[*Voir* le commencement de ce Mémoire dans le Tome VIII].

éléments des diverses colonnes de D. Donc D serait nul identiquement, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Lorsque l'on a $D \neq 0$, les n fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$, qui sont appelées dans tous les cas des *intégrales de l'équation différentielle linéaire et homogène d'ordre n*, forment alors un *système fondamental d'intégrales* de cette équation différentielle.

On a toujours

$$D = C e^{\int p_1 dx}, \tag{36}$$

puisque la somme Σa_{ii} se réduit à p_1 dans les équations (30).

Si le déterminant D est identiquement nul, il existe entre les intégrales y_1, $y_2, \ldots, y_n$ au moins une relation linéaire et homogène à coefficients constants. En effet, d'après le n° 11, il existe plus généralement n relations de la forme

$$C_1 \frac{d^k y_1}{dx^k} + \ldots + C_n \frac{d^k y_n}{dx^k} = 0$$

$$\left(\frac{d^0 y_i}{dx^0} = y_i;\ k = 0, 1, \ldots, n-1 \right).$$

Entre $n+1$ intégrales il existe toujours une relation linéaire et homogène à coefficients constants. En effet, d'après le même numéro, on a plus généralement n relations de la forme

$$C_1 \frac{d^k y_1}{dx^k} + \ldots + C_{n+1} \frac{d^k y_{n+1}}{dx^k} = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Nous énoncerons encore les théorèmes suivants :

α. *Toute intégrale d'une équation linéaire et homogène d'ordre n peut s'obtenir par une combinaison linéaire et homogène à coefficients constants des intégrales d'un système fondamental.*

β. *Si l'on substitue aux intégrales d'un système fondamental d'autres intégrales déterminées par les relations linéaires et homogènes à coefficients constants*

$$Y_i = C_{i1} y_1 + \ldots + C_{in} y_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

on obtient un nouveau système d'intégrales à condition que le déterminant des constantes de la substitution soit différent de zéro.

Toutes ces propriétés peuvent se démontrer directement. Les démonstrations directes sont très connues, surtout depuis la publication du premier Mémoire de M. Fuchs sur les équations linéaires (1866).

24. Soit u une intégrale donnée de l'équation différentielle (27) et, par suite, soient

$$u,\quad \frac{du}{dx},\quad \frac{d^2u}{dx^2},\quad \ldots,\quad \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}$$

les éléments d'une solution du système

$$(30)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{dy_1}{dx} = p_1y_1 + \ldots + p_ny_n,\\ &\frac{dy_k}{dx} = y_{k-1} \qquad\qquad (k = 2, 3, \ldots, n).\end{aligned}\right.$$

Posons

$$y_n = y = uv,$$

d'où

$$y_{n-1} = \frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx},$$

$$y_{n-2} = \frac{d^2y}{dx^2} = u\frac{d^2v}{dx^2} + 2\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + v\frac{d^2u}{dx^2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$y_1 = \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = u\frac{d^{n-1}v}{dx^{n-1}} + \frac{n-1}{1}\frac{du}{dx}\cdot\frac{d^{n-2}v}{dx^{n-2}} + \ldots + v\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}.$$

Portons ces valeurs dans les équations (30). Cherchons le coefficient de v dans la première équation (30) ramenée à la forme

$$\frac{dy_1}{dx} - p_1y_1 - \ldots - p_ny_n = 0.$$

Nous trouverons

$$\frac{d^nu}{dx^n} - p_1\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} - \ldots - p_nu,$$

c'est-à-dire zéro, puisque u est une intégrale de l'équation (27).

Les autres équations (30) seront identiquement satisfaites, en vertu même de la définition de l'inconnue v.

Il résulte de là que, si l'on élimine les variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$, les équations (30) fourniront des équations où entreront les seules inconnues

$$\frac{dv}{dx},\quad \frac{d^2v}{dx^2},\quad \ldots,\quad \frac{d^nv}{dx^n},$$

et, par suite, en posant

$$\frac{dv}{dx} = t, \qquad \text{d'où} \qquad v = \int t\,dx,$$

on pourra prendre pour inconnues nouvelles t et ses dérivées. Nous poserons

$$\begin{aligned} t &= t_{n-1}, \\ \frac{dt}{dx} &= t_{n-2}, \\ &\dots\dots\dots\dots, \\ \frac{d^{n-2}t}{dx^{n-2}} &= t_1. \end{aligned}$$

D'abord, chacune des équations (30) de la forme

$$\frac{dy_k}{dx} = y_{k-1} \qquad (k = 2, 3, \dots, n)$$

étant identiquement satisfaite, il ne restera que la condition

$$\frac{dy_1}{dx} = p_1 y_1 + \dots + p_n y_n$$

ou

$$\left(\left(u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}\right)\right)^n = p_1\left(\left(u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}\right)\right)^{n-1} + \dots + p_n uv.$$

Les doubles parenthèses indiquent des puissances symboliques. On a vu que le coefficient de v est identiquement nul, et qu'on peut prendre pour inconnues nouvelles $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$.

L'équation précédente prendra donc la forme

$$\frac{dt_1}{dx} = P_1 t_1 + \dots + P_{n-1} t_{n-1}. \tag{37}$$

Il est facile de voir que l'on aura

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{u}\left[-\frac{n}{1}\frac{du}{dx} + p_1 u\right], \\ P_2 &= \frac{1}{u}\left[-\frac{n(n-1)}{2}\frac{d^2u}{dx^2} + (n-1)p_1\frac{du}{dx} + p_2 u\right], \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ P_{n-1} &= \frac{1}{u}\left[-\frac{n(n-1)\dots 2.1}{1.2\dots(n-1)}\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + p_1\frac{(n-1)\dots 3.2.1}{1.2\dots(n-2)}\frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}} + \dots + p_{n-1}u\right]. \end{aligned}$$

En conséquence, le système (30) sera ramené à un système de même forme renfermant une inconnue de moins, soit au système

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dt_1}{dx} &= P_1 t_1 + \dots + P_{n-1} t_{n-1}, \\ \frac{dt_k}{dx} &= t_{k-1} \qquad (k = 1.2, \dots, n-2). \end{aligned}\right. \tag{38}$$

Mais on aura

$$\frac{d^{n-k-1}t}{dx^{n-k-1}} = t_k.$$

ce qui correspond à la formule (28).

Comparons ce résultat avec celui que donne la théorie générale. Remarquons d'abord que tous les éléments

$$u_n = u, \qquad u_{n-1} = \frac{du}{dx}, \qquad \ldots, \qquad u_1 = \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}$$

d'une solution du système (30) sont différents de zéro jusqu'à un certain ordre de dérivation, par exemple jusqu'à

$$\frac{d^{s-1}u}{dx^{s-1}} = u_{n-s+1},$$

et même ce cas ne se présentera que si u est un polynome d'un degré en x inférieur à $n-1$.

Dans la théorie générale, on pose

$$y_h = u_h q_h.$$

Par suite, les équations

$$\frac{dy_k}{dx} = y_{k-1}$$

deviennent

$$\frac{du_k}{dx} q_k + \frac{dq_k}{dx} u_k = u_{k-1} q_{k-1},$$

d'où l'on tire

$$\frac{dq_k}{dx} = \frac{u_{k-1}}{u_k} q_{k-1} - \frac{1}{u_k}\frac{du_k}{dx} q_k.$$

En tenant compte de l'équation

$$\frac{du_k}{dx} = u_{k-1},$$

on a

$$(39) \qquad \frac{dq_k}{dx} = \frac{u_{k-1}}{u_k}(q_{k-1} - q_k) \qquad (k = 2, 3, \ldots, n).$$

La première équation (30) devient

$$\frac{du_1}{dx} q_1 + \frac{dq_1}{dx} u_1 = p_1 u_1 q_1 + \ldots + p_n u_n q_n.$$

Par suite, à cause de l'équation

$$\frac{du_1}{dx} = p_1 u_1 + \ldots + p_n u_n,$$

on a

$$\frac{dq_1}{dx} = p_2 \frac{u_2}{u_1}(q_2 - q_1) + \ldots + p_n \frac{u_n}{u_1}(q_n - q_1). \tag{40}$$

Si l'on pose ensuite

$$z_k = q_k - q_1,$$

on aura, en retranchant successivement l'équation (40) de chacune des équations (39), les équations

$$\frac{dz_k}{dx} = \frac{u_{k-1}}{u_k}(z_{k-1} - z_k) - p_2 \frac{u_2}{u_1} z_2 + \ldots - p_n \frac{u_n}{u_1} z_n \quad (k = 2, 3, \ldots, n),$$

formant un système linéaire et homogène à $n - 1$ inconnues, auquel il faudra joindre l'équation

$$\frac{dq_1}{dx} = p_2 \frac{u_2}{u_1} z_2 + \ldots + p_n \frac{u_n}{u_1} z_n.$$

Il est évident maintenant que la méthode qui est particulière aux équations (30) et qui conduit aux équations (38), *exactement de même forme* que les équations données, doit être préférée à la méthode générale qui conduit simplement à des équations linéaires et homogènes.

D'ailleurs, les équations (38) jouissent des mêmes propriétés que les équations en z de la théorie générale. En effet, nous pouvons montrer que si t_1, t_2, ..., t_{n-1} forment un système fondamental d'intégrales de l'équation

$$\frac{dt^{n-1}}{dx^{n-1}} = \mathrm{P}_1 \frac{d^{n-2}t}{dx^{n-2}} + \mathrm{P}_2 \frac{d^{n-3}t}{dx^{n-3}} + \ldots + \mathrm{P}_{n-1} t,$$

les expressions

$$\mathrm{Y}_1 = u, \qquad \mathrm{Y}_2 = u \int t_1\, dx, \qquad \mathrm{Y}_n = u \int t_{n-1}\, dx$$

forment un système fondamental d'intégrales de l'équation

$$\frac{d^n y}{dx^n} = p_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n y.$$

En effet, s'il existait une relation linéaire et homogène à coefficients constants telle que

$$\mathrm{C}_1 \mathrm{Y}_1 + \ldots + \mathrm{C}_n \mathrm{Y}_n = 0,$$

on en déduirait la relation

$$\mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2 \int t_1\, dx + \mathrm{C}_3 \int t_2\, dx + \ldots + \mathrm{C}_n \int t_{n-1}\, dx = 0,$$

d'où, en dérivant,

$$C_2 t_1 + C_3 t_2 + \ldots + C_n t_{n-1} = 0,$$

relation incompatible avec les hypothèses.

25. Résumons le paragraphe précédent. Si y_1 est une intégrale de l'équation différentielle linéaire et homogène

$$(27) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} = p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n y,$$

la substitution

$$y = y_1 \int t\, dx$$

conduit à une équation

$$(41) \qquad \frac{d^{n-1} t}{dx^{n-1}} = P_1 \frac{d^{n-2} t}{dx^{n-2}} + \ldots + P_{n-1} t,$$

linéaire et homogène, d'ordre $n-1$, et, avec un système fondamental d'intégrales de l'équation (41), on peut former un système fondamental d'intégrales de l'équation (27).

De l'équation

$$P_1 = -\frac{n}{y_1} \frac{dy_1}{dx} + p_1,$$

obtenue plus haut, on tire

$$\int P_1 dx = -n \operatorname{Log} y_1 + \int p_1 dx,$$

et, en appelant D_1 le déterminant D (équation 35), correspondant à l'équation (39), on voit qu'on aura

$$D_1 = C y_1^{-n} D.$$

De l'équation en t, au moyen d'une solution t_1, on passe à une équation en τ linéaire et homogène d'ordre $n-2$, etc.

Soient $y_1, t_1, \tau_1, \ldots, \sigma$ les diverses intégrales supposées successivement connues, on voit facilement qu'on aura la relation

$$D = C y_1^n t_1^{n-1} \tau_1^{n-2} \ldots \sigma.$$

On peut voir dans le Mémoire de M. Fuchs les conséquences que l'on tire de cette dernière relation.

CHAPITRE II.

DES DIVISEURS ÉLÉMENTAIRES.

26. Représentons par [P], [Q] et [P, Q] les déterminants

$$\begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} B_{11} & \dots & B_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ B_{n1} & \dots & B_{nn} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} pA_{11}+qB_{11} & \dots & pA_{1n}+qB_{1n} \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ pA_{n1}+qB_{n1} & \dots & pA_{nn}+qB_{nn} \end{vmatrix}.$$

Le déterminant [P, Q] est une fonction entière et homogène en p, q. Nous n'aurons à nous occuper que du cas où cette fonction est du degré n, et non pas d'un degré inférieur; nous supposerons donc que le degré est n.

Ce déterminant [P, Q] est alors un produit de n facteurs linéaires et homogènes, de la forme $ap + bq$ et distincts ou non.

Considérons au même point de vue les mineurs des divers ordres. Soit l_ϖ l'exposant du diviseur $ap + bq$ qui entre dans le plus grand commun diviseur de tous les mineurs d'ordre ϖ. Soit $l_{\varpi+1}$ l'exposant correspondant à l'ordre $\varpi + 1$. L'expression

$$(ap + bq)^{l_\varpi - l_{\varpi+1}}$$

a été appelée par M. Weierstrass *un diviseur élémentaire du déterminant* [P, Q].

27. Soit $ap + bq$ un quelconque des *diviseurs linéaires* de [P, Q]. Nous opposerons cette expression à celle de *diviseur élémentaire,* chacune de ces deux sortes de diviseurs correspondant à une décomposition spéciale du déterminant [P, Q], comme nous allons le montrer.

Les mineurs de l'ordre ϖ du déterminant [P, Q] sont du degré $n - \varpi$ en p et q et peuvent être décomposés en facteurs linéaires en p et q. Je dis d'abord que l'exposant l_ϖ d'un même diviseur linéaire $ap + bq$ ne peut aller qu'en décroissant quand l'indice ϖ augmente; sous la notation l_ϖ nous comprenons aussi l'exposant l_0 du même diviseur linéaire dans le déterminant [P, Q], considéré alors comme un mineur d'ordre zéro.

D'abord tout déterminant de degré $n - \varpi + 1$ peut être considéré comme une somme de termes dont chacun, abstraction faite du signe, est le produit d'un déterminant du degré $n - \varpi$ par un élément de [P, Q]. Donc, tout diviseur commun des mineurs de degré $n - \varpi$ doit être aussi un diviseur commun des mineurs de degré $n - \varpi + 1$, et, par suite, aussi, de tous les mineurs de degrés supérieurs à $n - \varpi + 1$. En conséquence, si l'un des nombres l_0, l_1, l_2, ... est nul, tous les suivants sont nuls.

Ensuite, si l'on considère un mineur du degré $n - \varpi + 1$, ses dérivées partielles par rapport à p et à q peuvent être considérées comme des sommes de termes dont chacun est le produit d'un déterminant de degré $n - \varpi$ par un terme de [P] ou de [Q]; si donc les mineurs de degré $n - \varpi$ admettent le diviseur linéaire $ap + bq$ au degré l_ϖ, le mineur de degré $n - \varpi + 1$ et ses dérivées partielles du premier ordre admettront en commun ce diviseur linéaire au même degré l_ϖ. Il faut alors que le mineur de degré $n - \varpi + 1$ soit divisible par $(ap + bq)^{l_\varpi + 1}$.

Soit l_r le dernier exposant l qui ne soit pas nul. On aura les inégalités

$$l_0 > l_1 > l_2 > \ldots > l_r,$$

et l'on pourra poser

$$l_0 - l_1 = e_0, \quad l_1 - l_2 = e_1, \quad \ldots, \quad l_{r-1} - l_r = e_{r-1}, \quad l_r = e_r.$$

On aura alors

$$l_0 = e_0 + e_1 + \ldots + e_r$$

et

$$(ap + bp)^{l_0} = (ap + bq)^{e_0}(ap + bq)^{e_1} + \ldots + (ap + bq)^{e_r}.$$

Soient ensuite $a_1 p + b_1 q$, $a_2 p + b_2 q$, ..., $a_m p + b_m q$ les diviseurs linéaires distincts du déterminant [P, Q]. Soient l_0^1, l_0^2, ..., l_0^{mr} leurs exposants. Décomposons ces nombres en éléments e d'après les règles précédentes, de sorte que l'on ait, par exemple,

$$l_0^i = e_0^i + e_1^i + \ldots + e_{r_i}^i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Le déterminant [P, Q] pourra être représenté par le produit

$$\Pi(a_i p + b_i q)^{e_j^i} \qquad \left\{ \begin{array}{ll} i = 1, 2, & \ldots, m, \\ j = 0, 1, & \ldots, r_i. \end{array} \right.$$

Chacun des facteurs de ce produit est, comme nous l'avons dit dès l'abord, un *diviseur élémentaire* du déterminant [P, Q].

On voit que *chaque diviseur élémentaire est essentiellement caractérisé par le rapport de deux coefficients a et b et par un exposant e.*

Nous montrerons dans la suite que chaque diviseur élémentaire est *indépendant* dans chacune de ses propriétés. Nous pourrons alors représenter tous les diviseurs élémentaires dans un ordre quelconque par la notation

$$(a_1 p + b_1 q)^{e_1}, \quad (a_2 p + b_2 q)^{e_2}, \quad \ldots, \quad (a_\rho p + b_\rho q)^{e_\rho}.$$

Mais les indices 1, 2, ..., ρ n'indiqueront plus que les diviseurs linéaires

$a_1p + b_1q, \ldots, a_\rho p + b_\rho q$ soient nécessairement distincts. Plusieurs pourront être égaux entre eux. On aura de plus

$$e_1 + e_2 + \ldots + e_\rho = n,$$

et le nombre ρ sera égal ou supérieur au nombre des diviseurs linéaires distincts.

28. Un diviseur élémentaire $(ap + bq)^e$ du déterminant $[P, Q]$ est dit simple ou multiple, suivant que son exposant e est égal ou supérieur à l'unité.

Si, par exemple, tous les diviseurs élémentaires fournis par un même diviseur linéaire sont *simples,* on voit que le déterminant $[P, Q]$ sera divisible par $(ap + bq)^{r+1}$; ses mineurs du premier ordre seront divisibles par $(ap + bq)^r, \ldots,$ ses mineurs de l'ordre r seront divisibles par $ap + bq$.

Si au contraire les diviseurs élémentaires fournis par un même diviseur linéaire ne sont pas tous simples, remarquons que nous aurons

$$\begin{aligned} l_0 &= e_0 + e_1 + \ldots + e_r, \\ l_0 - e_0 = l_1 &= e_1 + \ldots + e_r, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ l_{\varpi-1} - e_{\varpi-1} = l_\varpi &= e_\varpi + \ldots + e_r, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ l_{r-1} - e_{r-1} = l_r &= e_r, \end{aligned}$$

et nous voyons que le déterminant $[P, Q]$ et ses mineurs d'ordres successifs seront respectivement divisibles par

$$\begin{aligned} &(ap + bq)^{e_0+e_1+\ldots+e_r}, \\ &(ap + bq)^{e_1+\ldots+e_r}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &(ap + bq)^{e_r}. \end{aligned}$$

Les ordres de multiplicité d'un diviseur $ap + bq$, considéré comme *diviseur linéaire,* ou comme *diviseur élémentaire,* sont, comme on le voit, deux nombres essentiellement distincts.

Ajoutons une remarque :

Il n'y a *jusqu'ici* entre les nombres $e_0, e_1, \ldots, e_r$ aucune relation nécessaire. Ce sont simplement des nombres entiers qui concourent à former les nombres l_r, $l_{r-1}, \ldots, l_0$, ces derniers nombres allant toujours en croissant, quand leur indice diminue.

29. Il y a un lien très étroit entre la théorie des formes bilinéaires et la théorie des diviseurs élémentaires, et c'est précisément l'application des théorèmes de l'une de ces théories aux théorèmes de l'autre qui nous conduira à des consé-

quences très importantes pour la théorie des équations linéaires. Nous allons, par suite, nous occuper de ces questions spéciales.

On dit que les deux expressions

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{P} = \Sigma \mathrm{A}_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta \\ \mathrm{Q} = \Sigma \mathrm{B}_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta \end{array}\right\} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n),$$

sont *deux formes bilinéaires aux* $2n$ *variables* $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$. Les déterminants de ces formes sont, par définition, les déterminants $[\mathrm{P}]$ et $[\mathrm{Q}]$.

Faisons les substitutions

$$x_i = \sum_j h_{ij} x'_j,$$

$$y_i = \sum k_{ij} y'_j,$$

aux déterminants de constantes H et K supposés tous deux différents de zéro.

Les formes

$$\mathrm{P}(x_1, \ldots, x_n \mid y_1, \ldots, y_n) \quad \text{et} \quad \mathrm{Q}(x_1, \ldots, x_n \mid y_1, \ldots, y_n)$$

ou, avec une notation plus simple, les formes

$$\mathrm{P}(x \mid y) \quad \text{et} \quad \mathrm{Q}(x \mid y)$$

deviendront

$$\mathrm{P}'(x' \mid y') \quad \text{et} \quad \mathrm{Q}'(x' \mid y').$$

Nous allons montrer que *les déterminants des deux formes*

$$p\mathrm{P} + q\mathrm{Q} \quad \text{et} \quad p\mathrm{P}' + q\mathrm{Q}'$$

admettent les mêmes diviseurs élémentaires.

30. Supposons que l'on ne fasse d'abord que la première substitution. Les formes

$$\mathrm{P}(x \mid y) \quad \text{et} \quad \mathrm{Q}(x \mid y)$$

deviendront

$$\mathrm{P}_1(x' \mid y) \quad \text{et} \quad \mathrm{Q}_1(x' \mid y).$$

Si ensuite on fait la seconde substitution, on obtiendra les formes

$$\mathrm{P}'(x' \mid y') \quad \text{et} \quad \mathrm{Q}'(x' \mid y').$$

Il suffit de démontrer que le déterminant de la forme

$$p\mathrm{P}_1 + q\mathrm{Q}_1$$

a les mêmes diviseurs élémentaires que le déterminant de la forme

$$pP + qQ;$$

car on passera, par le même procédé de démonstration, des diviseurs élémentaires de la forme

$$pP_1 + qQ_1$$

à ceux de la forme

$$pP' + qQ'.$$

On sait, d'après la théorie des déterminants, que l'on a

$$[P_1, Q_1] = [P, Q] \times H.$$

Donc déjà les diviseurs linéaires distincts des deux déterminants

$$[P_1, Q_1] \quad \text{et} \quad [P, Q]$$

sont les mêmes. Il reste à faire voir qu'ils fournissent les mêmes diviseurs élémentaires. Nous montrerons pour cela que, si un diviseur linéaire est facteur à un certain degré de multiplicité dans tous les mineurs d'un ordre donné de $[P, Q]$, il est aussi facteur au même degré de multiplicité dans les mineurs du même ordre de $[P_1, Q_1]$ et réciproquement.

Représentons les mineurs de degré μ des trois déterminants

$$[P, Q], \quad H, \quad [P_1, Q_1]$$

par

$$m_{\gamma\delta}, \quad \eta_{\gamma\delta}, \quad m'_{\gamma\delta},$$

γ et δ désignant deux combinaisons quelconques des nombres $1, 2, \ldots, n$ pris μ à μ. On a, d'après Cauchy (¹), la relation

$$m'_{\gamma\delta} = \eta_{\gamma 1} m_{\delta 1} + \eta_{\gamma 2} m_{\delta 2} + \ldots + \eta_{\gamma c} m_{\delta c}.$$

Le nombre c est celui des combinaisons indiquées et est égal à

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-\mu+1)}{1.2\ldots\mu}.$$

Si tous les mineurs $m_{\delta\gamma}$ admettent le même diviseur $(ap + bq)^l$, $m'_{\gamma\delta}$ admettra ce même diviseur pour toutes les valeurs qu'on peut donner à γ et δ.

Réciproquement, si tous les mineurs $m'_{\gamma\delta}$ admettent le même diviseur $(ap + bq)^l$,

(¹) *Voir* la Note sur les déterminants.

il en sera de même des expressions

$$\eta_{\gamma 1} m_{\delta 1} + \ldots + \eta_{\gamma c} m_{\delta c}.$$

Mais le déterminant $\Sigma \eta_{11} \eta_{22} \ldots \eta_{cc}$ est une puissance de H et n'est pas nul (1). Donc $m_{\delta_1}, \ldots, m_{\delta_c}$ admettent séparément le diviseur $(ap + bq)^l$, et pour toutes les valeurs que l'on peut donner à δ.

Enfin, si les mineurs d'un certain ordre de [P, Q] n'ont aucun diviseur commun, il en sera de même des mineurs du même ordre de $[P_1, Q_1]$, sans quoi l'on pourrait démontrer que les mineurs considérés dans [P, Q] ont contrairement à l'hypothèse un diviseur commun.

Il est donc prouvé que les diviseurs élémentaires du déterminant [P, Q] ne sont pas altérés par la double substitution

$$x_1, \ldots, x_n \mid x'_1, \ldots, x'_n, \quad \text{et} \quad y_1, \ldots, y_n \mid y'_1, \ldots, y'_n.$$

31. Ce théorème admet la réciproque suivante :

Soient deux couples de formes bilinéaires

$$P(x \mid y) \quad \text{et} \quad Q(x \mid y)$$

et

$$P'(x' \mid y'), \quad Q'(x' \mid y').$$

Si les deux déterminants [P, Q] *et* [P', Q'] *ont les mêmes diviseurs élémentaires, on peut déterminer* $2n^2$ *constantes* h *et* k *telles que les substitutions*

$$\left.\begin{aligned} x_i &= \sum_j h_{ij} x'_j \\ y_i &= \sum_j k_{ij} y'_j \end{aligned}\right\} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

changent P *en* P' *et* Q *en* Q'.

Nous démontrerons cette importante réciproque par une belle méthode due à M. Darboux.

32. Soit une forme bilinéaire aux $2n$ variables indépendantes $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$

$$P = \Sigma A_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta.$$

Appelons $X_1, X_2, \ldots, X_n$ les dérivées partielles de P par rapport à $x_1, x_2, \ldots,$

(1) *Voir* la Note sur les déterminants.

x_n et $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ les dérivées partielles de P par rapport à $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Nous aurons

$$\left.\begin{aligned} X_i &= A_{i1}y_1 + \ldots + A_{in}y_n \\ Y_i &= A_{1i}x_1 + \ldots + A_{ni}x_n \end{aligned}\right\} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Le déterminant formé par les n^2 coefficients A et qui a l'une des deux formes

$$\begin{vmatrix} A_{11} & \ldots & A_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1} & \ldots & A_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} A_{11} & \ldots & A_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & \ldots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

est appelé le *déterminant* de la forme P.

On remarquera la relation

$$x_1X_1 + \ldots + x_nX_n = y_1Y_1 + \ldots + y_nY_n = P.$$

33. Appelons B_0 le déterminant de la forme P et formons toutes les expressions que peut donner le déterminant B_0 *bordé* comme nous allons l'indiquer. Posons

$$B_\theta = \left|\begin{array}{ccc|ccc} A_{11} & \ldots & A_{1n} & u_1^1 & \ldots & u_1^\theta \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1} & \ldots & A_{nn} & u_n^1 & \ldots & u_n^\theta \\ \hline v_1^1 & \ldots & v_n^1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_1^\theta & \ldots & v_n^\theta & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right|.$$

Chaque bordure, la $k^{\text{ième}}$ par exemple, distinguée par l'indice supérieur k, est obtenue au moyen de $2n$ arbitraires formant deux groupes distincts, soient $u_1^k, \ldots, u_n^k$ pour la bordure en colonne et $v_1^k, \ldots, v_n^k$ pour la bordure en ligne.

Développons B_θ (¹) par la règle de *Laplace* (²) en combinant les éléments des θ dernières colonnes de toutes les manières possibles, de façon à former des mineurs de degré θ, et en multipliant chacun de ces mineurs par le mineur de degré n qui reste quand on a supprimé les θ dernières colonnes et les θ lignes choisies.

Les produits du degré $n + \theta$ que l'on obtient ainsi renferment des paramètres v provenant de toutes les bordures et sont du degré $n - \theta$ par rapport aux éléments du déterminant B_0. La même règle de Laplace est applicable à chaque mineur de degré n.

(¹) Les déterminants B_θ pourraient être appelés des *Hessiens bordés*.

(²) *Voir* la Note sur les déterminants.

Donc B_θ *est une fonction linéaire et homogène des mineurs d'ordre* θ *de* B_0 *quelles que soient les valeurs attribuées aux arbitraires* u *et* v.

34. Si l'on connaît le déterminant $[P, Q]$, qu'on peut représenter par $B_0(p, q)$, on voit que la fonction $B_\theta(p, q)$ sera entière et homogène en p et q, et, si les mineurs de degré $n - \theta$ de $B_0(p, q)$ sont divisibles par $(ap + bq)^l$, on voit que $B_\theta(p, q)$ sera divisible par $(ap + bq)^l$. On peut d'ailleurs choisir les arbitraires qui entrent dans B_θ de manière qu'il se réduise à l'un quelconque des mineurs de B_0. Par exemple, on a

$$\begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1,k+1} & \dots & A_{1n} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots & . & \dots & . \\ A_{k+1,1} & \dots & A_{k+1,k+1} & \dots & A_{k+1,n} & 1 & \dots & 0 \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots & . & \dots & . \\ A_{n1} & \dots & A_{n,k+1} & \dots & A_{nn} & 0 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & \dots & . & \dots & . & . & \dots & . \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} = \pm \begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{k1} & \dots & A_{kk} \end{vmatrix}.$$

Donc, pour qu'un diviseur $(ap + bq)^l$ *soit commun à tous les mineurs d'ordre* θ *de* $[P, Q]$, *il faut et il suffit qu'il divise la fonction* $B_\theta(p, q)$ *correspondante, quelles que soient les valeurs attribuées aux arbitraires.*

On pourrait en conséquence définir les diviseurs élémentaires de $[P, Q]$ au moyen des déterminants $B_\theta(p, q)$.

35. La première forme B_θ est

$$B_1 = \begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} & u_1^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} & u_n^1 \\ v_1^1 & \dots & v_n^1 & 0 \end{vmatrix}.$$

En la développant, on a

$$B_1 = -\sum u_i^1 v_j^1 \frac{\partial B_0}{\partial A_{ij}}.$$

Si l'on retranche de la dernière colonne les autres multipliées par $y_1, y_2, \dots, y_n$, puis ensuite que l'on retranche de la dernière ligne les autres multipliées par x_1, $x_2, \dots, x_n$, on a

$$B_1 = \begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} & & u_1^1 - X_1 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots\dots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} & & \\ v_1^1 - Y_1 & \dots & v_n^1 - Y_n & \dots & -(u_1^1 x_1 + \dots + u_n^1 x_n) - (v_1^1 y_1 + \dots + v_n^1 y_n) + (x_1 X_1 + \dots + x_n X_n) \end{vmatrix}.$$

Si l'on remplace alors les arbitraires u et v par les dérivées X, Y de la forme bilinéaire P, on aura

$$B_1 = - B_0 P.$$

Cette formule permet d'exprimer P en fonction de B_1 et de B_0.

36. La fonction $B_{\theta+1}$ est liée à la fonction B_θ par la relation simple

$$B_{\theta+1} = -\sum u_i^{\theta+1} v_j^{\theta+1} \frac{\partial B_\theta}{\partial A_{ij}}.$$

37. La dernière fonction B_θ est B_n, car toutes les fonctions suivantes $B_{n+n'}$ se réduiraient à zéro.

On a

$$B_n = (-1)^n \begin{vmatrix} u_1^1 & \dots & u_n^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ u_n^1 & \dots & u_n^n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_1^1 & \dots & v_n^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ v_1^n & \dots & v_n^n \end{vmatrix}.$$

38. Étant donné un déterminant quelconque

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix},$$

on démontre, dans la théorie des déterminants (¹), que l'on a toujours

$$\frac{\partial\Delta}{\partial\alpha_{rs}} \frac{\partial\Delta}{\partial\alpha_{r_1 s_1}} - \frac{\partial\Delta}{\partial\alpha_{r_1 s}} \frac{\partial\Delta}{\partial\alpha_{r s_1}} = \Delta \frac{\partial^2 \Delta}{\partial\alpha_{rs}\,\partial\alpha_{r_1 s_1}}.$$

Cette proposition va nous être du plus grand secours dans le calcul que nous allons entreprendre.

Nous appliquerons ce théorème à des fonctions telles que B_θ, que nous représenterons par la notation

$$B(u^1, \dots, u^\theta; v^1, \dots, v^\theta),$$

ou par la notation

$$B(u^\theta; v^\theta),$$

en n'indiquant que les éléments les plus indispensables.

Introduisons dans notre calcul l'expression

$$R_\theta = B(u^{n-\theta}, X; v^{n-\theta}, Y),$$

(¹) *Voir* la Note sur les déterminants.

qui se tire de $B_{n-\theta+1}$ en remplaçant les éléments de la dernière bordure par les dérivées partielles de la forme P.

Nous aurons

$$R_0 = B(u^n, X; v^n, Y) = 0.$$

Appliquons le théorème rappelé plus haut à l'expression R_θ, nous aurons

$$B(u^{n-\theta}; v^{n-\theta})\,B(u^{n-\theta-1}, X; v^{n-\theta-1}, Y) - B(u^{n-\theta-1}, X; v^{n-\theta})\,B(u^{n-\theta}; v^{n-\theta-1}, Y)$$
$$= B(u^{n-\theta-1}; v^{n-\theta-1})\,B(u^{n-\theta}, X; v^{n-\theta}, Y),$$

et, si nous posons

$$B(u^{n-\theta-1}, X; v^{n-\theta}) = U_{\theta+1},$$
$$B(u^{n-\theta}; v^{n-\theta-1}, Y) = V_{\theta+1},$$

nous aurons la formule

$$R_{\theta+1} B_{n-\theta} - U_{\theta+1} V_{\theta+1} = B_{n-\theta-1} R_\theta,$$

ou, en changeant θ en $\theta - 1$,

$$R_\theta B_{n-\theta+1} - U_\theta V_\theta = B_{n-\theta} R_{\theta-1}.$$

Appliquons cette formule plusieurs fois de suite et ajoutons à ces résultats une identité déjà démontrée, nous aurons

$$\begin{aligned}
R_1 B_n \quad - U_1 V_1 &= 0,\\
R_2 B_{n-1} - U_2 V_2 &= R_1 B_{n-2},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots,\\
R_n B_1 \quad - U_n V_n &= R_{n-1} B_0,\\
P\ B_0 \qquad\qquad &= -R_n.
\end{aligned}$$

Nous pouvons écrire ces équations sous la forme

$$\begin{aligned}
\frac{R_1}{B_{n-1}} &= \frac{U_1 V_1}{B_n B_{n-1}},\\
\frac{R_2}{B_{n-2}} &= \frac{U_2 V_2}{B_{n-1} B_{n-2}} + \frac{R_1}{B_{n-1}},\\
\ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\frac{R_n}{B_0} &= \frac{U_n V_n}{B_1 B_0} + \frac{R_{n-1}}{B_1},\\
-P &= \frac{R_n}{B_0},
\end{aligned}$$

et, en ajoutant, nous aurons la relation

$$(42) \qquad P = -\frac{U_1 V_1}{B_n B_{n-1}} - \frac{U_2 V_2}{B_{n-1} B_{n-2}} - \ldots - \frac{U_n V_n}{B_1 B_0}.$$

39. Les fonctions U_θ et V_θ sont respectivement des fonctions linéaires des X et des Y, et ne *renferment respectivement que les variables* $y_1, \ldots, y_n$ ou $x_1, \ldots, x_n$.

Les expressions B_θ sont des constantes qui dépendent des valeurs attribuées aux arbitraires u et v. *Nous concluons de là qu'il y a une infinité de manières de ramener une forme linéaire* (P) *à la forme*

$$\sum_\alpha A'_{\alpha\alpha} x'_\alpha y'_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n). \tag{43}$$

Cette proposition correspond à la réduction d'une forme quadratique à une somme de carrés.

40. Mais le calcul précédent n'est valable que si les dénominateurs ne sont pas nuls. On peut toujours se placer dans ce cas si B_0 n'est pas nul, comme nous en ferons toujours l'hypothèse.

En effet, on a

$$B_{\theta+1} = -\Sigma u_i^{\theta+1} v_j^{\theta+1} \frac{\partial B_\theta}{\partial A_{ij}},$$

et l'on peut choisir les arbitraires $u^{\theta+1}$ et $v^{\theta+1}$ de manière que $B_{\theta+1}$ se réduise à un mineur quelconque $\frac{\partial B_\theta}{\partial A_{ij}}$ de B_θ (*voir* § 34). Tous les mineurs $\frac{\partial B_\theta}{\partial A_{ij}}$ ne sont pas nuls si B_θ n'est pas identiquement nul, car B_θ et son déterminant adjoint ne peuvent être nuls l'un sans l'autre ([1]).

Donc, si B_0 n'est pas identiquement nul, on peut choisir les arbitraires u^1, v^1 de manière que B_1 ne soit pas identiquement nul, puis les arbitraires u^2, v^2 de manière que B_2 ne soit pas identiquement nul, etc.

41. Si B_0 n'est pas nul, les fonctions $U_1, \ldots, U_n$, ou les fonctions $V_1, \ldots, V_n$, sont linéairement indépendantes.

En effet, dans le cas contraire, on pourrait par exemple poser

$$U_i = C_{i1} T_1 + \ldots + C_{ik} T_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ k < n),$$

les nouvelles variables T étant indépendantes.

De là on conclurait par l'élimination de ces variables $n-k$ relations linéaires et homogènes entre $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Or, si l'on considère les dérivées partielles de P,

$$Y_i = a_{1i} x_1 + \ldots + a_{ni} x_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

([1]) *Voir* la Note sur les Déterminants.

et l'une quelconque de ces $n-k$ relations

$$m_1x_1+\ldots+m_nx_n=0;$$

on pourrait éliminer $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et l'on obtiendrait un résultat de la forme

$$C_1Y_1+\ldots+C_nY_n=0.$$

Ce résultat est incompatible avec l'indépendance linéaire des fonctions Y, indépendance caractérisée par la condition

$$B_0 \neq 0.$$

En résumé, la forme P peut être ramenée, d'une infinité de manières, à la forme (43), et il *sera impossible de diriger le calcul de façon que cette forme* (43) *renferme moins de variables indépendantes que* P.

42. Appliquons maintenant les principes précédents à la forme complexe

$$F=fs+\varphi,$$

où s est une indéterminée et où l'on a

$$f=\Sigma a_{\alpha\beta}x_\alpha y_\beta,$$
$$\varphi=\Sigma b_{\alpha\beta}x_\alpha y_\beta.$$

Nous supposerons que le déterminant de la forme f n'est pas nul. Par suite, le déterminant de la forme F, c'est-à-dire

$$B_0(s)=\begin{vmatrix} a_{11}s+b_{11} & \ldots & a_{1n}s+b_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}s+b_{n1} & \ldots & a_{nn}s+b_{nn}\end{vmatrix},$$

ne sera pas nul non plus. Ce déterminant sera même de degré n par rapport à s.

Appliquons-lui le théorème de Gauss démontré au § 35. Nous aurons, avec la notation du § 38,

$$F=fs+\varphi=\frac{-B(X;Y)}{B_0(s)}=F(X,Y,s);$$

de sorte que s entrera dans F explicitement d'abord, puis implicitement par les X et les Y. Si l'on considère pour un moment les X et les Y comme des arbitraires, F se présentera sous la forme d'une fraction rationnelle en s, dont le dénominateur est du degré n et dont le numérateur est au plus du degré $n-1$. Mais, si X et Y sont les dérivées partielles de F, le numérateur pourra être du degré $n+1$.

Décomposons cette fraction rationnelle en une somme de n fractions simples, en nous servant de la règle de Lagrange qui consiste à chercher, pour une racine s_i de $B_0(s) = 0$, le coefficient de $\frac{1}{\sigma}$ dans le développement de $\frac{F(s_i+\sigma)}{s - s_i - \sigma}$ (¹).

Nous donnerons d'abord à F la forme générale

$$F = -\frac{U_1 V_1}{B_n B_{n-1}} - \ldots - \frac{U_n V_n}{B_1 B_0},$$

et nous raisonnerons, sur un terme quelconque divisé par $s - s_i - \sigma$,

$$-\frac{U_{n-\theta+1} V_{n-\theta+1}}{(s - s_i - \sigma) B_\theta B_{\theta-1}}.$$

On a d'abord, avec les notations du § 38,

$$U_{n-\theta+1} = B(u^{\theta-1}, X;\ v^{\theta-1}) = \begin{vmatrix} a_{11}s + b_{11} & \ldots & a_{1n}s + b_{1n} & u_1^1 & \ldots & u_1^{\theta-1} & X_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}s + b_{n1} & \ldots & a_{nn}s + b_{nn} & u_n^1 & \ldots & u_n^{\theta-1} & X_n \\ v_1^1 & \ldots & v_n^1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_1^\theta & \ldots & v_n^\theta & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

On peut remplacer la dernière colonne par une autre, obtenue en retranchant de celle-ci les n premières colonnes multipliées par $y_1, y_2, \ldots, y_n$. La nouvelle colonne, écrite horizontalement pour la commodité de l'écriture, devient

$$X_1 - \frac{\partial F}{\partial x_1}, \quad \ldots, \quad X_n - \frac{\partial F}{\partial x_n}, \quad -(v_1^1 y_1 + \ldots + v_n^1 y_n), \quad \ldots, \quad -(v_1^\theta y_1 + \ldots + v_n^\theta y_n).$$

Nous devons remplacer s par $s_i + \sigma$ dans $U_{n-\theta+1}$. Nous aurons alors

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = (s_i + \sigma)\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i},$$

de sorte que, si maintenant nous supposons que X est la dérivée partielle de F, la dernière colonne deviendra

$$(s - s_i - \sigma)\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \ldots, \quad (s - s_i - \sigma)\frac{\partial f}{\partial x_n}, \quad U^1, \ldots, U^\theta,$$

et le déterminant, développé par rapport aux éléments de cette colonne, prendra la forme

$$U_{n-\theta+1} = (s - s_i - \sigma) M_1 + M_2.$$

(¹) *Voir* la Note sur la Règle de Lagrange.

Les coefficients de $U^1, \ldots, U^\theta$ sont des fonctions linéaires des mineurs d'ordre $\theta - 1$ de B_0, de sorte que M_2 est au moins divisible par la même puissance de σ que $B_{\theta-1}$.

Quant à M_1 il est égal à $U_{n-\theta+1}$, quand on a remplacé $X_1, \ldots, X_n$ par

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

C'est donc une forme de B_θ et il est au moins divisible par la même puissance de σ que B_θ.

Soient l_θ et $l_{\theta-1}$ les exposants de σ dans B_θ et $B_{\theta-1}$. On sait que l'on a

$$l_{\theta-1} > l_\theta.$$

Posons dès lors

$$l_{\theta-1} - l_\theta = e_{\theta-1},$$

ou, pour simplifier l'écriture, posons simplement

$$l_{\theta-1} - l_\theta = e.$$

On voit que e est l'exposant d'un diviseur élémentaire correspondant au diviseur linéaire $s - s_i$ de $B_0(s)$.

On pourra donc écrire

$$U_{n-\theta+1} = (s - s_i - \sigma)\,\sigma^{l_\theta} M'_1 + \sigma^{l_{\theta-1}} M'_2,$$

M'_1 et M'_2 n'étant plus divisibles par σ. On aura, en outre,

$$\begin{aligned} B_\theta &= \sigma^{l_\theta}\ B'_\theta, \\ B_{\theta-1} &= \sigma^{l_{\theta-1}} B'_{\theta-1}; \end{aligned}$$

B'_θ et $B'_{\theta-1}$ sont deux quantités ne renfermant plus σ en facteur.

Cela posé, l'expression

$$-\frac{U_{n-\theta+1} V_{n-\theta+1}}{(s - s_i - \sigma)\, B_\theta B_{\theta-1}}$$

devient

$$-\frac{(s - s_i - \sigma)\,\sigma^{2l_\theta} M'_1 N'_1}{\sigma^{l_\theta + l_{\theta-1}} B'_\theta B'_{\theta-1}} + \ldots,$$

en appelant N'_1 la quantité analogue à M'_1 provenant du calcul de $V_{n-\theta+1}$, et *en négligeant d'écrire les termes qui ne donnent pas de puissances négatives de* σ.

On peut encore écrire

$$-\frac{s - s_i - \sigma}{\sigma^e}\,\frac{M'_1}{\sqrt{B'_\theta B'_{\theta-1}}}\,\frac{N'_1}{\sqrt{B'_\theta B'_{\theta-1}}}.$$

Or M'_1 renferme linéairement $y_1, y_2, \ldots, y_n$ et N'_1 renferme linéairement $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Il en sera de même des coefficients de leurs développements par rapport à σ. Soient

$$\frac{M'_1}{\sqrt{B'_\theta B'_{\theta-1}}} = \xi_0 + \xi_1 \sigma + \xi_2 \sigma^2 + \ldots + \xi_m \sigma^m + \ldots,$$

$$\frac{N'_1}{\sqrt{B'_\theta B'_{\theta-1}}} = \eta_0 + \eta_1 \sigma + \eta_1 \sigma^2 + \ldots + \eta_m \sigma^m + \ldots.$$

Le coefficient de $\frac{1}{\sigma}$ que nous cherchons sera donc

$$-(s - s_i)(\xi_0 \eta_{e-1} + \ldots + \xi_{e-1} \eta_0) + (\xi_0 \eta_{e-2} + \ldots + \xi_{e-2} \eta_0).$$

Nous poserons, pour simplifier,

$$\xi_0 \eta_{e-1} + \ldots + \xi_{e-1} \eta_0 = (\xi\eta)_e.$$

Nous voyons ainsi que, étant choisie la racine s_i, les termes successifs du développement de $\frac{F(s_i+\sigma)}{s - s_i - \sigma}$ nous donneront

$$\begin{array}{l} -(s - s_i)(\xi\eta)_{e_0} + (\xi\eta)_{e_0-1}, \\ -(s - s_i)(\xi\eta)_{e_1} + (\xi\eta)_{e_1-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Pour une autre racine s'_i nous aurions

$$\begin{array}{l} -(s - s'_i)(\xi\eta)_{e'_0} + (\xi\eta)_{e'_0-1}, \\ -(s - s'_i)(\xi\eta)_{e'_1} + (\xi\eta)_{e'_1-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Au lieu de réunir tous ces résultats en considérant les diviseurs linéaires $s - s_i$, $s - s'_i$, ..., considérons les diviseurs élémentaires

$$(s - s_1)^{e_1}, \quad (s - s_2)^{e_2}, \quad \ldots, \quad (s - s_\rho)^{e_\rho},$$

et il importe peu que les diviseurs linéaires correspondants soient distincts ou non, nous aurons, en ajoutant tous les résultats obtenus,

$$F = fs + \varphi = -\sum_{i=1}^{i=\rho} [(s - s_i)(\xi\eta)_{e_i} - (\xi\eta)_{e_i-1}].$$

On voit donc que chaque diviseur élémentaire fournit son terme dans le développement de F. C'est en cela que consiste l'indépendance des rôles de ces diviseurs élémentaires dans le calcul que nous venons de faire.

43. De la formule précédente on tire

$$(44)\qquad \begin{cases} f = -\Sigma(\xi\eta)_e, \\ \varphi = \quad \Sigma s_i(\xi\eta)_e + \Sigma(\xi\eta)_{e-1}. \end{cases}$$

Il faut remarquer que l'on doit poser

$$(\xi\eta)_{e-1} = 0 \qquad \text{pour} \qquad e = 0.$$

44. Les expressions ξ sont des fonctions linéaires et homogènes de $y_1, \ldots, y_n$ et les expressions η sont des fonctions analogues des $x_1, \ldots, x_n$.

Nous allons montrer qu'on peut réciproquement exprimer $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en fonctions linéaires et homogènes des η et $y_1, y_2, \ldots, y_n$ en semblables fonctions des ξ.

En effet, de l'équation

$$f = -\Sigma(\xi\eta)_e,$$

on tire

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \xi_\mu} &= -\eta_\nu, \\ \frac{\partial f}{\partial \eta_\nu} &= -\xi_\mu, \end{aligned}\right\} \qquad (\mu + \nu = e - 1)$$

et, par conséquent, le déterminant de la forme $\Sigma(\xi\eta)_e$ est égal à

$$\begin{vmatrix} 0 & \ldots & -1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & -1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 1- & \ldots & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

et n'est pas nul. Appelons δ ce déterminant.

Si l'on fait le changement de variables qui change les ξ en y et les η en x, le déterminant δ sera multiplié par les deux déterminants de substitution que nous appellerons δ_x et δ_y. Mais, quand les variables sont x et y, le déterminant de $\Sigma(\xi\eta)_e$ est celui de f et est supposé différent de zéro. Soit δ_1 ce déterminant, on a la relation

$$\delta_1 = \delta\delta_x\delta_y,$$

d'où l'on conclut que δ_x et δ_y ne peuvent être nuls et, par suite, qu'on peut exprimer les x en η et les y en ξ.

En outre, puisque les déterminants δ_x et δ_y ne sont pas nuls, il y a bien n fonctions ξ et n fonctions η.

45. Les formules (44) ont été données par M. Weierstrass. L'éminent analyste leur a donné encore une autre forme plus symétrique que la précédente et que nous allons indiquer.

Soient g, h, g', h' quatre nombres, entiers si l'on veut, tels que le déterminant $gh' - hg'$ soit égal à l'unité, et posons

$$\begin{aligned} f &= -(gP + hQ), \\ \varphi &= \quad g'P + h'Q, \\ F = -(fs + \varphi) &= [(gP + hQ)s - (g'P + h'Q)]. \end{aligned}$$

Nous tirerons de là

$$F = (gs - g')P + (hs - h')Q = pP + qQ,$$

en posant

$$\begin{aligned} gs - g' &= p, \\ hs - h' &= q. \end{aligned}$$

Nous aurons, en outre,

$$ap + bq = (ag + bh)s - (ag' + bh').$$

Supposons que $ap + bp$ soit un diviseur du déterminant $[P, Q]$ et remplaçons a et b par des valeurs proportionnelles, de sorte que l'on ait

$$\begin{aligned} ag + bh &= 1, \\ ag' + bh' &= s_i, \end{aligned}$$

nous aurons

$$ap + bq = s - s_i.$$

Il résulte de là que les diviseurs élémentaires du déterminant de la forme $F = pP + qQ$ correspondront aux diviseurs de la forme $F = -(fs + \varphi)$. Si l'on résout alors le système d'équations

$$\begin{aligned} ag + bh &= 1, \\ ag' + bh &= s_i, \end{aligned}$$

on aura, en introduisant un indice pour a et b,

$$a_i = h' - hs_i, \qquad b_i = -g' + gs_i.$$

Enfin les équations

$$\begin{aligned} gP + hQ &= -f, \\ g'P + h'Q &= \varphi \end{aligned}$$

donneront

$$P = -h'f - h\varphi = \sum (a_i + hs_i)(\xi\eta)_{e_i} - h\sum s_i(\xi\eta)_{e_i} - h\sum (\xi\eta)_{e_i-1},$$

$$Q = \quad g'f + g\varphi = \sum (b_i - gs_i)(\xi\eta)_{e_i} + g\sum s_i(\xi\eta)_{e_i} + g\sum (\xi\eta)_{e_i-1},$$

ou enfin

$$(45)\qquad \left\{\begin{aligned} P &= \sum_i [a_i(\xi\eta)_{e_i} - h(\xi\eta)_{e_i-1}],\\ Q &= \sum_i [b_i(\xi\eta)_{e_i} + g(\xi\eta)_{e_i-1}]. \end{aligned}\right.$$

46. On voit donc que, *si* P *et* Q *sont deux formes bilinéaires telles que le déterminant* [P, Q] *ne soit pas identiquement nul, si* g *et* h *sont deux constantes quelconques, telles que le déterminant de la forme* $gP + hQ$ *ne soit pas nul, et enfin si* $(a_ip + b_iq)^{e_i}$ *est un diviseur élémentaire quelconque du déterminant* [P, Q], *on pourra poser les formules* (45).

47. Le coefficient de s^n dans [P, Q] est la valeur de [P, Q] pour $p = g$, $q = h$; en le représentant par $[g, h]$, nous aurons

$$[P, Q] = [g, h]\prod_i (a_ip + b_iq)^{e_i} = [g, h]\prod_i (s - s_i)^{e_i}.$$

48. A un exposant e_i correspond dans P un nombre e_i de termes multipliés par a_i et un nombre $e_i - 1$ de termes multipliés par h. Donc à un exposant e_i correspondent $2e_i - 1$ termes dans P, et de même $2e_i - 1$ termes dans Q, lorsqu'on donne à P et à Q les formes (45) qu'on peut appeler *canoniques*.

Si l'on a $e_i = 1$, le nombre des termes dans P ou Q se réduit à l'unité.

Si tous les nombres e_i se réduisent à l'unité, on aura le cas le plus simple des formules (45) sous la forme

$$\left.\begin{aligned} P &= \Sigma a_i\xi_i\eta_i,\\ Q &= \Sigma b_i\xi_i\eta_i, \end{aligned}\right\} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Dans tous les cas, on pourra un peu simplifier les formules (44) en posant

$$g = 1, \quad h = 0, \quad g' = 0, \quad h' = 1$$

si [P] n'est pas nul, et

$$g = 0, \quad h = -1, \quad g' = 1, \quad h' = 0$$

si [Q] n'est pas nul.

49. *En résumé, étant données deux formes bilinéaires* P *et* Q, *si le déter-*

minant de la forme $p\mathrm{P}+q\mathrm{Q}$ *a* ρ *diviseurs élémentaires*

$$(a_1 p + b_1 q)^{e_1}, \quad \ldots, \quad (a_\rho p + b_\rho q)^{e_\rho},$$

et il importe peu que les binomes $(a_1 p + b_1 q), \ldots, (a_\rho p + b_\rho q)$ *soient distincts ou non, on peut déterminer* n *fonctions linéaires et homogènes des* y, *soient*

$$\xi_0^i, \quad \xi_1^i, \quad \ldots, \quad \xi_{e_i-1}^i \qquad (i=1, 2, \ldots, \rho),$$

et n *fonctions linéaires et homogènes des* x, *soient*

$$\eta_0^i, \quad \eta_1^i, \quad \ldots, \quad \eta_{e_i-1}^i \qquad (i=1, 2, \ldots, \rho),$$

telles que, pour des valeurs données des constantes g *et* h *et pour des valeurs convenables des rapports* $\frac{a_i}{b_i}$, *on puisse construire les nouvelles formes*

$$\mathrm{P} = \sum_i [a_i(\xi\eta)_{e_i} - h(\xi\eta)_{e_i-1}],$$

$$\mathrm{Q} = \sum_i [b_i(\xi\eta)_{e_i} + g(\xi\eta)_{e_i-1}],$$

et, réciproquement, on pourra exprimer les x *et les* y *au moyen des* ξ *et des* η *de manière à reproduire les formes primitives.*

50. Soient maintenant deux couples de formes bilinéaires

$$\mathrm{P}(x\,|\,y), \qquad \mathrm{Q}(x\,|\,y)$$

et

$$\mathrm{P}'(x'\,|\,y'), \qquad \mathrm{Q}'(x'\,|\,y'),$$

et supposons que les deux déterminants $[\mathrm{P}, \mathrm{Q}]$ et $[\mathrm{P}', \mathrm{Q}']$ aient les mêmes diviseurs élémentaires.

Nous déterminerons, d'une part, n fonctions linéaires et homogènes de y_1, $y_2, \ldots, y_n$, soient ξ_μ^i $(i=1, 2, \ldots, \rho;\ \mu=0, 1, \ldots, e_i-1)$, et n fonctions linéaires et homogènes de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, soient η_ν^i

$$(i=1, 2, \ldots, \rho; \qquad \nu=0, 1, \ldots, e_i-1);$$

et, d'autre part, n fonctions semblables $\xi_\mu'^i$ de $y_1', \ldots, y_n'$ et n fonctions semblables $\eta_\nu'^i$ de $x_1', \ldots, x_n'$, telles que l'on puisse mettre P, Q, P′, Q′ en employant les mêmes valeurs de g, h, a, b sous les formes

$$\mathrm{P} = \sum_i [a_i(\xi\eta)_{e_i} - h(\xi\eta)_{e_i-1}],$$

$$\mathrm{Q} = \sum_i [b_i(\xi\eta)_{e_i} + g(\xi\eta)_{e_i-1}],$$

$$\mathrm{P}' = \sum [a_i(\xi'\eta')_{e_i} - h(\xi'\eta')_{e_i-1}],$$

$$\mathrm{Q}' = \sum [b_i(\xi'\eta')_{e_i} + g(\xi'\eta')_{e_i-1}].$$

Il est évident que P et P′, Q et Q′ ne différeront que par la notation et se transforment les unes dans les autres quand on posera

$$\xi' = \xi, \qquad \eta' = \eta.$$

Mais ces équations sont des relations entre $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ d'une part, et $y_1, y_2, \ldots, y_n$ et $y'_1, y'_2, \ldots, y'_n$ d'autre part. On a vu qu'on peut les résoudre soit par rapport aux x et aux y, soit par rapport aux x' et aux y'. En outre, les formes P, Q, P′, Q′, une fois qu'on a choisi g et h, ne dépendent que des diviseurs élémentaires de [P, Q] et de [P′, Q′]. On a donc ce théorème, qui est la conclusion de tous ceux qui précèdent :

Pour que deux formes bilinéaires P *et* Q *se changent simultanément en deux autres* P′ *et* Q′ *au moyen de substitutions convenables des x' aux x et des y' aux y, il faut et il suffit que les déterminants des deux formes*

$$p\,\mathrm{P} + q\,\mathrm{Q} \qquad \text{et} \qquad p\,\mathrm{P}' + q\,\mathrm{Q}'$$

aient les mêmes diviseurs élémentaires.

51. Pour appliquer le théorème général précédent, il n'est pas nécessaire de décomposer effectivement les deux déterminants [P, Q], [P′, Q′] en diviseurs élémentaires.

Si l'on considère les formes $fs + \varphi$, $fs' + \varphi'$, on déterminera, pour chaque ordre de mineurs, les plus grands communs diviseurs de ces mineurs. En leur supposant un coefficient égal à l'unité, et en les appelant

$$\begin{array}{llll} \mathrm{R}_0(s), & \mathrm{R}_1(s), & \mathrm{R}_2(s), & \ldots, \\ \mathrm{R}'_0(s), & \mathrm{R}'_1(s), & \mathrm{R}'_2(s), & \ldots, \end{array}$$

l'indice o correspondant au déterminant principal et l'indice k aux mineurs d'ordre k, il sera nécessaire et suffisant que l'on ait identiquement

$$\mathrm{R}_k(s) = \mathrm{R}'_k(s) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

52. Il sera encore utile pour la suite de démontrer directement que les formes (45)

$$\mathrm{P} = \sum [a_i(\xi\eta)_{e_i} - h(\xi\eta)_{e_i-1}],$$

$$\mathrm{Q} = \sum [b_i(\xi\eta)_{e_i} + g(\xi\eta)_{e_i-1}],$$

obtenues précédemment, et où l'on a

$$e_1 + e_2 + \ldots + e_\rho = n,$$
$$g a_i + h b_i = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \rho),$$

admettent bien les diviseurs élémentaires $(a_i p + b_i q)^{e_i}$.

53. Posons

$$P_i = a_i(\xi\eta)_{e_i} - h(\xi\eta)_{e_i - 1},$$
$$Q_i = b_i(\xi\eta)_{e_i} + g(\xi\eta)_{e_i - 1},$$

nous aurons

$$p P_i + q Q_i = (a_i p + b_i q)(\xi\eta)_{e_i} + (gq - hp)(\xi\eta)_{e_i - 1}.$$

Soient alors

$$a_i p + b_i q = u_i, \qquad gq - hp = v;$$

u_i et v sont deux variables indépendantes avec p et q puisque le déterminant $g a_i + h b_i$ n'est pas nul.

Par suite, le déterminant de la forme $p P_i + q Q_i$ peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & v & u_i \\ 0 & 0 & \ldots & v & u_i & 0 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & v & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ v & u_i & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ u_i & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Si nous cherchons de même le déterminant de la forme $pP + qQ$, en posant

$$P = \sum_i P_i, \qquad Q = \sum_i Q_i, \qquad a_i p + b_i q = u_i,$$

nous trouverons

$$(46) \qquad [P, Q] = \left|\begin{array}{ccccc|ccccc|c} 0 & 0 & \ldots & v & u_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & u_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \ldots & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \ldots & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \ldots \\ v & u_1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots \\ u_1 & 0 & \ldots & \cdot & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots \\ \hline 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & v & u_2 & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & u_2 & 0 & \ldots \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \ldots & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot\cdot & \cdot & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & v & u_2 & \ldots & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & u_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots \\ \hline \cdot\cdot & \cdot\cdot & \ldots & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \ldots & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \ldots \end{array}\right|$$

et nous en conclurons que l'on doit avoir

$$[P, Q] = \prod [P_i, Q_i].$$

Or, on a évidemment $[P_i, Q_i] = \pm u^{e_i}$, et u^{e_i} sera le seul diviseur élémentaire de $[P_i, Q_i]$, car, si l'on efface la dernière ligne et la dernière colonne de ce déterminant, on a un mineur du premier ordre égal à $\pm v^{e_i-1}$. Mais v est indépendant de u_i, et v^{e_i-1} ne peut être divisé par u_i.

Si l'on a $e_i = 1$, u_i est évidemment le seul diviseur élémentaire de $[P_i, Q_i]$ qui se réduit dans ce cas particulier à un seul terme, le terme u_i.

On aura ensuite

$$[P, Q] = \pm u_1^{e_1} u_2^{e_2} \ldots u_\rho^{e_\rho} = \prod_i (a_i p + b_i q)^{e_i}.$$

On en conclut que les diviseurs élémentaires de $[P, Q]$ ne pourront être que les puissances des diviseurs linéaires $a_i p + b_i q$. Il reste à déterminer leurs exposants.

54. Cherchons les déterminants d'ordre ϖ de $[P, Q]$. Chacun d'eux répond à une suppression de ϖ lignes et ϖ colonnes dans le déterminant principal. Si l'on observe la forme de $[P, Q]$, on reconnaît qu'il est composé de déterminants partiels ayant en commun la diagonale principale avec $[P, Q]$ lui-même. C'est ce que l'on a indiqué par des barres sur la figure (46) de ce déterminant $[P, Q]$.

Supposons que l'on supprime ϖ lignes et ϖ colonnes, et, pour fixer les idées, supposons que les k premières lignes et les k' premières colonnes du mineur obtenu renferment les éléments non nuls qui restent après cette suppression dans le premier déterminant partiel $[P_i, Q_i]$, k étant $\gtrless k'$, $k' > k$ par exemple.

Dans un terme quelconque du développement du mineur de $[P, Q]$ entreront nécessairement un élément non nul de la première ligne, un élément non nul de la deuxième, etc., et ces éléments ne pourront appartenir qu'aux k' premières colonnes, les autres colonnes ne pouvant fournir que des éléments nuls dans les lignes considérées. Mais il restera encore $k' - k$ des premières colonnes dans lesquelles il faudra prendre un élément en dehors des k premières lignes. Cet élément sera nul. Nous concluons de là que les seuls mineurs de $[P, Q]$ qui ne sont pas nuls ont la diagonale principale commune avec $[P, Q]$ lui-même.

Étant autorisés à ne considérer que les mineurs de $[P, Q]$ qui ont la même diagonale principale que ce déterminant, représentons par $[P_i, Q_i]^{(m_i)}$ l'un des mineurs d'ordre m du déterminant $[P_i, Q_i]$ ou ce déterminant lui-même si $m = 0$.

Tous les mineurs non nuls d'ordre ϖ de $[P, Q]$ pourront être mis sous la forme

$$\prod_i [P_i, Q_i]^{(m_i)},$$

où l'on suppose

$$\sum_i m_i = \varpi.$$

55. Cela posé, soit $ap + bq$ un quelconque des diviseurs linéaires de $[P, Q]$, et soient, tirés de ceux des déterminants $[P_i, Q_i]$ divisibles par $ap + bq$, les diviseurs $(ap + bq)^{e_0}$, $(ap + bq)^{e_1}$, ..., $(ap + bq)^{e_r}$ qui représentent tous les diviseurs élémentaires correspondants de ces déterminants.

Nous supposerons que les nombres e_0, e_1, ..., e_r n'aillent pas en croissant.

Si nous prenons $m_i = 1$, pour les valeurs $0, 1, \ldots, r$ de l'indice i, et que nous prenions précisément le mineur de $[P_i, Q_i]$ obtenu en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne, le mineur de $[P, Q]$ qu'on formera ainsi en supprimant dans $[P, Q]$ au moins $r + 1$ lignes et $r + 1$ colonnes ne pourra pas être divisé par $ap + bq$. Donc les mineurs de $[P, Q]$ d'ordre égal ou supérieur à $r + 1$ n'admettent pas en commun le diviseur linéaire $ap + bq$, et, par suite, il n'y a pas plus de $r + 1$ diviseurs élémentaires fournis par le diviseur linéaire $ap + bq$.

Cherchons maintenant l'exposant du diviseur $ap + bq$ dans les mineurs d'ordre ϖ inférieur à $r + 1$. Soit ρ le nombre total des déterminants $[P_i, Q_i]$, on a

$$\rho - \varpi = (\rho - r - 1) + (r - \varpi + 1).$$

Puisqu'il n'y a pas plus de ϖ nombres m_0, m_1, ..., m_ρ qui ne soient pas nuls, il y en a au moins $\rho - \varpi$ ou encore

$$(\rho - r - 1) + (r - \varpi + 1)$$

qui le sont.

On pourra bien prendre nuls les $\rho - r - 1$ nombres m qui ne correspondent pas aux indices $0, 1, \ldots, r$; mais parmi ces derniers il faudra en prendre au moins $r - \varpi + 1$ qui soient nuls.

Donc, dans le produit

$$\Pi [P_i, Q_i]^{(m_i)}$$

apparaîtront au moins $r - \varpi + 1$ des déterminants $[P_i, Q_i]$ où i est égal à $0, 1, \ldots, r$. Par suite, chaque mineur de l'ordre ϖ de $[P, Q]$ sera divisible par une puissance de $(ap + bq)$ dont l'exposant sera la somme de $r - \varpi + 1$ des nombres $e_0, e_1, \ldots, e_r$. Cet exposant ne sera pas plus petit que la somme

$$e_\varpi + e_{\varpi+1} + \ldots + e_r.$$

D'ailleurs, si l'on égale à l'unité les nombres m_i auxquels correspondent les exposants $e_0, e_1, \ldots, e_{\varpi-1}$ et à zéro les autres nombres m_i, on peut former un mineur de [P, Q] qui admette $ap+bq$ comme diviseur exactement au degré $e_\varpi + e_{\varpi+1} + \ldots + e_r$ et qui soit d'ordre ϖ. On en conclut que $(ap+bq)^{e_\varpi+\ldots+e_r}$ est la plus haute puissance de $ap+bq$ qui divise à la fois tous les mineurs d'ordre ϖ de [P, Q].

Posons alors

$$\begin{aligned}
l_0 &= e_0 + e_1 + \ldots + e_\varpi + \ldots + e_r,\\
l_0 - e_0 = l_1 &= \phantom{e_0 +{}} e_1 + \ldots + e_\varpi + \ldots + e_r,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
l_{\varpi-1} - e_{\varpi-1} = l_\varpi &= \phantom{e_0 + e_1 + \ldots +{}} e_\varpi + \ldots + e_r,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
l_{r-1} - e_{r-1} &= \phantom{e_0 + e_1 + \ldots + e_\varpi + \ldots +{}} e_r,
\end{aligned}$$

ou encore

$$l_0 - l_1 = e_0, \qquad l_1 - l_2 = e_2, \qquad \ldots, \qquad l_{r-1} - l_r = e_r, \qquad l_r = e_r,$$

$l_0, l_1, \ldots, l_r$ seront les plus hauts exposants des puissances de $ap+bq$ respectivement dans le déterminant principal, dans ses mineurs du premier ordre, etc., dans ses mineurs de l'ordre r. Si l'on se reporte aux définitions posées au début du Chapitre, on voit que

$$(ap+bq)^{e_0}, \quad \ldots, \quad (ap+bq)^{e_r}$$

sont les diviseurs élémentaires de [P, Q] qui correspondent au diviseur linéaire $ap+bq$.

Les nombres e ne vont pas en croissant : c'est une condition à ajouter à celles qu'on a trouvées dans les définitions du début.

56. Puisque les formes canoniques de deux formes bilinéaires P et Q ne dépendent que des diviseurs élémentaires du déterminant [P, Q] et de deux constantes arbitraires g et h, on en conclut que si on laisse arbitraires g et h, et si l'on fait *une double substitution générale dans des formes canoniques construites* a priori, *on obtiendra les formes bilinéaires les plus générales correspondant aux diviseurs élémentaires que l'on a choisis.*

57. Dans le cas où le déterminant [P, Q] a n diviseurs élémentaires, plusieurs pouvant provenir de diviseurs linéaires égaux entre eux, les exposants $e_0, e_1, \ldots, e_r$ sont tous égaux à l'unité. Les formes canoniques deviennent simplement

$$\begin{aligned}
P &= a_1\xi_1\eta_1 + \ldots + a_n\xi_n\eta_n,\\
Q &= b_1\xi_1\eta_1 + \ldots + b_n\xi_n\eta_n.
\end{aligned}$$

Réciproquement, le déterminant de la forme

$$pP + qQ = \sum_i (a_i p + b_i q)\xi_i \eta_i$$

admet les diviseurs élémentaires

$$a_1 p + b_1 q, \quad \ldots, \quad a_n p + b_n q.$$

Il faut donc, pour que P et Q puissent prendre les formes précédentes, que le déterminant $[P, Q]$ possède n diviseurs élémentaires. Mais $[P, Q]$ renferme chacun de ces diviseurs à la première puissance; tous les exposants e sont égaux à l'unité, et, pour un même diviseur linéaire de $[P, Q]$, on a

$$\begin{aligned} l_0 - l_1 &= 1, \\ l_1 - l_2 &= 1, \\ \ldots\ldots&\ldots, \\ l_r &= 1. \end{aligned}$$

En conséquence, un même diviseur linéaire du degré l_0 de multiplicité fournit l_0 diviseurs élémentaires dont les exposants e sont égaux à l'unité, et ce diviseur linéaire est commun à tous les mineurs d'ordre $l_0 - 1$. On a donc ce théorème :

Pour que les formes P *et* Q *puissent s'écrire*

$$P = \sum_i a_i \xi_i \eta_i, \qquad Q = \sum_i b_i \xi_i \eta_i,$$

ξ_i *et* η_i *étant respectivement des formes linéaires et homogènes des* y *et des* x, *il faut et il suffit que tout diviseur de* $[P, Q]$ *qui entre comme diviseur linéaire au degré* $l_0 > 1$ *soit en même temps un diviseur commun de tous les mineurs de l'ordre* $l_0 - 1$ *de* $[P, Q]$.

58. Considérons enfin les deux formes bilinéaires

$$P = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n, \tag{47}$$

$$P' = x'_1 y'_1 + \ldots + x'_n y'_n, \tag{48}$$

et supposons que l'on veuille par une double substitution linéaire passer de P à P' on posera

$$y'_i = c_{i1} y_1 + \ldots + c_{in} y_n, \tag{49}$$

et l'on en déduira

$$\sum x'_i y'_i = \sum x'_i c_{ij} y_j = \sum x'_j c_{ji} y_i = \sum x_i y_j.$$

d'où

$$x_i = c_{1i}x'_1 + \ldots + c_{ni}x'_n. \tag{50}$$

Il est évident que l'on peut remplacer les y et les y' par des fonctions quelconques, pourvu que l'on respecte les équations (49) ou, ce qui revient au même, les équations (50), ces deux sortes de relations s'entraînant l'une l'autre quand on pose $P = P'$.

Remplaçons en particulier les y par des combinaisons linéaires d'eux-mêmes, soit par exemple y_i par

$$a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n,$$

de sorte que P deviendra la forme bilinéaire générale

$$Q = \Sigma a_{ij}x_i y_j.$$

Remplaçons de même les y' par des combinaisons analogues, soit y'_i par

$$a'_{i1}y'_1 + \ldots + a'_{in}y'_n,$$

de sorte que P′ deviendra la forme bilinéaire générale

$$Q' = \Sigma a'_{ij}x'_i y'_j;$$

on suppose que les relations (50) sont conservées. On devra donc avoir

$$\Sigma a'_{ij}y'_j = c_{i1}(a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n) + \ldots + c_{in}(a_{n1}y_1 + \ldots + a_{nn}y_n). \tag{51}$$

Peut-on satisfaire à ces relations (51) tout en conservant les relations (49)? Il faudra que l'on ait

$$\begin{aligned} & a'_{i1}(c_{11}y_1 + \ldots + c_{1n}y_n) + \ldots + a'_{in}(c_{n1}y_1 + \ldots + c_{nn}y_n) \\ & \quad = c_{i1}(a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n) + \ldots + c_{in}(a_{n1}y_1 + \ldots + a_{nn}y_n) \end{aligned} \tag{52}$$

ou encore

$$a'_{i1}c_{1j} + \ldots + a'_{in}c_{nj} = c_{i1}a_{1j} + \ldots + c_{in}a_{nj} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n). \tag{53}$$

Réciproquement, si ces relations sont satisfaites, on aura identiquement les relations (52) et, à cause des relations (51), on aura

$$a'_{i1}(c_{11}y_1 + \ldots + c_{1n}y_n) + \ldots + a'_{in}(c_{n1}y_1 + \ldots + c_{nn}y_n) = a'_{i1}y'_1 + \ldots + a'_{in}y'_n. \tag{54}$$

Or, le déterminant des c n'étant pas nul et celui des a n'étant pas nul non plus, on remarquera que les relations (53) expriment que le produit du déterminant des a' par le déterminant des c est égal au produit du déterminant des c par celui des a. Donc le déterminant des a' n'est pas nul, et les relations (54) entraînent les relations

$$y'_i = c_{i1} y_1 + \ldots + c_{in} y_n. \tag{49}$$

Par suite, pour qu'une même substitution double

$$\left\{ \begin{aligned} y'_i &= c_{i1} y_1 + \ldots + c_{in} y_n, \\ x_i &= c_{1i} x'_1 + \ldots + c_{ni} x'_n \end{aligned} \right. \tag{55}$$

ramène à la fois P à P' et Q à Q', il faut et il suffit que les relations (53) existent.

Mais alors les déterminants des deux formes $Q - \omega P$ et $Q' - \omega P'$ auront mêmes diviseurs élémentaires, et réciproquement si $Q - \omega P$, $Q' - \omega P'$ ont mêmes diviseurs élémentaires, on pourra calculer les relations (55), qui auront bien la forme indiquée à cause de la forme spéciale donnée à P et à P'.

En résumé, *si l'on a les relations* (53), *les deux déterminants*

$$R(\omega) = \begin{vmatrix} a_{11} - \omega & \ldots & a_{1n} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} - \omega \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad R'(\omega) = \begin{vmatrix} a'_{11} - \omega & \ldots & a'_{1n} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a'_{n1} & \ldots & a'_{nn} - \omega \end{vmatrix}$$

ont mêmes diviseurs élémentaires, et réciproquement, si ce fait a lieu, on a les relations (55) *et, par suite, les relations* (53).

Nous aurons à appliquer ce théorème final dans la théorie des équations différentielles.

CHAPITRE III.

DES POINTS SINGULIERS.

59. On peut faire remonter l'étude des points singuliers au célèbre Mémoire de Puiseux sur les points algébriques; mais le travail fondamental, relativement aux points singuliers des intégrales des équations linéaires, est celui de M. Fuchs.

60. Nous avons supposé dans le Chapitre premier que la variable x décrivait, dans le plan des x, un chemin quelconque partant d'un point initial x_0 et conduisant à un point terminus quelconque, ce chemin étant assujetti à la condition de ne passer par aucun point singulier des coefficients des équations différentielles linéaires (n^{os} 2 et suivants). Nous considérerons maintenant le cas, plus spécial, où le point terminus se confond avec le point de départ. La variable décrira donc un chemin fermé. Les éléments des solutions du système

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy_i}{dx} = \Sigma a_{ij} y_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

auront pris des valeurs nouvelles. Nous déterminerons l'influence que peut avoir sur ces valeurs un point singulier entouré par le chemin fermé décrit par la variable x.

61. Nous supposons toujours que, dans une région T du plan, les fonctions a_{ij} qui entrent dans les équations (A) soient uniformes et continues, sauf en certains points que nous appelons *singuliers*. Quel que soit le chemin fermé suivi par la variable x, les coefficients a_{ij} reprendront au même point du plan la même valeur. Ces fonctions sont d'ailleurs *régulières* en chaque point non singulier, c'est-à-dire sont développables dans un domaine convenable de chaque point $x = a$, en séries convergentes de la forme

$$\Sigma A_r (x - a)^r \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots, \infty).$$

Soient $y_1, y_2, \ldots, y_n$ les éléments d'une solution. Nous appellerons $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ les nouvelles valeurs de ces éléments, quand la variable ayant décrit un chemin fermé recommence à le parcourir.

Cela posé, le théorème fondamental est le suivant :

Si la variable indépendante revient à sa valeur initiale, les nouvelles va-

leurs Y_{ij} des éléments d'un système fondamental de solutions sont liées aux anciennes y_{ij} par des relations linéaires et homogènes à coefficients constants de la forme

$$Y_{ij} = C_{j1} y_{i1} + \ldots + C_{jn} y_{in} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n). \tag{56}$$

En effet, si l'on considère les fonctions qui dans le mouvement de la variable x partent d'abord des valeurs Y_{ij}, on sait qu'on peut les exprimer linéairement au moyen des fonctions y_{ij}, ce qui démontre le théorème précédent.

On remarquera que le déterminant des constantes C est différent de zéro; car les fonctions Y_{ij} forment un système fondamental puisqu'elles continuent les fonctions y_{ij}, et il faut qu'on puisse exprimer les fonctions y_{ij} au moyen des fonctions Y_{ij}.

62. Supposons que le chemin fermé décrit par la variable n'entoure aucun point singulier. Nous allons montrer que les fonctions y_{ij} sont uniformes et que, par suite, les relations (56) se réduisent à la forme

$$Y_{ij} = y_{ij}.$$

Il existe un domaine du point de départ x_0 où les fonctions a sont régulières. Sans sortir de ce domaine, allons à un point x_1. Il existe, dans le domaine considéré, n fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ satisfaisant aux équations (A), et qui ont au point x_0 des valeurs arbitraires $\eta_{10}, \ldots, \eta_{n0}$. Quand la variable x sera parvenue en x_1, les fonctions y auront des valeurs bien déterminées $\eta_{11}, \ldots, \eta_{n1}$. Le point x_1 n'est pas un point singulier des coefficients a. Il existe pour ce point un domaine dans lequel la variable x pourra passer du point x_1 à un point x_2 et les fonctions y passeront des valeurs $\eta_{11}, \ldots \eta_{n1}$ aux valeurs déterminées $\eta_{12}, \ldots, \eta_{n2}$.

En avançant ainsi de proche en proche, on arrivera à un point terminus quelconque. Nous supposons dans ce Chapitre que nous revenons au point x_0 lui-même.

Cela posé, remarquons que les domaines successifs sont formés de cercles qui empiètent les uns sur les autres. Prenons arbitrairement un point x'_1 dans la région commune aux domaines des deux points x_0 et x_1; puis prenons un point x'_2 dans la région commune aux domaines des deux points x_1 et x_2, etc.

Joignons le point x_0 au point x'_1 par un chemin quelconque tracé dans le domaine du point x_0, puis le point x'_1 au point x'_2 par un chemin quelconque tracé dans le domaine du point x_1, etc.

Nous pourrons substituer le chemin $x_0 x'_1 x'_2 \ldots$ au chemin $x_0 x_1 x_2 \ldots$.

En effet, on peut évidemment substituer au chemin nouveau le chemin obtenu en allant du point x_0 au point x'_1, du point x'_1 au point x_1 dans la partie commune à deux domaines, du point x_1 au point x'_1 par le même chemin, du point x'_1 au point x'_2, du point x'_2 au point x_2 et du point x_2 au point x'_2 sans sortir de la partie commune à deux domaines, etc.; or le chemin direct $x_0 x_1$ et le chemin $x_0 x'_1 x_1$ conduisent aux mêmes valeurs $\eta_{11}, \ldots, \eta_{n1}$, car on n'est pas sorti du domaine du point x_0; le chemin $x_1 x'_1 x'_2 x_2$ et le chemin direct $x_1 x_2$ sont de même équivalents, etc. Il est en outre évident que le chemin $x'_1 x_1$ par exemple, étant décrit successivement dans les deux sens, ne change pas la valeur de la fonction et peut être supprimé.

Il résulte de là que, connaissant les valeurs initiales des fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ au point x_0, on peut revenir à ce point x_0 par deux chemins fermés voisins différents sans changer les valeurs initiales des fonctions Y.

Mais alors, si le chemin fermé décrit par la variable x peut être déformé dans la région T d'une manière continue en ne rencontrant pas de points singuliers, on pourra le réduire au point x_0 lui-même. C'est ce qu'expriment les relations

$$Y_{ij} = y_{ij}.$$

En résumé, les éléments des solutions du système (A) *sont des fonctions uniformes dans toute région qui ne renferme pas de points singuliers des coefficients a.*

63. *Les relations* (56) *sont caractéristiques des solutions des systèmes* (A) *d'équations différentielles linéaires et homogènes.*

Soit, en effet, D le déterminant, supposé différent de zéro, de n^2 fonctions y_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ d'une variable indépendante x, *régulières* en tous les points x, sauf en des *points singuliers,* lorsque la variable reste dans une région T du plan. Supposons que cette variable x décrive un chemin fermé ne passant par aucun point singulier et revienne à sa valeur initiale. Si les n^2 fonctions prennent des valeurs nouvelles liées aux anciennes par des relations linéaires et homogènes à coefficients constants, telles que les relations (56), ces fonctions forment un système fondamental de solutions d'équations de la forme (A), dont les coefficients a sont uniformes, et n'ont pas d'autres *points singuliers* que les *points singuliers* des fonctions.

Nous démontrerons cette proposition en formant un système d'équations tel que (A), auquel satisfassent les n solutions

$$y_{1j},\quad y_{2j},\quad \ldots,\quad y_{nj} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Nous aurons, en général, les relations

$$\frac{dy_{ij}}{dx} = a_{i1} y_{1j} + \ldots + a_{in} y_{nj} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

et nous en tirerons

$$D a_{ip} = \begin{vmatrix} y_{11} & \dots & \frac{dy_{i1}}{dx} & \dots & y_{n1} \\ \dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ y_{1n} & \dots & \frac{dy_{in}}{dx} & \dots & y_{nn} \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire que nous pourrons calculer les coefficients a.

Ces coefficients sont exprimés par le rapport de deux déterminants. Le dénominateur du rapport est toujours D; le numérateur est le résultat obtenu en remplaçant dans D les éléments d'une colonne par les dérivées des fonctions y_{ij}. Les éléments des deux déterminants prennent des valeurs nouvelles liées aux anciennes par des relations linéaires et homogènes à coefficients constants de la forme (56), quand la variable x a décrit son chemin fermé. Les constantes sont les mêmes pour les éléments homologues des deux déterminants qui forment le rapport. Les deux termes du rapport sont donc multipliés par le même déterminant des constantes. Donc le rapport ne change pas et les fonctions a sont des fonctions uniformes.

Il résulte du calcul des coefficients a qu'ils ne peuvent avoir d'autres points singuliers que ceux des fonctions y_{ij} elles-mêmes.

Enfin, le déterminant D étant différent de zéro, les fonctions y_{ij} forment un système fondamental de solutions du système d'équations différentielles

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy_i}{dx} = a_{i1} y_1 + \ldots + a_{in} y_n.$$

64. Prenons l'exemple donné par M. Tannery.

Soit $f(y, x) = 0$ une équation algébrique rationnelle, entière et de degré n en y. Cette équation définit n fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ qui sont régulières en tous les points du plan, sauf en des points *singuliers algébriques*. Si la variable décrit son chemin fermé, ces n fonctions prennent des valeurs nouvelles liées aux anciennes par des relations telles que les relations (56) et même de la forme la plus simple. En effet, en un point x, l'une de ces fonctions doit rester la même, ou être remplacée par l'une des autres, après que la variable a fait le tour du point x. Cela résulte de ce que l'équation algébrique ne peut fournir que n fonctions y différentes.

Les dérivées successives des fonctions y seront des fonctions satisfaisant aux mêmes relations que ces fonctions elles-mêmes. Nous considérerons comme inconnues auxiliaires ces dérivées jusqu'à celles de l'ordre $n - 1$ inclusivement.

Déterminons y par la relation algébrique

$$f(y, x) = 0$$

du degré n en y. Les n^2 fonctions inconnues que déterminera cette équation satisfont à un système différentiel tel que (A), *lorsque leur déterminant n'est pas nul,* c'est-à-dire quand elles sont *linéairement* indépendantes. Dans le cas contraire, le système différentiel renferme moins de n inconnues.

65. Faisons le calcul.

On peut trouver deux polynomes A et B, tels que l'expression

$$\varphi = \mathrm{A}f + \mathrm{B}\frac{\partial f}{\partial y}$$

soit indépendante de y. A et B seront deux polynomes entiers et rationnels en y et x et de degrés respectifs au plus $n-2$ et $n-1$ par rapport à y. Or on a

$$\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0;$$

on aura donc

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\mathrm{B}\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\mathrm{B}\dfrac{\partial f}{\partial y}} = \frac{\mathrm{B}\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\varphi},$$

si y satisfait à l'équation

$$f(y, x) = 0.$$

Au moyen de l'équation $f(y, x) = 0$, on peut réduire les puissances de y au plus à l'exposant $n-1$ et l'on aura

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mathrm{P}_1}{\varphi},$$

$\dfrac{\mathrm{P}_1}{\varphi}$ étant une fonction rationnelle en x et un polynome en y au plus de degré $n-1$.

On aura ensuite

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\mathrm{P}_1}{\varphi}\right) = \frac{\mathrm{P}_2}{\varphi^2},$$

$\dfrac{\mathrm{P}_2}{\varphi^2}$ étant une expression de même nature que $\dfrac{\mathrm{P}_1}{\varphi}$.

En continuant ainsi, on pourra poser, en appelant y_1 une solution quelconque de l'équation algébrique,

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} &= \frac{\mathrm{P}_1}{\varphi} = \mathrm{A}_0^2 + \mathrm{A}_1^2 y_1 + \ldots + \mathrm{A}_{n-1}^2 y_1^{n-1},\\
\frac{d^2y_1}{dx^2} &= \frac{\mathrm{P}_2}{\varphi^2} = \mathrm{A}_0^3 + \mathrm{A}_1^3 y_1 + \ldots + \mathrm{A}_{n-1}^3 y_1^{n-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} &= \frac{\mathrm{P}_{n-1}}{\varphi^{n-1}} = \mathrm{A}_0^n + \mathrm{A}_1^n y_1 + \ldots + \mathrm{A}_{n-1}^n y_1^{n-1},\\
\frac{d^ny_1}{dx^n} &= \frac{\mathrm{P}_n}{\varphi^n} = \mathrm{A}_0^{n+1} + \mathrm{A}_1^{n+1} y_1 + \ldots + \mathrm{A}_n^{n+1} y_1^{n-1}.
\end{aligned}$$

Entre ces n équations on peut éliminer les $n-1$ puissances $y_1^0, y_1^2, \ldots, y_1^{n-1}$, et il restera une relation qui, développée, se présentera sous la forme

$$U_0 \frac{d^n y_1}{dx^n} + U_1 \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} + \ldots + U_{n-1} \frac{dy_1}{dx} + U_n y_1 = 0,$$

ou, comme l'on sait, sous la forme équivalente

$$U_0 \frac{dy_n}{dx} + U_1 y_n + \ldots + U_{n-1} y_2 + U_n y_1 = 0,$$

$$\frac{dy_k}{dx} = y_{k+1} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

On obtient ainsi le résultat demandé. On remarquera que tous les coefficients U sont uniformes comme fractions rationnelles de x. De plus, les points singuliers ne peuvent provenir que des équations $\varphi = 0$ ou $U_0 = 0$, ou de l'équation que l'on obtient en égalant à zéro le coefficient de y^n dans $f(y, x) = 0$.

Le seul cas qui prête à discussion est celui où l'on a

$$U_0 = 0,$$

ou encore

$$U_0 = \begin{vmatrix} A_0^2 & A_2^2 & \ldots & A_{n-1}^2 \\ A_0^3 & A_2^3 & \ldots & A_{n-1}^3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_0^n & A_2^n & \ldots & A_{n-1}^n \end{vmatrix} = 0.$$

Or, considérons le déterminant D, on a

$$D = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ \frac{dy_1}{dx} & \frac{dy_2}{dx} & \ldots & \frac{dy_n}{dx} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} & \frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}} & \ldots & \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & \ldots \\ A_0^2 + A_1^2 y_1 + \ldots + A_{n-1}^2 y_1^{n-1} & \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ A_0^n + A_1^n y_1 + \ldots + A_{n-1}^n y_1^{n-1} & \ldots \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & y_1 & \ldots & y_1^{n-1} \\ \cdot & \cdot\cdot & \ldots & \ldots \\ \cdot & \cdot\cdot & \ldots & \ldots \\ 1 & y_n & \ldots & y_n^{n-1} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots \\ A_0^2 & A_1^2 & A_2^2 & \ldots \\ \cdot\cdot & \cdot & \cdot\cdot & \ldots \\ A_0^n & A_1^n & A_2^n & \ldots \end{vmatrix}.$$

Le premier facteur est le produit des différences deux à deux des quantités $y_1 - y_n$.

Le second facteur est la quantité U_0 elle-même.

On voit par là que si les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont linéairement indépendantes, l'équation $U_0 = 0$ ne peut être satisfaite que par les points singuliers, c'est-à-dire par les valeurs de x qui annulent D exceptionnellement.

Dans le cas où l'on a identiquement $U_0 = 0$, les n fonctions y étant supposées distinctes, on aura $D = 0$, c'est-à-dire que ces fonctions, quoique distinctes, ne sont pas linéairement indépendantes.

Dans ce cas, l'équation différentielle

$$U_0 \frac{d^n y}{dx^n} + \ldots = 0$$

s'abaisse à un ordre moindre, ou, ce qui revient au même, le système différentiel équivalent peut être ramené à renfermer moins de n équations différentielles.

66. Revenons aux relations (56) qui relient entre elles les valeurs nouvelles et les valeurs anciennes des éléments d'un système fondamental de solutions.

Considérons à la fois deux systèmes fondamentaux de solutions dont nous représenterons par y_{ij} et η_{ij} les éléments. Soient Y_{ij} et H_{ij} leurs nouvelles valeurs. Nous devrons avoir les deux systèmes de relations à coefficients constants

$$\begin{aligned} Y_{ij} &= l_{j1} y_{i1} + \ldots + l_{jn} y_{in}, \\ H_{ij} &= \lambda_{j1} \eta_{i1} + \ldots + \lambda_{jn} \eta_{in} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned}$$

et les deux déterminants L et Λ des constantes l d'une part, λ de l'autre, seront différents de zéro.

Exprimons les éléments η_{ij} en fonction des éléments y_{ij}. Les relations sont à coefficients constants et de la forme

$$\eta_{ij} = C_{j1} y_{i1} + \ldots + C_{jn} y_{in},$$

et nous en tirons

$$H_{ij} = C_{j1} Y_{i1} + \ldots + C_{jn} Y_{in}.$$

Il résulte de là, en développant les deux expressions de H_{ij}

$$\begin{aligned} H_{ij} &= (C_{j1}\, l_{11} + \ldots + C_{jn}\, l_{n1}) y_{i1} + \ldots + (C_{j1}\, l_{1n} + \ldots + C_{jn}\, l_{nn}) y_{in}, \\ H_{ij} &= (\lambda_{j1} C_{11} + \ldots + \lambda_{jn} C_{n1}) y_{i1} + \ldots + (\lambda_{j1} C_{1n} + \ldots + \lambda_{jn} C_{nn}) y_{in}, \end{aligned}$$

que l'on a

$$C_{j1} l_{1i} + \ldots + C_{jn} l_{ni} = \lambda_{j1} C_{1i} + \ldots + \lambda_{jn} C_{ni};$$

on en conclut (§ 58, Chapitre II) *que les diviseurs élémentaires du déterminant*

$$R(\omega) = \begin{vmatrix} l_{11} - \omega & \ldots & l_{n1} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ l_{1n} & \ldots & l_{nn} - \omega \end{vmatrix}$$

ne dépendent pas du choix du système fondamental de solutions qui sert à former ce déterminant.

67. Posons en général

$$Y_{ij} = l_{j1}y_{i1} + \ldots + l_{jn}y_{in},$$

les coefficients l étant indépendants de l'indice i. Nous venons de voir que le déterminant

$$R(\omega) = \begin{vmatrix} l_{11} - \omega & \ldots & l_{1n} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ l_{n1} & \ldots & l_{nn} - \omega \end{vmatrix}$$

conserve les mêmes diviseurs élémentaires quand on change le système fondamental de solutions.

On a vu d'autre part (Chapitre II, § 53, équat. 46) qu'on peut former *a priori* un déterminant

$$R'(\omega) = \left|\begin{array}{cccc|cccc|c} \omega_1 - \omega & & & & & & & & \\ 1 & \omega_1 - \omega & & & & & & & \\ & & \ldots & & & & & & \\ & & 1 & \omega_1 - \omega & & & & & \\ \hline & & & & \omega_2 - \omega & & & & \\ & & & & 1 & \omega_2 - \omega & & & \\ & & & & & & \ldots & & \\ & & & & & & 1 & \omega_2 - \omega & \\ \hline & & & & & & & & \ldots \end{array}\right|$$

ayant les mêmes diviseurs élémentaires que le précédent. Il résulte de là que l'on peut faire une double substitution de la forme

$$y_{ij} = C_{j1}y'_{i1} + \ldots + C_{jn}y'_{in},$$
$$x'_{ij} = C_{1j}x_{i1} + \ldots + C_{nj}x_{in},$$

qui ramène à la fois la forme

$$x_{i1}Y_{i1} + \ldots + x_{in}Y_{in}$$

à la forme

$$x'_{i1}Y'_{i1} + \ldots + x'_{in}Y'_{in},$$

et la forme

$$x_{i1}y_{i1} + \ldots + x_{in}y_{in}$$

à la forme

$$x'_{i1}y'_{i1} + \ldots + x'_{in}y'_{in},$$

les y' et les Y' étant les anciennes et les nouvelles valeurs des éléments qui correspondent au déterminant $R'(\omega)$.

Or, si l'on considère la forme de ce déterminant $R'(\omega)$ par rapport aux coefficients qu'on appelait l d'une manière générale, on voit qu'on a les relations importantes pour un système choisi y'_{ij} de solutions

$$
\begin{aligned}
Y'_{i1} &= \omega_1 y'_{i1},\\
Y'_{i2} &= \omega_1 y'_{i2} + y'_{i1},\\
&\dots\dots\dots\dots,\\
Y'_{ik} &= \omega_1 y'_{ik} + y'_{i,k-1},\\
Y'_{i'1} &= \omega_2 y'_{i'1},\\
Y'_{i'2} &= \omega_2 y'_{i'2} + y'_{i'1},\\
&\dots\dots\dots\dots,\\
Y'_{i'k'} &= \omega_2 y'_{i'k'} + y'_{i',k'-1},\\
&\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

On a donc ce théorème remarquable :

Soient $(\omega_1 - \omega)^{e_1}, \dots, (\omega_\rho - \omega)^{e_\rho}$ *les diviseurs élémentaires du déterminant* $R(\omega)$, *et il importe peu que les binomes* $\omega_1 - \omega, \dots, \omega_\rho - \omega$ *soient distincts ou non, on peut trouver un système fondamental de solutions dont les éléments se groupent d'après les relations*

$$
\begin{aligned}
Y_{i1} &= \omega_h y_{i1},\\
Y_{i2} &= \omega_h y_{i2} + y_{i1},\\
&\dots\dots\dots\dots,\\
Y_{i,e_h} &= \omega_h y_{i,e_h} + y_{i,e_h-1},
\end{aligned}
$$

$(\omega_h - \omega)^{e_h}$ *étant l'un quelconque des* ρ *diviseurs élémentaires de* $R(\omega)$.

On peut arriver à ces relations en partant d'un système fondamental quelconque de solutions, et en substituant à ses éléments d'autres éléments qui leur soient liés par des relations linéaires indépendantes et à coefficients constants convenablement choisis.

68. La seconde partie du théorème précédent conduit à la question intéressante du choix des coefficients constants qui permettent de passer d'un système fondamental au système spécial défini par le théorème.

Soit $\omega_1 - \omega$ un diviseur linéaire quelconque du déterminant

$$
R(\omega) = \begin{vmatrix} l_{11} - \omega & \dots & l_{1n} \\ \dots\dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & \dots & l_{nn} - \omega \end{vmatrix},
$$

correspondant aux éléments y_{ij} d'un système fondamental de solutions; on a, par suite,

(57) $$Y_{ij} = l_{j1} y_{i1} + \ldots + l_{jn} y_{in}.$$

L'équation $R(\omega) = 0$ s'appelle, d'après M. Fuchs, *l'équation fondamentale déterminante* ou simplement *l'équation fondamentale*.

Soient $(\omega_1 - \omega)^{h_0}$, $(\omega_1 - \omega)^{h_1}$, ..., $(\omega_1 - \omega)^{h_{r-1}}$ les plus hautes puissances de $\omega_1 - \omega$ qui divisent respectivement $R(\omega)$, puis tous ses mineurs du premier ordre, ..., enfin tous ses mineurs de l'ordre $r - 1$. On sait que les nombres h_0, h_1, ..., h_{r-1} ne peuvent aller qu'en décroissant, et que leurs différences successives

$$h_0 - h_1 = e_0, \qquad h_1 - h_2 = e_1, \qquad \ldots, \qquad h_{r-2} - h_{r-1} = e_{r-2}, \qquad h_{r-1} = e_{r-1}$$

ne peuvent pas aller en croissant.

Puisqu'il doit exister une solution satisfaisant à la relation

$$U_i = \omega_1 u_i,$$

si l'on a

$$u_i = g_1 y_{i1} + \ldots + g_n y_{in}$$

et, par suite,

$$U_i = g_1 Y_{i1} + \ldots + g_n Y_{in} = \Sigma (g_1 l_{1j} + \ldots + g_n l_{nj}) y_{ij},$$

on devra pouvoir satisfaire aux conditions

(58) $$l_{1j} g_1 + \ldots + (l_{jj} - \omega_1) g_j + \ldots + l_{nj} g_n = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Or le déterminant $R(\omega)$ admettant le diviseur linéaire $\omega_1 - \omega$, on voit déjà que les conditions (58) sont compatibles. Ensuite tous les mineurs de $R(\omega)$ s'annulant pour $\omega = \omega_1$ jusqu'à ceux de l'ordre r exclusivement, on pourra exprimer $g_1, g_2, \ldots, g_n$ en fonctions linéaires et homogènes de r constantes arbitraires.

Il y aura donc r solutions u_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, r)$ linéairement indépendantes, satisfaisant à la relation

$$U_{ij} = \omega_1 u_{ij}$$

et *donnant par combinaisons linéaires toutes les autres solutions qui satisfont aux mêmes relations.*

69. Ces r solutions étant déterminées, il existera des solutions $u'_{ij'}$ satisfaisant aux relations

$$U'_{ij'} = \omega_1 u'_{ij'} + u'_{i,j'-1},$$

si tous les diviseurs élémentaires fournis par $\omega_1 - \omega$ ne sont pas simples.

Pour trouver ces nouvelles solutions, nous supposerons qu'on a choisi pour système fondamental un système de solutions où entrent les fonctions déjà calculées u_{ij} ($i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, r$). Ce système peut être considéré comme fondamental, car on peut évidemment prendre arbitrairement les valeurs de r désignées des quantités $g_1, g_2, \ldots, g_n$. Soient $g_1, g_2, g_r, \ldots$ ces quantités. Si le déterminant

$$\delta = \begin{vmatrix} g_{11} & \cdots & g_{r1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{1r} & \cdots & g_{rr} \end{vmatrix}$$

n'est pas nul, on pourra substituer, quelles que soient les valeurs que l'on calcule pour $g_{r+1}, g_{r+2}, \ldots, g_n$, le système u_{ij}, y_{ij} au système primitif, sans que le nouveau système *cesse d'être fondamental.*

Alors les relations (57) prendront la forme

$$(57\,a)\quad \begin{cases} U_{i1} = \omega_1 u_{i1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ U_{ir} = \omega_1 u_{ir}, \\ Y_{i,r+1} = l'_{r+1}\, u_{i1} + \ldots + l'_{r+1,r} u_{ir} + l'_{r+1,r+1} y_{i,r+1} + \ldots + l'_{r+1,n} y_{in}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Y_{in} = l'_{n1} u_{i1} + \ldots + l'_{nr} u_{ir} + l'_{n,r+1} y_{i,r+1} + \ldots + l'_{nn} y_{in}. \end{cases}$$

70. Nous montrerons tout d'abord qu'il existe une relation de la forme

$$U'_i = \omega_1 u'_1 + \varphi_i(u_{ij}),$$

où φ_i est une fonction linéaire homogène à coefficients constants des u_{ij}, et avec la condition

$$u'_i = g'_1\, u_{i1} + \ldots + g'_r u_{ir} + g'_{r+1} y_{i,r+1} + \ldots + g'_n y_{in},$$

qui entraîne

$$U'_i = g'_1\, U_{i1} + \ldots + g'_r U_{ir} + g'_{r+1}\, Y_{i,r+1} + \ldots + g'_n\, Y_{in}.$$

Il faudra que l'on ait

$$\begin{aligned} g'_1\, \omega_1 u_{i1} + \ldots + g'_r \omega_1 u_{ir} + g'_{r+1}(l'_{r+1,1}\, u_{i1} + \ldots + l'_{r+1,n} y_{in}) + \ldots \\ + g'_n(l'_{n,1}\, u_{i1} + \ldots + l'_{n\,n} y_{in}) \\ = \omega_1(g'_1\, u_{i1} + \ldots + g'_r u_{ir} + g'_{r+1} y_{i,r+1} + \ldots + g'_n y_{in}) + \lambda_1 u_{i1} + \ldots \lambda_r u_{ir}. \end{aligned}$$

On tire de là les équations de condition suivantes :

$$(58\,a)\quad \begin{cases} g'_{r+1}\, l'_{r+1,1} + \ldots + g'_n\, l'_{n1} = \lambda_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ g_{r+1}\, l'_{r+1,r} + \ldots + g'_n\, l'_{nr} = \lambda_r, \\ g'_{r+1}\,(l'_{r+1,r+1} - \omega) + \ldots + g'_n\, l'_{n,r+1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ g'_{r+1}\, l'_{r+1,n} + \ldots + g'_n\,(l'_{nn} - \omega) = 0. \end{cases}$$

Ces équations ne renfermant pas $g'_1, \ldots, g'_r$, on pourra prendre ces quantités égales à o et poser simplement

$$(59)\qquad u'_i = g'_{r+1} y_{i,r+1} + \ldots + g'_n y_{in}.$$

Mais alors les quantités $g'_{r+1}, \ldots, g'_n$, qui sont seules à déterminer, devront pouvoir se tirer des équations (58 a) auxquelles elles satisfont.

Effectivement, si l'on prend les $n - r$ dernières équations précédentes, le déterminant des coefficients l' correspondant est un mineur de l'ordre r du déterminant

$$R'(\omega) = \left|\begin{array}{cc|ccc} \omega_1 - \omega & \ldots\ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & . & \ldots & . \\ \ldots\ldots & \omega_1 - \omega & 0 & \ldots & 0 \\ \hline l'_{r+,1} & \ldots\ldots & l'_{r+1,r+1} - \omega & \ldots & l'_{r+1,n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ l'_{n,1} & \ldots\ldots & l'_{r+1,n} & \ldots & l'_{nn} - \omega \end{array}\right|$$

relatif au système de solutions (57 a) et qui a les mêmes diviseurs élémentaires que le déterminant $R(\omega)$. Si ce déterminant mineur est nul, les dernières équations (58 a) sont compatibles, et de ces équations on tirera les valeurs de $g'_{r+1}, \ldots, g'_n$ et, si l'on veut, ensuite on aura les valeurs des inconnues $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ par les premières équations (58 a).

71. Examinons le déterminant $R'(\omega)$. Il est égal à $(\omega_1 - \omega)^r \times R_1(\omega)$ en posant

$$R_1(\omega) = \begin{vmatrix} l'_{r+1,r+1} - \omega & \ldots & l'_{r+1,n} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ l'_{n,r+1} & \ldots & l'_{nn} - \omega \end{vmatrix}.$$

Or $R'(\omega)$, ayant les mêmes diviseurs élémentaires que $R(\omega)$, est divisible par $(\omega_1 - \omega)^{h_0}$, donc $R_1(\omega)$ est divisible par $(\omega_1 - \omega)^{h_0 - r}$. Les mineurs du premier ordre de $R'(\omega)$ seront divisibles par $(\omega_1 - \omega)^{h_1}$. En particulier, chaque mineur, égal à $(\omega_1 - \omega)^r M_1 R_1(\omega)$, où M_1 est la caractéristique d'un mineur du premier ordre, est divisible par $(\omega_1 - \omega)^{h_1}$ et, par suite, chaque mineur $M_1 R_1(\omega)$ est divisible par $(\omega_1 - \omega)^{h_1 - r}$.

De même chaque mineur du deuxième ordre de $R_1(\omega)$, représenté par $M_2 R_1(\omega)$, est divisible par $(\omega_1 - \omega)^{h_2 - r}$, etc. Enfin, chaque mineur de l'ordre $r-1$ de $R_1(\omega)$ sera divisible par $(\omega_1 - \omega)^{h_{r-1} - r}$. On pourra le représenter par $M_{r-1} R_1(\omega)$.

Discutons ces résultats. Il faut d'abord écarter les puissances $(\omega_1 - \omega)^{h-r}$ dont les exposants ne seraient pas positifs. Comme les nombres $h_0, h_1, \ldots, h_{r-1}$ vont en décroissant, on voit que le nombre r séparera cette suite de nombres en deux autres, l'une $h_0, h_1, \ldots, h_{s-1}$ de nombres plus grands que r et l'autre $h_s, \ldots, h_{r-1}$ de nombres plus petits que r. Les premiers seront seuls à considérer.

En conséquence, nous dirons que le déterminant $R_1(\omega)$ et ses mineurs d'ordres successifs admettent jusqu'à l'ordre s exclusivement les diviseurs respectifs

$$(\omega_1 - \omega)^{h_0 - r}, \quad \ldots, \quad (\omega_1 - \omega)^{h_{s-1} - r}.$$

Deux cas pourront se présenter. On pourra avoir $h_0 = r$; alors les solutions $u_{i1}, \ldots, u_{ir}$ seront toutes les solutions distinctes correspondant à la racine ω_1. Dans le cas de $h_0 = r$, on sait que le diviseur $(\omega_1 - \omega)^r$ fournit r diviseurs élémentaires simples. Nous nous trouvons d'accord avec la théorie des paragraphes précédents.

On peut avoir $h_0 > r$, alors ω_1 est racine de $R_1(\omega) = 0$, et le calcul préparé plus haut montre que l'on peut former s *solutions indépendantes,* telles que l'on ait

$$U'_i = \omega_1 u'_i + \varphi_i(u_{ij}), \tag{60}$$

où φ est la caractéristique d'une fonction linéaire et homogène à coefficients constants.

La fonction φ_i satisfait, comme les éléments u_{ij} eux-mêmes, à la relation

$$\Phi_i = \omega_1 \varphi_i.$$

Soient $u'_{ij'}$ $(j' = 1, 2, \ldots, s)$ les nouvelles solutions. Toutes celles qui satisfont aux mêmes relations (60), pouvant être obtenues par le même procédé, ne pourront être que des groupes de fonctions linéaires et homogènes des u et des u'.

Il ne peut y avoir entre $\varphi_{i1}, \ldots, \varphi_{is}$ aucune relation linéaire et homogène à coefficients constants, sans quoi l'on pourrait former une fonction linéaire et homogène avec $u'_{i1}, \ldots, u'_{is}$ satisfaisant à la relation

$$U'_i = \omega_1 u'_i.$$

Cette solution serait bien distincte des u_{ik}, puisque les u' ne dépendent que des y.

Il y aurait donc plus de r solutions satisfaisant à la relation

$$U = \omega_1 u,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

Maintenant, puisque $\varphi_{i1}, \ldots, \varphi_{is}$ sont des fonctions indépendantes, elles peuvent remplacer s des solutions $u_{i1}, \ldots, u_{ir}$ et porter les mêmes noms, de sorte que l'on peut écrire, sans nuire à la généralité, les relations

$$(61)\quad \left\{\begin{aligned} &U_{ij} = \omega_1 u_{ij} && (j = 1, 2, \ldots, r),\\ &U'_{ij'} = \omega_1 u'_{ij'} + u_{ij'} && (j' = 1, 2, \ldots, s),\\ &Y_{ij''} = l''_{j''1} u_{i1} + \ldots + l''_{j''r} u_{ir} + l''_{j'',r+1} u'_{i1} + \ldots + l''_{j'',r+s} u'_{is} &&\\ &\qquad + l''_{j'',r+s+1} y_{i,r+s+1} + \ldots + l''_{j''n} y_{in} && (j'' = r + s + 1, \ldots, n),\end{aligned}\right.$$

où entrent les anciennes et les nouvelles valeurs d'un système fondamental choisi de solutions des équations (A).

72. Nous pouvons, avec un changement d'indices, écrire les équations précédentes sous la forme

$$(62)\quad \left\{\begin{aligned} &U_{ij} = \omega_1 u_{ij} && (j = 1, 2, \ldots, r - s),\\ &U_{i,j_1+1} = \omega_1 u_{i,j_1+1} && (j_1 = r - s),\\ &U'_{i,j_1+1} = \omega_1 u'_{i,j_1+1} + u_{i,j_1+1}, &&\\ &U_{i,j_1+2} = \omega_1 u_{i,j_1+2}, &&\\ &U'_{i,j_1+2} = \omega_1 u'_{i,j_1+2} + u_{i,j_1+2}, &&\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, &&\\ &U_{ir} = \omega_1 u_{ir}, &&\\ &U'_{ir} = \omega_1 u'_{ir} + u_{ir}. &&\end{aligned}\right.$$

Les autres équations (61) en Y conservent les mêmes notations et le même ordre.

L'équation fondamentale, tirée des équations (62), prend la forme

$$R''(\omega) = \begin{vmatrix} \begin{matrix}\omega_1-\omega & & \\ & \ddots & \\ & & \omega_1-\omega\end{matrix} & & & & \\ & \begin{matrix}\omega_1-\omega & \\ 1 & \omega_1-\omega\end{matrix} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \begin{matrix}\omega_1-\omega & \\ 1 & \omega_1-\omega\end{matrix} & \\ & & & & R_2(\omega)\end{vmatrix} = 0,$$

en posant

$$R_2(\omega) = \begin{vmatrix} l''_{j_2 j_2}-\omega & \dots & l''_{j_2 n} \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ l''_{n j_2} & \dots & l''_{nn}-\omega \end{vmatrix}$$

et $j_2 = r + s + 1$. En outre, on emploie une forme aussi abrégée que possible pour la représentation de $R''(\omega)$.

$R''(\omega)$ a les mêmes diviseurs élémentaires que $R(\omega)$. De plus, un déterminant $R'_1(\omega)$, tiré de $R''(\omega)$ comme $R_1(\omega)$ est tiré de $R'(\omega)$, aurait le même diviseur commun à tous ses mineurs de chaque ordre que $R_1(\omega)$.

Un déterminant tel que

$$\begin{vmatrix} \omega_1-\omega & 0 \\ 1 & \omega_1-\omega \end{vmatrix}$$

admet un diviseur simple $(\omega_1-\omega)^2$.

Développons par la règle de Laplace un déterminant quelconque de la forme

$$\begin{vmatrix} \omega_1-\omega & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \omega_1-\omega & \dots & \dots & 0 \\ a & b & c & \dots & l \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots & . \\ a' & b' & c' & \dots & l' \end{vmatrix},$$

en nous servant des deux premières lignes; nous voyons qu'il sera égal à

$$\begin{vmatrix} \omega_1-\omega & 0 \\ 1 & \omega_1-\omega \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} c & \dots & l \\ \dots & \dots & \dots \\ c' & \dots & l' \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire qu'il sera divisible par $(\omega_1-\omega)^2$.

Il résulte de là que les mineurs de $R''(\omega)$, formés en employant les $r+s$ premières lignes, seront divisibles par $(\omega_1 - \omega)^{r+s}$ et, par suite, un mineur quelconque d'ordre ϖ de $R_2(\omega)$ sera divisible par $h_\varpi - (r+s)$.

Comme précédemment, il faudra chercher un nombre t tel que tous les nombres $h_0, h_1, \ldots, h_{t-1}$ soient plus grands que $r+s$ et les autres nombres $h_t, \ldots, h_{r-1}$ plus petits.

Si l'on a

$$h_0 = r+s,$$

alors les solutions $u_{i1}, \ldots, u'_{ir}$ (*voir* les équations 62) sont toutes les solutions distinctes correspondantes à la racine ω_1.

Mais si l'on a

$$h_0 > r+s,$$

alors ω_1 est une racine de $R_2(\omega) = 0$, et nous pouvons continuer le calcul de la manière suivante.

Posons

$$(63) \qquad \left\{ \begin{array}{l} g''_{j_2} l''_{j_2 j_2} + \ldots + g''_n l''_{n j_2} = \omega_1 g''_{j_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ g''_{j_2} l''_{j_2 n} + \ldots + g''_n l''_{nn} = \omega_1 g''_n. \end{array} \right.$$

De ces équations (63) nous pourrons tirer t systèmes de valeurs distinctes pour $g''_{j_2}, \ldots, g''_n$ et former t solutions

$$w_i = g''_{j_2} y_{i,j_2} + \ldots + g''_n y_{in} \qquad (i = 1, 2, \ldots, t),$$

linéairement indépendantes entre elles, et linéairement distinctes des fonctions déjà formées, puisqu'elles dépendent des y. Or, si l'on multiplie les dernières équations (62) par $g''_{j_2}, \ldots, g''_n$ et si l'on ajoute, on voit que la solution w_i satisfait aux relations

$$(64) \qquad W_i = \omega_1 w_i + \psi_i(u_{i1}, \ldots, u'_{ir}),$$

en représentant par ψ_i une fonction linéaire et homogène à coefficients con stants.

Les t solutions w_i permettent de former toute autre solution satisfaisant aux relations (64), car on a suivi une marche de calcul qui doit toutes les fournir. Entre les fonctions $\psi_{i1}, \ldots, \psi_{it}$ il ne peut y avoir aucune relation de la forme

$$\alpha\psi_{i1} + \ldots + \lambda\psi_{it} = f(u_{i1}, \ldots, u_{ir}),$$

où $\alpha, \ldots, \lambda$ sont des constantes et f une fonction linéaire et homogène à coefficients constants, car il existerait une fonction linéaire et homogène de $w_{i1}, \ldots,$

w_{it}, qui, n'étant pas une expression des solutions $u_{i1}, \ldots, u_{ir}$, jouirait des propriétés des éléments u', ce qui est impossible.

On remarquera aussi que t est au plus égal à s, car, s'il en était autrement, par l'élimination des u' on pourrait former une relation

$$\alpha\psi_{i1}+\ldots+\lambda\psi_{it}=f(u_{i1}, \ldots, u_{ir}).$$

On aurait pu voir aussi que s est au plus égal à r. Toutes ces remarques sont bien d'accord avec la théorie déjà connue.

73. La méthode suivie peut évidemment s'appliquer indéfiniment, et l'on retrouve sous une autre forme les propositions du n° 67.

74. Après avoir tiré tout ce qu'il est possible du diviseur $\omega_1-\omega$ de $R(\omega)$, on pourra former un système fondamental de solutions

$$\begin{array}{ll} u_{ih} & (h=1, 2, \ldots, h_0), \\ y_{ik} & (k=h_0+1, \ldots, n), \end{array}$$

satisfaisant aux relations

$$U_{ih}=\omega_1 u_{ih}+\omega_{1h} u_{i,h-1}, \tag{64}$$

les quantités ω_{1h} étant égales à zéro ou à l'unité, à l'exception de ω_1, et aux relations

$$Y_{ij}=G_{j1}u_{i1}+\ldots+G_{jh_0}u_{i,h_0}+G_{jh_0+1}y_{i,h_0+1}+\ldots+G_{jn}y_{in}. \tag{65}$$

On pourra raisonner sur l'équation fondamentale

$$\overline{R}(\omega)=\left|\begin{array}{c|c|c|c}
\begin{matrix}\omega_1-\omega & & & \\ 1 & \omega_1-\omega & & \\ & & \ddots & \\ & & 1 & \omega_1-\omega\end{matrix} & & & \\ \hline
 & \begin{matrix}\omega_1-\omega & & & \\ 1 & \omega_1-\omega & & \\ & & \ddots & \\ & & 1 & \omega_1-\omega\end{matrix} & & \\ \hline
 & & \ddots & \\ \hline
 & & & \overline{R}'(\omega)
\end{array}\right|=0,$$

où l'on a

$$R'(\omega) = \begin{vmatrix} G_{h_0+1,h_0+1} - \omega & \dots & G_{n,h_0+1} \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots \\ G_{h_0+1,n} & \dots & G_{nn} - \omega \end{vmatrix},$$

comme on a raisonné sur $R(\omega)$.

En outre, si l'on forme le système d'équations

$$\begin{array}{llll}
(\omega_1 - \omega)\, m_1 & + G_{h_0+1,1} & m_{h_0+1} + \dots + G_{n1}\, m_n & = 0, \\
\omega_{12}\, m_1 + (\omega_1 - \omega)\, m_2 & + G_{h_0+1,2} & m_{h_0+1} + \dots + G_{n2}\, m_n & = 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & & , \\
 & (G_{h_0+1,h_0+1} - \omega) & m_{h_0+1} + \dots + G_{nh_0+1}\, m_n & = 0, \\
 & \dots\dots\dots\dots & & , \\
 & G_{h_0+1,n} & m_{h_0+1} + \dots + (G_{nn} - \omega)\, m_n & = 0, \\
 & \dots\dots\dots\dots & & ,
\end{array}$$

on pourra le résoudre en prenant pour ω une valeur ω_2 différente de ω_1 et annulant $R(\omega)$, puis en calculant les valeurs proportionnelles de $m_{h_{0+1}}, \dots, m_n$, et enfin en calculant successivement les autres inconnues m, dont chacune a pour coefficient $\omega_1 - \omega_2$ dans une des premières équations.

On en conclura, comme au n° 68, qu'on peut former un système fondamental de solutions

$$u_{ih} \qquad (h = 1, 2, \dots, h_0 + h'_0),$$
$$y_{ik} \qquad (k = h_0 + h'_0 + 1, \dots, n),$$

où les h'_0, h'_0 premières solutions sont particularisées.

En partant de ce système fondamental et par des raisonnements analogues aux précédents, on pourra former des systèmes fondamentaux de plus en plus particuliers, jusqu'à arriver à la réalisation complète du théorème énoncé au n° 67.

75. Nous devons maintenant traduire les théorèmes démontrés jusqu'ici en supposant le point initial situé à l'infini.

Reprenons les équations (A) et remplaçons-y la variable x par la variable $\frac{1}{x'}$, de sorte que, quand x devient infini, x' devient nul. Il suffira alors d'étudier les fonctions y dans le domaine de l'origine $x' = 0$.

On aura

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx'}\frac{dx'}{dx} = -\frac{dy}{dx'}x'^2 = -x'^2\frac{dy}{dx'},$$

et les équations (A) deviendront

$$(\text{A}') \qquad \frac{dy_i}{dx} = a_{i1}\, y_1 + \dots + a'_{in}\, y_n,$$

en appelant a' ce que devient une fonction a divisée par x'^2, changée de signe et exprimée au moyen de la variable x'.

Le système (A′) étant de la même forme que le système (A), on pourra lui appliquer tous les théorèmes démontrés précédemment. Le point $x' = 0$ pourra d'ailleurs être un point singulier ou non singulier des fonctions a'.

76. Si l'on considère l'équation différentielle linéaire et homogène d'ordre n, on sait qu'on peut en faire l'étude au moyen d'un système d'équations linéaires et homogènes équivalent.

On obtient alors les théorèmes suivants qu'il suffit d'énoncer.

I. *Si la variable indépendante revient à sa valeur initiale, les nouvelles valeurs* Y_i *des intégrales d'un système fondamental sont liées aux anciennes* y_i *par des relations linéaires et homogènes à coefficients constants de la forme*

$$(66) \qquad Y_i = c_{i1} y_1 + \ldots + c_{in} y_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad (\text{n}^\circ\ 61).$$

II. *Les relations précédentes se réduisent à*

$$Y_i = y_i,$$

si le chemin fermé décrit par la variable peut être déformé d'une manière continue sans rencontrer de points singuliers jusqu'à être réduit à un point; les fonctions y *sont uniformes dans la région où cette hypothèse est réalisée* (n° 62).

III. *Les équations* (66) *sont caractéristiques des intégrales d'une équation différentielle linéaire et homogène d'ordre* n.

C'est-à-dire que, si n fonctions $y_1, \ldots, y_n$ linéairement *indépendantes* prennent des valeurs nouvelles liées aux anciennes par des relations linéaires et homogènes à coefficients constants, telles que les relations (66), ces fonctions forment un système fondamental d'intégrales d'une équation linéaire et homogène *d'ordre* n, dont les coefficients sont uniformes, et n'ont pas d'autres points *singuliers* dans la région considérée que les points singuliers des fonctions y.

IV. *Les diviseurs élémentaires du déterminant*

$$R(\omega) = \begin{vmatrix} c_{11} - \omega & \ldots & c_{1n} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & \ldots & c_{nn} - \omega \end{vmatrix}$$

ne dépendent pas du choix du système fondamental d'intégrales qui sert à former ce déterminant.

On sait déjà que M. Fuchs a donné à l'équation $R(\omega) = 0$ le nom d'*équation fondamentale déterminante relativement au point* $x = 0$.

V. *Soient* $(\omega_1 - \omega)^{e_1}, \ldots, (\omega_\rho - \omega)^{e_\rho}$ *les diviseurs élémentaires du déterminant* $R(\omega)$, *on peut construire, en partant d'un système fondamental quelconque d'intégrales, un système fondamental dont les éléments se groupent d'après les relations*

$$\begin{aligned} Y_1 &= \omega_h y_1, \\ Y_2 &= \omega_h y_2 + y_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Y_{e_h} &= \omega_h y_{e_h} + y_{e_h-1}, \end{aligned}$$

$(\omega_h - \omega)^{e_h}$ *étant l'un quelconque des diviseurs élémentaires du déterminant fondamental* $R(\omega)$.

VI. Si le point initial est à l'infini, on remplacera x par $\frac{1}{x'}$ et, au lieu de l'équation différentielle

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n y = 0,$$

où la variable est x, on considérera une équation de même forme où la variable sera x'.

CHAPITRE IV.

DE LA FORME ANALYTIQUE DES ÉLÉMENTS DES SOLUTIONS.

77. On sait, depuis Euler, intégrer complètement les équations et les systèmes linéaires et homogènes à coefficients constants.

Considérons d'abord une équation linéaire, homogène et à coefficients constants de la forme

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n y = 0. \tag{67}$$

Cette équation peut être remplacée par le système équivalent

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dy_1}{dx} + p_1 y_1 + \ldots + p_n y_n = 0, \\ &\frac{dy_k}{dx} = y_{k-1}, \qquad (k = 2, 3, \ldots, n). \end{aligned}\right. \tag{68}$$

On intègre ce système en posant

$$y_k = c_k e^{rx},$$

et en déterminant les inconnues par les conditions

$$\left\{\begin{aligned} &c_1 r + p_1 c_1 + \ldots + p_n c_n = 0, \\ &c_k r = c_{k-1}. \end{aligned}\right. \tag{69}$$

Ces équations (69) entraînent la relation

$$\mathrm{F}(r) = \begin{vmatrix} r + p_1 & p_2 & p_3 & \ldots & p_n \\ -1 & r & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & r & \ldots & 0 \\ . & \ldots & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & r \end{vmatrix} = 0. \tag{70}$$

L'équation $\mathrm{F}(r) = 0$ est appelée l'*équation caractéristique*.

Si l'on élimine directement les inconnues C, on a

$$\begin{aligned} C_2 r &= C_1, \\ C_3 r^2 &= C_2 r = C_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ C_n r^{n-1} &= C_1, \end{aligned}$$

et, par suite de la première équation (69),

$$F(r) = r^n + p_1 r^{n-1} + \ldots + p_n = 0.$$

Les diviseurs élémentaires du déterminant $F(r)$ se confondant dans le cas des équations d'ordre n avec les diviseurs linéaires du polynome $F(r)$ (1), *il suffit de résoudre l'équation algébrique* $F(r) = 0$ *de degré* n *pour connaître les diviseurs élémentaires du déterminant* $F(r)$.

Soit $(r - r_1)^{e_1}$ un diviseur élémentaire ou linéaire quelconque du déterminant $F(r)$. Ce déterminant $F(r)$ et ses dérivées successives admettront $(r - r_1)$ comme diviseur jusqu'aux dérivées de l'ordre e_1 exclusivement. En conséquence, si l'on pose

$$\varphi(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n y,$$

et si l'on considère l'équation

$$\varphi(C e^{rx}) = C e^{rx} F(r),$$

on voit que l'on aura successivement

$$\begin{aligned} \varphi(C e^{r_1 x}) &= 0, \\ \varphi\left[\frac{\partial}{\partial r_1}(C e^{r_1 x})\right] &= 0, \\ \varphi\left[\frac{\partial^2}{\partial r_1^2}(C e^{r_1 x})\right] &= 0, \\ \varphi\left[\frac{\partial^{e_1 - 1}}{\partial r^{e_1 - 1}}(C e^{r_1 x})\right] &= 0. \end{aligned}$$

On en conclut que chaque diviseur élémentaire $(r - r_1)^{e_1}$ fournit e_1 solutions, et, par suite, qu'on peut former n solutions des équations (68), ou encore n intégrales de l'équation (67).

Ces intégrales sont linéairement indépendantes. Car supposons que l'on ait identiquement

$$a_1 e^{r_1 x} + b_1 \frac{\partial}{\partial r_1}(e^{r_1 x}) + \ldots + l_1 \frac{\partial^{e_1 - 1}}{\partial r_1^{e_1 - 1}}(e^{r_1 x}) + a_2 e^{r_2 x} + \ldots = 0.$$

Remarquons que l'on a en général

$$\frac{\partial^k (e^{rx})}{\partial r^k} = x^k e^{rx}.$$

---

(1) *Voir* Chapitre I, n° 22.

L'identité précédente reviendrait donc à la suivante

$$e^{r_1 x}(a_1 + b_1 x + \ldots + l_1 x^{e_1-1}) + e^{r_2 x}(a_2 + \ldots) + \ldots = 0,$$

ou encore à l'équation

$$-(a_1 + b_1 x + \ldots + l_1 x^{e_1-1}) = e^{(r_2-r_1)x}(a_2 + \ldots) + \ldots.$$

Or le premier membre de cette équation s'annulerait pour un nombre fini de valeurs, le second aurait au contraire une infinité de racines, puisque les exponentielles ne peuvent disparaître identiquement. L'identité est impossible.

78. Considérons au même point de vue les équations

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy_i}{dx} = a_{i1}\, y_1 + \ldots + a_{in}\, y_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où l'on suppose constants les coefficients a. On trouve des solutions de ce système en posant

$$(71) \qquad y_i = C_i e^{rx},$$

et en déterminant les inconnues r et C_i par les équations

$$(72) \qquad F(r) = \begin{vmatrix} a_{11} - r & \ldots & a_{1n} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} - r \end{vmatrix} = 0$$

et

$$(73) \qquad \left\{ \begin{array}{l} (a_{11} - r) C_1 + \ldots + \quad a_{1n} C_n \quad = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \quad a_{n1} C_1 \quad + \ldots + (a_{nn} - r) C_n = 0. \end{array} \right.$$

L'équation $F(r) = 0$ est dite encore l'*équation caractéristique*.

La résolution de l'équation algébrique $F(r) = 0$ de degré n ne fournit pas, comme dans le cas précédent, les diviseurs élémentaires du déterminant $F(r)$. Il y a lieu de les chercher, et ils peuvent être distincts des diviseurs linéaires.

Sans entrer dans le détail du calcul qui résultera de paragraphes plus éloignés, on peut remarquer que toutes les solutions auront la forme de polynomes en $e^{r_1 x}, \ldots, e^{r_\rho x}$, dont les coefficients sont eux-mêmes des polynomes en x, et, par suite, le point ∞ est pour les éléments des solutions un point singulier de même nature que pour les fonctions e^{rx}. C'est-à-dire que, dans le domaine du point ∞, les solutions seront composées d'éléments uniformes, et continus en tous les points, sauf au point $x = \infty$, où chaque élément de solution sera de la nature de e^{rx}