ÉTUDE

SUR

LES MOUVEMENTS RELATIFS,

PAR M. A. LEGOUX,

Professeur de Mécanique à la Faculté des Sciences de Toulouse.

De nombreux Mémoires ont été publiés sur les mouvements relatifs, nous citerons les plus importants à la suite de ce travail. Nous allons essayer de montrer que l'on peut, sans aucun artifice de calcul, et grâce à une interprétation convenable des divers termes qui composent la force vive totale du système en mouvement, appliquer sans difficulté les formules de Lagrange et de Jacobi à la solution des problèmes les plus délicats et les plus compliqués du mouvement relatif des systèmes matériels.

Supposons qu'on ait un système de points matériels soumis à des forces données et à des liaisons données en mouvement dans un système A que nous appellerons le *système de comparaison,* ce système étant animé lui-même d'un mouvement déterminé relativement à un système fixe B. Le système A sera, pour fixer les idées, un trièdre $o_1\,xyz$ mobile, le système B sera représenté par un trièdre fixe OXYZ.

Quelle que soit la nature du mouvement d'entraînement du trièdre mobile, on pourra toujours lui substituer une translation dont la vitesse sera égale à la vitesse de l'origine o_1 et une rotation ω autour d'un axe passant par o_1. De sorte que, si l'on appelle x, y, z les coordonnées d'un point M de masse m; p, q, r les composantes de la rotation instantanée ω du système de comparaison, ξ, η, ζ les composantes de la vitesse de o_1; toutes ces quantités étant rapportées aux axes mobiles, on aura pour exprimer les composantes v_x, v_y, v_z de la vitesse absolue du point M suivant les axes mobiles,

$$v_x = \xi + qz - ry + x',$$
$$v_y = \eta + rx - pz + y',$$
$$v_z = \zeta + py - qx + z',$$

x', y', z' désignant les dérivées de x, y, z par rapport au temps.

Si l'on représente par $2T$ la force vive totale du système, on aura

$$
\begin{aligned}
(\alpha)\quad 2T &= \Sigma m[(\xi + qz - ry + x')^2 + (\eta + rx - pz + y')^2 + (\zeta + py - qx + z')] \\
&= \Sigma m(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + \Sigma m[(qz - ry)^2 + (rx - pz)^2 + (py - qx)^2] \\
&\qquad + \Sigma m(x'^2 + y'^2 + z'^2) \\
&\quad + 2\Sigma m[\xi(qz - ry) + \eta(rx - pz) + \zeta(py - qx)] \\
&\quad + 2\Sigma m[\xi x' + \eta y' + \zeta z'] \\
&\quad + 2\Sigma m[x'(qz - ry) + y'(rx - pz) + z'(py - qx)].
\end{aligned}
$$

Les trois premiers termes du second membre ont une signification géométrique précise, ils représentent :

1° La force vive Mv_1^2 de l'origine o_1 en y supposant concentrées toutes les masses des points matériels;

2° La force vive due à la rotation instantanée autour de o_1 du système de comparaison;

3° La force vive totale du système dans le mouvement relatif.

Les doubles produits représentent des expressions dont il est aisé d'avoir une représentation géométrique. Appelons v_1 la vitesse de o_1, v' la vitesse du point M dans le mouvement relatif, v_2 la vitesse du point du système de comparaison où se trouve, à l'époque t, le point M de masse m, en vertu de la rotation instantanée; les trois derniers termes pourront se mettre sous la forme

$$2\Sigma m v_1 v_2 \cos(v_1 v_2),$$
$$2\Sigma m v_1 v' \cos(v_1 v'),$$
$$2\Sigma m v' v_2 \cos(v' v_2).$$

Ce sont des termes analogues à ceux que l'on trouve en appliquant la méthode de Coriolis.

Dans le cas où la rotation instantanée du système de comparaison conserve, pendant toute la durée du mouvement, une valeur constante en grandeur et en direction, comme il arrive dans le mouvement d'un système à la surface de la terre en tenant compte du mouvement de rotation du globe autour de la ligne des pôles, les quantités p, q, r sont des constantes ainsi que ξ, η, ζ, et l'on peut écrire l'expression de la force vive sous la forme suivante :

$$(\alpha)\quad \begin{aligned} 2\mathrm{T} = {} & \mathrm{M} v_1^2 + \mathrm{H}'\omega^2 + \Sigma m(x'^2 + y'^2 + z'^2) \\ & + 2\mathrm{M}(r\eta - q\zeta)x_1 + 2\mathrm{M}(p\zeta - r\xi)y_1 + 2\mathrm{M}(q\xi - p\eta)z_1 \\ & + 2\mathrm{M}\xi x'_1 + 2\mathrm{M}\eta y'_1 + 2\mathrm{M}\zeta z'_1 \\ & + 2p\Sigma m(yz' - zy') + 2q\Sigma m(zx' - xz') + 2r\Sigma m(xy' - yx'). \end{aligned}$$

H′ représente le moment d'inertie du système matériel relativement à l'axe instantané, x_1, y_1, z_1 les coordonnées du centre de gravité, M la masse totale.

Grâce à cette interprétation géométrique, on voit qu'il n'est pas nécessaire de spécifier le système de coordonnées auquel on rapporte les points du système. On exprimera 2T au moyen des paramètres q_i réduits au nombre minimum et de leurs dérivées q'_i; on cherchera, au moyen des mêmes variables, le travail virtuel des forces extérieures et on appliquera les formules de Lagrange.

Si l'on a eu soin de choisir pour les variables q_i les paramètres qui définissent la position des points du système relativement au système de comparaison A, *les équations trouvées seront celles du mouvement relatif.*

Remarquons immédiatement que l'expression de 2T sera du second degré, mais non homogène relativement aux variables q'.

Application. — *Mouvement relatif d'un point matériel assujetti à se mouvoir sur une courbe ou sur une surface qui tourne autour d'un axe fixe.*

Prenons l'axe de rotation pour axe des Z et pour système de comparaison un trièdre $Oxyz$ dont l'axe Oz coïncide avec l'axe de rotation. Prenons deux axes fixes OX, OY, perpendiculaires à OZ, et deux axes Ox, Oy qui tourneront autour de O dans le plan XOY avec une vitesse angulaire ω.

On déduit des formules générales et l'on trouverait aisément par voie directe dans ce cas particulier, en supposant la masse égale à l'unité,

$$2\mathrm{T} = (x' - \omega y)^2 + (y' + \omega x)^2 + z'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 + 2\omega(xy' - yx') + \omega^2(x^2 + y^2).$$

Cas d'une surface. — On peut exprimer les coordonnées d'un point de la surface en fonction de deux paramètres u, v,

$$x = f_1(u, v),$$
$$y = f_2(u, v),$$
$$z = f_3(u, v).$$

En substituant à x, y, z ces valeurs et celles de leurs dérivées, on aura

$$2T = A u'^2 + B v'^2 + C u' v' + D u' + E v' + F,$$

A, B, C, ... étant des fonctions de u, v. On exprimera le travail virtuel au moyen des paramètres u et v; il sera de la forme

$$M \delta u + N \delta v,$$

et on écrira les deux équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial u'}\right) - \frac{\partial T}{\partial u} = M,$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial v'}\right) - \frac{\partial T}{\partial v} = N,$$

qui permettront d'étudier le mouvement relatif du point sur la surface.

Cas d'une courbe. — Comme dans le cas d'une surface, on prendra pour système de comparaison un trièdre $Oxyz$ mobile autour de l'axe de rotation Oz.

Soient

$$x = \varphi(u),$$
$$y = \psi(u),$$
$$z = \chi(u)$$

l'expression des coordonnées du point matériel en fonction d'un paramètre u, on exprimera T en fonction de u et de u', on cherchera aussi la valeur du travail virtuel $A\,\delta u$, et l'équation

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial u'}\right) - \frac{\partial T}{\partial u} = A$$

déterminera u en fonction du temps.

L'étude du mouvement relatif d'un point matériel se fait très aisément au moyen du théorème de Coriolis. Aussi réserverons-nous l'application de la méthode générale à l'étude du mouvement relatif des systèmes de points matériels et, en particulier, des systèmes solides.

Il est intéressant de rechercher si l'on peut, dans l'étude des mouvements relatifs, mettre les équations sous la forme hamiltonienne ou canonique. Bour a résolu la question dans son célèbre Mémoire de 1863 (*Journal de Mathématiques de Liouville*). Mais la marche qu'il a suivie nous paraît compliquée, difficile à exposer. Il nous semble que cette transformation peut être effectuée d'une manière très rapide et très simple, sans faire intervenir aucune formule de changement de coordonnées, en s'appuyant sur une remarque très ingénieuse due à M. Bertrand (Notes faisant suite à la *Mécanique analytique* de Lagrange).

Dans le cas où les liaisons sont indépendantes du temps, M. Bertrand fait remarquer que l'on a, en vertu du théorème d'Euler sur les fonctions homogènes,

$$2\mathrm{T} = \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_1} q'_1 + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_2} q'_2 + \ldots + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_k} q'_k,$$

d'où

$$\mathrm{T} = \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_1} q'_1 + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_2} q'_2 + \ldots + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_k} q'_k - \mathrm{T},$$

ou, en posant avec Poisson,

$$p_1 = \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_1}, \qquad p_2 = \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_2}, \qquad \ldots, \qquad p_k = \frac{\partial \mathrm{T}'}{\partial q'_k},$$

$$\mathrm{T} = p_1 q'_1 + p_2 q'_2 + \ldots + p_k q'_k - \mathrm{T}.$$

C'est en prenant la variation totale de cette expression de T considérée comme fonction des variables q, q', p que M. Bertrand a déduit des formules de Lagrange les équations canoniques d'Hamilton.

En nous plaçant dans le cas des mouvements relatifs et, en général, dans le cas où T n'est pas une fonction homogène des variables q', on peut, par une transformation analogue, arriver à la forme canonique.

On considère la fonction K définie comme il suit

$$\mathrm{K} = \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_1} q'_1 + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_2} q'_2 + \ldots + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_k} q'_k - \mathrm{T}.$$

C'est cette fonction K qui jouera dans la transformation le même rôle que la fonction T, dans le cas où T est une fonction quadratique et homogène des q'.

Introduisons les variables p de Poisson, on a

$$K = p_1 q'_1 + p_2 q'_2 + \ldots + p_k q'_k - T. \tag{1}$$

Posons

$$T = T_0 + T_1 + T_2,$$

T_0 représentant les termes indépendants des q';
T_1 » les termes du premier degré en q';
T_2 » les termes du second degré.

On aura

$$\begin{aligned}
K = & \quad q'_1\left(\frac{\partial T_0}{\partial q'_1} + \frac{\partial T_1}{\partial q'_1} + \frac{\partial T_2}{\partial q'_1}\right) + \ldots + q'_k\left(\frac{\partial T_0}{\partial q'_k} + \frac{\partial T_1}{\partial q'_k} + \frac{\partial T_2}{\partial q'_k}\right) - T \\
= & \quad q'_1 \frac{\partial T_0}{\partial q'_1} + \ldots + q'_k \frac{\partial T_0}{\partial q'_k} \\
& + q'_1 \frac{\partial T_1}{\partial q'_1} + \ldots + q'_k \frac{\partial T_1}{\partial q'_k} \\
& + q'_1 \frac{\partial T_2}{\partial q'_1} + \ldots + q'_k \frac{\partial T_2}{\partial q'_k} - T.
\end{aligned}$$

Appliquons le théorème d'Euler sur les fonctions homogènes et remarquons que, T_0 étant indépendant de q', la première ligne du second membre est nulle, que la seconde est égale à T_1, la troisième à $2T_2$, il vient

$$K = T_1 + 2T_2 - T = T_2 - T_0. \tag{2}$$

Reprenons l'égalité (1) dans laquelle

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial q'_1}, \qquad p_2 = \frac{\partial T}{\partial q'_2}, \qquad \ldots, \tag{3}$$

et différentions-la en faisant varier toutes les variables à la fois, on aura

$$\begin{aligned}
\delta K = & \quad p_1\,\delta q'_1 + p_2\,\delta q'_2 + \ldots + p_k\,\delta q'_k - \frac{\partial T}{\partial q'_1}\,\delta q'_1 - \ldots - \frac{\partial T}{\partial q'_k}\,\delta q'_k \\
& + q'_1\,\delta p_1 + q'_2\,\delta p_2 + \ldots + q'_k\,\delta p_k - \frac{\partial T}{\partial q_1}\,\delta q_1 - \ldots - \frac{\partial T}{\partial q_k}\,\delta q_k.
\end{aligned}$$

En supprimant la première ligne du second membre où tous les termes se détruisent, il vient

$$\delta K = q'_1\,\delta p_1 + q'_2\,\delta p_2 + \ldots + q'\ \delta p_k - \frac{\partial T}{\partial q_1}\,\delta q_1 - \ldots - \frac{\partial T}{\partial q_k}\,\delta q_k,$$

et l'on tire de là les équations suivantes

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial K}{\partial p_1} = q'_1 = \frac{dq_1}{dt}, \quad &&\frac{\partial K}{\partial p_2} = \frac{dq_2}{dt}, \quad &&\ldots, \quad &&\frac{\partial K}{\partial p_k} = \frac{dq_k}{dt}, \\ &\frac{\partial K}{\partial q_1} = -\frac{\partial T}{\partial q_1}, \quad &&\frac{\partial K}{\partial q_2} = -\frac{\partial T}{\partial q_2}, \quad &&\ldots, \quad &&\frac{\partial K}{\partial q_k} = -\frac{\partial T}{\partial q_k}. \end{aligned}\right.$$

On voit par là que dans les équations de Lagrange, lorsque l'on introduit les k variables nouvelles p_m et les k équations nouvelles (3) qui les définissent, il faudra remplacer $\frac{\partial T}{\partial q_m}$ par $-\frac{\partial K}{\partial q_m}$; c'est donc la fonction $K = T_2 - T_0$ qui remplacera la fonction T.

Ceci posé, les équations bien connues de Lagrange prennent la forme

$$\frac{dp_1}{dt} + \frac{\partial K}{\partial q_1} = Q_1, \quad \ldots, \quad \frac{dp_k}{dt} + \frac{\partial K}{\partial q_k} = Q_k.$$

Supposons maintenant que les forces dérivent d'un potentiel U, on aura

$$Q_m = \frac{\partial U}{\partial q_m},$$

et les équations de Lagrange deviennent

$$(5)\quad \frac{dp_1}{dt} = \frac{\partial (U - K)}{\partial q_1}, \quad \ldots, \quad \frac{dp_k}{dt} = \frac{\partial (U - K)}{\partial q_k};$$

joignons-y les équations

$$(6)\quad \frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial K}{\partial p_1}, \quad \ldots, \quad \frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial K}{\partial p_k},$$

ou, en posant $U - K = H$ et remarquant que U ne contient pas les variables p,

$$(A)\quad \frac{dp_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_1}, \quad \ldots, \quad \frac{dp_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_k},$$

$$(B)\quad \frac{dq_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad \ldots, \quad \frac{dq_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial p_k}.$$

Les équations (A) et (B) ont absolument la même forme que dans le cas où T est une fonction homogène des variables q'; la seule différence consiste dans la forme de la fonction H qui, dans le cas actuel, est égale à $U - K$ ou à $U + T_0 - T_2$.

L'ensemble des théorèmes qui conduisent à l'intégration de ce système hamiltonien est connu.

On pourra appliquer la méthode d'intégration de Jacobi à l'étude des mouvements relatifs toutes les fois qu'il existe une fonction des forces U; on formera la fonction $H = U + T_0 - T_2$, on remplacera dans H les variables q' par les variables p tirées des équations (3); puis on mettra dans H au lieu de p les dérivées partielles d'une fonction V, $\frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial q_k}$; on cherchera une intégrale complète de cette équation aux dérivées partielles du premier ordre et l'on obtiendra toutes les intégrales du problème par de simples différentiations. (BERTRAND, Notes faisant suite à la *Mécanique analytique* de Lagrange. — LEGOUX, *Mémoires de l'Académie de Toulouse*, 1885.)

Lorsque la fonction H ne contient pas le temps explicitement, on aura l'intégrale des forces vives

$$H = h,$$

comme dans le mouvement absolu. C'est une conséquence de la forme hamiltonienne donnée aux équations du mouvement. On sait, en effet, que si $\varphi =$ const. représente une intégrale des équations coniques, on a

$$(H, \varphi) = 0;$$

on voit que cette équation se réduit à une identité si l'on pose $\varphi = H$.

Il est aisé du reste de chercher directement la variation totale de T et de voir dans quel cas on peut écrire l'intégrale des forces vives, sans se servir de la forme canonique. Soient

$$T = T_0 + T_1 + T_2,$$

comme plus haut,

$$T_2 = A_1 q_1'^2 + A_2 q_2'^2 + \ldots + A_k q_k'^2,$$
$$T_1 = B_1 q_1' + B_2 q_2' + \ldots + B_k q_k'.$$

Supposons que $A_1, A_2, \ldots$ soient indépendants de t, $B_1, B_2, \ldots$ et les coefficients des variables $q_1, q_2, \ldots$ dans T_0 pouvant dépendre de t.

On voit que T_0 n'entrera dans le premier membre des équations de Lagrange que par le terme $\frac{\partial T}{\partial q_m}$; T_1 y entrera par les deux expressions

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_1}{\partial q'_1} = \frac{\partial B_1}{\partial q_1}q'_1 + \frac{\partial B_1}{\partial q_2}q'_2 + \ldots + \frac{\partial B_1}{\partial q_k}q'_k + \left(\frac{\partial B_1}{\partial t}\right),$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial q_1} = \frac{\partial B_1}{\partial q_1}q'_1 + \frac{\partial B_2}{\partial q_1}q'_2 + \ldots + \frac{\partial B_k}{\partial q_1}q'_k;$$

ce qui donne, dans le premier membre de la première équation de Lagrange pour les termes provenant de T_1,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_1}{\partial q'_1} - \frac{\partial T_1}{\partial q_1} = q'_2\left(\frac{\partial B_1}{\partial q_2} - \frac{\partial B_2}{\partial q_1}\right) + q'_3\left(\frac{\partial B_1}{\partial q_3} - \frac{\partial B_3}{\partial q_1}\right) + \ldots$$
$$+ q'_k\left(\frac{\partial B_1}{\partial q_k} - \frac{\partial B_k}{\partial q_1}\right) + \left(\frac{\partial B_1}{\partial t}\right),$$

et la première équation de Lagrange devient

$$(\alpha)\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T_2}{\partial q'_1} - \frac{\partial T_2}{\partial q_1} + q'_2\left(\frac{\partial B_1}{\partial q_2} - \frac{\partial B_2}{\partial q_1}\right) + \ldots + q'_k\left(\frac{\partial B_1}{\partial q_k} - \frac{\partial B_k}{\partial q_1}\right) + \left(\frac{\partial B_1}{\partial t}\right) - \frac{\partial T_0}{\partial q_1} = Q_1;$$

la seconde devient

$$(\beta)\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T_2}{\partial q'_2} - \frac{\partial T_2}{\partial q_2} + q'_1\left(\frac{\partial B_2}{\partial q_1} - \frac{\partial B_1}{\partial q_2}\right) + \ldots + q'_k\left(\frac{\partial B_2}{\partial q_k} - \frac{\partial B_k}{\partial q_2}\right) + \left(\frac{\partial B_2}{\partial t}\right) - \frac{\partial T_0}{\partial q_2} = Q_2,$$

. . . .

Multiplions tous les termes de la première équation par

$$q'_1\,dt \quad \text{ou par} \quad dq_1;$$

tous les termes de la seconde par

$$q'_2\,dt \quad \text{ou par} \quad dq_2, \quad \ldots,$$

et ajoutons membre à membre, en observant que, T_2 étant une fonction quadratique et homogène des q', on a

$$\sum\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T_2}{\partial q'_m} - \frac{\partial T_2}{\partial q_m}\right)q'_m\,dt = dT_2;$$

il vient, en supprimant tous les termes qui se détruisent,

$$dT_2 + \left(\frac{\partial B_1}{\partial t}q'_1 + \frac{\partial B_2}{\partial t}q'_2 + \ldots + \frac{\partial B_k}{\partial t}q'_k\right)dt - dT_0 = Q_1\,dq_1 + Q_2\,dy_2 + \ldots + Q_k\,dq_k.$$

On voit que, si B_1, B_2, ... ne contiennent pas le temps explicitement, on aura l'équation des forces vives sous la forme

$$d(T_2 - T_0) = \Sigma Q_m dq_m,$$

et, s'il existe une fonction des forces U, on aura l'intégrale des forces vives

$$T_2 - T_0 = U - h,$$

qui n'est autre que

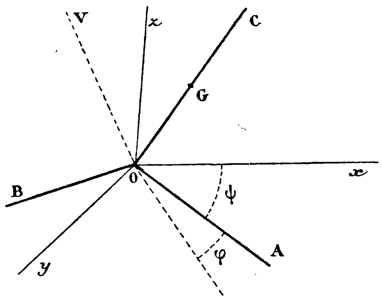
$$H = h.$$

On pourra écrire cette intégrale dans toutes les questions où l'axe instantané de la rotation du système de comparaison est constant en grandeur et en direction, et où l'origine mobile de ce système a une vitesse constante, comme il arrive dans l'étude des mouvements relatifs à la surface de la Terre.

Application à l'étude du mouvement d'un corps solide pesant de révolution fixé par un point de son axe en tenant compte du mouvement de rotation de la Terre autour de la ligne des pôles.

Nous prendrons pour axe des z la parallèle à la ligne des pôles menée

Fig. 1.



par le point fixe O, pour axe des y la tangente au parallèle dirigée vers l'est, pour axe des x le rayon du parallèle.

Les trois variables qui définissent la position du corps relativement au trièdre $Oxyz$ sont les trois angles d'Euler, savoir :

θ l'angle formé par l'axe du corps avec Oz;
ψ l'angle formé avec Ox par la trace du plan de l'équateur sur XOY ;
φ l'angle formé avec cette trace par un rayon de l'équateur fixe dans le corps.

On donne le poids du corps Mg et ses moments d'inertie principaux, C relativement à son axe, A relativement à un rayon quelconque de l'équateur.

Appliquons la formule (α) qui donne l'expression de $2T$. La force vive de l'origine, par rapport à un trièdre fixe mené par le centre de la Terre, est $M\omega^2 r^2 \cos^2\lambda$, r étant le rayon de la Terre et λ la latitude.

La force vive du mouvement d'entraînement dû à la rotation ω autour de Oz est égale à

$$\omega^2(A\sin^2\theta + C\cos^2\theta),$$

en remarquant que l'on a

$$p = 0, \qquad q = 0, \qquad r = \omega;$$

la force vive du mouvement relatif est égale à

$$C(\varphi' + \psi'\cos\theta)^2 + A(\theta'^2 + \psi'^2\sin^2\theta).$$

Si l'on désigne par a la distance du centre de gravité à l'origine, le quatrième et le cinquième terme de la formule (α) sont égaux à

$$\begin{aligned}
2\omega^2 r\cos\lambda\,\Sigma mx &= 2Ma\omega^2 r\cos\lambda\sin\theta\sin\psi,\\
2\omega\, r\cos\lambda\,\Sigma my' &= -2Ma\omega\, r\cos\lambda(\cos\theta\cos\psi\theta' - \sin\theta\sin\psi\psi');
\end{aligned}$$

le sixième terme devient

$$2\omega\Sigma m(xy' - yx') = 2\omega[C(\varphi' + \psi'\cos\theta)\cos\theta + A\psi'\sin^2\theta].$$

On voit que tout s'exprime aisément en fonction des seules variables, au nombre de trois, qui déterminent la position du corps relativement au système de comparaison.

On aura donc

$$\begin{aligned}
2T = M\omega^2 r^2\cos^2\lambda &+ \omega^2(A\sin^2\theta + C\cos^2\theta) + 2Ma\omega^2 r\cos\lambda\sin\theta\sin\psi\\
&- 2Ma\omega r\cos\lambda(\cos\theta\cos\psi\theta' - \sin\theta\sin\psi\psi')\\
&+ 2\omega[C(\varphi' + \psi'\cos\theta)\cos\theta + A\psi'\sin^2\theta]\\
&+ C(\varphi' + \psi'\cos\theta)^2 + A(\theta'^2 + \psi'^2\sin^2\theta).
\end{aligned}$$

Soit U la fonction des forces.

Les composantes de la force appliquée en G et parallèle à la verticale OV sont

$$
\begin{aligned}
X &= -\,Mg(-\cos\lambda),\\
Y &= 0,\\
Z &= -\,Mg\sin\lambda,\\
\delta U &= -\,Mg(-\cos\lambda\,\delta x_1 + \sin\lambda\,\delta z_1),\\
U &= -\,Mg(z_1\sin\lambda - x_1\cos\lambda)\\
&= -\,Mga(\cos\theta\sin\lambda - \sin\theta\sin\psi\cos\lambda).
\end{aligned}
$$

On a maintenant tous les éléments nécessaires pour écrire les équations du mouvement, soit sous la forme que leur a donnée Lagrange, soit sous la forme canonique, en formant la fonction

$$H = U + T_0 - T_2.$$

On remarquera que l'on peut négliger le terme constant $M\omega^2 r^2\cos^2\lambda$ dans l'expression de H, car H n'entre dans les équations du mouvement que par ses dérivées.

On peut résoudre la question d'une manière complète, c'est-à-dire ramener la solution à des quadratures aisées à exprimer au moyen des fonctions élémentaires, comme l'a remarqué Bour dans le Mémoire cité, dans le cas où le centre de gravité coïncide avec le point fixe. Il suffit de faire $a = 0$ dans les formules, et l'on a

$$2H = \omega^2(A\sin^2\theta + C\cos^2\theta) - C(\varphi' + \psi'\cos\theta)^2 - A(\theta'^2 + \psi'^2\sin^2\theta).$$

Introduisons les variables canoniques

$$\Phi = \frac{\partial T}{\partial\varphi'}, \qquad \Psi = \frac{\partial T}{\partial\psi'}, \qquad \Theta = \frac{\partial T}{\partial\theta'};$$

on a

$$
\begin{aligned}
\Theta &= A\theta',\\
\Psi &= C\cos\theta(\varphi' + \psi'\cos\theta) + A\psi'\sin^2\theta + \omega(C\cos^2\theta + A\sin^2\theta),\\
\Phi &= C(\varphi' + \psi'\cos\theta) + C\omega\cos\theta,
\end{aligned}
$$

d'où l'on tire

$$
\begin{aligned}
A\theta' &= \Theta,\\
A\psi'\sin^2\theta &= \Psi - \Phi\cos\theta - \omega A\sin^2\theta,\\
C(\varphi' + \psi'\cos\theta) &= \Phi - C\omega\cos\theta.
\end{aligned}
$$

Substituons dans H, on trouve

$$2H = \omega^2(A\sin^2\theta + C\cos^2\theta) - \frac{1}{C}(\Phi - C\omega\cos\theta)^2 - \frac{\Theta^2}{A}$$
$$- \frac{1}{A\sin^2\theta}[\Psi - \Phi\cos\theta - \omega A\sin^2\theta]^2,$$

et, en réduisant,

$$2H = -\frac{1}{A\sin^2\theta}(\Psi - \Phi\cos\theta)^2 - \frac{1}{C}\Phi^2 - \frac{1}{A}\Theta^2 + 2\omega\Psi,$$

les équations canoniques sont les suivantes

$$(A)\quad \begin{cases} \dfrac{d\Theta}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial\theta}, \\ \dfrac{d\Psi}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial\psi}, \\ \dfrac{d\Phi}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial\varphi}, \end{cases} \qquad (B)\quad \begin{cases} \dfrac{d\theta}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial\Theta}, \\ \dfrac{d\psi}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial\Psi}, \\ \dfrac{d\varphi}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial\Phi}. \end{cases}$$

H ne contient explicitement ni φ ni ψ : donc on a

$$\frac{\partial H}{\partial\varphi} = 0 = \frac{d\Phi}{dt},$$
$$\frac{\partial H}{\partial\psi} = 0 = \frac{d\Psi}{dt}.$$

Si l'on remarque, en outre, que $H = \text{const.}$ est une intégrale du système (A) (B), on a les trois intégrales suivantes du système canonique

$$\Phi = \alpha_2, \qquad \Psi = \alpha_1, \qquad H = h.$$

Ces trois équations permettent de déterminer θ, φ, ψ. Les deux premières sont linéaires en ψ', φ'; on en tire les valeurs de ψ' et φ', on les porte dans la troisième $H = h$, qui devient

$$\frac{d\theta}{dt} = f(\theta);$$

on est ramené ainsi aux quadratures.

On pourrait aussi écrire l'équation de Jacobi

$$\frac{1}{A\sin^2\theta}\left(\frac{\partial V}{\partial\psi}-\cos\theta\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right)^2+\frac{1}{C}\left(\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right)^2+\frac{1}{A}\left(\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)^2-2\omega\frac{\partial V}{\partial\psi}=h.$$

Comme φ et ψ n'entrent pas explicitement dans cette équation, on a une intégrale complète

$$\begin{aligned}V={}&\alpha_1\psi+\alpha_2\varphi\\&+\int\frac{d\theta}{\sin\theta}\sqrt{-(\alpha_1^2+\alpha_2^2)+2\alpha_1\alpha_2\cos\theta+\left[2A(\omega\alpha_1-h)-\left(\frac{A}{C}-1\right)\alpha_2^2\right]\sin^2\theta}.\end{aligned}$$

On aura les intégrales

$$\frac{\partial V}{\partial h}=t+\tau,\qquad \frac{\partial V}{\partial\alpha_1}=\beta_1,\qquad \frac{\partial V}{\partial\alpha_2}=\beta_2;$$

la première donnera t en fonction de θ par une quadrature. On trouvera la même expression que plus haut

$$t=\int\frac{d\theta}{f(\theta)}.$$

Mouvement d'un solide de révolution homogène suspendu par son centre de gravité et dont l'axe est assujetti à rester sur la surface d'un cône de révolution fixe à la surface du globe terrestre en tenant compte du mouvement de la Terre autour de son axe (Bour, *loc. cit.*).

Nous prendrons pour axe des z l'axe du cône de révolution, pour axe des x une perpendiculaire au précédent dans le plan qui contient oz et la parallèle à l'axe du monde qu'on supposera incliné d'un angle α sur oz. On prendra l'axe ox dirigé du côté du pôle nord.

En laissant de côté, dans l'expression de $2T$, la force vive de l'origine qui est constante, on voit que son expression sera

$$2T=H'\omega^2+2\omega\cos\alpha\Sigma m(xy'-yx')+2\omega\sin\alpha\Sigma m(yz'-zy')+\Sigma m(x'^2+y'^2+z'^2).$$

Les variables qui définiront la position du corps seront comme précédemment θ, φ, ψ; dans le cas actuel, θ aura une valeur constante.

Prenons pour axes principaux d'inertie du corps l'axe du solide de révolution, la trace du plan de l'équateur sur le plan xoy et une perpendiculaire à cette droite dans le plan de l'équateur; soient λ, μ, ν les angles formés avec l'axe de rotation de la Terre par les axes principaux d'inertie, on a

$$\cos\lambda = \sin\alpha\cos\psi,$$
$$\cos\mu = \cos\alpha\sin\theta - \sin\alpha\cos\theta\sin\psi,$$
$$\cos\nu = \cos\alpha\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta\sin\psi,$$

$$\begin{aligned} H' &= A\cos^2\lambda + A\cos^2\mu + C\cos^2\nu \\ &= A\sin^2\alpha\cos^2\psi + A(\cos\alpha\sin\theta - \sin\alpha\cos\theta\sin\psi)^2 \\ &\qquad + C(\cos\alpha\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta\sin\psi)^2 \\ &= A + (C - A)(\cos\alpha\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta\sin\psi)^2; \end{aligned}$$

on a aussi

$$\begin{aligned} \Sigma m(x'^2 + y'^2 + z'^2) &= A\sin^2\theta\psi'^2 + C(\varphi' + \psi'\cos\theta)^2, \\ \Sigma m(xy' - yx') &= C\cos\theta(\varphi' + \psi'\cos\theta) + A\psi'\sin^2\theta, \\ \Sigma m(yz' - zy') &= C\sin\theta\sin\psi(\varphi' + \psi'\cos\theta) - A\sin\theta\cos\theta\sin\psi\psi'. \end{aligned}$$

La fonction $H = T_0 - T_2$ devient alors, en multipliant par 2,

$$2H = \omega^2 A + \omega^2(C - A)(\cos\alpha\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta\sin\psi)^2 - A\sin^2\theta\psi'^2 - C(\varphi' + \psi'\cos\theta)^2.$$

On a d'ailleurs

$$\begin{aligned} 2T = \omega^2 A &+ \omega^2(C - A)(\cos\alpha\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta\sin\psi)^2 \\ &+ 2\omega\cos\alpha[C\cos\theta(\varphi' + \psi'\cos\theta) + A\psi'\sin^2\theta] \\ &+ 2\omega\sin\alpha[C\sin\theta\sin\psi(\varphi' + \psi'\cos\theta) - A\sin\theta\cos\theta\sin\psi\psi'] \\ &+ A\sin^2\theta\psi'^2 + C(\varphi' + \psi'\cos\theta)^2. \end{aligned}$$

Posons, comme dans l'exemple précédent,

$$\Psi = \frac{\partial T}{\partial \psi'}, \qquad \Phi = \frac{\partial T}{\partial \varphi'},$$

on trouve

$$\begin{aligned} \Psi &= A\psi'\sin^2\theta + C\cos\theta(\varphi' + \psi'\cos\theta) + \omega\cos\alpha(C\cos^2\theta + A\sin^2\theta) \\ &\qquad + (C - A)\omega\sin\alpha\sin\theta\cos\theta\sin\psi, \\ \Phi &= C(\varphi' + \psi'\cos\theta) + C\omega(\cos\alpha\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta\sin\psi), \end{aligned}$$

d'où

$$\varphi' + \psi'\cos\theta = \frac{\Phi}{C} - \omega\sin\alpha\sin\theta\sin\psi - \omega\cos\alpha\cos\theta,$$

$$A\psi'\sin^2\theta = \Psi - \Phi\cos\theta - A\omega\cos\alpha\sin^2\theta + A\omega\sin\alpha\sin\theta\cos\theta\sin\psi.$$

Portons ces valeurs dans H qui devient, toutes réductions faites,

$$2\mathrm{H} = -\frac{\Phi^2}{\mathrm{C}} - \frac{(\Psi - \Phi\cos\theta)^2}{\mathrm{A}\sin^2\theta} + 2\omega\frac{\Psi - \Phi\cos\theta}{\sin\theta}(\cos\alpha\sin\theta - \sin\alpha\cos\theta\sin\psi)$$
$$+ 2\omega\Phi(\cos\alpha\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta\sin\psi) + \omega^2\mathrm{A}\sin^2\alpha\cos^2\psi.$$

Si nous remarquons maintenant que H est indépendant de φ, l'équation canonique

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \varphi}$$

donne l'intégrale

$$\Phi = \mathrm{C}.$$

Joignant à cette équation l'intégrale

$$\mathrm{H} = h,$$

nous avons deux équations qui déterminent φ et ψ. Éliminons entre elles $\varphi' + \psi'\cos\theta$, on a immédiatement t en fonction de ψ par une quadrature.

Nous n'insisterons pas sur ces résultats. Les formules précédentes ont été discutées, d'une manière complète, dans le savant Mémoire de Bour. Le but que nous nous proposons est de montrer qu'on peut, sans autre artifice de calcul que celui qui consiste à remplacer la fonction T par la fonction K dans la formation de H, traiter, par les méthodes générales de Lagrange et de Jacobi, toutes les questions de mouvements relatifs.

Autre application. — *Un anneau* D *est mobile autour d'un axe horizontal* XX′ *passant par son centre de gravité. L'axe* XX′ *tourne lui-même avec une vitesse angulaire constante* ω *autour d'un axe vertical* OZ. *En un point* M *de la droite* AOA′ *perpendiculaire à* XX′ *est fixée une masse additionnelle m. Déterminer :* 1° *l'inclinaison de l'anneau pour laquelle il serait en équilibre relatif;* 2° *son mouvement relatif autour de* XX′ (Gilbert, *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1882.)

Nous prendrons pour système de comparaison le trièdre OXYZ formé de la verticale OZ, de l'axe horizontal OX et d'un axe OY perpendiculaire à OX dans le plan horizontal.

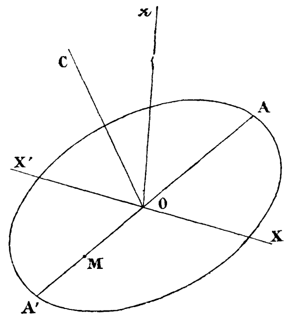
Une seule variable, l'angle θ, formé par l'anneau avec le plan XOY, définit la position du système mobile.

Soient :

a la distance OM;

A, B, C les moments d'inertie de l'anneau relativement à OX, AA' et à la perpendiculaire OC au plan de l'anneau.

Fig. 2.



Le travail virtuel de la pesanteur est $-my\delta z$, et, comme $z = -a\cos\theta$,

$$U = mga\cos\theta.$$

Si l'on se reporte à la formule (α) pour former l'expression de $2T$, on voit qu'il faut faire

$$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0,$$
$$p = 0, \quad q = 0, \quad r = \omega.$$

La force vive du mouvement relatif est $A\theta'^2$.

La force vive du mouvement d'entraînement du système mobile est $\omega^2 \Sigma m(x^2 + y^2)$.

Or, le moment d'inertie du système relativement à OZ est égal à

$$B\cos^2\theta + (C + ma^2)\sin^2\theta.$$

Parmi les doubles produits de la formule (α), il ne faut conserver que le dernier qui se réduit à

$$2\omega\,\Sigma m(xy' - yx').$$

$\Sigma m(xy' - yx')$ représente la somme des moments des quantités de mouvement, relativement à OZ, des points de l'anneau et de la masse additionnelle.

Or, cette quantité de mouvement se réduit à $(A + ma^2)\theta'$ et elle est dirigée suivant OX, donc sa projection sur OZ est nulle. On a

$$\begin{aligned} 2\mathrm{T} &= (\mathrm{A} + ma^2)\,\theta'^2 + \omega^2\,[\mathrm{B}\cos^2\theta + (\mathrm{C} + ma^2)\sin^2\theta] \\ &= \mathrm{A}'\theta'^2 + \omega^2\,(\mathrm{B}\cos^2\theta + \mathrm{C}'\sin^2\theta). \end{aligned}$$

L'intégrale des forces vives

$$\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_0 - \mathrm{U} = h$$

donne la valeur de θ en fonction de t par une quadrature

$$\mathrm{A}'\frac{d\theta^2}{dt^2} - \omega^2(\mathrm{B}\cos^2\theta + \mathrm{C}'\sin^2\theta) - mga\cos\theta = h.$$

M. Gilbert a remarqué que cette équation est de même forme que celle qu'on trouve en étudiant le mouvement du régulateur à force centrifuge de Watt. La discussion est aisée en se servant de l'équation différentielle précédente.

Gyroscope de Foucault.

Un disque E *est mobile autour d'un axe vertical* OZ *avec une vitesse angulaire constante* ω. *Un second disque* I *peut tourner autour d'un axe horizontal* XX' *formant un diamètre de* E. *Enfin, un tore* D, *dont le centre coïncide avec le centre de* O *de* E, *a son axe mobile autour d'un diamètre* $\zeta\zeta'$ *de* I *et placé perpendiculairement à* XX'. *On demande d'étudier le mouvement de l'ensemble* DI *relativement au cercle* E (Gilbert, *loc. cit.*).

Nous prendrons pour système de comparaison OXYZ, l'axe des Y étant perpendiculaire à OX dans le plan horizontal.

Nous prendrons pour variables :

θ l'inclinaison du cercle I sur le plan horizontal ou de $O\zeta$ sur la verticale;
φ l'angle que fait avec OX un rayon fixe pris dans le plan de l'équateur du tore.

Soient :

C, C_1, C_2 les moments d'inertie suivant l'axe des figures D, I, E;
A, A_1, A_2 les moments d'inertie suivant un rayon de l'équateur de ces mêmes figures.

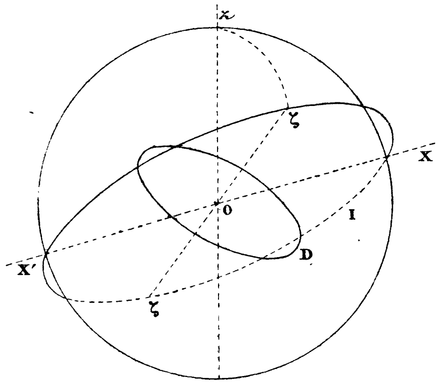
Nous supposons qu'il n'y a pas de forces extérieures et que les solides sont homogènes de révolution et parfaitement centrés.

Pour appliquer la formule (α) nous remarquons que

$$\xi = 0, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = 0,$$
$$p = 0, \qquad q = 0, \qquad r = \omega.$$

L'expression de $2T$ ne comprend donc que trois termes.

Fig. 3.



La force vive du mouvement relatif se compose de deux parties

$$A_1 \theta'^2 \quad \text{pour le disque I,}$$
$$A\theta'^2 + C\varphi'^2 \quad \text{pour le tore D.}$$

La force vive du mouvement d'entraînement du système de comparaison se réduit à

$$\omega^2 \Sigma m (x^2 + y^2).$$

Or, le moment d'inertie se compose de deux parties

$$A_1 \cos^2\theta + C_1 \sin^2\theta \quad \text{relative au disque I,}$$
$$A \sin^2\theta + C \cos^2\theta \quad \text{relative au tore.}$$

Il reste à évaluer

$$\Sigma m (xy' - yx'),$$

qui se compose de deux parties, l'une relative au disque I, l'autre au tore D.

L'axe du couple résultant des quantités de mouvement de I a pour projections sur les trois axes

$$A_1 \theta', \quad 0, \quad 0;$$

l'axe du couple résultant des quantités de mouvement de D a pour projections

$$A\theta', \quad 0, \quad C\varphi'.$$

La projection sur OZ se réduira à

$$C\varphi' \cos\theta.$$

On aura donc

$$2T = (A + A_1)\theta'^2 + C\varphi'^2 + 2\omega C\varphi' \cos\theta + \omega^2 [(A + C_1)\sin^2\theta + (A_1 + C)\cos^2\theta].$$

On peut écrire les deux équations de Lagrange qui permettent de ramener la solution aux quadratures. Plus simplement, il suffit de joindre à l'une des équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \varphi'} = 0$$

l'intégrale

$$H = h = T_2 - T_0.$$

On a, en développant $\varphi' + \omega\cos\theta = m$,

$$(A + A_1)\frac{d\theta^2}{dt^2} + C\frac{d\varphi^2}{dt^2} = \omega^2 [(A + C_1)\sin^2\theta + (A_1 + C)\cos^2\theta],$$

et, en éliminant φ',

$$(A + A_1)\frac{d\theta^2}{dt^2} = \omega^2 (A + C_1 - A_1)\sin^2\theta + 2m C\omega\cos\theta + n,$$

m et n désignant des constantes.

C'est une équation de la même forme que celle qu'on a trouvé dans le problème précédent.

NOTE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LES MOUVEMENTS RELATIFS.

Bour, *Journal de Mathématiques pures et applquées,* 2e série, t. VIII; année 1863.

Gilbert, *Annales de la Société scientifique de Bruxelles;* 6e année, 1881-1882.

Lottner, *Journal für die reine and angewandte Mathematik de Borchardt,* t. LIV, p. 197.

Resal, *Annales des Mines,* passim, et *Traité de Cinématique pure.*

Schellback, *Neue Elemente der Mechanik.*