SUR DIFFÉRENTS POINTS

DE LA

THÉORIE DES FONCTIONS FUCHSIENNES,

PAR M. X. STOUFF,

Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Montpellier.

Des recherches récentes ont encore augmenté l'intérêt que présente la Théorie des fonctions fuchsiennes [1], et surtout des groupes dont les substitutions peuvent être définies arithmétiquement. Le travail suivant contient différents points de vue. La première Partie renferme des compléments relatifs aux propriétés arithmétiques des substitutions, et forme en quelque sorte la suite des Mémoires déjà publiés sur ce sujet.

La seconde Partie est un essai destiné à rendre plus faciles à saisir des propriétés bien connues des fonctions modulaires. Les principes de la Théorie de la transformation y sont exposés en faisant abstraction de toute considération arithmétique ou algébrique; la Géométrie de Lobatchefsky y intervient seule. Elle contribuera peut-être, pour sa part, à éclairer cette Théorie.

I.

Dans un travail antérieur, j'ai considéré des groupes fuchsiens à coefficients complexes, dérivant de périodes à deux termes (zweigliederige Pe-

(1) Outre les travaux déjà cités dans mes Mémoires antérieurs, je signalerai trois articles de M. Fricke : *Ueber discontinuirliche Gruppen deren Substitutionem ganze Zahlen eines biquadratischen Körpers sind.* — *Ueber die zur Verzweigung* 2, 3, 7 *gehörendes Function.* — *Ueber ein allgemeines arithmetisch-gruppentheoretisches Princip in der Theorie der automorphen Functionen* (*Göttingen Nachrichten;* 1892), et un travail de M. Bianchi : *Lineare Substitutionen mit ganzen Complexen Coefficienten* (*Mathematische Annalen;* vol. XL).

Les deux premiers Mémoires de M. Fricke, sur les groupes que l'on peut déduire du principe de Poincaré, sont antérieurs aux Mémoires de l'Auteur sur le même sujet.

rioden, d'après la terminologie de Kummer) des racines $p^{\text{ièmes}}$ de l'unité, et dans la formation desquelles interviennent certaines substitutions que j'ai désignées par Σ_j. La généralisation aux périodes quelconques est immédiate. Elle présente cependant des circonstances curieuses.

(a). Prenons pour coefficients du groupe les nombres du corps défini par les racines cinquièmes de l'unité, et pour Σ_j la substitution de période 4,

$$\left(z, \quad \frac{-z-1}{z+1}\right),$$

j'aurai les relations

$$\begin{aligned}
\pm 2a_{j^2} &= -a_j + b_j + c_j - d_j,\\
\pm 2b_{j^2} &= -a_j - b_j + c_j + d_j,\\
\pm 2c_{j^2} &= -a_j + b_j - c_j + d_j,\\
\pm 2d_{j^2} &= -a_j - b_j - c_j - d_j,
\end{aligned}$$

et, en posant

$$\begin{aligned}
a_j &= \alpha_1 j + \alpha_2 j^2 + \alpha_3 j^3 + \alpha_4 j^4,\\
b_j &= \beta_1 j + \beta_2 j^2 + \beta_3 j^3 + \beta_4 j^4,\\
c_j &= \gamma_1 j + \gamma_2 j^2 + \gamma_3 j^3 + \gamma_4 j^4,\\
d_j &= \delta_1 j + \delta_2 j^2 + \delta_3 j^3 + \delta_4 j^4,
\end{aligned}$$

on doit avoir

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 \equiv 0 \bmod 2,$$

$$\begin{array}{lll}
\pm 2\alpha_3 = -\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 - \delta_1, & \alpha_4 = \delta_1, & \pm 2\alpha_2 = -\alpha_1 - \beta_1 - \gamma_1 - \delta_1,\\
\pm 2\beta_3 = -\alpha_1 - \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1, & \beta_4 = -\gamma_1, & \pm 2\beta_2 = \alpha_1 - \beta_1 + \gamma_1 - \delta_1,\\
\pm 2\gamma_3 = -\alpha_1 + \beta_1 - \gamma_1 + \delta_1, & \gamma_4 = -\beta_1, & \pm 2\gamma_2 = \alpha_1 + \beta_1 - \gamma_1 - \delta_1,\\
\pm 2\delta_3 = -\alpha_1 - \beta_1 - \gamma_1 - \delta_1, & \delta_4 = \alpha_1, & \pm 2\delta_2 = -\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 - \delta_1.
\end{array}$$

Le déterminant d'une substitution paire est

$$\tfrac{5}{2}(\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 + \delta_1^2),$$

et celui d'une substitution impaire,

$$\tfrac{3}{2}(\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 + \delta_1^2) - 2(\alpha_1\delta_1 - \beta_1\gamma_1).$$

Il est donc impossible de définir un groupe discontinu en égalant à l'unité la première ou la seconde de ces deux formes quadratiques.

En donnant à α_1, β_1, γ_1, δ_1 toutes les valeurs possibles, on obtient un groupe improprement discontinu, c'est-à-dire ne contenant pas de substitution infinitésimale. Remarquons que multiplier une substitution par une autre revient à composer, d'après une certaine loi, les formes quadratiques qui leur servent de déterminants. Nous possédons donc une composition de la forme $\frac{5}{2}(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2+\delta_1^2)$, somme de quatre carrés positifs isomorphe de la composition de la forme $ad-bc$ avec elle-même. Cette dernière est la somme de deux carrés positifs et de deux carrés négatifs. Cette circonstance paraît digne d'être observée.

(b). Prenons pour coefficients les nombres du corps défini par les racines septièmes de l'unité, et pour Σ_j la substitution de période 6,

$$\left(z,\quad \frac{6z+3}{-7z-3}\right),$$

en posant

$$\begin{aligned}
a_j &= \alpha_1 j+\alpha_2 j^2+\alpha_3 j^3+\alpha_4 j^4+\alpha_5 j^5,\\
b_j &= \beta_1 j+\beta_2 j^2+\beta_3 j^3+\beta_4 j^4+\beta_5 j^5,\\
c_j &= \gamma_1 j+\gamma_2 j^2+\gamma_3 j^3+\gamma_4 j^4+\gamma_5 j^5,\\
d_j &= \delta_1 j+\delta_2 j^2+\delta_3 j^3+\delta_4 j^4+\delta_5 j^5,
\end{aligned}$$

on obtient, par le changement de j en j^3,

$$\begin{aligned}
\pm\alpha_5 &= 6\alpha_1-7\beta_1+6\gamma_1-7\delta_1, & \alpha_4 &= -20\alpha_1+28\beta_1-15\gamma_1+21\delta_1,\\
\pm\beta_5 &= 3\alpha_1-3\beta_1+3\gamma_1-3\delta_1, & \beta_4 &= -12\alpha_1+16\beta_1-9\gamma_1+12\delta_1,\\
\pm\gamma_5 &= -14\alpha_1+\tfrac{49}{3}\beta_1-12\gamma_1+14\delta_1, & \gamma_4 &= 35\alpha_1-49\beta_1+25\gamma_1-35\delta_1,\\
\pm\delta_5 &= -7\alpha_1+7\beta_1-6\gamma_1+6\delta_1, & \delta_4 &= 21\alpha_1-28\beta_1+15\gamma_1-20\delta_1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pm\alpha_6 &= 27\alpha_1-42\beta_1+18\gamma_1-28\delta_1, & \alpha_2 &= -20\alpha_1+35\beta_1-12\gamma_1+21\delta_1,\\
\pm\beta_6 &= 18\alpha_1-27\beta_1+12\gamma_1-18\delta_1, & \beta_2 &= -15\alpha_1+25\beta_1-9\gamma_1+15\delta_1,\\
\pm\gamma_6 &= -42\alpha_1+\tfrac{196}{3}\beta_1-27\gamma_1+42\delta_1, & \gamma_2 &= 28\alpha_1-49\beta_1+16\gamma_1-28\delta_1,\\
\pm\delta_6 &= -28\alpha_1+42\beta_1-18\gamma_1+27\delta_1, & \delta_2 &= 21\alpha_1-35\beta_1+12\gamma_1-20\delta_1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pm\alpha_3 &= 6\alpha_1-14\beta_1+3\gamma_1-7\delta_1,\\
\pm\beta_3 &= 6\alpha_1-12\beta_1+3\gamma_1-6\delta_1,\\
\pm\gamma_3 &= -7\alpha_1+\tfrac{49}{3}\beta_1-3\gamma_1+7\delta_1,\\
\pm\delta_3 &= -7\alpha_1+14\beta_1-3\gamma_1+6\delta_1.
\end{aligned}$$

Le déterminant d'une substitution paire est

$$\begin{aligned}
-98\alpha_1^2+294\alpha_1\beta_1-28\alpha_1\gamma_1+189\alpha_1\delta_1-\tfrac{686}{3}\beta_1^2-105\beta_1\gamma_1&\\
-294\beta_1\delta_1-42\gamma_1^2+28\gamma_1\delta_1-98\delta_1^2&,
\end{aligned}$$

et celui d'une substitution impaire

$$\begin{aligned}
56\alpha_1^2-168\alpha_1\beta_1-26\alpha_1\gamma_1-111\alpha_1\gamma_1+\tfrac{392}{3}\beta_1^2+189\beta_1\gamma_1&\\
+168\beta_1\delta_1+24\gamma_1^2+26\gamma_1\delta_1+56\delta_1^2&,
\end{aligned}$$

Chacune de ces formes quadratiques est une somme de quatre carrés, comme dans le cas précédent; on ne peut donc définir un groupe fuchsien en les égalant à l'unité.

(c). Les remarques précédentes nous conduisent naturellement, étant donnée une forme quadratique quaternaire, et une formule de composition de cette forme avec elle-même, correspondant à la multiplication des substitutions linéaires d'un groupe, à discuter le nombre des carrés positifs et négatifs dans lesquels on peut la décomposer ([1]). J'envisage la forme

$$\Phi(x, y, z, u) = \mathrm{A}(x^2+u^2) + \mathrm{A}'y^2 + \mathrm{A}''z^2 + (\mathrm{B}y + \mathrm{C}z)(x-u) + \mathrm{D}xu + \mathrm{E}yz,$$

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{A}'} = \frac{\mathrm{A}''}{\mathrm{A}} = -\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{B}}, \qquad \mathrm{A}(\mathrm{D}+\mathrm{E}) = \mathrm{BC},$$

étudiée dans un travail antérieur; l'équation en S correspondante est

$$\begin{vmatrix} 2\mathrm{A}-\mathrm{S} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} \\ \mathrm{B} & 2\mathrm{A}'-\mathrm{S} & \mathrm{E} & -\mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{E} & 2\mathrm{A}''-\mathrm{S} & -\mathrm{C} \\ \mathrm{D} & -\mathrm{B} & -\mathrm{C} & 2\mathrm{A}-\mathrm{S} \end{vmatrix} = 0.$$

En ajoutant la dernière ligne à la première, on reconnaît que $\mathrm{D}+2\mathrm{A}$ est racine : après avoir supprimé cette racine, en ajoutant la dernière colonne à la première multipliée par -1, on obtient l'équation

$$\begin{vmatrix} 2\mathrm{A}'-\mathrm{S} & \mathrm{E} & -\mathrm{B} \\ \mathrm{E} & 2\mathrm{A}''-\mathrm{S} & -\mathrm{C} \\ -\mathrm{B} & -\mathrm{C} & \dfrac{2\mathrm{A}-\mathrm{D}-\mathrm{S}}{2} \end{vmatrix} = 0,$$

qui n'est autre que l'équation en S d'une quadrique : cette équation ayant toutes ses racines réelles, le théorème de Descartes en fera connaître immédiatement le signe pour une forme donnée.

Les racines des mineurs non principaux du premier ordre égalés à zéro ont respectivement pour valeurs

$$\frac{\mathrm{A}''}{\mathrm{A}}(2\mathrm{A}-\mathrm{E}), \qquad \frac{\mathrm{A}'}{\mathrm{A}}(2\mathrm{A}-\mathrm{E}), \qquad -\mathrm{D}-2\mathrm{A},$$

et peuvent servir à séparer facilement les racines.

---

(1) Comparer Poincaré, *Fonctions fuchsiennes et l'Arithmétique* (*Journal de Liouville;* 1887).

Mais l'équation présente une particularité importante. Si l'on développe le déterminant de neuf éléments qui précède, le premier terme de l'équation est $-S^3$ et le dernier $(D+2A)(E+2A)^2$. Donc, si $D+2A$ est positif, l'équation en S présente un nombre impair de variations; si $D+2A$ est négatif, elle en présente un nombre pair; comme conclusion la forme Φ est décomposable, soit en une somme de quatre carrés de même signe, soit en deux carrés positifs et deux négatifs. Les formes qui correspondent au dernier cas engendrent, par leur composition avec elles-mêmes, des groupes discontinus. Par exemple, la forme

$$-2x^2+4y^2+z^2-2u^2+(2y+z)(x-u)+5xu-6yz$$

donne lieu à l'équation en S

$$(S-1)(S^3-S^2-120S-100)=0,$$

elle a deux racines positives et deux négatives. La forme est donc décomposable en deux carrés positifs et deux négatifs (¹).

(d). Voici un procédé par la recherche des substitutions Σ_j.

Supposons pour fixer les idées que l'on emploie seulement des périodes à deux termes, j étant une racine d'indice p de l'unité. Soit $F_{\omega j}(z)$ une fraction linéaire de la variable z, dont les coefficients contiennent, outre la racine j, une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité ω; prenons, pour éviter toute difficulté, n premier avec p. Soit λ une racine primitive de n; $g_\omega(z)$ une fraction linéaire, telle que la substitution $[z, g_\omega(z)]$, que je désignerai par T_ω, soit de période $\frac{p-1}{2}$; soit S_ω une substitution linéaire, telle que

$$S_\omega S_{\omega^\lambda} S_{\omega^{\lambda^2}} \ldots S_{\omega^{\lambda^{p-1}}} = 1,$$

de plus, on a

$$T_{\omega^\lambda} = S_\omega^{-1} T_\omega S_\omega.$$

T_ω et S_ω contiennent dans leurs coefficients ω, mais ne contiennent pas j. Supposons $F_{\omega j}(z)$ déterminé, de telle sorte que

$$F_{\omega^\lambda j}(z) = S_\omega^{-1} F_{\omega j}(z).$$

L'équation

$$F_{\omega j^\rho}(z') = g_\omega[F_{\omega j}(z)]$$

(¹) Quant aux irrationnelles qu'il faut introduire pour obtenir le groupe fuchsien correspondant, consultez le Mémoire : *Sur la composition des formes quaternaires*, etc. (*Annales de Toulouse*).

définit alors une substitution linéaire (z, z'), qui répond à la définition des substitutions Σ_j. Cette équation se transforme en une équation équivalente quand on change ω en ω^λ : donc la substitution (z, z') ne contient pas ω.

(e). Afin d'élucider la notion des groupes isomorphes avec eux-mêmes, pour la formation desquels je n'ai encore employé que des substitutions transformantes rationnelles, je vais donner un exemple de groupe défini par une substitution irrationnelle. Soit j une racine cinquième de l'unité, posons

$$j + j^4 = \eta_1, \qquad j^2 + j^3 = \eta_2,$$

j'emploie la substitution Σ_j,

$$\Sigma_j = \left(z,\ \frac{z(2\eta_1 - 1) + \eta_1 - \eta_2}{z(\eta_1 - \eta_2) + 2\eta_2 - 1}\right),$$

dont le déterminant est -6. En imposant à la substitution

$$\left(z,\ \frac{(\alpha_1\eta_1 + \alpha_2\eta_2)z + \beta_1\eta_1 + \beta_2\eta_2}{(\gamma_1\eta_1 + \gamma_2\eta_2)z + \delta_1\eta_1 + \delta_2\eta_2}\right)$$

la condition connue, on obtient les équations

$$\begin{aligned}
&\pm 6\alpha_2 = \alpha_1 - \beta_1 + 11\gamma_1 + 5\delta_1 + 4\beta_2 - 4\gamma_2, && \pm 6\alpha_1 = -4\beta_1 + 4\gamma_1 + \alpha_2 + 11\beta_2 - \gamma_2 + 5\delta_2,\\
&\pm 6\beta_2 = -\alpha_1 + 3\beta_1 + 5\gamma_1 + \delta_1 + 4\alpha_2 - 8\beta_2 - 4\delta_2, && \pm 6\beta_1 = -4\alpha_1 + 8\beta_1 + 4\delta_1 + 11\alpha_2 - 21\beta_2 + 5\gamma_2 - 11\delta_2,\\
&\pm 6\gamma_2 = 11\alpha_1 + 5\beta_1 - 21\gamma_1 - 11\delta_1 - 4\alpha_2 + 8\gamma_2 + 4\delta_2, && \pm 6\gamma_1 = 4\alpha_1 - 8\gamma_1 - 4\delta_1 - \alpha_2 + 5\beta_2 + 3\gamma_2 + \delta_2,\\
&\pm 6\delta_2 = 5\alpha_1 + \beta_1 - 11\gamma_1 + \delta_1 - 4\beta_2 + 4\gamma_2, && \pm 6\delta_1 = 4\beta_1 - 4\gamma_1 + 5\alpha_2 - 11\beta_2 + \gamma_2 + \delta_2,
\end{aligned}$$

qui sont nécessairement compatibles.

Les relations entre les entiers se présentent sous une forme bien plus compliquée que lorsque la substitution transformante est rationnelle; il y a, de plus, une différence essentielle; le groupe des substitutions S_j est distinct du groupe des substitutions $S_{j\rho}$, et ces groupes ne sont même pas généralement commensurables. Dans le cas d'une substitution transformante rationnelle, au contraire, ces deux groupes sont identiques.

(f). Soit

$$A_0 x^3 + A_1 x^2 + A_2 x + A_3 = 0$$

une équation irréductible du troisième degré à coefficients entiers et, en dehors de cela, quelconque, x_1, x_2, x_3 ses trois racines. Les nombres du corps qui dérive de x_1, x_2, x_3 sont de la forme

$$m + nx_1 + px_2 + qx_1^2 + rx_2^2 + sx_1^2 x_2, \tag{1}$$

m, n, p, q, r, s étant des nombres commensurables. Six nombres commensurables interviennent donc dans leur formation par voie additive. Le groupe de Galois des racines d'une équation du troisième degré est, comme on le sait, isomorphe au groupe d'une double pyramide triangulaire régulière. Le Tableau suivant indique la correspondance des substitutions des deux groupes

$$x_1, x_3, x_2; (z, z), \qquad x_2, x_3, x_1; \left(z, \frac{1}{-z+1}\right), \qquad x_3, x_1, x_2; \left(z, \frac{z-1}{z}\right),$$
$$x_1, x_3, x_2; (z, -z+1), \qquad x_3, x_2, x_1; \left(z, \frac{1}{z}\right), \qquad x_2, x_1, x_3; \left(z, \frac{z}{z-1}\right).$$

Formons une substitution linéaire, dont les coefficients soient les nombres du corps défini plus haut, et telle que chaque permutation des racines équivale à la transformation par la substitution linéaire correspondante du groupe de la double pyramide. Les coefficients contiennent en tout vingt-quatre nombres commensurables. Ces nombres s'expriment d'ailleurs au moyen des coefficients et de leurs conjugués à l'aide d'équations linéaires, dont le déterminant, comme il est facile de le voir, n'est pas nul. Les coefficients et leurs conjugués forment un total de vingt-quatre nombres liés par vingt-quatre équations. Mais quatre de ces équations sont des identités. Elles correspondent à la face de la pyramide triangulaire qui répond à la substitution identique. Ainsi la substitution assujettie à ces conditions contient quatre nombres commensurables arbitraires.

Afin d'éviter des difficultés, ne considérons qu'une équation dans laquelle le coefficient de x^3 est l'unité. Ne prenons comme coefficients que les nombres entiers du corps. Les substitutions obtenues, en égalant à l'unité le déterminant des coefficients, formeront un groupe discontinu.

Le système des modules

$$1, \quad x_1, \quad x_2, \quad x_1^2, \quad x_2^2, \quad x_1^2 x_2$$

présente l'avantage que toute fonction entière, à coefficients entiers, des racines de l'équation du troisième degré se réduit à la forme (1), sans introduction de dénominateurs; mais il se prête mal au calcul algébrique, faute de symétrie. Nous lui substituerons le système de modules suivant :

$$\lambda_{11} = x_1^2 x_2, \qquad \lambda_{21} = x_2^2 x_3, \qquad \lambda_{31} = x_3^2 x_1,$$
$$\lambda_{12} = x_1^2 x_3, \qquad \lambda_{22} = x_2^2 x_1, \qquad \lambda_{32} = x_3^2 x_2,$$

formé de l'ensemble des différentes valeurs que prend une fonction des racines par le groupe de Galois de l'équation proposée. Soit

$$\left(z, \frac{az+b}{cz+d}\right)$$

une substitution du groupe

$$\begin{aligned}
a &= \sum_{ij} \alpha_{ij}\,\lambda_{ij}, \\
b &= \sum_{ij} \beta_{ij}\,\lambda_{ij}, \\
c &= \sum_{ij} \gamma_{ij}\,\lambda_{ij}, \qquad (i = 1,\ 2,\ 3), \\
d &= \sum_{ij} \delta_{ij}\,\lambda_{ij}, \qquad (j = 1,\ 2),
\end{aligned}$$

on trouve aisément les formules

$$\alpha_{i+1.j} = \gamma_{ij} + \delta_{ij}, \qquad \beta_{i+1.j} = -\gamma_{ij}, \qquad \gamma_{i+1.j} = -\alpha_{ij} - \beta_{ij} + y_{ij} + \delta_{ij},$$
$$\delta_{i+1.j} = \alpha_{ij} - \gamma_{ij}, \qquad \pm\alpha_{i.j+1} = \alpha_{ij},$$
$$\pm\beta_{i.j+1} = -\alpha_{ij} - \beta_{ij}, \qquad \pm\gamma_{i.j+1} = -\gamma_{ij}, \qquad \pm\delta_{i.j+1} = \gamma_{ij} + \delta_{ij}.$$

Le calcul du déterminant $ad - bc$ serait assez compliqué sans la remarque suivante.

Une substitution à quatre variables a, b, c, d,

$$\begin{array}{lll}
a & in & -amq - bnq + cmp + dnp, \\
b & in & -apq - bq^2 + cp^2 + dpq, \\
c & in & amn + bn^2 - cm^2 - dmn, \\
d & in & anp + bnq - cmp - dmq,
\end{array}$$

effectuée simultanément sur les variables a, b, c, d et sur les variables a', b', c', d', ne change pas la forme bilinéaire

$$ad' + da' - bc' - cb';$$

on en conclut que l'on a toujours

$$\begin{aligned}
&\alpha_{i+r.j+s}\,\delta_{i'+r.j'+s} + \alpha_{i'+r.j'+s}\,\delta_{i+r.j+s} - \beta_{i+r.j+s}\,\gamma_{i'+r.j'+s} - \beta_{i'+r.j'+s}\,\gamma_{i+r.j+s} \\
&\qquad = \alpha_{ij}\,\delta_{i'j'} + \delta_{ij}\,\alpha_{i'j'} - \beta_{ij}\,\gamma_{i'j'} - \gamma_{ij}\,\delta_{i'j'}.
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} ad - bc = (\alpha_{11}\delta_{11} - \beta_{11}\gamma_{11}) \sum_{ij} \lambda_{ij}^2 &+ (\alpha_{11}\delta_{21} + \alpha_{21}\delta_{11} - \beta_{11}\gamma_{21} - \beta_{21}\gamma_{11}) \sum_{ij} \lambda_{ij}\lambda_{i+1.j} \\ &+ (\alpha_{11}\delta_{12} + \alpha_{12}\delta_{11} - \beta_{11}\gamma_{12} - \gamma_{11}\beta_{12}) \sum_{i} \lambda_{i1}\lambda_{i2} \\ &+ (\alpha_{21}\delta_{12} + \alpha_{12}\delta_{21} - \beta_{21}\gamma_{12} - \gamma_{21}\beta_{12}) \sum_{i} \lambda_{i1}\lambda_{i+2.2} \\ &+ (\alpha_{11}\delta_{22} + \delta_{11}\alpha_{22} - \beta_{11}\gamma_{22} - \beta_{22}\gamma_{11}) \sum_{i} \lambda_{i1}\lambda_{i+1.2}, \end{aligned}$$

on a, en supposant l'équation du troisième degré mise sous la forme

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

et, d'après les formules,

$$\begin{aligned} &\alpha_{11}\delta_{21} + \alpha_{21}\delta_{11} - \beta_{11}\gamma_{21} - \beta_{21}\gamma_{11} \\ &\quad = \alpha_{11}^2 + \beta_{11}^2 + \gamma_{11}^2 + \delta_{11}^2 + \alpha_{11}\beta_{11} - \alpha_{11}\gamma_{11} - \beta_{11}\gamma_{11} - \beta_{11}\delta_{11} + \gamma_{11}\delta_{11}, \\ &\alpha_{11}\delta_{12} + \alpha_{12}\delta_{11} - \beta_{11}\gamma_{12} - \gamma_{11}\beta_{12} = \pm(2\alpha_{11}\gamma_{11} + 2\alpha_{11}\delta_{11} + 2\beta_{11}\gamma_{11}), \\ &\alpha_{21}\delta_{12} + \alpha_{12}\delta_{21} - \beta_{21}\gamma_{12} - \gamma_{21}\beta_{12} \\ &\quad = \pm(-\beta_{11}^2 + \delta_{11}^2 - 2\alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{11}\gamma_{11} + \alpha_{11}\delta_{11} + \beta_{11}\gamma_{11} + \beta_{11}\delta_{11} + 2\gamma_{11}\delta_{11}), \\ &\alpha_{11}\delta_{22} + \delta_{11}\alpha_{22} - \beta_{11}\gamma_{22} - \gamma_{11}\beta_{22} = \pm(\alpha_{11}^2 - \beta_{11}^2 - \gamma_{11}^2 + \delta_{11}^2 + \alpha_{11}\gamma_{11} - \beta_{11}\delta_{11}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{ij} \lambda_{ij}^2 = -2a^3c + a^2b^2 + 4abc - 2b^3 - 3c^2, \\ &\sum_{ij} \lambda_{ij}\lambda_{i+1.j} = abc - 3c^2, \\ &\sum \lambda_{i1}\lambda_{i2} = a^3c - 3abc + 3c^2, \\ &\sum_{i} \lambda_{i1}\lambda_{i+2.2} = 3c^2, \\ &\sum_{i} \lambda_{i1}\lambda_{i+1.2} = 3c^2 - 3abc + b^3. \end{aligned}$$

D'après ces calculs, on a, entre α_{11}, β_{11}, γ_{11}, δ_{11}, l'une ou l'autre des deux relations

$$\begin{aligned} -2abc + b^3)\,\alpha_{11}^2 &+ (4abc - b^3 - 9c^2)\,\beta_{11}^2 + (4abc - b^3 - 6c^2)\,\gamma_{11}^2 \\ &+ (-2abc + b^3 + 3c^2)\,\delta_{11}^2 + (abc - 9c^2)\,\alpha_{11}\beta_{11} \\ &+ (2a^3c - 10abc + b^3 + 15c^2)\,\alpha_{11}\gamma_{11} + (a^2b^2 - 2abc - 2b^3 + 6c^2)\,\alpha_{11}\delta_{11} \\ &+ (4a^3c - a^2b^2 - 11abc + 2b^3 + 15c^2)\,\beta_{11}\gamma_{11} \\ &\qquad + (2abc + 3c^2 - b^3)\,\beta_{11}\delta_{11} + (abc + 3c^3)\,\gamma_{11}\delta_{11} = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\alpha_{11}^2(4abc-6c^2-b^3)+\beta_{11}^2(-2abc+3c^2+b^3)+\gamma_{11}^2(-2abc+b^3)\\&\quad+\delta_{11}^2(4abc-9c^2-b^3)+\alpha_{11}\beta_{11}(abc+3c^2)+\alpha_{11}\gamma_{11}(8abc-2a^3c+b^3-9c^2)\\&\quad+\alpha_{11}\delta_{11}(-4a^3c+10abc+a^2b^2-12c^2-2b^3)\\&\quad+\beta_{11}\gamma_{11}(-a^2b^2+abc-3c^2+2b^3)+\beta_{11}\delta_{11}(3c^2-4abc+b^3)\\&\qquad\qquad+\gamma_{11}\delta_{11}(abc-9c^2)=1;\end{aligned}$$

pour la formation du groupe, on prendra des nombres commensurables α_{11}, β_{11}, γ_{11}, δ_{11}, satisfaisant à l'une ou à l'autre de ces deux relations, et tels que les nombres a, b, c, d, réduits au système de modules (1), soient des entiers du corps, c'est-à-dire ne contiennent que des nombres entiers comme multiplicateurs des modules. Ces conditions reviennent donc à l'étude d'un certain système de congruences.

(g). M. Fricke a bien voulu m'indiquer une généralisation des résultats contenus dans le paragraphe précédent. On peut obtenir, en partant des racines d'une équation du quatrième degré, toujours par l'application du même principe, des groupes de substitutions linéaires à coefficients complexes qui permettent une division régulière de l'espace en polyèdres. Soit

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$$

une équation du quatrième degré, x_1, x_2, x_3, x_4 ses quatre racines. Posons

$$\lambda_{ijh}=x_i^3x_j^2x_h,\qquad (i,j,h=1,2,3,4).$$

Soit D un nombre qui peut se représenter par la forme $t^2+2tu+2u^2$, ou, ce qui revient au même, qui est une somme de deux carrés. Je considère le corps déterminé par l'irrationnelle $\sqrt{-\mathrm{D}}$. Nous prendrons, pour coefficients des substitutions que nous voulons former, des nombres de la forme

$$a=\sum\alpha_{ijh}\lambda_{ijh},\qquad b=\sum\beta_{ijh}\lambda_{ijh},\qquad c=\sum\gamma_{ijh}\lambda_{ijh},\qquad d=\sum\delta_{ijh}\lambda_{ijh}.$$

Le groupe de Galois de l'équation du quatrième degré est isomorphe de celui d'un octaèdre régulier, et la correspondance peut être établie de la manière suivante; j'écris simplement la fraction linéaire qui correspond à chaque substitution.

$x_1x_2x_3x_4.$	$x_2x_3x_4x_1.$	$x_3x_4x_1x_2.$	$x_4x_1x_2x_3.$
$z,$	$\dfrac{z(t+\sqrt{-D})+2t+2u}{uz+t-\sqrt{-D}},$	$\dfrac{z\sqrt{-D}+2t+2u}{uz-\sqrt{-D}},$	$\dfrac{z(t-\sqrt{-D})-2t-2u}{-uz+t+\sqrt{-D}};$
$x_1x_2x_4x_3.$	$x_2x_4x_3x_1.$	$x_4x_3x_1x_2.$	$x_3x_1x_2x_4.$
$-\dfrac{2}{z},$	$\dfrac{z(2t+2u)-2t-2\sqrt{-D}}{z(t-\sqrt{-D})-2u},$	$\dfrac{z(-2t-2u)+2\sqrt{-D}}{z\sqrt{-D}+2u},$	$\dfrac{z(-2t-2u)-2t+2\sqrt{-D}}{z(t+\sqrt{-D})+2u};$
$x_1x_3x_2x_4.$	$x_3x_2x_4x_1.$	$x_2x_4x_1x_3.$	$x_4x_1x_3x_2.$
$\dfrac{z(-t-2u+\sqrt{-D})+2t+2u+2\sqrt{-D}}{z(u+\sqrt{-D})+t+2u-\sqrt{-D}},$	$\dfrac{z(-2t-2u+2\sqrt{-D})+2t+4u+2\sqrt{-D})}{z(t+2u+\sqrt{-D})+2u-2\sqrt{-D}},$	$\dfrac{z(-t+\sqrt{-D})+2u}{z(t+u)-t-\sqrt{-D}},$	$\dfrac{2uz-2t-2\sqrt{-D}}{z(t-\sqrt{-D})-2t-2u};$
$x_1x_3x_4x_2.$	$x_3x_4x_2x_1.$	$x_4x_2x_1x_3.$	$x_2x_1x_3x_4.$
$\dfrac{z(2u+2\sqrt{-D})+2t+4u-2\sqrt{-D}}{z(t+2u-\sqrt{-D})-2t-2u-2\sqrt{-D}},$	$\dfrac{-2uz+2\sqrt{-D}}{z\sqrt{-D}+2t+2u},$	$\dfrac{z(-2u+2\sqrt{-D})+2t+4u+2\sqrt{-D}}{z(t+2u+\sqrt{-D})+2t+2u-2\sqrt{-D}},$	$\dfrac{2z\sqrt{-D}-2t-4u}{z(t+2u)-2\sqrt{-D}};$
$x_1x_4x_2x_3.$	$x_4x_2x_3x_1.$	$x_2x_3x_1x_4.$	$x_3x_1x_4x_2.$
$\dfrac{z(2t+2u+2\sqrt{-D})+2t+4u-2\sqrt{-D}}{z(t+2u-\sqrt{-D})-2u-2\sqrt{-D}},$	$\dfrac{z(-t-2u-\sqrt{-D})-2t-2u+2\sqrt{-D}}{z(-u+\sqrt{-D})+t+2u+\sqrt{-D}},$	$\dfrac{-2uz-2t+2\sqrt{-D}}{z(t+\sqrt{-D})+2t+2u},$	$\dfrac{z(t+\sqrt{-D})+2u}{z(t+u)+(t-\sqrt{-D})};$
$x_1x_4x_3x_2.$	$x_4x_3x_2x_1.$	$x_3x_2x_1x_4.$	$x_2x_1x_4x_3.$
$\dfrac{z(t+2u-\sqrt{-D})-2u-2\sqrt{-D}}{z(-t-u-\sqrt{-D})-t-2u+\sqrt{-D}},$	$\dfrac{z\sqrt{-D}+2u}{z(t+u)-\sqrt{-D}},$	$\dfrac{z(-t-2u-\sqrt{-D})-2u+2\sqrt{-D}}{z(-t-u+\sqrt{-D})+t+2u+\sqrt{-D}},$	$\dfrac{z(-t-2u)+2\sqrt{-D}}{z\sqrt{-D}+t+2u}.$

La grande complication des calculs ultérieurs m'oblige à remettre à lus tard les résultats généraux relatifs à ces groupes.

Voici des groupes plus simples : partons de l'équation

$$x^4 - n = 0,$$

n étant un entier réel ou complexe de la forme $a + bi$, et déterminons les substitutions de déterminant 1, et dont les coefficients appartiennent au corps engendré par $n^{\frac{1}{4}}$ et i, telles qu'en y remplaçant $n^{\frac{1}{4}}$ par $in^{\frac{1}{4}}$, la substitution éprouve la transformation par la substitution de période $4\left(z, \frac{z+1}{-z+1}\right)$, nous trouverons que ces substitutions sont de la forme

$$z, \quad \frac{z\left(\alpha + i\alpha_1 n^{\frac{1}{4}} - i\alpha_3 n^{\frac{3}{4}}\right) + \beta + \alpha_1 n^{\frac{1}{4}} + \alpha_3 n^{\frac{3}{4}}}{z\left(-\beta + \alpha_1 n^{\frac{1}{4}} + \alpha_3 n^{\frac{3}{4}}\right) + \alpha - i\alpha_1 n^{\frac{1}{4}} + i\alpha_3 n^{\frac{3}{4}}}.$$

α, β, α_1, α_3 sont quatre entiers de la forme $a + bi$, entre lesquels on a la relation

$$\alpha^2 + \beta^2 - 4n\alpha_1\alpha_3 = 1.$$

Soit

$$n = 2,$$

on a les relations suivantes entre les substitutions

$$\left(z, \frac{zi2^{\frac{1}{4}} - 1 + 2^{\frac{1}{4}}}{z\left(1 + 2^{\frac{1}{4}}\right) - i2^{\frac{1}{4}}}\right)\left(z, \frac{-1}{z}\right)\left(z, \frac{-z2^{\frac{1}{4}} + 1 + i2^{\frac{1}{4}}}{z\left(-1 + i2^{\frac{1}{4}}\right) + 2^{\frac{1}{4}}}\right)\left(z, \frac{z(1+i)2^{\frac{1}{4}} - 1 + (1-i)2^{\frac{1}{4}}}{z\left[1 + (1-i)2^{\frac{1}{4}}\right] - (1+i)2^{\frac{1}{4}}}\right) = 1,$$

$$\left(z, \frac{-zi2^{\frac{1}{4}} - 1 - 2^{\frac{1}{4}}}{z\left(1 - 2^{\frac{1}{4}}\right) + i2^{\frac{1}{4}}}\right)\left(z, \frac{-1}{z}\right)\left(z, \frac{z2^{\frac{1}{4}} + 1 - i2^{\frac{1}{4}}}{z\left(-1 - i2^{\frac{1}{4}}\right) - 2^{\frac{1}{4}}}\right)\left(\frac{-z(1+i)2^{\frac{1}{4}} - 1 - 2^{\frac{1}{4}} + i2^{\frac{1}{4}}}{\left(1 - 2^{\frac{1}{4}} + i2^{\frac{1}{4}}\right)z + (1+i)2^{\frac{1}{4}}}\right) = 1.$$

II.

Les considérations empruntées à la Géométrie de Lobatchefsky paraissent présenter quelque intérêt pour la théorie des fonctions modulaires [1].

Nous appellerons *droite* un arc de cercle orthogonal au cercle fondamental, distance de deux points, la L de la droite qui joint ces deux points.

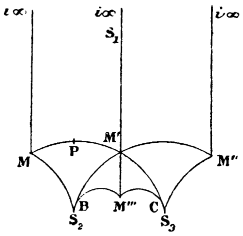
---

[1] Comparer POINCARÉ, *Acta mathematica*, t. IV.

Tout cercle qui a des points à l'intérieur du cercle fondamental sera considéré comme un cercle non euclidien. S'il est tout entier intérieur au cercle fondamental, il existera un point fixe dont les distances non euclidiennes à tous les points de ce cercle seront égales entre elles. Dans le cas contraire, on dira que le centre du cercle est imaginaire.

D'après les travaux bien connus de M. Klein, l'invariant absolu J de la forme biquadratique binaire qui sert à définir un système de fonctions elliptiques est une fonction fuchsienne du rapport z des périodes, et son plan se représente conformément sur un triangle mixtiligne $i\infty$MPM'$i\infty$ (*fig.* 1),

Fig. 1.



formé par deux parallèles à l'axe imaginaire à la distance $\frac{1}{2}$ et par un arc de cercle qui les coupe sous un angle de 30°. La fonction J(z) reste invariable par toutes les substitutions du groupe

$$\left(z, \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right), \qquad (\alpha\delta-\beta\gamma=1),$$

et la fonction J$\left(\frac{z}{2}\right)$ par celles du groupe

$$\left(z, \frac{\alpha z+2\beta}{\frac{\gamma}{2} z+\delta}\right), \qquad (\alpha\delta-\beta\gamma=1);$$

ces deux groupes ont un sous-groupe commun Γ, c'est le sous-groupe du premier défini par les congruences $\beta\equiv\gamma\equiv 0$, mod 2. Γ admet, comme polygone générateur, le polygone $i\infty$MBM'''CM''$i\infty$ (*fig.* 1), dans lequel M''$i\infty$ est transformé en M$i\infty$ par la substitution S_1, BM en BM''' par une substitution S_2, CM''' en CM'' par S_3. Ces trois substitutions sont paraboliques et leur produit $S_1 S_2 S_3$ est égal à l'unité.

Afin de ne pas faire jouer au point $i\infty$ un rôle spécial, envisageons la représentation sur le cercle fondamental. Soient A, B, C les points doubles des trois substitutions S_1, S_2, S_3. Soit D le transformé de C par S_1; nécessairement S_2 transforme de nouveau D en C. Le point essentiel est le suivant : *la droite* CD *est perpendiculaire à* AB. En effet, supposons d'abord que la substitution S_1 transforme un certain point H en G et que S_2 transforme de nouveau G en H; la substitution S_1 équivaut à un mouvement non euclidien pendant lequel le point H décrirait le cercle passant par sa position initiale et tangent au cercle fondamental au point A; la substitution S_2 revient à un mouvement sur un cercle tangent au cercle fondamental au point B. Les points G et H sont donc déterminés par l'intersection de deux cercles non euclidiens, ayant pour centres les deux points à l'infini sur l'arc AB. La droite non euclidienne GH est donc perpendiculaire sur la droite AB.

Dans le sens de la Géométrie ordinaire, les trois axes radicaux du cercle fondamental et des deux cercles AGH, GBH concourent en un même point P, qui est le pôle de AB par rapport au cercle fondamental. Donc, elle transforme en lui-même l'arc normal au cercle fondamental déterminé par les points G et H. Elle ne change pas l'arc AB. Elle n'altère pas les angles. Donc, l'arc GH est perpendiculaire sur l'arc AB.

Supposons que H se rapproche indéfiniment du cercle fondamental en tendant vers un certain point C, le point G tendra vers son transformé D; donc CD est perpendiculaire sur AB.

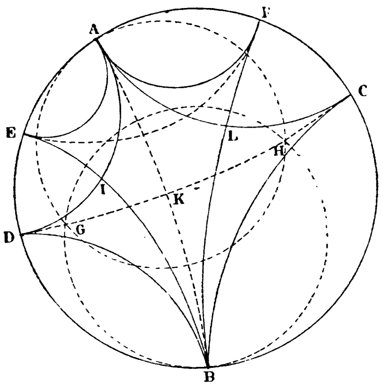
On voit aisément que la réciproque est vraie. Si l'on trace à l'intérieur du cercle fondamental deux droites rectangulaires qui rencontrent ce cercle aux points A, B, C, D, il existe trois substitutions paraboliques ayant leurs points doubles respectifs en ABC et dont le produit est égal à l'unité.

Ceci posé, soient E et F les symétriques du point B par rapport aux arcs AD et AC. Les deux points E et F sont évidemment symétriques l'un de l'autre par rapport à AB. Les deux arcs rectangulaires AB et EF définissent donc, comme nous venons de le voir, un système de trois substitutions paraboliques dont le produit est égal à l'unité, S'_1 ayant son point double en A, S'_2 son point double en B, S'_3 son point double en F. Le groupe engendré par S'_1, S'_2, S'_3 n'est pas le même que le groupe engendré par S_1, S_2, S_3; mais nous pouvons en faire l'usage suivant :

Les substitutions S_1, S_2, S_3 dérivent des substitutions du polygone fondamental de l'invariant J. Le retour du quadrilatère ADBC au polygone fondamental de cet invariant est facile : en effet, le point correspondant au point M' de la *fig*. 1 est le point de concours des hauteurs du triangle ABC dans la *fig.* 2. Les points correspondants dans la *fig.* 1 aux autres points de la *fig.* 2 se construisent alors aisément.

Le triangle ABF, étant de même nature que le triangle ABC, peut se

Fig. 2.



décomposer comme lui en polygones analogues à $i\infty ABA' i\infty$, qui déterminent le groupe de l'invariant $J\left(\frac{z}{2}\right)$. Nous allons démontrer que les groupes résultant de la décomposition du triangle ABC ou du triangle ABF admettent tous deux comme sous-groupes les groupes Γ et Γ', engendrés par S_1 et S_2 ou par S'_1 et S'_2.

S_1 transforme AC en AD, et peut être regardée comme formée d'une transformation symétrique par rapport à AC, suivie d'une transformation symétrique par rapport à AB. De ces deux transformations la première change AF en AB, la seconde laisse AB invariable. S_1 peut être aussi considérée comme le produit d'une transformation symétrique par rapport à AB, par une transformation symétrique par rapport à AD. Elle transforme donc AB en AE. Donc S_1^2 transforme AF en AE et est égal à S'_1.

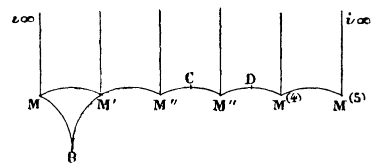
De la symétrie des points A, C; A, D par rapport aux arcs BE, BF, résulte, par un raisonnement analogue, que S_2 est le carré de S'_2.

Or S_1, S'_1, S_2, S'_2 sont toutes des puissances entières des substitutions des polygones d'invariant qui ont leur point double soit en A, soit en B, et, par conséquent, les groupes Γ et Γ' sont contenus soit dans le groupe de $J(z)$, soit dans celui de $J\left(\frac{z}{2}\right)$.

Pour l'étude de la transformation du cinquième ordre et des transformations d'ordre supérieur, nous n'emploierons pas la considération du sous-groupe distingué, mod 5, du groupe arithmétique, qui serait trop compliquée. J'envisage le sous-groupe $\Gamma\left(z, \frac{\alpha z + 5\beta}{\gamma z + \delta}\right)$, $(\alpha\delta - 5\beta\gamma = 1)$; le polygone générateur de ce sous-groupe est

$$i\infty \mathrm{MBM'M''CM'''DM^{(4)}M^{(5)}} i\infty \quad (\textit{fig. } 3),$$

Fig. 3.

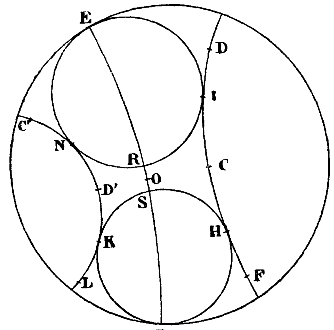


dans lequel $\mathrm{M}^{(5)} i\infty$ est transformé en $\mathrm{M}i\infty$ par la distribution parabolique S_1; $\mathrm{M}^{(5)}\mathrm{M}^{(4)}$ se transforme en $\mathrm{M'M''}$ par une substitution hyperbolique S_2, C et D sont les points de deux substitutions de période 2; S_3 et S_4, B est le point double d'une substitution parabolique S_5. On a donc les relations

$$\mathrm{S}_1\mathrm{S}_5 = \mathrm{S}_2, \qquad \mathrm{S}_4\mathrm{S}_3 = \mathrm{S}_2.$$

Adoptons encore (*fig.* 4) la représentation sur le cercle fondamental:

Fig. 4.



soient B, E, C, D les points doubles respectifs des substitutions S_5 et S_1, S_3 et S_4. La substitution hyperbolique S_2, produit des deux substitutions de période 2, S_4 et S_3, a pour axe la droite CD qui joint leurs points doubles et pour L le double de CD (*fig.* 4). La substitution parabolique S_1, suivie de S_5, doit aussi donner S_2 pour produit, et, par conséquent,

---

(1) Au sujet de cette simplification, *voir* le Mémoire de Klein : *Ueber die Transformation*, etc. (*Math. Annalen*, vol. XIV); celui de Kiepert : *Ueber die Transformation bei zusammengesetzten Transformationsgrad* (*Id.*, vol. XXXII); *Ueber Gewisse Vereinsachungen*, etc. (*Id.*, vol. XXXVII): celui de Fricke : *Zur Transformations theorie der elliptischen Functionen* (*Id.*, vol. XL, p. 471).

laisser CD invariable. Je mène un cercle tangent à CD et au cercle fondamental en E. Ce cercle correspond, dans la *fig.* 3, à une droite parallèle à l'axe réel et le point I, où il touche CD, est évidemment le milieu non euclidien de cette droite. La substitution S_1 correspond à un mouvement dans lequel CD reste tangent à cet arc et arrive dans une position finale C'D'.

Menons un cercle tangent en B au cercle fondamental et à CD. S_5 déplace C'D' tangentiellement à ce cercle, et, comme elle doit ramener cette droite dans la position primitive de CD, il faut que C'D' soit tangente à ce cercle. En suivant les deux mouvements, on voit que le déplacement résultant du point I le long de l'arc CD est le double de IH, et, comme la L de S_2 est 2CD, CD égale IH. Soient R, S les points où les cercles EI, BH rencontrent BE, O le milieu de RS. Une substitution de période 2, ayant O pour point double, transforme le système des substitutions S_1, S_5, S_3, S_4 en un système formé de S_5, S_1 et de deux substitutions de période 2 ayant pour points doubles D' et L. Ce système de substitutions, étant identique à la situation près au primitif, dérive de la même manière que celui-ci de substitutions fondamentales d'invariant. Ce même système de substitutions engendre d'ailleurs un groupe contenu dans le groupe primitif d'invariant. Car les substitutions de période 2, ayant pour points doubles D' et L, appartiennent évidemment au groupe engendré par S_1, S_3, S_4; et S_5 et S_1 sont des puissances entières des substitutions de polygones ayant leurs points doubles en B et en E. Nous avons ainsi mis en évidence la commensurabilité du groupe arithmétique avec l'un de ses transformés, ce qui est le point essentiel.

Dans la transformation du septième ordre, les choses se passent d'une manière analogue. Les substitutions du polygone fondamental du groupe $\left(z, \frac{\alpha z+7\beta}{\gamma z+\delta}\right)$, $(\alpha\delta - 7\beta\gamma = 1)$, sont au nombre de cinq, S_1 et S_5 paraboliques, S_2 hyperbolique, S_3 et S_4 de période 3, et on a les relations

$$S_1 S_5 = S_2, \qquad S_4 S_3 = S_2.$$

L'explication est la même que dans le cas du cinquième ordre; les deux substitutions de période 3 jouent le rôle des deux substitutions de période 2 (¹).

(¹) *Voir* le Mémoire déjà cité de Klein (*Math. Annalen*, vol. IV).

Une étude ultérieure des transformations modulaires fait reconnaître que la raison géométrique de ces transformations se trouve dans les théorèmes suivants, qui sont d'ailleurs connus.

I. *Si deux substitutions elliptiques admettent pour résultante une substitution hyperbolique, dont l'axe laisse leurs points doubles d'un même côté, on construira cette substitution en menant la droite* AB *qui joint leurs points doubles* A *et* B, *et en menant par* A *et* B *des droites faisant avec* AB *d'un même côté des angles égaux à la moitié de l'angle des substitutions elliptiques. La perpendiculaire commune à ces droites est l'axe de la substitution hyperbolique, et la* L *de cette substitution hyperbolique est le double de cette perpendiculaire commune.*

II. *Si deux substitutions hyperboliques admettent pour résultante une substitution hyperbolique dont l'axe ne rencontre pas les leurs, on obtient l'axe de cette dernière en menant la perpendiculaire commune à leurs axes, en portant, à partir des pieds de cette perpendiculaire et sur les deux axes respectivement, les* $\frac{1}{2}$ L *des substitutions hyperboliques, et en élevant par les points ainsi obtenus des perpendiculaires aux deux axes. La perpendiculaire commune à ces deux dernières droites est l'axe de la substitution résultante, et la* L *de cette substitution est le double de cette perpendiculaire commune.*

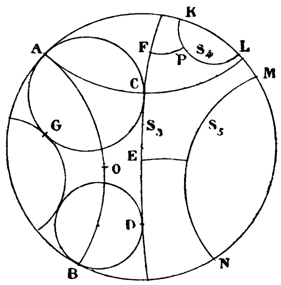
III. *Si deux substitutions paraboliques admettent pour résultante une substitution hyperbolique* S, *la* L *de* S *est le double de l'intervalle compris entre les points de contact avec l'axe de* S *de deux cercles tangents à l'axe de* S, *et au cercle fondamental respectivement aux deux points doubles des deux substitutions paraboliques.*

IV. *Dans les trois cas considérés précédemment, l'axe de la substitution résultante et celui de sa transformée par une des substitutions composantes sont symétriques par rapport au centre des deux substitutions composantes, dans le cas où ce centre existe.*

Nous sommes ainsi conduit par induction à admettre que les choses se passent comme il suit, dans une transformation de degré premier p.

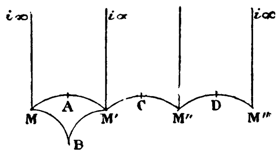
Deux des cycles du polygone fondamental sont formés par deux substitutions paraboliques S_1 et S_2 ayant leurs points doubles en A et B (*fig.* 5), et une substitution hyperbolique S_3 ayant pour axe CD et pour L 2CD. Dans le polygone générateur d'un groupe fuchsien chaque substitution intervient précisément dans deux cycles. S_3 intervient donc dans un autre cycle et dans ce cycle seulement : elle est la résultante de deux substitutions égales S_4 et S_5, qui peuvent être de période 2 ($p = 5$), de période 3 ($p = 7$), hyperboliques ($p > 7$).

Fig. 5.



Pour $p > 7$, les axes de S_4 et de S_5 sont disposés symétriquement par rapport à la droite AC, de sorte que, si E et F sont les pieds sur CD des perpendiculaires communes à CD et à ces axes, C est le milieu de EF et CD égale EF. Il résulte de cette disposition de la *fig.* 6 que les symétriques

Fig. 6.



de S_3, S_4, S_5, par rapport au point O centre des deux substitutions paraboliques S_1 et S_2, leur sont congruentes par rapport au groupe du polygone fondamental. Une substitution de période 2, ayant pour point double O, est donc permutable avec le groupe engendré par S_1, S_2, S_3, S_4, S_5.

Si $p > 7$, S_4 et S_5 appartiennent à de nouveaux cycles : l'explication précédente est donc insuffisante, et il faut encore montrer comment les symétriques des substitutions de ces cycles, par rapport au point O, leur sont congruentes.

Ici intervient un nouveau fait géométrique, qu'on peut appeler *la distribution symétrique des éléments des substitutions*. Les angles du polygone fondamental autres que ceux qui sont nuls n'étant jamais inférieurs à $\frac{2\pi}{3}$, il n'y a pas de cycles contenant plus de trois substitutions. Supposons que S_4 appartienne à un cycle contenant deux autres substitutions elliptiques. Soit P le pied de la perpendiculaire commune aux axes de S_3 et de S_4.

La distance de P aux pieds des perpendiculaires abaissées des points doubles des deux substitutions elliptiques sur l'axe de S_4 est un multiple de la $\frac{1}{2}$L de S_4. Dans les autres cas, on a des théorèmes analogues.

Exemple : $p = 13$ (¹). — Les substitutions génératrices sont

$$S_1 S_2 = S_3, \quad S_5 S_4 = S_3, \quad S_7 S_6 = S_4, \quad S_9 S_8 = S_5,$$
$$S_6^3 = S_7^2 = S_8^2 = S_9^3 = 1.$$

Les axes de S_3 et de S_4 sont respectivement représentés par les équations

$$x^2 + y^2 - 13x + 13 = 0,$$
$$x^2 + y^2 - 8x + 13 = 0;$$

la perpendiculaire commune à ces deux axes est représentée par l'équation

$$x^2 + y^2 = 13,$$

et passe précisément par le point double de S_6, qui a pour affixe $\frac{7 + i\sqrt{3}}{2}$.

Les considérations précédentes peuvent s'étendre à d'autres fonctions.

Les côtés du polygone $i\infty \mathrm{MAM}' i\infty$ se correspondent deux à deux $\mathrm{M}i\infty$ et $\mathrm{M}'i\infty$ par une substitution parabolique, MA et M'A par une substitution de période 2 (*fig.* 6).

Le produit des deux substitutions génératrices est une substitution de période 4.

Formons le polygone $i\infty \mathrm{MBM'CM''DM'''}i\infty$, dans lequel $\mathrm{M}'''i\infty$ est changé en $\mathrm{M}i\infty$ par une substitution parabolique S_1, BM en BM' par une substitution parabolique S_2, CM' en CM'' par une substitution S_3 de période 2, DM'' en DM''' par une autre substitution de période 2, S_4. Le produit $S_1 S_2$ égale $S_4 S_3$. Comme tout à l'heure pour la transformation du cinquième ordre, envisageons deux cercles non euclidiens tangents à CD en I et H, et ayant leurs centres à l'infini, l'un en B, l'autre en E, point double de S_1. On voit que IH = CD et que le point I est le milieu de CD. Il en résulte qu'une substitution de période 2, ayant pour point double le milieu des deux points où les cercles non euclidiens rencontrent BE, donne un système de substitutions égal au système S_1, S_2, S_3, S_4, dérivant des substitutions primitives et pouvant se déduire de certaines transformées des substitutions primitives.

(¹) Se reporter à la figure qui se trouve dans les *Math. Annalen*, t. XIV, page 137, en supposant les douze triangles de gauche transportés à droite.