SUR LES

CONGRUENCES FORMÉES D'AXES OPTIQUES

ET SUR LES

SURFACES A COURBURE TOTALE CONSTANTE,

PAR M. E. COSSERAT,

Chargé d'un Cours complémentaire à la Faculté des Sciences de Toulouse.

M. Darboux a été amené, dans ses recherches sur le théorème de Malus et Dupin, à considérer les systèmes d'*axes optiques* d'une surface. A chaque point M d'une surface correspondent quatre axes optiques : ce sont les axes des cylindres de révolution qui coupent le plan tangent en M à la surface considérée suivant l'indicatrice relative à ce point. Les congruences engendrées par les systèmes d'axes optiques d'une surface ne sont évidemment pas quelconques et leur étude mérite d'être traitée à part; nous nous attacherons ici à un certain nombre de propositions qui nous ont été inspirées par la lecture des *Leçons* de M. Darboux.

Le théorème énoncé à la page 286 du Tome II conduit à se demander si la congruence déterminée par un des systèmes d'axes optiques d'une surface (Σ) peut être formée de normales à une même surface ou encore si ses développables peuvent découper sur (Σ) un système conjugué.

Rapportons (Σ) à ses lignes de courbure et adjoignons à chaque point de (Σ) le trièdre (T) habituel, en sorte que nous pourrons appliquer les formules du Tableau V des *Leçons* de M. Darboux.

Considérons l'un des deux axes optiques situés dans le plan des xz; ses équations seront

$$y = 0, \qquad x\cos\gamma - z\sin\gamma = 0,$$

l'auxiliaire γ satisfaisant à l'équation

$$\cos^2\gamma = \frac{R'}{R}.$$

La condition

$$\frac{\partial \log A \sin\gamma}{\partial v} = 0,$$

pour que la congruence considérée soit formée de normales à une surface, se met facilement sous la forme suivante

$$\frac{\partial (RR')}{\partial v} = 0,$$

dont l'interprétation géométrique est immédiate.

La condition trouvée est la même, comme on devait s'y attendre, pour les deux axes optiques situés dans le plan des xz.

La condition relative aux deux axes optiques situés dans le plan des yz est de même

$$\frac{\partial (RR')}{\partial u} = 0.$$

On peut, par suite, énoncer la proposition suivante :

Si toutes les congruences constituées par les axes optiques d'une surface (Σ) *sont formées de normales à des surfaces, cette surface* (Σ) *est à courbure totale constante, et réciproquement.*

Reprenons les équations d'un des deux axes optiques situés dans le plan des xz; les développables de la congruence qu'il détermine découpent (Σ) suivant un système conjugué, si l'on a

$$q\frac{\partial \gamma}{\partial v} + rp_1 \sin\gamma \cos\gamma = 0.$$

Cette condition se transforme immédiatement; on trouve encore

$$\frac{\partial (RR')}{\partial v} = 0.$$

Il en résulte, en particulier, le théorème suivant :

Si les développables de chacune des congruences constituées par les axes optiques d'une surface (Σ) *la découpent suivant un système conjugué, cette surface* (Σ) *est à courbure totale constante, et réciproquement.*

Les propositions que nous venons d'énoncer caractérisent les surfaces à courbure totale constante; on peut trouver également une propriété caractéristique des quadriques.

M. Darboux remarque que dans le cas d'une quadrique les axes optiques de la surface sont les génératrices rectilignes des quadriques homofocales à la proposée; d'où il résulte que les congruences formées par les axes optiques sont, dans ce cas, des congruences isotropes; je dis qu'inversement on peut énoncer le théorème suivant :

Si l'une des congruences déterminées par les axes optiques d'une surface (Σ) *est isotrope, les autres sont également isotropes et la surface* (Σ) *est une quadrique.*

En effet, les conditions pour que la congruence déterminée par l'un des deux axes optiques situés dans le plan des xz soit isotrope sont

$$C\frac{\partial\gamma}{\partial u} - A r_1 \sin\gamma\cos\gamma = 0,$$

$$A\cos\gamma\frac{\partial\gamma}{\partial v} + C r \sin\gamma = 0.$$

Ces conditions se transforment aisément dans les suivantes

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{R}{R'^3}\right) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{R'}{R^3}\right) = 0,$$

ce qui, en vertu du théorème bien connu de O. Bonnet, établit la proposition.