qquad \mathrm{X}_2 f = x' \frac{\partial f}{\partial x} + x'^2 \mathrm{X} \frac{\partial f}{\partial x'}$$

satisfont à l'identité $(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2) = \mathrm{X}_2$ et, par conséquent, forment un groupe. On vérifie, du reste, sans peine qu'en posant

$$\mathrm{M}(x) = \int e^{-\int \mathrm{X}\, dx} dx,$$

on a, entre une intégrale particulière quelconque x_0 et l'intégrale générale x, la relation

$$\mathrm{M}(x) = a\mathrm{M}(x_0) + b,$$

où a, b sont des constantes arbitraires; on a donc bien une relation de la forme

$$x = \Phi(x_0 \mid a, b),$$

entre une intégrale particulière et l'intégrale générale, la fonction Φ restant la même, quelle que soit l'intégrale particulière considérée, de sorte qu'on peut dire qu'une intégrale particulière quelconque constitue un système fondamental.

(¹) Nous avons indiqué quelques résultats sur les équations du deuxième ordre, qui ont cette propriété, dans une Note présentée à l'Académie des Sciences le 1er mai 1893.

(²) *Voir* notre Travail déjà cité au n° 7.