40. On peut maintenant supposer

$$|z| > 1, \qquad |t| > 1, \qquad \max\left(\frac{2}{t} - \frac{1}{z}\right) = \frac{3}{2}, \qquad \text{d'où} \qquad \left|\frac{7}{2} - \frac{3}{q}\right| \leqq \frac{3}{2};$$

$$\frac{7}{2} - \frac{3}{q} \leqq \frac{3}{2} \quad \text{donne} \quad q \leqq 1,$$

$$\frac{3}{q} - \frac{7}{2} \leqq \frac{3}{2} \quad \text{donne} \quad q > 0,$$

donc

$$q = 1,$$

$$\frac{2}{t} - \frac{1}{z} = \frac{1}{2}, \qquad z = \frac{2t}{4-t}, \qquad 4 - t = t', \qquad z = \frac{8}{t'} - 2,$$

$$\begin{array}{llllllllll} t' = & -8, & -4, & -2, & -1, & 1, & 2, & 4, & 8, & \infty, \\ t = & 12, & 8, & 6, & 5, & 3, & 2, & -4, & \infty, & 4, \\ z = & -3, & -4, & -6, & -10, & 6, & 2, & -1, & -2, & \infty. \end{array}$$

J'écarte immédiatement la solution

$$\begin{matrix} t = -4 \\ z = -1 \end{matrix} \qquad \text{où} \qquad |z| = 1.$$

$u = \dfrac{2t}{t+2}$ élimine $t = 12, 8, 6, 5, 3, 4$; reste

$$t = 2, \quad \infty,$$
$$z = 2, \quad -2.$$

$t = \infty$, $z = -2$ donnent $p = \frac{2}{3}$; $x = 2$, $y = -1$, $z = t = 2$ donnent une solution,

$$a = b = c = 1, \qquad d = -\tfrac{1}{2};$$

mais cette solution rentre dans une solution plus générale que nous trouverons plus tard.

41. Reportons-nous au n° 27, et faisons $y = 1$.

Le système à résoudre est le suivant

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} - \frac{3}{u} = 2, \qquad \frac{1}{t} - \frac{2}{z} - \frac{3}{p} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{v} = 1, \qquad \frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{3}{r} = \frac{5}{2},$$

$$\frac{2}{t} - \frac{1}{z} + \frac{3}{w} = 1, \qquad \frac{1}{z} - \frac{2}{t} - \frac{3}{q} = \frac{1}{2}.$$

Considérons la première de ces équations. Pour

$$\left|\frac{1}{z}\right| < \frac{2}{3}, \quad \left|\frac{1}{t}\right| < \frac{2}{3}, \quad \left|\frac{3}{u}\right| < \frac{2}{3} \quad \text{ou} \quad |z| > 1, \quad |t| > 1, \quad |u| > 4,$$

il n'y aura pas de solutions.

42. Soit $z = -1$, on a

$$t = \frac{u}{3u+3}, \quad 3u+3 = u', \quad t = \frac{1}{3} - \frac{3}{3u'}; \quad 1 - \frac{3}{u'} \equiv 0 \pmod{3}.$$

$\left.\begin{matrix} u = -1 \\ t = \infty \end{matrix}\right\}$ est la seule solution; elle donne

$$p = -\tfrac{6}{5}.$$

43. $z = +1$, on a

$$t = \frac{u}{u+3}, \quad u+3 = u', \quad t = 1 - \frac{3}{u'},$$

$$u' = -3, -1, 1, 3,$$

$$\begin{aligned} u &= -6, -4, -2, \infty, -3, \\ t &= 2, 4, -2, 1, \infty. \end{aligned}$$

$p = \dfrac{6t}{2-5t}$ élimine $t = 2, 4, \infty$.

$t = -2$ donne une solution qui rentre dans une solution plus générale que nous trouverons plus tard.

3e *solution :* $x = 2$, $\quad t = y = z = 1$, $\quad a = b = c = \frac{1}{2}$, $\quad d = 0$.

44. Revenons au n° 41. On peut supposer

$$|z| > 1, \quad |t| > 1, \quad \max\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{t}\right) = 1,$$

d'où

$$\left|\frac{3}{u} + 2\right| \leqq 1,$$

$-\dfrac{3}{u} - 2 \leqq 1$ donne

$$\frac{1}{u} \geqq -1,$$

$\frac{3}{u} + 2 \leqq 1$ donne

$$\frac{1}{u} \leqq -\frac{1}{3},$$

d'où

$$u = -1, \ -2, \ -3.$$

Soit $u = -3$,

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = 1 \qquad z = \frac{t}{t-1},$$

$$t = 2, \ \infty, \ 1,$$
$$z = 2, \ 1, \ \infty.$$

$t = \infty$, $z = 1$ donnent

$$w = \tfrac{3}{2}.$$

4ᵉ *solution :*	$x = y = z = 2,$	$t = 1,$	$a = b = c = \frac{1}{3},$	$d = \frac{5}{6}.$

45. Soit $u = -2$,

$$z = \frac{2t}{t-2},$$

$$t = -2, \quad 1, \ 3, \ 4, \ 6, \ \infty, \ 2,$$
$$z = \quad 1, \ -2, \ 6, \ 4, \ 3, \ 2, \ \infty.$$

Nous écartons les solutions où l'on n'a pas $|z| > 1$, $|t| > 1$.

5ᵉ *solution :*	$x = 1,$	$y = 2,$	$z = 3,$	$t = 6,$	$a = 1,$	$b = \frac{1}{2},$	$c = \frac{1}{3},$	$d = \frac{1}{6}.$
6ᵉ *solution :*	$x = y = 4,$		$z = 1,$	$t = 2,$	$a = b = \frac{1}{4},$		$c = 1,$	$d = \frac{1}{2}.$
7ᵉ *solution :*	$x = y = 2,$		$z = 1,$	$t = \infty,$	$a = b = \frac{1}{2},$		$c = 1,$	$d = 0.$

46. $u = -1$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = -1,$$

$$t = -2, \quad \infty, \ -1,$$
$$z = -2, \ -1, \quad \infty.$$

$t = z = -2$ donne

$$r = \tfrac{2}{3}.$$

47. Reportons-nous au n° 27.

Soit $y = 2$. Les équations à résoudre sont

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} - \frac{3}{u} = 1, \qquad \frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{v} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{3}{r} = 2,$$

$$\frac{2}{t} - \frac{1}{z} + \frac{3}{w} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{2}{t} - \frac{1}{z} + \frac{3}{q} = \frac{1}{2}.$$

Prenons l'équation $\frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{3}{r} = 2$.

Si l'on a

$$\left|\frac{2}{z}\right| < \frac{2}{3}, \quad \left|\frac{2}{t}\right| < \frac{2}{3}, \quad \left|\frac{3}{r}\right| < \frac{2}{3}, \quad \text{ou} \quad |z| > 3, \quad |t| > 3, \quad |r| > 4,$$

il n'y a pas de solutions.

48. Soit $z = 3$,

$$\frac{2}{t} + \frac{3}{r} = \frac{4}{3},$$

$$t = -12,\ 6,\ 2.$$

8^e *solution :*	$x = y = 2,$	$z = 3,$	$t = -12,$	$a = b = \frac{3}{4},$	$c = \frac{7}{12},$	$d = \frac{1}{6}.$
9^e *solution :*	$x = y = 2,$	$z = 3,$	$t = 6,$	$a = b = \frac{2}{3},$	$c = \frac{1}{2},$	$d = \frac{1}{3}.$
10^e *solution :*	$x = y = z = 2,$		$t = 3,$	$a = b = c = \frac{5}{9},$		$d = \frac{7}{18}.$

49. $z = 2$ donne

$$\frac{2}{t} + \frac{3}{r} = 1,$$

$$\begin{aligned} r &= -3,\ \ 1,\ \ 2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 9,\ \infty,\ 3, \\ t &= \ \ 1,\ -1,\ -4,\ 8,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ \infty; \end{aligned}$$

les valeurs $t = 1, -1$ sont écartées, puisqu'on a déjà fait $y = 1$, $y = -1$.

11e *solution* :	$x=y=z=2$,	$t=-4$,	$a=b=c=\frac{3}{4}$,	$d=0$.
12e *solution* :	$x=y=z=2$,	$t=8$,	$a=b=c=\frac{5}{8}$,	$d=\frac{1}{4}$.
13e *solution* :	$x=y=z=2$,	$t=5$,	$a=b=c=\frac{3}{5}$,	$d=\frac{3}{10}$.
14e *solution* :	$x=y=z=2$,	$t=4$,	$a=b=c=\frac{7}{12}$,	$d=\frac{1}{3}$.

15e *solution* :	$x=y=z=2$,	$t=3$,	$a=b=c=\frac{5}{9}$,	$d=\frac{7}{18}$.
16e *solution* :	$x=y=z=t=2$,		$a=b=c=d=\frac{1}{2}$.	
17e *solution* :	$x=y=z=2$,	$t=\infty$,	$a=b=c=\frac{2}{3}$,	$d=\frac{1}{6}$.

50. Il est inutile de faire $z=1, -1, -2$, puisque nous avons déjà donné ces valeurs à y.

Soit $z=-3$, on a

$$\frac{2}{t}+\frac{3}{r}=\frac{8}{3},$$

$$r=1,$$
$$t=-6.$$

18e *solution* :	$x=y=2$,	$z=-3$,	$t=-6$,	$a=b=1$,	$c=\frac{1}{6}$,	$d=\frac{1}{3}$.

51. Revenons au n° 47. On peut supposer

$$|z|>3, \qquad |t|>3, \qquad \max\left(\frac{2}{z}+\frac{2}{t}\right)=1,$$

d'où

$$\left|2-\frac{3}{r}\right|\leqq 1.$$

$2-\frac{3}{r}\leqq 1$ donne

$$\frac{3}{r}\geqq 1 \qquad \text{donc} \qquad r>0 \quad \text{et} \quad r\leqq 3,$$

$\frac{3}{r} - 2 \leqq 1$ donne

$$r \geqq 1 \qquad \text{donc} \qquad r = 1, 2, 3.$$

$r = 1$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = -\frac{1}{2},$$

$$\begin{array}{l} t = -6, \ -4, \ -3, \ -1, \quad 2, \quad \infty, \ -2, \\ z = -3, \ -4, \ -6, \quad 2, \ -1, \ -2, \quad \infty. \end{array}$$

Si nous écartons les solutions pour lesquelles on n'a pas $|z| > 3, |t| > 3$, reste

$$t = z = -4.$$

19^e^ *solution :* $x = y = 2, \quad z = t = -4, \quad a = b = 1, \quad c = d = \frac{1}{4}.$

52. $r = 2$ donne

$$\frac{2}{z} + \frac{2}{t} = \frac{1}{2},$$

$$\begin{array}{l} t = -12, \ -4, \quad 2, \quad 3, \ 5, \ 6, \ 8, \ 12, \ 20, \ \infty, \ 4, \\ z = \quad 3, \quad 2, \ -4, \ -12, \ 20, \ 12, \ 8, \ 6, \ 5, \ 4, \ \infty. \end{array}$$

20^e^ *solution :* $x = y = 2, \quad z = 5, \quad t = 20, \quad a = b = \frac{3}{4}, \quad c = \frac{9}{20}, \quad d = \frac{3}{10}.$
21^e^ *solution :* $x = y = 2, \quad z = 6, \quad t = 12, \quad a = b = \frac{3}{4}, \quad c = \frac{5}{12}, \quad d = \frac{1}{3}.$
22^e^ *solution :* $x = y = 2, \quad z = t = 8, \quad a = b = \frac{3}{4}, \quad c = d = \frac{3}{8}.$
23^e^ *solution :* $x = y = 2, \quad z = 4, \quad t = \infty, \quad a = b = \frac{3}{4}, \quad c = \frac{1}{2}, \quad d = \frac{1}{4},$

53. $r = 3$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{1}{2},$$

$$\begin{array}{l} t = -2, \quad 1, \ 3, \ 4, \ 6, \ \infty, \ 2, \\ z = \quad 1, \ -2, \ 6, \ 4, \ 3, \ 2, \ \infty. \end{array}$$

24^e^ *solution :* $x = y = 2, \quad z = t = 4, \quad b = b = \frac{2}{3}, \quad c = d = \frac{5}{12}.$

54. Reportons-nous au n° 27 et faisons $y = -3$.
Les équations à résoudre sont

$$\frac{3}{u} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} = \frac{2}{3}, \qquad \frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = \frac{13}{6},$$

$$\frac{1}{t} - \frac{2}{z} - \frac{3}{v} = \frac{1}{3}, \qquad \frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{3}{r} = \frac{7}{6},$$

$$\frac{1}{z} - \frac{2}{t} - \frac{3}{w} = \frac{1}{3}, \qquad \frac{2}{t} - \frac{1}{z} + \frac{3}{q} = \frac{13}{6}.$$

Prenons l'équation

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = \frac{13}{6}.$$

Si l'on a simultanément

$$\left|\frac{2}{z}\right| < \frac{13}{18}, \quad \left|\frac{1}{t}\right| < \frac{13}{18}, \quad \left|\frac{3}{p}\right| < \frac{13}{18},$$

ou bien

$$|z| > 2, \quad |t| > 1, \quad |p| > 4,$$

il n'y a pas de solutions; or on peut supposer

$$|z| > 2, \quad |t| > 2, \qquad \text{d'où} \qquad \max.\left(\frac{2}{z} - \frac{1}{t}\right) = 1.$$

Donc

$$\left|\frac{13}{6} - \frac{2}{p}\right| \leqq 1, \qquad \text{d'où} \qquad p = 1,\ 2.$$

55. Soit $p = 1$, on a

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} = -\frac{5}{6},$$

$$\begin{array}{llllll} z = & -6, & -4, & -3, & -2, & 12, \\ t = & 2, & 3, & 6, & -6, & 1. \end{array}$$

$z = -4$, $t = 3$ donne

$$w = -\tfrac{12}{5}.$$

25^e *solution :* $x = y = -3$, $z = 2$, $t = 6$, $a = b = \frac{1}{3}$, $c = \frac{7}{6}$, $d = \frac{5}{6}$.

56. Soit $p = 2$,

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} = \frac{2}{3},$$

$$\begin{array}{lrrrrrr} z = & -6, & 2, & 4, & 6, & 12, & 3, \\ t = & 1, & -3, & 6, & 3, & 2, & \infty. \end{array}$$

$q = \dfrac{6z}{7z-6}$ élimine $z = 4$, 3; reste

$$z = 6,$$
$$t = 3,$$

qui donne

$$u = \tfrac{18}{7}.$$

57. Reportons-nous au n° 27 et faisons $y = 3$, on a

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} - \frac{3}{u} = \frac{2}{3}, \qquad \frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = \frac{5}{6},$$

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{v} = \frac{1}{3}, \qquad \frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{3}{r} = \frac{11}{6},$$

$$\frac{2}{t} - \frac{1}{z} + \frac{3}{w} = \frac{1}{3}, \qquad \frac{2}{t} - \frac{1}{z} + \frac{3}{q} = \frac{5}{6}.$$

Considérons l'équation

$$\frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{3}{r} = \frac{11}{6}.$$

Si l'on a simultanément

$$\left|\frac{2}{z}\right| < \frac{11}{18}, \quad \left|\frac{2}{t}\right| < \frac{11}{18}, \quad \left|\frac{3}{r}\right| < \frac{11}{18},$$

ou bien

$$|z| > 3, \quad |t| > 3, \quad |r| > 4,$$

il n'y a pas de solutions. Or on peut supposer

$$|z| > 2, \quad |t| > 2.$$

58. Soit $z = 3$, on a

$$\frac{2}{t} + \frac{3}{r} = \frac{7}{6}.$$

Pour $|t| > 3$, $|r| > 5$, il n'y a pas de solutions; soit $t = 3$ (alors $r = 6$), on trouve ensuite

$$t = -6, \ 12.$$

$x = y = z = 3$, $t = 2$ est une solution.

26e *solution :*	$x=y=z=3$,	$t=2$,	$a=b=c=\frac{1}{2}$,		$d=\frac{2}{3}$.
27e *solution :*	$x=y=3$, $z=2$,	$t=-6$,	$a=b=\frac{2}{3}$,	$c=\frac{5}{6}$,	$d=\frac{1}{6}$.
28e *solution :*	$x=y=3$, $z=2$,	$t=12$,	$a=b=\frac{7}{12}$,	$c=\frac{3}{4}$,	$d=\frac{1}{3}$.

59. On a

$$\max.\left(\frac{2}{z}+\frac{2}{t}\right)=1, \qquad \text{d'où} \qquad \left|\frac{11}{6}-\frac{3}{r}\right|\leqq 1,$$

ce qui donne

$$r=2,\ 3,$$

soit $r=2$,

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{1}{6},$$

$$\begin{array}{llllllllllllllllll}
t= & -30, & -12, & -6, & -3, & 2, & 3, & 4, & 5, & 7, & 8, & 9, & 10, & 12, & 15, & 18, & 24, \\
z= & 5, & 4, & 3, & 2, & -3, & -6, & -12, & -30, & 42, & 24, & 18, & 15, & 12, & 10, & 9, & 8,
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
t= & 42, & \infty, & 6, \\
z= & 7, & 6, & \infty.
\end{array}$$

$p=\dfrac{6t}{t+6}$ élimine $t=-30, 7, 8, 9, 10$; reste

$$\begin{array}{llll}
t= & -12, & 12, & \infty, \\
z= & 4, & 12, & 6.
\end{array}$$

$q=\dfrac{6z}{z+6}$ élimine $z=4$.

29e *solution :*	$x=2$,	$y=3$,	$z=12$,	$t=+12$,	$a=b=\frac{5}{12}$,		$c=\frac{5}{6}$,	$d=\frac{2}{3}$.
30e *solution :*	$x=2$,	$y=3$,	$z=6$,	$t=\infty$,	$a=\frac{5}{6}$,	$b=\frac{2}{3}$,	$c=\frac{1}{2}$,	$d=\frac{1}{3}$.

60. $r=3$ donne

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{5}{12},$$

pour $|z|>4$, $|t|>4$, pas de solutions,

$$\begin{array}{lll}
t= & 3, & 4, \\
z= & 12, & 6.
\end{array}$$

la première solution a déjà été trouvée (58).

31ᵉ *solution :* $x=2,\quad y=3,\quad z=4,\quad t=6,\quad a=\frac{3}{4},\quad b=\frac{7}{12},\quad c=\frac{1}{2},\quad d=\frac{5}{12}.$

61. Reportons-nous maintenant au n° 27 et soit $y=-4$. Le système à résoudre est

$$\frac{3}{u}-\frac{1}{z}-\frac{1}{t}=\frac{1}{2},\qquad \frac{2}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{p}=2,$$
$$\frac{1}{t}-\frac{2}{z}-\frac{3}{v}=\frac{1}{4},\qquad \frac{2}{z}+\frac{2}{t}+\frac{3}{r}=\frac{5}{4},$$
$$\frac{1}{z}-\frac{2}{t}-\frac{3}{w}=\frac{1}{4},\qquad \frac{2}{t}-\frac{1}{z}+\frac{3}{q}=2.$$

L'équation $\frac{2}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{p}=2$ n'aura pas de solution si l'on prend simultanément

$$\left|\frac{2}{z}\right|<\frac{2}{3},\quad \left|\frac{1}{t}\right|<\frac{2}{3},\quad \left|\frac{3}{p}\right|<\frac{2}{3},$$

ou

$$|z|>3,\quad |t|>1,\quad |p|>4.$$

Or on peut supposer

$$|z|>3,\quad |t|>3;$$

donc

$$\max.\left(\frac{2}{z}-\frac{1}{t}\right)=\frac{3}{4};$$

ceci donne la condition

$$\left|2-\frac{3}{p}\right|\leqq\frac{3}{4},\qquad \text{d'où}\qquad p=2.$$

62. Soit donc $p=2$,

$$\frac{2}{z}-\frac{1}{t}=\frac{1}{2},$$

$$\begin{array}{llllllllll} z= & 12, & 8, & 6, & 5, & 3, & 2, & -4, & \infty, & 4,\\ t=- & 3, & -4, & -6, & -10, & \mathbf{6}, & \mathbf{2}, & -1, & -2, & \infty, \end{array}$$

$r=\frac{4z}{3z-8}$ élimine $z=6,5$; $q=\frac{z-1}{z}$ élimine $z=8,4$.

63. Revenons au n° 27 et soit $y = 4$. Le système à résoudre est

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} - \frac{3}{u} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = 1,$$

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{v} = \frac{1}{4}, \qquad \frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{3}{r} = \frac{7}{4},$$

$$\frac{2}{t} - \frac{1}{z} + \frac{3}{w} = \frac{1}{4}, \qquad \frac{2}{t} - \frac{1}{z} + \frac{3}{q} = 1.$$

L'équation

$$\frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{3}{r} = \frac{7}{4}$$

n'aura pas de solutions si l'on prend simultanément

$$\left|\frac{2}{z}\right| < \frac{7}{12}, \quad \left|\frac{2}{t}\right| < \frac{7}{12}, \quad \left|\frac{3}{r}\right| < \frac{7}{12},$$

ou bien

$$|z| > 3, \quad |t| > 3, \quad |r| > 5.$$

On peut supposer

$$|z| > 3, \quad |t| > 3, \qquad \text{d'où} \qquad \max.\left(\frac{2}{z} + \frac{2}{t}\right) = 1.$$

Donc

$$\left|\frac{7}{4} - \frac{3}{r}\right| \leqq 1, \qquad \text{d'où} \qquad r = 2, 3, 4.$$

64. Soit $r = 2$,

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{1}{8},$$

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrrr} z = & -56, & -24, & -8, & 4, & 6, & 7, & 9, & 10, & 12, & 16, & 24, & 40, & 72, & \infty, & 8, \\ t = & 7, & 6, & 4, & -8, & -24, & -56, & 72, & 40, & 24, & 16, & 12, & 10, & 9, & 8, & \infty. \end{array}$$

$p = \dfrac{4t}{t+4}$ élimine $t = 7, 6, 72, 40, 24, 16, 8$. Reste

$$z = -8,$$
$$t = 4.$$

32^e *solution :* $x = y = 4$, $z = 2$, $t = -8$, $a = b = \frac{5}{8}$, $c = \frac{7}{8}$, $d = \frac{1}{4}$

65. $r=3$ donne

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{3}{8};$$

pour $|z|>5$, $|t|>5$, il n'y a pas de solutions.

$$t=4,$$
$$z=8$$

donne

$$q=\tfrac{24}{5}.$$

66. $r=4$ donne

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{1}{2};$$

$$\begin{array}{llllllll} z= & -2, & 1, & 3, & 4, & 6, & \infty, & 2,\\ t= & \mathbf{1}, & \mathbf{-2}, & \mathbf{6}, & \mathbf{4}, & \mathbf{3}, & \mathbf{2}, & \infty. \end{array}$$

33^e^ *solution :* $x=y=z=4$, $t=2$, $a=b=c=\frac{1}{2}$, $d=\frac{3}{4}$

67. Revenons au n° 27, soit $y=-5$.

On a à résoudre le système suivant :

$$\frac{3}{u}-\frac{1}{z}-\frac{1}{t}=\frac{2}{5},\qquad \frac{2}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{p}=\frac{19}{10},$$
$$\frac{1}{t}-\frac{2}{z}-\frac{3}{v}=\frac{1}{5},\qquad \frac{2}{z}+\frac{2}{t}+\frac{3}{r}=\frac{13}{10},$$
$$\frac{1}{z}-\frac{2}{t}-\frac{3}{w}=\frac{1}{5},\qquad \frac{2}{t}-\frac{1}{z}+\frac{3}{q}=\frac{19}{10}.$$

Considérons l'équation

$$\frac{2}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{p}=\frac{19}{10}.$$

Il n'y aura pas de solutions si l'on a simultanément

$$\left|\frac{2}{z}\right|<\frac{19}{30},\quad \left|\frac{1}{t}\right|<\frac{19}{30},\quad \left|\frac{3}{p}\right|<\frac{19}{30}\qquad \text{ou}\qquad |z|>3,\quad |t|>1,\quad |p|>4.$$

Or on peut supposer $|z|>4$, $|t|>4$; donc

$$\max.\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{t}\right)=\frac{3}{5},\qquad \text{d'où}\qquad \left|\frac{19}{10}-\frac{3}{p}\right|\leqq\frac{3}{5};$$

d'où

$$p=2.$$

68. $p = 2$ donne

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} = \frac{2}{5};$$

$$\begin{array}{lrrrrrr} z = & 30, & 10, & 6, & 4, & -20, & 5, \\ t = & -\mathbf{3}, & -5, & -15, & \mathbf{10}, & -\mathbf{2}, & \infty. \end{array}$$

$r = \frac{10z}{7z - 20}$ élimine $z = 6, 5$. Reste

$$\begin{array}{l} z = \ \ 10, \\ t = -5, \end{array}$$

qui donne

$$q = \tfrac{5}{4}.$$

69. Revenons au n° 27, soit $y = 5$. Le système à résoudre est

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{z} + \frac{1}{t} - \frac{3}{u} = \frac{2}{5}, & \frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = \frac{11}{10}, \\ \frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{v} = \frac{1}{5}, & \frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{3}{r} = \frac{17}{10}, \\ \frac{2}{t} - \frac{1}{z} + \frac{3}{w} = \frac{1}{5}, & \frac{2}{t} - \frac{1}{z} + \frac{3}{q} = \frac{11}{10}. \end{array}$$

Prenons l'équation

$$\frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{3}{r} = \frac{17}{10}.$$

Elle n'aura pas de solutions, si l'on a simultanément

$$\left|\frac{2}{z}\right| < \frac{17}{30}, \quad \left|\frac{2}{t}\right| < \frac{17}{30}, \quad \left|\frac{3}{r}\right| < \frac{17}{30} \qquad \text{ou bien} \qquad |z| > 3, \quad |t| > 3, \quad |r| > 5.$$

Or on peut supposer $|z| > 4$, $|t| > 4$, donc

$$\max.\left(\frac{2}{z} + \frac{2}{t}\right) = \frac{4}{5}, \qquad \text{d'où} \qquad \left|\frac{17}{10} - \frac{3}{r}\right| \leqq \frac{4}{5};$$

donc

$$r = 2, \ 3.$$

70. Soit $r = 2$,

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{1}{10},$$

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrrrr} z = & -90, & -40, & -15, & -10, & 5, & 6, & 8, & 9, & 11, & 12, & 14, & 15, & 20, & 30, & 35, & 60, & 110, \\ t = & 9, & 8, & 6, & 5, & -\mathbf{10}, & -\mathbf{15}, & -\mathbf{40}, & -\mathbf{90}, & 110, & 60, & 35, & 30, & 20, & \mathbf{15}, & \mathbf{14}, & \mathbf{12}, & \mathbf{11}, \end{array}$$

$$\begin{array}{l} z = \infty, \ 10, \\ t = 10, \ \infty. \end{array}$$

$p = \frac{10t}{3t+10}$ élimine $t = 9, 8, 6, 110, 60, 35, 20, 10$. Reste

$$z = -10,\ 15,$$
$$t = 5,\ 30.$$

$q = \frac{10z}{3z+10}$ élimine $z = 15$.

34ᵉ *solution :* $x = y = 5$, $z = 2$, $t = -10$, $a = b = \frac{3}{5}$, $c = \frac{9}{10}$, $d = \frac{3}{10}$

71. Soit $r = 3$,

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{7}{20}.$$

Pour $|z| > 5$, $|t| > 5$, il n'y a pas de solutions; or $z = 5$ donne

$$t = \tfrac{20}{3}.$$

72. Revenons au n° 27. On peut supposer $|y| > 5$, $|z| > 5$, $|t| > 5$. Donc

$$\max.\left(\frac{2}{y} + \frac{2}{z} - \frac{1}{t}\right) = \frac{5}{6}, \qquad \text{d'où} \qquad \left|\frac{3}{2} - \frac{3}{p}\right| \leqq \frac{5}{6};$$

donc

$$p = 2,\ 3,\ 4.$$

De même,

$$q = 2,\ 3,\ 4, \qquad r = 2,\ 3,\ 4.$$

D'ailleurs, en ajoutant les équations du second groupe, on trouve

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{3}{2};$$

de là on tire

$$y = \frac{6pqr}{3pqr + 2pq - 4r(p+q)},$$
$$z = \frac{6pqr}{3pqr + 2pr - 4q(p+r)},$$
$$t = \frac{6pqr}{3pqr + 2rq - 4p(q+r)};$$

puis

$$u = \frac{3pqr}{r(p+q) - 2pq}, \qquad v = \frac{3pqr}{q(p+r) - 2pr}, \qquad w = \frac{3pqr}{p(q+r) - 2qr}.$$

73. Soit $p = q = 2$, $r = 2, 3, 4$.

35^{e} *solution :* $x = y = z = \infty$, $t = 2$, $a = b = c = \frac{1}{2}$, $d = 1$
36^{e} *solution :* $x = y = 9$, $t = 2$, $z = -18$, $a = b = \frac{5}{9}$, $c = \frac{17}{18}$, $d = \frac{7}{18}$
37^{e} *solution :* $x = y = 6$, $t = 2$, $z = -12$, $a = b = \frac{7}{12}$, $c = \frac{11}{12}$, $d = \frac{1}{3}$

74. $p = 2$, $q = 3$, $r = 3, 4$; $w = \dfrac{9r}{3 - 2r}$ élimine $r = 4$; $p = 2$, $q = r = 3$ donnent

$$t = \tfrac{9}{2}.$$

75. $p = 2$, $q = r = 4$ donne

$$x = 2, \qquad y = 3, \qquad z = t = 12,$$

solution déjà trouvée (n° 59).

76. $p = q = 3$, $r = 3, 4$; $p = q = 3$, $r = 4$ donne

$$z = t = \tfrac{9}{2}.$$

38^{e} *solution :* $x = y = z = 6$, $t = 2$, $a = b = c = \frac{1}{2}$, $d = \frac{5}{6}$

77. $p = 3$, $q = r = 4$ donne

$$t = \tfrac{18}{5}.$$

78. $p = q = r = 4$ donne la 33^{e} solution.

79. Revenons aux n^os 26 et 25, et faisons $x = -1$.

On a à résoudre le système suivant :

$$\frac{2}{y} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{u} = 3, \qquad \frac{2}{y} + \frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = 0,$$

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} - \frac{1}{y} + \frac{3}{v} = 3, \qquad \frac{2}{t} + \frac{2}{y} - \frac{1}{z} + \frac{3}{q} = 0,$$

$$\frac{2}{t} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} + \frac{3}{w} = 3, \qquad \frac{2}{z} + \frac{2}{t} - \frac{1}{y} + \frac{3}{r} = 0.$$

La première équation n'aura pas de solutions, si l'on suppose simultanément

$$\left|\frac{2}{y}\right| < \frac{3}{4}, \quad \left|\frac{1}{z}\right| < \frac{3}{4}, \quad \left|\frac{1}{t}\right| < \frac{3}{4}, \quad \left|\frac{3}{u}\right| < \frac{3}{4}$$

ou

$$|y| > 2, \quad |z| > 1, \quad |t| > 1, \quad |u| > 4.$$

Remarquons que nous avons trouvé *toutes* les solutions où l'un des nombres x, y, z, t est égal à 2. Nous essayerons donc $y = -2, -1, +1$.

80. Soit $y = 1$. Le système à résoudre devient

$$\frac{3}{u} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} = 1, \qquad \frac{1}{t} - \frac{2}{z} - \frac{3}{p} = 2,$$

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{v} = 4, \qquad \frac{1}{z} - \frac{2}{t} - \frac{3}{q} = 2,$$

$$\frac{2}{t} - \frac{1}{z} + \frac{3}{w} = 4, \qquad \frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{3}{r} = 1.$$

L'équation $\frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{v} = 4$ n'aura pas de solutions si l'on prend simultanément

$$\left|\frac{2}{z}\right| < \frac{4}{3}, \quad \left|\frac{1}{t}\right| < \frac{4}{3}, \quad \left|\frac{3}{v}\right| < \frac{4}{3} \quad \text{ou} \quad |z| > 1, \quad |v| > 2.$$

81. $z = -1$ donne

$$\frac{3}{v} - \frac{1}{t} = 6,$$

qui n'a pas de solutions, car

$$\max.\left(\frac{3}{v} - \frac{1}{t}\right) = 4.$$

82. $z = +1$ donne

$$\frac{3}{v} - \frac{1}{t} = 2, \qquad t = -2, -1, 1.$$

$w = \dfrac{3t}{5t-2}$ élimine $-2, -1$.

$x = y = z = 1$, $t = -1$ donne

$$a = b = c = 1, \qquad d = -1;$$

cette solution rentre dans une solution plus générale, que nous trouverons plus tard (86).

83. Revenons au n° 80; on peut supposer

$$|z| > 1, \qquad |t| > 1, \qquad \text{d'où} \qquad \text{max.}\left(\frac{2}{z} - \frac{1}{t}\right) = \frac{3}{2}.$$

Donc

$$\left|4 - \frac{3}{v}\right| \leq \frac{3}{2}, \qquad \text{et, par suite,} \qquad v = 1.$$

$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} = 1$. On a

$$t = -3, \; -2, \; 1, \; \infty, \; -1,$$
$$z = \;\;3, \;\;\; 4, \; 1, \; 2, \; \infty.$$

$w = \frac{z}{2z-1}$ élimine 3, 4, ∞.

84. Revenons au n° 79 et faisons $y = -1$. Le système à résoudre est

$$\frac{3}{u} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} = 5, \qquad \frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = 2,$$
$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{v} = 2, \qquad \frac{2}{t} - \frac{1}{z} + \frac{3}{q} = 2,$$
$$\frac{2}{t} - \frac{1}{z} + \frac{3}{w} = 2, \qquad \frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{3}{r} = -1.$$

Or, si nous considérons la première équation, le maximum du premier membre est précisément 5; il est atteint pour $z = t = -1$. La solution ainsi trouvée $(a = b = c = d = 1)$ rentre dans une solution plus générale que nous trouverons plus tard (86).

85. Revenons au n° 79, et faisons $y = -2$.

La première équation devient $\frac{3}{u} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} = 4$. Il n'y aura pas de solutions si l'on a simultanément

$$\left|\frac{3}{u}\right| < \frac{4}{3}, \qquad \left|\frac{1}{z}\right| < \frac{4}{3}, \qquad |t| < \frac{4}{3}, \qquad \text{ou} \qquad |u| > 2.$$

Comme on a

$$\text{max.}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{t}\right) = 1,$$

on en conclut

$$\left|\frac{3}{u} - 4\right| \leq 1, \qquad u = 1.$$

$\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=-1$. On a

$$z=-2,\quad \infty,\quad -1,$$
$$t=-2,\quad -1,\quad \infty.$$

La solution ainsi trouvée $x=y=z=-2$; $t=-1$ rentre toujours dans la même solution générale que nous allons trouver à l'instant (86).

86. Revenons au nº 79; on suppose $|y|>2$, $|z|>2$, $|t|>2$. Donc

$$\max.\left(\frac{2}{y}-\frac{1}{z}-\frac{1}{t}\right)=\frac{4}{3},\qquad \text{d'où}\qquad \left|\left(3-\frac{3}{u}\right)\right|\leqq\frac{4}{3},$$

donc

$$u=1,\qquad \text{et, de même,}\qquad v=w=1.$$

Donc

$$\frac{2}{y}=\frac{1}{z}+\frac{1}{t},$$
$$\frac{2}{z}=\frac{1}{t}+\frac{1}{y},$$
$$\frac{2}{t}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z},$$

donc

$$\frac{3}{y}=\frac{3}{z}=\frac{3}{t}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t},$$

ainsi

$$y=z=t=n$$

(n étant un entier quelconque positif ou négatif).

> 39e *solution :* $x=y=z=-n,\qquad t=-1,\qquad a=b=c=1,\qquad d=\frac{1}{n},$
> n étant un nombre entier arbitraire, positif ou négatif.

87. Revenons au nº 26 et faisons $x=-5$. Le système à résoudre sera

$$\frac{2}{y}-\frac{1}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{u}=\frac{7}{5},\qquad \frac{2}{y}+\frac{2}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{p}=\frac{4}{5},$$
$$\frac{2}{z}-\frac{1}{t}-\frac{1}{y}+\frac{3}{v}=\frac{7}{5},\qquad \frac{2}{z}+\frac{2}{t}-\frac{1}{y}+\frac{3}{r}=\frac{4}{5},$$
$$\frac{2}{t}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}+\frac{3}{w}=\frac{7}{5},\qquad \frac{2}{t}+\frac{2}{y}-\frac{1}{z}+\frac{3}{q}=\frac{4}{5}.$$

La première équation n'aura pas de solutions si l'on a simultanément

$$\left|\frac{2}{y}\right| < \frac{7}{20}, \quad \left|\frac{1}{z}\right| < \frac{7}{20}, \quad \left|\frac{1}{t}\right| < \frac{7}{20}, \quad \left|\frac{3}{u}\right| < \frac{7}{20},$$

ou bien

$$|y| > 5, \quad |z| > 2, \quad |t| > 2, \quad |u| > 8.$$

Nous allons faire varier y dans l'intervalle $(-5, +5)$, en omettant les valeurs $y = 2, -1$, qui ne pourraient donner que des solutions déjà trouvées.

88. Soit $y = 1$; $\frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{v} = \frac{12}{5}$ n'aura pas de solutions si l'on suppose

$$\left|\frac{2}{z}\right| < \frac{4}{5}, \quad \left|\frac{1}{t}\right| < \frac{4}{5}, \quad \left|\frac{3}{v}\right| < \frac{4}{5} \quad \text{ou} \quad |z| > 2, \quad |t| > 1, \quad |v| > 3,$$

$t = 1$ donne

$$\frac{2}{z} + \frac{3}{v} = \frac{17}{5}, \qquad z = 5.$$

La solution correspondante $(a = b = 1,\ c = \frac{1}{5},\ d = -\frac{1}{5})$ rentre dans une solution plus générale (146).

89. $z = -2$ donne

$$\frac{3}{v} - \frac{1}{t} = \frac{17}{5},$$

qui n'a pas de solutions.

90. $z = 1$ donne

$$\frac{3}{v} - \frac{1}{t} = \frac{2}{5} \qquad \text{et} \qquad \frac{2}{t} + \frac{3}{w} = \frac{17}{5},$$

dont la seule solution est $t = 5$ (déjà trouvée).

91. On peut supposer $|z| > 2$, $|t| > 2$,

$$\max.\left(\frac{2}{z} - \frac{1}{t}\right) = 1, \qquad \text{d'où} \qquad \left|\frac{12}{5} - \frac{3}{v}\right| \leqq 1,$$

d'où

$$v = 1, 2.$$

$v = 1$ donne

$$\frac{1}{t} - \frac{2}{z} = \frac{3}{5},$$

$$\begin{aligned} z &= -20, \ -5, \ -4, \ -3, \ 5, \\ t &= \quad 2, \quad 5, \quad 10, \ -15, \ 1. \end{aligned}$$

$w = \dfrac{5z}{2z-5}$ élimine $z = -5, -4, -3$.

92. $v = 2$ donne

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} = \frac{9}{10};$$

or on trouve

$$p = -\tfrac{7}{10}.$$

93. Revenons au nº 87 et faisons $y = -2$. On a d'abord

$$\frac{3}{u} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} = \frac{12}{5},$$

équation qui n'a pas de solutions si l'on a simultanément

$$\left|\frac{3}{u}\right| < \frac{4}{5}, \qquad \left|\frac{1}{z}\right| < \frac{4}{5}, \qquad \left|\frac{1}{t}\right| < \frac{4}{5} \qquad \text{ou} \qquad |z| > 1, \qquad |t| > 1, \qquad |u| > 3.$$

D'ailleurs on a

$$\max.\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{t}\right) = 1, \qquad \text{d'où} \qquad \left|\frac{3}{u} - \frac{12}{5}\right| \leqq 1, \qquad u = 1, 2.$$

94. $u = 1$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{3}{5};$$

$$\begin{aligned} t &= 2, \ 10, \\ z &= 10, \ 2 \end{aligned}$$

ne peut donner qu'une solution déjà trouvée.

95. $u = 2$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = -\frac{9}{10};$$

$$\begin{aligned} t &= -1, \quad 10, \\ z &= \quad 10, \ -1 \end{aligned}$$

ne peut donner qu'une solution déjà trouvée.

96. Revenons au n° 87, et soit $y = -3$. La première équation devient

$$\frac{3}{u} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} = \frac{31}{15};$$

elle n'admettra pas de solutions si l'on a simultanément

$$\left|\frac{3}{u}\right| < \frac{31}{45}, \quad \left|\frac{1}{z}\right| < \frac{31}{45}, \quad \left|\frac{1}{t}\right| < \frac{31}{45}, \quad \text{ou} \quad |u| > 4, \quad |z| > 1, \quad |t| > 1.$$

On a

$$\max.\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{t}\right) = \frac{2}{3}, \quad \left|\frac{31}{15} - \frac{3}{u}\right| \leqq \frac{2}{3};$$

cette inégalité ne peut être vérifiée.

97. Revenons au n° 87 et soit $y = 3$. La deuxième équation donne

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{v} = \frac{26}{15},$$

laquelle n'aura pas de solutions si l'on a simultanément

$$\left|\frac{2}{z}\right| < \frac{26}{45}, \quad \left|\frac{1}{t}\right| < \frac{26}{45}, \quad \left|\frac{3}{v}\right| < \frac{26}{45} \quad \text{ou bien} \quad |z| > 3, \quad |t| > 1, \quad |v| > 5.$$

98. Soit $z = 3$, l'équation devient

$$\frac{3}{v} - \frac{1}{t} = \frac{16}{15}.$$

$t = -15$ est la seule solution; elle donne

$$v = \tfrac{15}{11}.$$

99. Soit $|z| > 3$, $|t| > 3$,

$$\max.\left(\frac{2}{z} - \frac{1}{t}\right) = \frac{3}{4}, \quad \left|\frac{26}{15} - \frac{3}{v}\right| \leqq \frac{3}{4},$$

d'où

$$v = 1, 2, 3.$$

$v = 1$ donne

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} = -\frac{19}{15};$$

pour $|z| > 3$, $|t| > 1$ pas de solutions. Or, $z = 3$ donne

$$t = \tfrac{15}{29}.$$

100. $v = 2$ donne

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} = \frac{7}{30};$$

on en déduit

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{z} + \frac{1}{6},$$

qui est plus simple à résoudre; elle donne

$$z = -42, -24, -18, -15, -12, -10, -9, -8, -7, -5, -4, -3, -2, 3, 6, 12, 30, -6;$$

j'en conclus

$$\begin{aligned} z &= 6, \quad 12, \quad 30, \\ t &= 10, -15, -6, \end{aligned}$$

comme solutions communes.

D'ailleurs $w = \dfrac{15z}{11z - 15}$ élimine $z = 6$, 12 et 30.

101. $v = 3$ donne

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} = \frac{11}{15},$$

qui admet pour solution $z = 3$, $t = -15$; mais, pour $z = 3$, $t = -15$, on a

$$w = \tfrac{15}{11}.$$

102. Revenons au n° 87 et soit $y = -4$. La première équation donne

$$\frac{3}{u} = \frac{1}{z} - \frac{1}{t} = \frac{19}{10};$$

il n'y aura pas de solutions si l'on a simultanément

$$|u| > 4, \qquad |z| > 1, \qquad |t| > 1.$$

Comme on peut supposer $|z| > 3$, $|t| > 3$, on a

$$\max.\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{t}\right) = \frac{1}{2}, \qquad \text{et, par suite,} \qquad \left|\frac{3}{u} - \frac{19}{10}\right| \leqq \frac{1}{2},$$

d'où

$$u = 2.$$

$u = 2$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = -\frac{2}{5},$$

d'où

$$t = -15, -5, -3, -2, 10,$$
$$z = -3, -5, -15, 10, -2,$$

et $t = z = -5$ donne

$$v = \tfrac{20}{9}.$$

103. Revenons au n° 87, et faisons $y = +4$. La seconde équation devient

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{v} = \frac{33}{20}.$$

Il n'y aura pas de solutions si l'on a simultanément

$$|z| > 3, \quad |t| > 1, \quad |v| > 5.$$

D'ailleurs

$$\max.\left(\frac{2}{z} - \frac{1}{t}\right) = \frac{3}{4},$$

donc

$$\left|\frac{33}{20} - \frac{3}{v}\right| \leq \frac{3}{4},$$

donc

$$v = 2, 3.$$

$v = 2$ donne

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} = \frac{3}{20},$$

d'où l'on conclut

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{z} + \frac{1}{4}, \qquad \frac{1}{w} + \frac{1}{z} = \frac{13}{20}, \qquad \frac{1}{u} + \frac{1}{w} = \frac{19}{20},$$

dont les solutions sont

$$u = 1, -20,$$
$$w = -20, 1,$$

donc, pas de solutions.

104. $v = 3$ donne

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} = \frac{13}{20}, \qquad \text{d'où} \qquad p = -\frac{60}{7}.$$

105. Revenons au n° 87, et soit $y = -5$. On a

$$\frac{3}{u} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} = \frac{9}{5},$$

qui, pour $|u| > 5$, $|z| > 1$, $|t| > 1$, n'aura pas de solutions. On a

$$\max.\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right)=\frac{2}{5}, \qquad \text{d'où} \qquad \left|\frac{9}{5}-\frac{3}{u}\right| \leqq \frac{2}{5},$$

et, par suite, $u = 2$, qui donne

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=-\frac{3}{10}, \qquad \text{d'où} \qquad r=\frac{5}{2}.$$

106. Revenons au n° 87 et soit $y = +5$. On a

$$\frac{2}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{v}=\frac{8}{5},$$

qui n'aura pas de solutions si l'on a simultanément $|z| > 3$, $|t| > 1$, $|v| > 5$; on a

$$\max.\left(\frac{2}{z}-\frac{1}{t}\right)=\frac{3}{5}, \qquad \text{d'où} \qquad \left|\frac{3}{v}-\frac{8}{5}\right| \leqq \frac{3}{5},$$

et, par suite,

$$v = 2,\ 3.$$

$v = 2$ donne

$$\frac{2}{z}-\frac{1}{t}=\frac{1}{10}, \qquad \frac{1}{u}=\frac{1}{z}+\frac{3}{10}, \qquad \frac{1}{z}+\frac{1}{w}=\frac{3}{5}, \qquad \frac{1}{u}+\frac{1}{w}=\frac{9}{10},$$

$$w = \quad 1,\ -10,$$
$$u = -10,\quad 1;$$

donc pas de solutions.

107. $v = 3$ donne

$$\frac{2}{z}-\frac{1}{t}=\frac{3}{5}, \qquad \frac{1}{u}=\frac{1}{z}+\frac{2}{15}, \qquad \frac{1}{w}+\frac{1}{z}=\frac{14}{15}, \qquad \frac{1}{u}+\frac{1}{w}=\frac{16}{15},$$

$$u = 1, \qquad u = 15,$$
$$w = 15, \qquad w = 1.$$

On trouve

$$z = -15, \qquad t = -\tfrac{15}{11};$$

donc pas de solution.

108. Revenons au n° 87. On a

$$\max.\left(\frac{2}{y}-\frac{1}{z}-\frac{1}{t}\right)=\frac{2}{3}, \qquad \text{d'où} \qquad \left|\frac{7}{5}-\frac{3}{u}\right| \leqq \frac{2}{3},$$

donc
$$u = 2, 3, 4, \qquad v = 2, 3, 4, \qquad w = 2, 3, 4.$$

D'ailleurs, en ajoutant les trois premières équations membre à membre, on trouve
$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = \frac{7}{5};$$
donc pas de solutions.

109. Revenons au n° 26 et faisons $x = -4$. Le système à résoudre est le suivant
$$\frac{2}{y} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{u} = \frac{3}{2}, \qquad \frac{2}{y} + \frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = \frac{3}{4},$$
$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} - \frac{1}{y} + \frac{3}{v} = \frac{3}{2}, \qquad \frac{2}{y} + \frac{2}{t} - \frac{1}{z} + \frac{3}{q} = \frac{3}{4},$$
$$\frac{2}{t} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} + \frac{3}{w} = \frac{3}{2}, \qquad \frac{2}{z} + \frac{2}{t} - \frac{1}{y} + \frac{3}{r} = \frac{3}{4}.$$

Si l'on a simultanément $|y| > 5$, $|z| > 2$, $|t| > 2$, $|u| > 8$, pas de solutions.

Faisons d'abord varier y dans l'intervalle -5, $+5$, en évitant les valeurs 2, -1, -5 qui ne pourraient que nous donner des solutions déjà trouvées.

110. Soit $y = 1$. Prenons l'équation
$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{v} = \frac{5}{2};$$
elle n'a pas de solutions si l'on prend simultanément $|z| > 2$, $|t| > 1$, $|v| > 3$.

111. Soit $t = 1$, on a
$$\frac{2}{z} + \frac{3}{v} = \frac{7}{2}, \qquad z = 1, 4;$$
la solution $y = t = 1$, $z = 4$ donne une solution qui rentre dans une solution plus générale que nous trouverons plus tard (146).

$y = t = z = 1$ donne
$$p = -\tfrac{4}{3}.$$

112. $z = -2$ donne

$$\frac{3}{v} - \frac{1}{t} = \frac{7}{2}.$$

$t = -2$ donne

$$r = \tfrac{12}{7}.$$

113. Soient $|z| > 2$, $|t| > 2$, on a

$$\max.\left(\frac{2}{z} - \frac{1}{t}\right) = 1, \qquad \left|\frac{5}{2} - \frac{3}{v}\right| \leqq 1 \qquad v = 1, 2.$$

$v = 1$ donne

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} = -\frac{1}{2},$$

$$\begin{array}{lrrrrrrrrr} z = & -12, & -8, & -6, & -5, & -3, & -2, & 4, & \infty, & -4, \\ t = & 3, & 4, & 6, & 10, & -6, & -2, & 1, & 2, & \infty. \end{array}$$

$w = \dfrac{2z}{z-2}$ élimine $z = -12, -8, -5, -3, -4$.

114. $v = 2$ donne

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} = 1, \qquad \text{d'où} \qquad p = -\frac{3}{4}.$$

115. Revenons au n° 109 et soit $y = -2$. L'équation

$$\frac{3}{u} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} = \frac{5}{2}$$

n'admettra pas de solution si l'on a simultanément $|u| > 3$, $|z| > 1$, $|t| > 1$; on a d'ailleurs

$$\max.\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{t}\right) = 1, \qquad \text{d'où} \qquad \left|\frac{3}{u} - \frac{5}{2}\right| \leqq 1 \qquad u = 1, 2.$$

$u = 1$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{1}{2},$$

d'où

$$\begin{array}{lrrrrrrr} t = & -2, & 1, & 3, & 4, & 6, & \infty, & 2, \\ z = & 1, & -2, & 6, & 4, & 3, & 2, & \infty. \end{array}$$

$p = \dfrac{4t}{t+4}$ élimine $t = 6$.

40ᵉ *solution :* $x = y = 4$, $z = -2$, $t = -4$, $a = b = 1$, $c = \frac{1}{4}$, $d = \frac{1}{2}$.

116. $u = 2$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = -1,$$

$$t = -2, \quad \infty, \ -1,$$
$$z = -2, \ -\mathbf{1}, \quad \infty.$$

$y = t = z = -2$ donne

$$p = \tfrac{4}{3}.$$

117. Revenons au n° 109 et soit $y = -3$. On a

$$\frac{3}{u} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} = \frac{13}{6}, \qquad \max.\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{t}\right) = \frac{2}{3}, \qquad \left|\frac{13}{6} - \frac{3}{u}\right| \leqq \frac{2}{3}, \qquad u = 2.$$

$u = 2$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = -\frac{2}{3},$$

d'où l'on conclut

$$r = \tfrac{12}{7}.$$

118. Revenons au n° 109 et soit $y = 3$. On a

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{v} = \frac{11}{6},$$

équation qui, pour $|z| > 3$, $|t| > 1$, $|v| > 4$, n'a pas de solutions.

Soit $z = 3$, on a

$$\frac{3}{v} = \frac{1}{t} + \frac{7}{6}, \qquad \text{d'où} \qquad t = -6, \ -\mathbf{1}, \ 3.$$

$t = -6$ donne

$$w = \tfrac{6}{5}.$$

41^{e} *solution :* $x = y = z = 3$, $t = -4$, $a = b = c = \frac{3}{4}$, $d = \frac{1}{6}$.

119. Maintenant on a

$$\max.\left(\frac{2}{z} - \frac{1}{t}\right) = \frac{3}{4}, \qquad \left|\frac{3}{v} - \frac{11}{6}\right| \leqq \frac{3}{4}, \qquad v = 2.$$

$v = 2$ donne

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} = \frac{1}{3},$$

$$t = -21, \ -12, \ -9, \ -6, \ -5, \ -4, \ -2, \ -1, \ 3, \ 6, \ 15, \ \infty, \ -3,$$
$$z = \quad 7, \quad 8, \quad 9, \quad 12, \quad 15, \quad 24, \ -\mathbf{12}, \ -\mathbf{3}, \ \mathbf{3}, \ 4, \ 5, \ 6, \ \infty.$$

$u = \dfrac{6z}{z+6}$ élimine $z = 7, 8, 9, 15, 24, 4, 5$; reste

$$z = 12,\ 6.$$

$w = \dfrac{6z}{5z-6}$ élimine $z = 12, 6$.

120. Revenons au n° 109 et soit $y = -4$. On a

$$\frac{3}{u} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} = 2, \qquad \max.\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{t}\right) = \frac{1}{2}, \qquad \left|\frac{3}{u} - 2\right| \leqq \frac{1}{2}, \qquad u = 2.$$

$u = 2$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = -\frac{1}{2},$$

$$t = -6,\ -4,\ -3,\ -1,\quad 2,\quad \infty,\ -2,$$
$$z = -3,\ -4,\ -6,\quad 2,\ -1,\ -2,\quad \infty.$$

42^e *solution:* $x = y = z = t = -4$, $a = b = c = d = \frac{3}{4}$.

121. Revenons au n° 109. Soit $y = 4$, on a l'équation

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{v} = \frac{7}{4};$$

de plus

$$\max.\left(\frac{2}{z} - \frac{1}{t}\right) = \frac{3}{4}, \qquad \text{d'où} \qquad \left|\frac{7}{4} - \frac{3}{v}\right| \leqq \frac{3}{4},$$

donc

$$v = 2,\ 3.$$

Soit $v = 2$; on a

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} = \frac{1}{4}, \qquad \frac{1}{u} = \frac{1}{4} + \frac{1}{z}, \qquad \frac{1}{w} + \frac{1}{z} = \frac{3}{4};$$

donc

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{w} = 1,$$

$$u = 2,\ \infty,\ 1,$$
$$w = 2,\ 1,\ \infty.$$

$\left.\begin{array}{l} u = \infty \\ w = 1 \end{array}\right\}$ donne

$$z = -4 \qquad \text{d'où} \qquad \frac{1}{t} = -\frac{3}{4}.$$

43e *solution :* $x=y=z=4, \qquad t=-4, \qquad a=b=c=\frac{3}{4}, \qquad d=\frac{1}{4}.$

$u=w=2$ donne

$$z=4, \qquad t=4.$$

122. $v=3$ donne

$$\frac{2}{z}-\frac{1}{t}=\frac{3}{4},$$

qui n'a pas de solutions si l'on a $|z|>5$, $|t|>2$,

$\left.\begin{array}{l} z=4 \\ t=-4 \end{array}\right\}$ est la seule solution, déjà essayée d'ailleurs.

123. Revenons au nº 109, et soit $y=5$; on a l'équation

$$\frac{2}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{v}=\frac{17}{10},$$

qui n'a pas de solutions si l'on suppose simultanément $|z|>3$, $|t|>1$, $|v|>5$,

$$\max.\left(\frac{2}{z}-\frac{1}{t}\right)=\frac{3}{5}, \qquad \text{donc} \qquad \left|\frac{17}{10}-\frac{3}{v}\right| \leqq \frac{3}{5}, \qquad v=2.$$

$v=2$ donne

$$\frac{2}{z}-\frac{1}{t}=\frac{1}{5}, \qquad \frac{1}{u}=\frac{1}{z}+\frac{3}{10}, \qquad \frac{1}{w}+\frac{1}{z}=\frac{7}{10}, \qquad \frac{1}{u}+\frac{1}{w}=1,$$

$$\begin{array}{l} u=2,\ \infty,\ 1, \\ w=2,\ 1,\ \infty, \end{array} \qquad z=5, \qquad t=5.$$

44e *solution :* $x=y=z=5, \qquad t=-4, \qquad a=b=c=\frac{3}{4}, \qquad d=\frac{3}{10}.$

124. Revenons au nº 109, et supposons $|y|>5$, $|z|>5$, $|t|>5$, d'où

$$\max.\left(\frac{2}{y}-\frac{1}{z}-\frac{1}{t}\right)=\frac{2}{3}, \qquad \left|\frac{3}{2}-\frac{3}{u}\right| \leqq \frac{2}{3},$$

$$u=2,\ 3, \qquad v=2,\ 3, \qquad w=2,\ 3.$$

D'ailleurs

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}=\frac{3}{2};$$

la solution $v = u = w$ convient seule. On a alors

$$\frac{2}{y} = \frac{1}{z} + \frac{1}{t},$$

$$\frac{2}{z} = \frac{1}{t} + \frac{1}{y},$$

$$\frac{2}{t} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z};$$

donc

$$\frac{3}{y} = \frac{3}{z} = \frac{3}{t} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t}, \qquad y = z = t.$$

On trouve alors

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{p} = \frac{1}{4}$$

et, par suite,

$$y = -12,\ -4,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 8,\ 12,\ 20,\ \infty,\ 4.$$

Toutes ces valeurs de y donnent des solutions, savoir :

45e *solution :*	$x = y = z = -12,$	$t = -4,$	$a = b = c = \frac{3}{4},$	$d = \frac{7}{12}.$
46e *solution :*	$x = y = z = 6,$	$t = -4,$	$a = b = c = \frac{3}{4},$	$d = \frac{1}{3}.$
47e *solution :*	$x = y = z = 8,$	$t = -4,$	$a = b = c = \frac{3}{4},$	$d = \frac{3}{8}.$
48e *solution :*	$x = y = z = 12,$	$t = -4,$	$a = b = c = \frac{3}{4},$	$d = \frac{5}{12}.$
49e *solution :*	$x = y = z = 20,$	$t = -4,$	$a = b = c = \frac{3}{4},$	$d = \frac{9}{20}.$
50e *solution :*	$x = y = z = \infty,$	$t = -4,$	$a = b = c = \frac{3}{4},$	$d = \frac{1}{2}.$

125. Revenons au nº 26, et faisons $x = -3$. Le système d'équations à résoudre est alors le suivant :

$$\frac{2}{y} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{u} = \frac{5}{3}, \qquad \frac{2}{y} + \frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = \frac{2}{3},$$

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} - \frac{1}{y} + \frac{3}{v} = \frac{5}{3}, \qquad \frac{2}{t} + \frac{2}{y} - \frac{1}{z} + \frac{3}{q} = \frac{2}{3},$$

$$\frac{2}{t} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} + \frac{3}{w} = \frac{5}{3}, \qquad \frac{2}{z} + \frac{2}{t} - \frac{1}{v} + \frac{3}{r} = \frac{2}{3}.$$

Si l'on suppose simultanément $|y| > 4$, $|z| > 2$, $|t| > 2$, $|v| > 7$, la première équation n'aura pas de solutions.

126. Soit $y = 1$. On a

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{v} = \frac{8}{3};$$

pour $|t| > 1$, $|z| > 2$, $|v| > 3$, il n'y a pas de solutions.

$t = 1$ donne

$$\frac{2}{z} + \frac{3}{v} = \frac{11}{3}, \qquad \begin{array}{l} v = 1, \\ z = 3. \end{array}$$

$x = y = 1$, $z = 3$, $t = -3$ donne une solution; elle rentre dans une solution plus générale que nous trouverons plus tard (146).

127. $z = -2$ donne

$$\frac{3}{v} - \frac{1}{t} = \frac{11}{3},$$

qui n'a pas de solutions.

128. Supposons $|z| > 2$, $|t| > 2$, d'où

$$\max.\left(\frac{2}{z} - \frac{1}{t}\right) = 1, \qquad \left|\frac{8}{3} - \frac{3}{v}\right| \leqq 1, \qquad v = 1.$$

$v = 1$ donne

$$\frac{1}{t} = \frac{2}{z} + \frac{1}{3}, \qquad \frac{1}{z} + \frac{1}{w} = \frac{2}{3},$$

$$\begin{array}{l} z = -3,\ 3, \\ t = -3,\ 1. \end{array}$$

Nous aurons la solution suivante :

51^e^ *solution :* $x = y = z = -3, \qquad t = 1, \qquad a = b = c = \frac{1}{3}, \qquad d = \frac{3}{5}.$

129. Revenons au n° 125, et soit $y = -2$. On a l'équation

$$\frac{3}{u} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} = \frac{8}{3},$$

laquelle n'a pas de solutions si l'on a simultanément $|u| > 3$, $|z| > 1$, $|t| > 1$.

On a

$$\max.\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right)=1, \qquad \text{d'où} \qquad \left|\frac{3}{u}-\frac{8}{3}\right| \leq 1,$$

d'où

$$u=1.$$

$u=1$ donne

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{1}{3},$$

$$\begin{array}{lrrrrrrr} t= & -6, & 2, & 4, & 6, & 12, & \infty, & 3, \\ z= & 2, & -6, & 12, & 6, & 4, & 3, & \infty. \end{array}$$

$v=\dfrac{6t}{t+6}$ élimine $t=4$; $q=\dfrac{3z}{z+3}$ élimine $z=3$.

52^e^ *solution :* $x=y=6, \quad z=-3, \quad t=-2, \quad a=b=1, \quad c=\frac{1}{2}, \quad d=\frac{1}{3}.$

130. Revenons au n° 125, et soit $y=-3$. On a l'équation

$$\frac{3}{u}-\frac{1}{z}-\frac{1}{t}=\frac{7}{3},$$

laquelle n'a pas de solutions si l'on a simultanément $|u|>4$, $|z|>1$, $|t|>1$.

On a

$$\max.\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right)=\frac{2}{3}, \qquad \text{d'où} \qquad \left|\frac{3}{u}-\frac{7}{3}\right| \leq \frac{2}{3}, \qquad u=1.$$

Pour $u=1$,

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{2}{3},$$

$$\begin{array}{lrrrrr} t= & -3, & 1, & 2, & 3, & 6, \\ z= & +1, & -3, & 6, & 3, & 2. \end{array}$$

53^e^ *solution :* $x=y=3, \quad z=t=-3, \quad a=b=1, \quad c=d=\frac{1}{3}.$

131. Revenons au n° 125, et soit $y=3$. On a l'équation

$$\frac{2}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{v}=2,$$

qui, pour $|z|>3$, $|t|>1$, $|v|>4$, n'aura pas de solutions.

Essayons $z = 3$, qui donne

$$\frac{3}{v} - \frac{1}{t} = \frac{4}{3}, \qquad t = -3,\ -1,\ 6.$$

$t = 0$ donne

$$w = \tfrac{3}{2}.$$

132. On a alors

$$\max.\left(\frac{2}{z} - \frac{1}{t}\right) = \frac{3}{4}, \qquad \text{d'où} \qquad \left|2 - \frac{3}{v}\right| \leqq \frac{3}{4}, \qquad v = 2.$$

$v = 2$ donne

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} = \frac{1}{2},$$

$$\begin{array}{llllllllll} t = & -10, & -6, & -4, & -3, & -1, & 2, & 6, & \infty, & -2, \\ z = & 5, & 6, & 8, & 12, & -4, & 2, & 3, & 4, & \infty. \end{array}$$

$u = \dfrac{6z}{z+6}$ élimine 5, 8, 4; $w = \dfrac{z}{z-1}$ élimine 6.

133. Revenons au n° 125, et soit $y = 4$. On a l'équation

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{v} = \frac{23}{12},$$

qui, pour $|z| > 3$, $|t| > 1$, $|v| > 4$, n'admet pas de solutions.

On a

$$\max.\left(\frac{2}{z} - \frac{1}{t}\right) = \frac{3}{4}, \qquad \left|\frac{23}{12} - \frac{3}{v}\right| \leqq \frac{3}{4}, \qquad v = 2,$$

$v = 2$ donne

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} = \frac{5}{12}, \qquad \frac{1}{u} + \frac{1}{w} = -\frac{1}{3}, \qquad \frac{1}{u} = \frac{1}{z} + \frac{1}{4},$$

$$\begin{array}{llllllll} w = & -12, & -6, & -4, & -2, & 6, & \infty, & -3, \\ u = & -4, & -6, & -12, & 6, & -2, & -3, & \infty. \end{array}$$

$z = \dfrac{4u}{4-u}$ élimine $u = -6,\ -3$; pour

$$\begin{array}{lll} u = & -4, & 6, \\ z = & -2, & -12, \end{array}$$

$z = -12$ donne

$$t = -\tfrac{12}{7}.$$

134. Revenons au n° 125, et soit $|z| > 4$, $|y| > 4$, $|t| > 4$,

$$\max.\left(\frac{2}{y} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t}\right) = \frac{4}{5}, \qquad \text{d'où} \qquad \left|\frac{5}{3} - \frac{3}{u}\right| \leqq \frac{4}{5}, \qquad u = 2,\ 3;$$

pareillement

$$v = 2,\ 3, \qquad w = 2,\ 3.$$

Or on doit avoir

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = \frac{5}{3};$$

il y a contradiction.

134 *bis*. Revenons maintenant au n° 26, et soit $x = -2$. Les équations à résoudre sont

$$\frac{2}{y} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{u} = 2, \qquad \frac{2}{y} + \frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{y} - \frac{1}{t} + \frac{3}{v} = 2, \qquad \frac{2}{y} + \frac{2}{t} - \frac{1}{z} + \frac{3}{q} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{2}{t} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} + \frac{3}{w} = 2, \qquad \frac{2}{z} + \frac{2}{t} - \frac{1}{y} + \frac{3}{r} = \frac{1}{2}.$$

La première équation n'aura pas de solutions si l'on a $|y| > 4$, $|z| > 2$, $|t| > 2$, $|u| > 6$.

135. Soit $y = 1$. On a l'équation

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{v} = 3,$$

laquelle, pour $|z| > 2$, $|t| > 1$, $|v| > 3$, n'a pas de solutions.

Soit $z = 1$, on a

$$\frac{3}{v} - \frac{1}{t} = 1, \qquad t = -4,\ -2,\ 2,\ \infty,\ -1,$$

$w = \dfrac{3t}{4t - 2}$ élimine -4, -2, ∞.

136. $z = -2$ donne

$$\frac{3}{v} - \frac{1}{t} = 4, \qquad t = -1.$$

137. Soit $|z| > 2$, $|t| > 2$, on a

$$\max.\left|\frac{2}{z}-\frac{1}{t}\right|=1, \qquad \left|3-\frac{3}{v}\right| \leqq 1, \qquad v=1.$$

$v = 1$ donne

$$z=2t, \qquad \frac{2}{w}+\frac{1}{t}=2,$$

$$t=1,\ \infty,$$
$$z=2,\ \infty;$$

$t = 1$, $z = 2$ donnent une solution qui rentre dans une solution plus générale, que nous trouverons plus tard.

54^e *solution :* $x=y=\infty$, $z=-2$, $t=1$, $a=b=\frac{1}{2}$, $c=0$, $d=\frac{3}{2}$.

138. Revenons au nº 134, et soit $y = -2$. On a l'équation

$$\frac{3}{u}-\frac{1}{z}-\frac{1}{t}=3,$$

qui, pour $|u| > 3$, $|z| > 1$, $|t| > 1$, n'a pas de solutions. On a

$$\max.\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right)=1, \qquad \left|3-\frac{3}{n}\right| \leqq 1, \qquad u=1.$$

$u = 1$ donne

$$z=-t, \qquad \frac{1}{z}+\frac{1}{v}=\frac{1}{2},$$

$$\begin{array}{lccccccc} t= & 2, & -1, & -3, & -4, & -6, & \infty, & -2, \\ z= & 2, & 1, & 3, & 4, & 6, & \infty, & 2; \end{array}$$

$\frac{1}{w}=\frac{1}{z}+\frac{1}{2}$, ou $w=\frac{2z}{z+2}$ élimine $z = 3, 4, 6$.

55^e *solution :* $x=y=-2$, $z=t=\infty$, $a=b=\frac{1}{2}$, $c=d=1$.

139. Revenons au nº 134, et soit $y = 3$. On a l'équation

$$\frac{2}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{v}=\frac{7}{3},$$

qui, pour $|z| > 2$, $|t| > 1$, $|v| > 4$, n'a pas de solutions.

On a

$$\max.\left(\frac{2}{z}-\frac{1}{t}\right)=1, \qquad \left|\frac{7}{3}-\frac{3}{v}\right| \leqq 1, \qquad v=1,\ 2;$$

$v = 1$ donne

$$\frac{1}{t}-\frac{2}{z}=\frac{2}{3},$$

$$\begin{array}{rrrrrrr} z= & -12, & -6, & -4, & -2, & 6, & -3, \\ t= & 2, & 3, & 6, & -3, & 1, & \infty, \end{array}$$

$u = \dfrac{3z}{2z+3}$ élimine -4.

140. $v = 2$ donne

$$\frac{2}{z}-\frac{1}{t}=\frac{5}{6},$$

$$\begin{array}{rrr} z= & 3, & 4, \\ t= & -6, & -3. \end{array}$$

56ᵉ *solution :* $x=y=3, \quad z=-2, \quad t=-6, \quad a=b=1, \quad c=\frac{1}{6}, \quad d=\frac{1}{2}.$

141. Revenons au nº 134, et soit $y = 4$. On a

$$\frac{2}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{v}=\frac{9}{4},$$

équation qui n'a pas de solutions pour $|z|>2$, $|t|>1$, $|v|>4$.
On a

$$\max.\left(\frac{2}{z}-\frac{1}{t}\right)=\frac{3}{4}, \qquad \left|\frac{9}{4}-\frac{3}{v}\right| \leqq \frac{3}{4}, \qquad v=1,\ 2.$$

$v = 1$ donne

$$\frac{1}{t}-\frac{2}{z}=\frac{3}{4},$$

$$\begin{array}{rr} z= & -4, \\ t= & 4. \end{array}$$

142. $v = 2$ donne

$$\frac{2}{z}-\frac{1}{t}=\frac{3}{4},$$

$$\begin{array}{rr} z= & 4, \\ t= & -4. \end{array}$$

143. Revenons au n° 134. On peut supposer $|y| > 4$, $|z| > 4$, $|t| > 4$,

$$\max.\left(\frac{2}{y} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t}\right) = \frac{4}{5}, \qquad \left|2 - \frac{3}{u}\right| \leqq \frac{4}{5}, \qquad u = 2,$$

et de même

$$v = w = 2.$$

Or on doit avoir

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = 2,$$

il y a contradiction.

144. Reportons-nous au n° 26, et soit $x = 1$. Le système à résoudre est le suivant :

$$\frac{3}{u} + \frac{2}{y} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} = -1, \qquad \frac{2}{y} + \frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = 2,$$

$$\frac{3}{v} + \frac{2}{z} - \frac{1}{t} - \frac{1}{y} = -1, \qquad \frac{2}{t} + \frac{2}{y} - \frac{1}{z} + \frac{3}{q} = 2,$$

$$\frac{3}{w} + \frac{2}{t} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = -1, \qquad \frac{2}{z} + \frac{2}{t} - \frac{1}{y} + \frac{3}{r} = 2.$$

Prenons

$$\frac{2}{z} + \frac{2}{t} - \frac{1}{y} + \frac{3}{r} = 2;$$

pour $|z| > 4$, $|t| > 4$, $|y| > 2$, $|r| > 6$, il n'y a pas de solutions.

145. Soit $y = 1$,

$$\frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{3}{r} = 3;$$

pour $|z| > 2$, $|t| > 2$, $|r| > 3$, pas de solutions.

Soit $z = 1$,

$$\frac{2}{t} + \frac{3}{r} = 1,$$

$$t = -4, \ -1, \ 1, \ 3, \ 4, \ 5, \ 8, \ \infty, \ 2.$$

$p = \dfrac{3t}{1 - 2t}$ élimine 3, 4, 5, 8, ∞.

$$\boxed{57^{\text{e}} \textit{ solution : } \quad x = y = z = t = 1, \qquad a = b = c = d = \tfrac{1}{3}.}$$

146. Soit $|z| > 2$, $|t| > 2$,

$$\max.\left(\frac{2}{z}+\frac{2}{t}\right)=\frac{4}{3}, \qquad \left|3-\frac{3}{r}\right| \leqq \frac{4}{3}, \qquad r=1.$$

$r = 1$ donne

$$t = -z.$$

58ᵉ *solution :* $x=y=1, \quad z=n, \quad t=-n, \quad a=b=1, \quad c=\frac{1}{n}, \quad d=-\frac{1}{n},$ n étant un nombre entier quelconque.

147. Revenons au nº 144 et soit $y = 3$. On a

$$\frac{2}{z}+\frac{2}{t}+\frac{3}{r}=\frac{7}{3}.$$

Pour $|z| > 2$, $|t| > 2$, $|r| > 4$, pas de solutions.

$$\max.\left(\frac{2}{z}+\frac{2}{t}\right)=\frac{4}{3}, \qquad \left|\frac{7}{3}-\frac{3}{r}\right| \leqq \frac{4}{3}, \qquad r=1,\ 2,\ 3.$$

$r = 1$ donne

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=-\frac{1}{3}, \qquad \text{d'où} \qquad u=-\frac{3}{2}.$$

148. $r = 2$ donne

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{5}{12}, \qquad \text{d'où} \qquad u=-\frac{12}{5}.$$

149. $r = 3$ donne

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{2}{3}, \qquad z=t=3.$$

59ᵉ *solution :* $x=y=z=3, \quad t=1, \quad a=b=c=\frac{1}{3}, \quad d=1.$

150. Revenons au nº 144 et soit $y = 4$. On a

$$\frac{2}{z}+\frac{2}{t}+\frac{3}{r}=\frac{9}{4};$$

pour $|z| > 2$, $|t| > 2$, $|r| > 4$, pas de solutions.

On a

$$\max.\left(\frac{2}{z}+\frac{2}{t}\right)=1,\qquad \left|\frac{9}{4}-\frac{3}{r}\right|\leqq 1,\qquad r=1,\ 2.$$

$r=1$ donne

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=-\frac{3}{8},\qquad \text{d'où}\qquad u=-\frac{8}{5}.$$

151. $r=2$ donne

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{3}{8},\qquad u=-\frac{8}{3}.$$

152. Revenons au n° 144. Supposons $|y|>4$, $|z|>4$, $|t|>4$,

$$\max.\left(\frac{2}{y}+\frac{2}{z}-\frac{1}{t}\right)=1,\qquad \left|2-\frac{3}{p}\right|\leqq 1;$$

donc

$$p=1,\ 2,\ 3,$$
$$q=1,\ 2,\ 3,$$
$$r=1,\ 2,\ 3.$$

On a d'ailleurs

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=2\qquad\text{avec}\qquad \max.\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right)=\frac{3}{5}.$$

153. $p=q=r=1$ donne

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=-1;\qquad\text{donc}\qquad \left|\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right|>\frac{3}{5}.$$

154. $p=q=1$, $r=2$ donne

$$t=z=\infty,\qquad y=-2\qquad (\textit{voir}\ \text{la}\ 54^{e}\ \text{solution}).$$

155. $p=q=1$, $r=3$ donne

$$y=-\tfrac{9}{5}.$$

156. $p=1$, $q=r=2$ donne

$$t=3\qquad(\text{déjà essayé}).$$

157. $p=1$, $q=2$, $r=3$ donne

$$t=\tfrac{9}{4}.$$

158. $p=1$, $q=r=3$ donne

$$t=\tfrac{9}{5}.$$

159. $p = q = r = 2$ donne

$$y = z = t = 6.$$

60e *solution :* $x = y = z = 6, \quad t = 1, \quad a = b = c = \frac{1}{3}, \quad d = \frac{7}{6}.$

160. $p = q = 2$, $r = 3$. On a

$$2 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} - \frac{1}{r} = \frac{2}{3} > \frac{3}{5};$$

les autres essais sont donc inutiles.

161. Revenons au n° 26, et soit $x = 3$. Les équations à résoudre sont

$$\frac{2}{y} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{u} = \frac{1}{3}, \qquad \frac{2}{y} + \frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = \frac{4}{3},$$
$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} - \frac{1}{y} + \frac{3}{v} = \frac{1}{3}, \qquad \frac{2}{t} + \frac{2}{y} - \frac{1}{z} + \frac{3}{q} = \frac{4}{3},$$
$$\frac{2}{t} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} + \frac{3}{w} = \frac{1}{3}, \qquad \frac{2}{z} + \frac{2}{t} - \frac{1}{y} + \frac{3}{r} = \frac{4}{3}.$$

Prenons l'équation

$$\frac{2}{y} + \frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = \frac{4}{3}.$$

Pour $|y| > 6$, $|z| > 6$, $|t| > 3$, $|p| > 9$, il n'y aura pas de solutions.

162. Soit $y = -6$; l'équation devient

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = \frac{5}{3}.$$

Pour $|z| > 3$, $|t| > 1$, $|p| > 5$, cette dernière n'a pas de solutions.

Faisons $z = 3$, cela donne

$$\frac{3}{p} - \frac{1}{t} = 1, \qquad t = -4, \ -2, \ 2, \ \infty, \ -1.$$

La seule solution à essayer est $t = \infty$; elle donne

$$q = \frac{3}{2}.$$

163. Soit $|z| > 3$, $|t| > 3$, on a

$$\max.\left(\frac{2}{z} - \frac{1}{t}\right) = \frac{3}{4}, \qquad \left|\frac{5}{3} - \frac{3}{p}\right| \leqq \frac{3}{4}, \qquad p = 2,\ 3.$$

$p = 2$ donne

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} = \frac{1}{6}, \qquad \frac{1}{q} + \frac{1}{z} = \frac{2}{3}, \qquad \text{d'où} \qquad z = -3,\ \mathbf{1},\ \mathbf{2},\ \mathbf{3},\ 6.$$

61e *solution :*	$x = y = 6$,	$z = 3$,	$t = -6$,	$a = b = \frac{2}{3}$,	$c = \frac{5}{6}$,	$d = \frac{1}{3}$.

164. $p = 3$ donne

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} = \frac{2}{3}, \qquad \begin{array}{l} t = -6,\ -3,\ -2,\ -1,\ 3,\ \infty, \\ z = \quad 4, \qquad\qquad\qquad\qquad 3; \end{array}$$

$t = -6$, $z = 4$ donne

$$q = \tfrac{4}{3}.$$

165. Revenons au n° 161, et soit $y = 3$. On a

$$\frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{3}{r} = \frac{5}{3}.$$

Pour $|z| > 3$, $|t| > 3$, $|r| > 5$, pas de solutions.

Soit $z = 3$, on a

$$\frac{2}{t} + \frac{3}{r} = 1, \qquad t = -\mathbf{4},\ -\mathbf{1},\ \mathbf{1},\ 3,\ 4,\ 5,\ 8,\ \infty,\ \mathbf{2}.$$

62e *solution :*	$x = y = z = t = 3$,		$a = b = c = d = \frac{5}{9}$,	
63e *solution :*	$x = y = z = 3$,	$t = 4$,	$a = b = c = \frac{7}{12}$,	$d = \frac{1}{2}$.
64e *solution :*	$x = y = z = 3$,	$t = 5$,	$a = b = c = \frac{3}{5}$,	$d = \frac{7}{15}$.
65e *solution :*	$x = y = z = 3$,	$t = 8$,	$a = b = c = \frac{5}{8}$,	$d = \frac{5}{12}$.
66e *solution :*	$x = y = z = 3$,	$t = \infty$,	$a = b = c = \frac{2}{3}$,	$d = \frac{1}{3}$.

166. Soit $|z|>3$, $|t|>3$, on a

$$\max.\left(\frac{2}{z}+\frac{2}{t}\right)=1, \qquad \left|\frac{5}{3}-\frac{3}{r}\right|\leqq 1, \qquad r=2,\ 3,\ 4;$$

$r=2$ donne

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{1}{12}, \qquad \frac{1}{q}=\frac{1}{z}+\frac{1}{6}, \qquad \frac{1}{p}=\frac{1}{t}+\frac{1}{6}, \qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{5}{12},$$

$$\begin{aligned} p &= 2,\ 3,\ 4,\\ q &= -12,\ 12,\ 6,\\ z &= -4,\ -12,\ \infty,\\ t &= 3,\ 6,\ 12. \end{aligned}$$

67e *solution :*	$x=y=3$,	$z=6$,	$t=-12$,	$a=b=\frac{3}{4}$,	$c=\frac{7}{12}$,	$d=\frac{1}{3}$,
68e *solution :*	$x=y=3$,	$z=12$,	$t=\infty$,	$a=b=\frac{3}{4}$,	$c=\frac{1}{2}$,	$d=\frac{5}{12}$.

167. $r=3$ donne

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{1}{3},$$

$$\begin{aligned} t &= -6,\ 2,\ 4,\ 6,\ 12,\ \infty,\ 3,\\ z &= 2,\ -6,\ 12,\ 6,\ 4,\ 3,\ \infty. \end{aligned}$$

69e *solution :*	$x=y=3$,	$z=4$,	$t=12$,	$a=b=\frac{2}{3}$,	$c=\frac{7}{12}$,	$d=\frac{5}{12}$,
70e *solution :*	$x=y=3$,	$z=t=6$,		$a=b=\frac{2}{3}$,	$c=d=\frac{1}{2}$.	

168. $r=4$ donne

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{11}{24};$$

$t=3$, $z=8$ donne une solution déjà trouvée.

169. Revenons au n° 161, et soit $y=4$. On a l'équation

$$\frac{2}{z}+\frac{2}{t}+\frac{3}{r}=\frac{19}{12},$$

qui, pour $|z|>3$, $|t|>3$, $|r|>5$, n'a pas de solutions.

On a

$$\max.\left(\frac{2}{z}+\frac{2}{t}\right)=1, \qquad \left|\frac{19}{12}-\frac{3}{r}\right|\leqq 1, \qquad r=2,\ 3,\ 4,\ 5.$$

$r=2$ donne

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{1}{24}, \qquad \frac{1}{v}=\frac{1}{t}+\frac{1}{6}, \qquad \frac{1}{w}=\frac{1}{z}+\frac{1}{6}, \qquad \frac{1}{v}+\frac{1}{w}=\frac{3}{8},$$

$$w=-8,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 8,\quad 24,$$
$$v=\quad 2,\quad -8,\quad 24,\quad 8,\quad 4,\quad 3.$$

$z=\dfrac{6w}{6-w}$ élimine $w=-8$,

$$z=\quad 6,\quad 12,$$
$$t=-8,\quad -24.$$

$p=\dfrac{4t}{t+4}$ élimine $t=-24$; $q=\dfrac{4z}{z+4}$ élimine $z=6$.

170. $r=3$ donne

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{7}{24};$$

pour $|z|>6$, $|t|>6$ pas de solutions.

$$t=\quad 4,\quad 6,$$
$$z=24,\quad 8.$$

$q=\dfrac{12z}{z+12}$ élimine $z=8$.

71e *solution :* $x=y=4$, $z=3$, $t=24$, $a=b=\frac{5}{8}$, $c=\frac{17}{24}$, $d=\frac{5}{12}$.

171. $r=4$ donne

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{5}{12},$$

$$z=4,$$
$$t=6.$$

72e *solution :* $x=y=4$, $z=3$, $t=6$, $a=b=\frac{7}{12}$, $c=\frac{2}{3}$, $d=\frac{1}{2}$.

172. $r=5$, on a

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{59}{120},$$

pas de solution.

173. Revenons au n° 161, et faisons $y = 5$. On a

$$\frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{3}{r} = \frac{23}{15},$$

équation qui, pour $|z| > 3$, $|t| > 3$, $|r| > 5$, n'a pas de solutions.

On a

$$\max.\left(\frac{2}{z} + \frac{2}{t}\right) = \frac{4}{5}, \qquad \text{d'où} \qquad \left|\frac{23}{15} - \frac{3}{r}\right| \leqq \frac{4}{5}, \qquad r = 2,\ 3,\ 4.$$

$r = 2$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{1}{60}, \qquad \frac{1}{v} = \frac{1}{t} + \frac{1}{6}, \qquad \frac{1}{w} = \frac{1}{z} + \frac{1}{6}, \qquad \frac{1}{v} + \frac{1}{w} + \frac{7}{20},$$

$$\begin{aligned} v &= 3,\ 4, \\ w &= 60,\ 10. \end{aligned}$$

$\left.\begin{aligned} t &= 12 \\ z &= -15 \end{aligned}\right\}$ donne

$$q = \tfrac{30}{7},$$

174. $r = 3$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{4}{15},$$

$$\begin{aligned} z &= 6,\ 5, \\ t &= 10,\ 15. \end{aligned}$$

$p = \dfrac{15t}{2t + 15}$ élimine $t = 6$.

73^e^ *solution :* $x = y = 5$, $z = 3$, $t = 15$, $a = b = \frac{3}{5}$, $c = \frac{11}{15}$, $d = \frac{7}{15}$

175. $r = 4$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{47}{120}, \qquad \text{d'où} \qquad u = \frac{120}{13}.$$

176. Revenons au n° 161, et faisons $y = 6$. On a

$$\frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{3}{r} = \frac{3}{2};$$

pour $|z| > 4$, $|t| > 4$, $|r| > 6$, pas de solutions. On a

$$\max.\left(\frac{2}{z} + \frac{2}{t}\right) = \frac{4}{5}, \qquad \left|\frac{3}{2} - \frac{3}{r}\right| \leqq \frac{4}{5}, \qquad r = 2,\ 3,\ 4.$$

$r = 2$ donne

$$z = -t, \qquad \frac{1}{v} + \frac{1}{z} = \frac{1}{6}, \qquad \frac{1}{w} = \frac{1}{z} + \frac{1}{6}, \qquad \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = \frac{1}{3},$$

$$\begin{array}{lrrrrrrr} w = & -6, & 2, & 4, & 6, & 12, & \infty, & 3, \\ v = & 2, & -6, & 12, & 6, & 4, & 3, & \infty. \end{array}$$

$$z = \frac{6w}{w-6},$$

$$\begin{array}{lrrrrrrr} z = & 3, & -3, & -12, & \infty, & 12, & 6, & -6, \\ t = & -3, & 3, & 12, & \infty, & -12, & -6, & +6. \end{array}$$

$p = \dfrac{3z}{z-3}$, $q = \dfrac{3z}{z+3}$ éliminent la solution $-12, +12$.

74^e^ *solution :*	$x = y = 6$,	$t = -6$,	$z = 3$,	$a = b = \frac{2}{3}$,	$c = \frac{1}{3}$,	$d = \frac{5}{6}$.
75^e^ *solution :*	$x = y = \infty$,	$z = 3$,	$t = 6$,	$a = b = \frac{1}{2}$,	$c = \frac{5}{6}$,	$d = \frac{2}{3}$.

177. $r = 3$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{1}{4},$$

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrr} t = & -12, & -4, & 2, & 3, & 5, & 6, & 8, & 12, & 20, & \infty, & 4, \\ z = & 3, & 2, & -4, & -12, & 20, & 12, & 8, & 6, & 5, & 4, & \infty. \end{array}$$

76^e^ *solution :*	$x = y = 6$,	$z = 3$,	$t = 12$,	$a = b = \frac{7}{12}$,	$c = \frac{3}{4}$,	$d = \frac{1}{2}$.

178. $r = 4$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{3}{8};$$

pour $|z| > 5$, $|t| > 5$ pas de solutions; or $z = 6$ donne

$$t = \tfrac{24}{5}.$$

179. Revenons au nº 161. On a

$$\max.\left(\frac{2}{y} + \frac{2}{z} - \frac{1}{t}\right) = \frac{5}{7}, \qquad \left|\frac{4}{3} - \frac{3}{p}\right| \leqq \frac{5}{7},$$

d'où

$$p, q, r = 2, 3, 4.$$

On a d'ailleurs

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=\frac{4}{3}, \qquad \max.\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right)=\frac{3}{7}.$$

180. Soient $p=q=r=2$, $y=z=t=-18$.

77^e *solution :* $x=y=z=-18$, $t=3$, $a=b=c=\frac{5}{9}$, $d=\frac{17}{18}$.

181. $p=q=2$, $r=3$, $t=z=18$,

$$y=-9, \qquad u=\tfrac{9}{2}.$$

182. $p=q=2$, $r=4$, $t=z=9$,

$$y=-\tfrac{36}{5}.$$

$p=2$, $r=q=3$ donnent

$$t=6.$$

$p=2$, $q=3$, $r=4$ donnent

$$t=\tfrac{9}{2}.$$

$p=2$, $q=r=4$ donnent

$$t=\tfrac{18}{5}.$$

183. $p=q=r=3$ donne

$$y=z=t=9.$$

78^e *solution :* $x=y=z=9$, $t=3$, $a=b=c=\frac{5}{9}$, $d=\frac{7}{9}$.

184. $p=q=3$, $r=4$,

$$\frac{1}{t}+\frac{1}{z}+\frac{1}{y}=\frac{5}{12}<\frac{3}{7}.$$

Les autres essais sont inutiles.

185. Revenons au n° 25, et soit $x=4$. Les équations à résoudre sont

$$\frac{2}{y}-\frac{1}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{u}=\frac{1}{2}, \qquad \frac{2}{y}+\frac{2}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{p}=\frac{5}{4},$$
$$\frac{2}{z}-\frac{1}{t}-\frac{1}{y}+\frac{3}{v}=\frac{1}{2}, \qquad \frac{2}{t}+\frac{2}{y}-\frac{1}{z}+\frac{3}{q}=\frac{5}{4},$$
$$\frac{2}{t}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}+\frac{3}{w}=\frac{1}{2}, \qquad \frac{2}{z}+\frac{2}{t}-\frac{1}{y}+\frac{3}{r}=\frac{5}{4}.$$

Prenons l'équation

$$\frac{2}{z}+\frac{2}{t}-\frac{1}{y}+\frac{3}{r}=\frac{5}{4};$$

pour $|z|>6$, $|t|>6$, $|y|>3$, $|r|>9$ il n'y a pas de solutions.

186. Soit $y=-6$. On a

$$\frac{2}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{p}=\frac{19}{12},$$

qui, pour $|z|>3$, $|t|>1$, $|p|>5$, n'a pas de solutions.

$$\max.\left(\frac{2}{z}-\frac{1}{t}\right)=\frac{3}{4},\qquad \left|\frac{19}{12}-\frac{3}{p}\right|\leqq\frac{3}{4},\qquad p=2,\ 3.$$

$p=2$ donne

$$\frac{2}{z}-\frac{1}{t}=\frac{1}{12},\qquad \frac{1}{z}+\frac{1}{q}=\frac{7}{12};$$

cette dernière n'aura pas de solutions si l'on a simultanément $|z|>3$, $|q|>3$.

$$\begin{aligned} q&=2, & q&=3,\\ z&=12, & z&=4. \end{aligned}$$

$z=4$ donne

$$t=\tfrac{12}{5}.$$

79e *solution :* $x=y=12,\quad y=4,\quad t=-6,\quad a=b=\frac{2}{3},\quad c=\frac{5}{6},\quad d=\frac{5}{12}.$

187. $p=3$ donne

$$\frac{2}{z}-\frac{1}{t}=\frac{7}{12};$$

pour $|z|>6$, $|t|>3$ pas de solutions.

$$\begin{aligned} z&=\ \ 4, & &6,\\ t&=-12, & &-4. \end{aligned}$$

$z=4$, $t=-12$ donnent

$$q=\tfrac{3}{2}.$$

188. Revenons au n° 185, et soit $y=4$. On a

$$\frac{2}{z}+\frac{2}{t}+\frac{3}{r}=\frac{3}{2},$$

qui, pour $|z|>4$, $|t|>4$, $|r|>6$, n'a pas de solutions.

Soit $z = 4$, on a

$$\frac{2}{t} + \frac{3}{r} = 1,$$

$$t = -4,\ -1,\ 1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 8,\ \infty,\ 2.$$

$p = \dfrac{12t}{t+4}$ élimine 5.

80e *solution :*	$x = y = z = t = 4,$		$a = b = c = d = \frac{7}{12}.$	
81e *solution :*	$x = y = z = 4,$	$t = 8,$	$a = b = c = \frac{5}{8},$	$d = \frac{1}{2}.$
82e *solution :*	$x = y = z = 4,$	$t = \infty,$	$a = b = c = \frac{2}{3},$	$d = \frac{5}{12}.$

189. Soient maintenant $|z| > 4$, $|t| > 4$,

$$\max.\left(\frac{2}{z} + \frac{2}{t}\right) = \frac{4}{5}, \qquad \left|\frac{3}{2} - \frac{3}{r}\right| \leqq \frac{4}{5}, \qquad r = 2,\ 3,\ 4.$$

$r = 2$ donne

$$z = -t, \qquad \frac{1}{q} = \frac{1}{z} + \frac{1}{4}, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{z} = \frac{1}{4}, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2},$$

$$q = -2,\quad 1,\ 3,\ 4,\ 6,\ \infty,\ 2,$$
$$p = \quad 1,\ -2,\ 6,\ 4,\ 3,\ 2,\ \infty.$$

$z = \dfrac{4p}{p-4}$ élimine $p = -2$; $z = \dfrac{4q}{4-q}$ élimine $q = -2$.

$$z = 12,\ \infty,\ 4.$$

83e *solution :*	$x = y = 4,$	$z = 12,$	$t = -12,$	$a = b = \frac{3}{4},$	$c = \frac{7}{12},$	$d = \frac{5}{12}.$
84e *solution :*	$x = y = 4,$	$t = z = \infty,$		$a = b = \frac{3}{4},$	$c = d = \frac{1}{2}.$	

190. $r = 3$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{1}{4},$$

$$t = -12,\ -4,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 8,\ 12,\ 20,\ \infty,\ 4,$$
$$z = 3,\ 2,\ -4,\ -12,\ 20,\ 12,\ 8,\ 6,\ 5,\ 4,\ \infty.$$

$q = \frac{12z}{z+12}$ élimine 8, 20.

85ᵉ *solution :* $x = y = 4, \quad z = 6, \quad t = 12, \quad a = b = \frac{2}{3}, \quad c = \frac{7}{12}, \quad d = \frac{1}{2}.$

191. $r = 4$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{3}{8};$$

pour $|z| > 5$, $|t| > 5$ pas de solutions.

$z = 5$ donne

$$t = \frac{40}{7}.$$

192. Revenons au nº 185 et soit $y = 5$. On a l'équation

$$\frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{3}{r} = \frac{5}{4} + \frac{1}{5} = \frac{29}{20},$$

qui pour $|z| > 4$, $|t| > 4$, $|r| > 6$ n'a pas de solutions.

$$\max.\left(\frac{2}{z} + \frac{2}{t}\right) = \frac{4}{5}, \qquad \left|\frac{29}{20} - \frac{3}{r}\right| \leqq \frac{4}{5}, \qquad r = 2, 3, 4.$$

Pour $r = 2$,

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = -\frac{1}{40}, \qquad \frac{1}{q} = \frac{1}{z} + \frac{3}{10}, \qquad z = 5, 30, -20, -10.$$

$t = -\frac{40z}{z+40}$ élimine $z = 5, 30, -10$.

$\left.\begin{array}{l} z = -20 \\ t = 40 \end{array}\right\}$ donne

$$p = \frac{40}{13}.$$

193. $r = 3$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{9}{40}, \qquad \text{d'où} \qquad u = \frac{120}{13}.$$

194. $r = 4$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{7}{20}, \qquad \text{d'où} \qquad u = \frac{20}{3}.$$

195. Revenons au n° 185 et faisons $y = 6$. On a l'équation

$$\frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{3}{r} = \frac{5}{4} + \frac{1}{6} = \frac{17}{12},$$

qui pour $|z| > 4$, $|t| > 4$, $|r| > 6$ n'a pas de solutions.

On a

$$\max.\left(\frac{2}{z} + \frac{2}{t}\right) = \frac{2}{3}, \qquad \left|\frac{17}{12} - \frac{2}{3}\right| \leqq \frac{2}{3}, \qquad r = 2, 3, 4.$$

196. $r = 2$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = -\frac{1}{24}, \qquad \frac{1}{q} = \frac{1}{z} + \frac{1}{3},$$

$$\begin{aligned} z &= -12, \quad \infty, \\ t &= \quad 24, -24; \end{aligned}$$

$p = \dfrac{3t}{t+3}$ élimine 24 et (-24).

197. $r = 3$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{5}{24}, \qquad \frac{1}{q} = \frac{1}{z} + \frac{1}{6}, \qquad \frac{1}{p} = \frac{1}{t} + \frac{1}{6};$$

pas de solutions acceptables.

198. $r = 4$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{1}{3},$$

$$\begin{aligned} t &= -6, \quad 2, \ 4, \ 6, \ 12, \ \infty, \ 3, \\ z &= \quad 2, -6, 12, 6, \ 4, \ 3, \ \infty. \end{aligned}$$

86ᵉ *solution :* $x = y = z = 6$,	$t = 4$,	$a = b = c = \frac{7}{12}$,	$d = \frac{2}{3}$.

199. Reportons-nous au n° 185 et soient $|y| > 6$, $|z| > 6$, $|t| > 6$. On a

$$\max.\left(\frac{2}{y} + \frac{2}{z} - \frac{1}{t}\right) = \frac{5}{7}, \qquad \left|\frac{5}{4} - \frac{3}{p}\right| \leqq \frac{5}{7}, \qquad p = 2, 3, 4, 5.$$

De plus

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{5}{4}, \qquad \text{avec} \qquad \max.\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t}\right) = \frac{3}{7}.$$

200. $p = q = r = 2$ donne

$$y = z = t = -12.$$

87ᵉ *solution :* $x = y = z = -12$, $t = 4$, $a = b = c = \frac{7}{12}$, $d = \frac{11}{12}$.

201. $p = q = 2$, $r = 3$ donnent

$$y = -\frac{36}{5}.$$

$p = q = 2$, $r = 4$ donnent

$z = t = 12$, $y = -6$, solution déjà trouvée (79ᵉ *solution*).

$p = q = 2$, $r = 5$ donnent

$$t = \frac{60}{7}.$$

$p = 2$, $q = r = 3$ donnent

$$t = \frac{36}{5}.$$

$p = 2$, $q = 3$, $r = 4$ donnent

$$t = \frac{36}{7}.$$

$p = 2$, $q = 3$, $r = 5$ donnent

$$t = \frac{180}{41}.$$

$p = 2$, $q = r = 4$ donnent

$t = 4$, $y = z = \infty$, solution déjà trouvée (84ᵉ *solution*).

$p = 2$, $q = 4$, $r = 5$ donnent

$$t = \frac{60}{17}.$$

$p = 2$, $q = r = 5$ donnent

$$t = \frac{60}{19}.$$

$p = q = r = 3$ donne

$$y = z = t = 12.$$

88ᵉ *solution :* $x = 4$, $y = z = t = 12$, $a = b = c = \frac{7}{12}$, $d = \frac{3}{4}$.

202. $p = q = 3$, $r = 4$ donnent

$$t = \frac{36}{5}.$$

$p = q = 3$, $r = 5$ donnent

$$t = \frac{180}{31}.$$

$p=3,\ q=r=4$ donnent

$$t=\tfrac{36}{7}.$$

$p=3,\ q=4,\ r=5$ donnent

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{7}{15}<\frac{3}{7};$$

les autres essais sont inutiles.

203. Revenons au nº 26 et faisons $x=5$. On a à résoudre le système

$$\begin{array}{ll}
\dfrac{2}{y}-\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{t}+\dfrac{3}{u}=\dfrac{3}{5}, & \dfrac{3}{p}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{2}{z}-\dfrac{1}{t}=\dfrac{6}{5},\\[2ex]
\dfrac{2}{z}-\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{y}+\dfrac{3}{v}=\dfrac{3}{5}, & \dfrac{3}{q}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{2}{t}-\dfrac{1}{z}=\dfrac{6}{5},\\[2ex]
\dfrac{2}{t}-\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{z}+\dfrac{3}{w}=\dfrac{3}{5}, & \dfrac{3}{r}+\dfrac{2}{t}+\dfrac{2}{z}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{6}{5}.
\end{array}$$

Prenons l'équation

$$\frac{2}{y}+\frac{2}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{p}+\frac{6}{5};$$

pour $|y|>6,\ |z|>6,\ |t|>3,\ |p|>10$, pas de solutions.

204. Faisons $y=-6$, on a

$$\frac{2}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{p}=\frac{6}{5}+\frac{1}{3}=\frac{23}{15};$$

pour $|z|>3,\ |t|>1,\ |p|>5$, cette équation n'a pas de solutions. On a

$$\max.\left(\frac{2}{z}-\frac{1}{t}\right)=\frac{3}{5},\qquad \left|\frac{23}{15}-\frac{3}{p}\right|\leqq\frac{3}{5},\qquad p=2,3.$$

$p=2$ donne

$$\frac{2}{z}-\frac{1}{t}=\frac{1}{30},\qquad \text{d'où}\qquad v=\frac{15}{2}.$$

$p=3$ donne

$$\frac{2}{z}-\frac{1}{t}=\frac{8}{15},\qquad \frac{1}{z}+\frac{1}{q}=\frac{13}{15};$$

cette dernière équation n'a pas de solutions.

205. Revenons au n° 203 et faisons $y = 5$. On a

$$\frac{2}{t} + \frac{2}{z} + \frac{3}{r} = \frac{7}{5},$$

qui pour $|z| > 4$, $|t| > 4$, $|r| > 6$ n'a pas de solutions. On a

$$\max.\left(\frac{2}{t} + \frac{2}{z}\right) = \frac{4}{5}, \qquad \left|\frac{7}{5} - \frac{3}{r}\right| \leqq \frac{4}{5}, \qquad r = 2,\ 3,\ 4,\ 5.$$

$r = 2$ donne

$$\frac{2}{t} + \frac{2}{z} = -\frac{1}{10}, \qquad \frac{1}{v} = \frac{1}{t} + \frac{3}{10}, \qquad \frac{1}{w} = \frac{1}{z} + \frac{3}{10}, \qquad \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = \frac{11}{20},$$

$$\begin{aligned} v &= 2,\ 20, \\ w &= 20,\ 2, \end{aligned}$$

$\left.\begin{aligned} t &= 5 \\ z &= -4 \end{aligned}\right\}$ donne une solution déjà trouvée.

206. $r = 3$ donne

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{z} = \frac{1}{5}, \qquad \text{d'où} \qquad u = \frac{15}{2}.$$

$r = 4$ donne

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{z} = \frac{13}{40}, \qquad \text{d'où} \qquad u = \frac{40}{7}.$$

$r = 5$ donne

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{z} = \frac{2}{5},$$

$$\begin{aligned} z &= -10,\quad 2,\quad 3,\ 5,\ 15, \\ t &= \quad 2,\ -10,\ 15,\ 5,\ 3. \end{aligned}$$

$$\boxed{89^{e}\ \textit{solution :}\quad x = y = z = t = 5, \qquad a = b = c = d = \tfrac{3}{5}.}$$

207. Revenons au n° 203, et soit $y = 6$. On a l'équation

$$\frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{3}{r} = \frac{41}{30},$$

qui pour $|z| > 4$, $|t| > 4$, $|r| > 6$ n'a pas de solutions.

$$\max.\left(\frac{2}{z} + \frac{2}{t}\right) = \frac{2}{3}, \qquad \left|\frac{41}{30} - \frac{3}{r}\right| \leqq \frac{2}{3}, \qquad r = 2,\ 3,\ 4.$$

$r=2$ donne

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=-\frac{1}{15},\qquad \frac{1}{q}=\frac{1}{z}+\frac{1}{3},\qquad \frac{1}{p}=\frac{1}{t}+\frac{1}{3},\qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{3}{5},$$

$$p=2,\ 10,$$
$$q=10,\ 2.$$

$q=10$ donne

$$z=-\tfrac{30}{7}.$$

$r=3$ donne

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{11}{60},\qquad \text{d'où}\qquad u=\frac{20}{3}.$$

$r=4$ donne

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{17}{60},\qquad \text{d'où}\qquad u=\frac{60}{11}.$$

208. Revenons au nº 203 et supposons $|y|>6$, $|z|>6$, $|t|>6$, d'où

$$\max.\left(\frac{2}{y}+\frac{2}{z}-\frac{1}{t}\right)=\frac{5}{7},\qquad \left|\frac{6}{5}-\frac{3}{p}\right|\leq\frac{5}{7},$$

$$p=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,$$
$$q,\ r=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6.$$

On a d'ailleurs

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=\frac{6}{5}\qquad\text{avec}\qquad \max.\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right)=\frac{3}{7}.$$

$p=q=r=2$ donne

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=-\frac{3}{10},\qquad y=z=t=-10.$$

90ᵉ *solution :* $x=y=z=-10,\quad t=5,\quad a=b=c=\frac{3}{5},\quad d=\frac{9}{10}.$

209. Soient $p=2$, $q=3$, $r=3, 4, 5, 6$; on a

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}+\frac{1}{r}=\frac{11}{30}.$$

On a d'ailleurs

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}+\frac{3}{u}+\frac{3}{r}=\frac{9}{5},$$

d'où

$$u = \frac{90\,r}{43\,r - 40}, \qquad \text{pas de solutions.}$$

$p = 2,\ q = 4,\ r = 4,\ 5,\ 6$

$$u = \frac{60\,r}{27\,r - 40}, \qquad \text{pas de solutions.}$$

$p = 2,\ q = 5,\ r = 5,\ 6$

$$u = \frac{30\,r}{13\,r - 20}, \qquad \text{pas de solutions.}$$

$p = 2,\ q = r = 6$ donnent

$$t = \tfrac{90}{31}.$$

$p = q = r = 3$ donne

$$y = z = t = 15.$$

91^{e} *solution :* $x = y = z = 15, \qquad t = 5, \qquad a = b = c = \frac{3}{5}, \qquad d = \frac{11}{15}.$

210. $p = q = 3,\ r = 4,\ 5,\ 6$ donnent

$$u = \frac{45\,r}{19\,r - 30}, \qquad \text{pas de solutions.}$$

$p = 3,\ q = 4,\ r = 4,\ 5,\ 6$ donnent

$$u = \frac{180\,r}{71\,r - 120}, \qquad \text{pas de solutions.}$$

$p = 3,\ q = 5,\ r = 5$ donnent

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{6}{5} - \frac{1}{3} - \frac{2}{5} = \frac{7}{15} > \frac{3}{7};$$

donc les essais suivants sont inutiles.

211. Revenons maintenant au n° **26**, et soit $x = -6$. Le système à résoudre est le suivant :

$$\frac{3}{u} + \frac{2}{y} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} = \frac{4}{3}, \qquad \frac{2}{y} + \frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = \frac{5}{6},$$

$$\frac{3}{v} + \frac{2}{z} - \frac{1}{t} - \frac{1}{y} = \frac{4}{3}, \qquad \frac{2}{t} + \frac{2}{y} - \frac{1}{z} + \frac{3}{q} = \frac{5}{6},$$

$$\frac{3}{w} + \frac{2}{t} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = \frac{4}{3}, \qquad \frac{2}{z} + \frac{2}{t} - \frac{1}{y} + \frac{3}{r} = \frac{5}{6}.$$

Prenons l'équation

$$\frac{2}{y} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{u} = \frac{4}{3},$$

pour $|y| > 6$, $|z| > 3$, $|t| > 3$, $|u| > 9$, il n'y aura pas de solutions.

212. Soit $y = -6$, alors on a

$$\frac{3}{u} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} = \frac{5}{3},$$

qui pour $|u| > 5$, $|z| > 1$, $|t| > 1$ n'a pas de solutions.

$$\max.\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{t}\right) = \frac{1}{3}, \qquad \left|\frac{5}{3} - \frac{3}{u}\right| \leqq \frac{1}{3}, \qquad u = 2.$$

$u = 2$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = -\frac{1}{6}, \qquad \frac{1}{v} = \frac{1}{t} + \frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{w} = \frac{1}{z} + \frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6},$$

$$v = 1, \qquad v = 2,$$
$$w = -6, \qquad w = 3.$$

$v = 1$ donne

$$t = 2.$$

$v = 2$ donne

$$t = \infty, \qquad z = -6.$$

92^e *solution :* $x = y = z = -6, \qquad t = \infty, \qquad a = b = c = \frac{2}{3}, \qquad d = \frac{5}{6}.$

213. Revenons au nº 211, et soit $y = 6$. On a

$$\frac{3}{v} + \frac{2}{z} - \frac{1}{t} = \frac{3}{2};$$

pour $|v| > 6$, $|z| > 4$, $|t| > 2$, pas de solutions.

$$\max.\left(\frac{2}{z} - \frac{1}{t}\right) = \frac{1}{2}, \qquad \left|\frac{3}{2} - \frac{3}{v}\right| \leqq \frac{1}{2}, \qquad v = 2,\ 3.$$

$v = 2$ donne

$$z = 2t, \qquad \text{d'où} \qquad u = \frac{6t}{2t + 3},$$
$$t = -6,\ \infty,$$
$$z = -12,\ \infty.$$

93^e *solution :* $x=y=\infty$, $z=6$, $t=-6$, $a=b=\frac{2}{3}$, $c=\frac{5}{6}$, $d=\frac{1}{2}$.

214. $v=3$ donne

$$\frac{2}{z}-\frac{1}{t}=\frac{1}{2},$$

$$t=-10,\ 6,\ \infty,$$
$$z=\quad 5,\ 3,\ 4,$$

aucune solution nouvelle.

215. Revenons au n° 211. Supposons $|y|>6$, $|z|>6$, $|t|>6$,

$$\max.\left(\frac{2}{y}-\frac{1}{z}-\frac{1}{t}\right)=\frac{4}{7},\qquad \left|\frac{4}{3}-\frac{3}{u}\right|\leqq\frac{4}{7},\qquad u=2,\ 3;$$

de même

$$v,\ w=2,\ 3;$$

mais

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}=\frac{4}{3},\qquad \text{d'où}\qquad u=2,\qquad v=2,\qquad w=3,$$

$$\frac{2}{y}-\frac{1}{z}-\frac{1}{t}=-\frac{1}{6},$$
$$\frac{2}{z}-\frac{1}{t}-\frac{1}{y}=-\frac{1}{6},$$
$$\frac{2}{t}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=\quad\frac{1}{3},$$

$$y=z,\qquad \frac{1}{t}-\frac{1}{y}=\frac{1}{6},\qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2},$$

$$y=z=\infty,\qquad t=6,$$
$$y=12,\qquad t=4.$$

Pas de solutions nouvelles.

216. Revenons maintenant au n° 26, et faisons $x=+6$. Le système à résoudre est le suivant :

$$\frac{2}{y}-\frac{1}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{u}=\frac{2}{3},\qquad \frac{2}{y}+\frac{2}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{p}=\frac{7}{6},$$
$$\frac{2}{z}-\frac{1}{t}-\frac{1}{y}+\frac{3}{v}=\frac{2}{3},\qquad \frac{2}{t}+\frac{2}{y}-\frac{1}{z}+\frac{3}{q}=\frac{7}{6},$$
$$\frac{2}{t}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}+\frac{1}{w}=\frac{2}{3},\qquad \frac{2}{z}+\frac{2}{t}-\frac{1}{y}+\frac{3}{r}=\frac{7}{6},$$

Prenons l'équation

$$\frac{2}{y}+\frac{2}{z}-\frac{1}{t}+\frac{2}{p}=\frac{7}{6},$$

pour $|y|>6$, $|z|>6$, $|t|>3$, $|p|>10$ pas de solutions.

217. Essayons $y=6$. On a

$$\frac{2}{z}+\frac{2}{t}+\frac{3}{r}=\frac{4}{3},$$

qui pour $|z|>4$, $|t|>4$, $|r|>6$, n'a pas de solutions.

$$\max.\left(\frac{2}{z}+\frac{2}{t}\right)=\frac{2}{3},\qquad \left|\frac{4}{3}-\frac{3}{r}\right|\leqq\frac{2}{3},\qquad \text{donne}\qquad r=2,\ 3,\ 4.$$

$r=2$ donne

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=-\frac{1}{12},\qquad \frac{1}{p}=\frac{1}{t}+\frac{1}{3},\qquad \frac{1}{q}=\frac{1}{z}+\frac{1}{3},\qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{7}{12}.$$

$$q=2,\ 3,\qquad z=6,\ \infty,$$
$$p=12,\ 4,\qquad t=-4,\ -12.$$

94ᵉ *solution :*	$x=y=6$,	$t=-12$,	$z=\infty$,	$a=b=\frac{3}{4}$,	$c=\frac{1}{2}$, $d=\frac{7}{12}$.

218. $r=3$ donne

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{1}{6},\qquad \frac{1}{p}=\frac{1}{t}+\frac{1}{6},\qquad \frac{1}{q}=\frac{1}{z}+\frac{1}{6},\qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{2}.$$

$$q=-2,\ 3,\ 4,\ 2,\qquad z=6,\ 12,\ 3,$$
$$p=1,\ 6,\ 4,\ \infty,\qquad t=\infty,\ 12,\ -6.$$

95ᵉ *solution :*	$x=y=z=6$,	$t=\infty$,	$a=b=c=\frac{2}{3}$,	$d=\frac{1}{2}$.
96ᵉ *solution :*	$x=y=6$,	$t=z=12$,	$a=b=\frac{2}{3}$,	$c=d=\frac{7}{12}$.

219. $r=4$ donne

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{7}{24},\qquad \text{d'où}\qquad u=\frac{24}{5}.$$

220. Revenons au n° 216; supposons $|y| > 6$, $|z| > 6$, $|t| > 6$,

$$\max.\left(\frac{2}{y} + \frac{2}{z} - \frac{1}{t}\right) = \frac{5}{7}, \qquad \left|\frac{7}{6} - \frac{3}{p}\right| \leqq \frac{5}{7},$$

d'où

$$p,\ q,\ r = 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6.$$

D'ailleurs

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{7}{6};$$

on a

$$\max.\left(\frac{2}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t}\right) = \frac{3}{7}.$$

$p = q = 2$,

$$r = 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6; \qquad \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{r} = \frac{1}{6};$$

donc

$$\frac{1}{6} + \frac{3}{u} + \frac{2}{r} = \frac{11}{6}.$$

$u = \frac{9r}{5r-6}$ élimine $r = 2, 4, 5, 6$; reste

$$r = 3,$$

$$\frac{2}{y} + \frac{2}{3} + \frac{2}{t} = -\frac{1}{3}, \qquad t = z = \infty, \qquad y = -6,$$

solution déjà trouvée (93$^{\text{e}}$ solution).

$p = 2$, $q = 3$, $r = 3, 4, 5, 6$,

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{r} = \frac{1}{3}.$$

$u = \frac{6r}{3r-4}$ élimine 3, 5, 6; reste

$$r = 4,$$

$$\frac{2}{y} + \frac{2}{z} + \frac{2}{t} = \frac{1}{6},$$

$t = 6$ ne peut donner qu'une solution déjà trouvée.

$p = 2$, $q = 4$, $r = 4, 5, 6$,

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{r} = \frac{5}{12}.$$

$u = \frac{36r}{17r-24}$ élimine $r = 4, 5, 6$.

$p = 2,\ q = 5,\ r = 5,\ 6,$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{r} = \frac{7}{15}.$$

$u = \dfrac{90r}{41r - 60}$ élimine $r = 5,\ 6.$

$p = 2,\ q = r = 5,$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{4}{15}, \qquad \text{d'où} \qquad t = \frac{45}{13}.$$

$p = q = 3,\ r = 3,\ 4,\ 5,\ 6,$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2}.$$

$u = \dfrac{9r}{4r - 6}$ élimine 3, 4, 5; reste

$$r = 6,$$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{1}{3}, \qquad \text{d'où} \qquad t = 6.$$

$p = 3,\ q = 4,\ r = 4,\ 5,\ 6,$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{r} = \frac{7}{12}.$$

$u = \dfrac{12r}{5r - 8}$ élimine $r = 5,\ 6$; reste

$$r = 4,$$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{1}{3}, \qquad t = 6.$$

$p = 3,\ q = 5,\ r = 5,\ 6,$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{r} = \frac{19}{30}, \qquad \frac{19}{30} - \frac{1}{5} = \frac{13}{30} > \frac{3}{7};$$

les essais sont inutiles.

$p = q = 4,\ r = 4,\ 5,\ 6,$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{r} = \frac{2}{3}.$$

$r = 4$ donne

$$t = \frac{9}{2}; \qquad \frac{2}{3} - \frac{1}{5} = \frac{7}{15} > \frac{3}{7}.$$

$p = 4$, $q = 5$, $r = 5, 6$,

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \geqq \frac{31}{60} > \frac{3}{7};$$

les essais sont inutiles, ainsi que ceux qui suivent.

221. Revenons au nº **26**, et faisons $x = -7$. On a l'équation

$$\frac{3}{u} + \frac{2}{y} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} = \frac{9}{7};$$

pour $|p| > 6$, $|z| > 3$, $|t| > 3$, $|u| > 8$, pas de solutions. On a

$$\max.\left(\frac{2}{y} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t}\right) = \frac{4}{7}, \qquad \left|\frac{9}{7} - \frac{3}{u}\right| \leqq \frac{4}{7},$$

d'où

$$u, v, w = 2, 3, 4.$$

Mais

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = \frac{7}{9};$$

donc, pas de solutions.

222. Revenons au nº **26**, et soit $x = +7$. On a

$$\frac{2}{y} + \frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = \frac{8}{7},$$

équation qui, pour $|y| > 7$, $|z| > 7$, $|t| > 3$, $|p| > 10$, n'a pas de solutions.

Essayons $y = 7$; on a

$$\frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{3}{r} = \frac{9}{7},$$

équation qui, pour $|z| > 4$, $|t| > 4$, $|r| > 7$, n'a pas de solutions.

$$\max.\left(\frac{2}{z} + \frac{2}{t}\right) = \frac{4}{7}, \qquad \left|\frac{9}{7} - \frac{3}{r}\right| \leqq \frac{4}{7}, \qquad \text{d'où} \qquad r = 2, 3, 4.$$

$r = 2$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = -\frac{3}{28}, \qquad \text{d'où} \qquad u = \frac{28}{3}.$$

$r = 3$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{1}{7}, \qquad \text{d'où} \qquad u = \frac{21}{4}.$$

$r = 4$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{15}{56}, \qquad \text{d'où} \qquad u = \frac{56}{13}.$$

223. Supposons maintenant $|y| > 7$, $|z| > 7$, $|t| > 7$,

$$\max.\left(\frac{2}{y} + \frac{2}{z} - \frac{1}{t}\right) = \frac{5}{8}, \qquad \left|\frac{8}{7} - \frac{3}{p}\right| \leqq \frac{5}{8},$$

d'où

$$p = 2,\ 3,\ 4,\ 5, \qquad \text{de même} \qquad q,\ r = 2,\ 3,\ 4,\ 5.$$

D'ailleurs

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{8}{7}, \qquad \max.\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t}\right) = \frac{3}{8}.$$

$p = q = 2$, $r = 2, 3, 4, 5$,

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{r} = \frac{1}{7},$$

$$\frac{2}{y} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{u} = \frac{5}{7},$$

$$\frac{2}{z} + \frac{2}{t} - \frac{1}{y} + \frac{3}{r} = \frac{8}{7},$$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{r} + \frac{2}{r} + \frac{3}{u} = \frac{13}{7}.$$

$u = \dfrac{7r}{4r - 7}$ élimine $r = 3, 4, 5$; reste

$$r = 2, \qquad \text{d'où} \qquad t = -\frac{42}{5}.$$

$p = 2$, $q = 3$, $r = 3, 4, 5$,

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{r} = \frac{13}{42}.$$

$u = \dfrac{126r}{65r - 84}$ élimine $r = 3, 4, 5$.

$p = 2$, $q = 4$, $r = 4, 5$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{r} = \frac{11}{28},$$

$u = \dfrac{84r}{41r - 56}$ élimine $4, 5$.

$p=2,\ q=r=5,$

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{17}{10}, \qquad t=\frac{210}{59}.$$

$p=q=3,\ r=3, 4, 5.$

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}+\frac{1}{r}=\frac{10}{21}.$$

$u=\dfrac{63r}{29r-42}$ élimine $r=3, 4, 5.$

$p=3,\ q=4,\ r=4, 5.$

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}+\frac{1}{r}=\frac{47}{84},$$

$u=\dfrac{252r}{109r-168}$ élimine $r=4, 5.$

$p=3,\ q=r=5,$

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{43}{105}, \qquad t=\frac{315}{71}.$$

$p=q=4,\ r=4, 5,$

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}+\frac{1}{r}=\frac{9}{14},$$

$u=\dfrac{42r}{17r-28}$ élimine $r=4, 5.$

$p=q=r=5,$

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{19}{35}, \qquad t=\frac{105}{19}.$$

224. Revenons au nº 26, et soit $x=-8$. On a

$$\frac{2}{y}-\frac{1}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{u}=\frac{5}{4},$$

équation qui, pour $|y|>6$, $|z|>3$, $|t|>3$, $|u|>9$, n'a pas de solutions.

On a

$$\max.\left(\frac{2}{y}-\frac{1}{z}-\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{2}, \qquad \left|\frac{5}{4}-\frac{3}{u}\right|\leqq\frac{1}{2}, \qquad u=2, 3, 4.$$

De même

$$v, w=2, 3, 4.$$

Or

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}=\frac{5}{4}, \qquad u=v=2,\ w=4$$

est la seule solution.

97ᵉ *solution :* $x=y=z=-8, \qquad t=8, \qquad a=b=c=\frac{5}{8}, \qquad d=\frac{7}{8}.$

225. Revenons au nº 26 et faisons $x=8$. On a l'équation

$$\frac{2}{y}+\frac{2}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{p}=\frac{9}{8},$$

qui, pour $|y|>7$, $|z|>7$, $|t|>3$, $|p|>9$, n'admet pas de solutions.

Prenons l'équation

$$\frac{2}{y}-\frac{1}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{u}=\frac{3}{4}.$$

On a

$$\max.\left(\frac{2}{y}-\frac{1}{z}-\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{2}, \qquad \left|\frac{3}{4}-\frac{3}{u}\right|\leq\frac{1}{2}, \qquad u=3,\ 4,\ \ldots,\ 12,$$

et de même

$$v,\ w=3,\ 4,\ \ldots,\ 12.$$

Or on a

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}=\frac{3}{4},$$

qui, pour $|u|>4$, $|v|>4$, $|w|>4$, n'a pas de solutions.

$u=3$ donne

$$\frac{1}{v}+\frac{1}{w}=\frac{5}{12},$$

$$v=3,\ 4,$$
$$w=12,\ 6.$$

$u=4$ donne

$$\frac{1}{v}+\frac{1}{w}=\frac{1}{2}, \qquad u=v=w=4.$$

226. $u=3=v$, $w=12$ donnent

$$\frac{1}{t}=\frac{1}{y}+\frac{1}{4}, \qquad y=z;$$

pas de solutions acceptables.

$u=3$, $v=4$, $w=6$ donnent

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{y}+\frac{1}{12},\qquad \frac{1}{t}=\frac{1}{y}+\frac{1}{6},\qquad \frac{1}{y}+\frac{1}{p}=\frac{3}{8};$$

pas de solutions acceptables.

$u=v=w=4$,

$$y=z=t,\qquad \frac{1}{y}+\frac{1}{p}=\frac{3}{8},\qquad y=8,\ 24.$$

98e *solution :*	$x=y=z=t=8$,		$a=b=c=d=\frac{5}{8}$.	
99e *solution :*	$x=y=z=24$,	$t=8$,	$a=b=c=\frac{5}{8}$,	$d=\frac{17}{24}$.

227. Revenons au nº 26 et faisons $x=-9$. On a l'équation

$$\frac{2}{y}-\frac{1}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{u}=\frac{11}{9},$$

qui, pour $|y|>6$, $|z|>3$, $|t|>3$, $|u|>9$, n'a pas de solutions.

$$\max.\left(\frac{2}{y}-\frac{1}{z}-\frac{1}{t}\right)=\frac{4}{9},\qquad \left|\frac{11}{9}-\frac{3}{u}\right|\leqq\frac{4}{9},\qquad u=2,\ 3;$$

de même

$$v,\ w=2,\ 3.$$

Or on a

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}=\frac{11}{9};$$

donc pas de solutions.

228. Revenons au nº 26 et soit $x=+9$. Alors on a l'équation

$$\frac{2}{y}+\frac{2}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{p}=\frac{10}{9},$$

qui, pour $|y|>7$, $|z|>7$, $|t|>3$, $|p|>10$, n'a pas de solutions.

On a aussi

$$\frac{2}{y}-\frac{1}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{u}=\frac{7}{9},\qquad \max.\left(\frac{2}{y}-\frac{1}{z}-\frac{1}{t}\right)=\frac{4}{9},\qquad \left|\frac{7}{9}-\frac{3}{u}\right|\leqq\frac{4}{9},$$

$$u,\ v,\ w=2,\ 3,\ \ldots,\ 9.$$

D'ailleurs

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}=\frac{7}{9},$$

équation qui, pour $|u|>3$, $|v|>3$, $|w|>3$, n'a pas de solutions.

$u=2$ donne

$$\frac{1}{v}+\frac{1}{w}=\frac{5}{18},$$

$$v=6,$$

$$w=9.$$

$u=3$ donne

$$\frac{1}{v}+\frac{1}{w}=\frac{4}{9},$$

$$v=3,$$

$$w=9.$$

Mais $w=9$ donne

$$\frac{2}{t}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=\frac{4}{9}, \qquad \text{d'où} \qquad t=9, \qquad y=z=-9 \quad \text{(inacceptable)}.$$

229. Revenons au nº 26 et soit $x=-10$. On a l'équation

$$\frac{2}{y}-\frac{1}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{u}=\frac{6}{5},$$

qui, pour $|y|>6$, $|z|>3$, $|t|>3$, $|u|>10$, n'a pas de solutions.

$$\max.\left(\frac{2}{y}-\frac{1}{z}-\frac{1}{t}\right)=\frac{2}{5}, \qquad \left|\frac{6}{5}-\frac{3}{u}\right|\leqq\frac{2}{5}, \qquad u=2,\ 3;$$

de même

$$v,\ w=2,\ 3.$$

Or on a

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}=\frac{6}{5};$$

donc pas de solutions.

230. Revenons au nº 26 et soit $x=+10$. On a l'équation

$$\frac{2}{y}+\frac{2}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{p}=\frac{11}{10},$$

qui, pour $|y|>7$, $|z|>7$, $|t|>3$, $|p|>10$, n'a pas de solutions.

On aura aussi

$$\frac{2}{y}-\frac{1}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{u}=\frac{4}{5}, \qquad \max.\left(\frac{2}{y}-\frac{1}{z}-\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{5}+\frac{2}{11}=\frac{21}{55}, \qquad \left|\frac{4}{5}-\frac{3}{u}\right| \leq \frac{21}{55},$$

$$u,\ v,\ w=3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7.$$

Or

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}=\frac{4}{5},$$

équation qui, pour $|u|>3$, $|v|>3$, $|w|>3$, n'a pas de solutions.

Or $u=3$ donne

$$\frac{1}{v}+\frac{1}{w}=\frac{7}{15},$$

qui n'a pas de solutions acceptables.

231. Revenons au nº 26 et supposons $|x|>10$, $|y|>10$, $|z|>10$, $|t|>10$, d'où

$$\max.\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}-\frac{1}{t}\right)=\frac{6}{11}, \qquad \left|1-\frac{3}{u}\right| \leq \frac{6}{11};$$

donc

$$p,\ q,\ r,\ u,\ v,\ w=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6.$$

D'ailleurs

$$\frac{1}{y}-\frac{1}{z}+\frac{1}{u}-\frac{1}{v}=0, \qquad \frac{1}{y}-\frac{1}{z}+\frac{1}{q}-\frac{1}{r}=0;$$

donc

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{r}=\frac{1}{v}+\frac{1}{q}=\frac{1}{w}+\frac{1}{p}=\sigma.$$

Voici les valeurs que peut prendre σ; elles correspondent aux combinaisons 2 à 2 des nombres 2, 3, 4, 5, 6 :

2, 2 donne	$\sigma=1$;	2, 3,	$\sigma=\frac{5}{6}$;	2, 4,	$\sigma=\frac{3}{4}$;	2, 5,	$\sigma=\frac{7}{10}$;
2, 6	$\sigma=\frac{2}{3}$;	3, 3,	$\sigma=\frac{2}{3}$;	3, 4,	$\sigma=\frac{7}{12}$;	3, 5,	$\sigma=\frac{8}{15}$;
3, 6 ou 4, 4	$\sigma=\frac{1}{2}$;	4, 5,	$\sigma=\frac{9}{20}$;	4, 6,	$\sigma=\frac{5}{12}$;	5, 5,	$\sigma=\frac{2}{5}$;
5, 6	$\sigma=\frac{11}{30}$;	6, 6,	$\sigma=\frac{1}{3}$;				

$\sigma=1$ donne

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{r}=1, \qquad u=v=w=p=q=r=2;$$

$\sigma = \frac{5}{6}$ donne

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{r} = \frac{5}{6}, \qquad u = v = w = 2, \qquad p = q = r = 3;$$

$\sigma = \frac{3}{4}$ donne

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{r} = \frac{3}{4}, \qquad u = v = w = 2, \qquad p = q = r = 4;$$

$\sigma = \frac{7}{10}$ donne

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{r} = \frac{7}{10}, \qquad u = v = w = 2, \qquad p = q = r = 5;$$

$\sigma = \frac{2}{3}$ donne

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{r} = \frac{2}{3},$$

$$u = v = w = 2, \quad p = q = r = 6, \qquad u = 2, \quad r = 6, \quad v = w = p = q = 3,$$
$$u = v = w = p = q = r = 3, \qquad u = v = 2, \quad r = q = 6, \quad w = p = 3;$$

$\sigma = \frac{7}{12}$ donne

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{r} = \frac{7}{12}, \qquad u = v = w = 3, \qquad p = q = r = 4;$$

$\sigma = \frac{8}{15}$ donne

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{r} = \frac{8}{15}, \qquad u = v = w = 3, \qquad p = q = r = 5;$$

$\sigma = \frac{1}{2}$ donne

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2},$$

$$u = v = w = 3, \quad p = q = r = 6, \qquad u = 3, \quad r = 6, \quad v = w = p = q = 4,$$
$$u = v = w = p = q = r = 4, \qquad u = v = 3, \quad r = q = 6, \quad w = p = 4.$$

$\sigma = \frac{9}{20}$ donne

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{r} = \frac{9}{20}, \qquad u = v = w = 4, \qquad p = q = r = 5;$$

$\sigma = \frac{5}{12}$ donne

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{r} = \frac{5}{12}, \qquad u = v = w = 4, \qquad p = q = r = 6;$$

$\sigma = \frac{2}{5}$ donne

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{r} = \frac{2}{5}, \qquad u = v = w = p = q = r = 5.$$

$\sigma = \frac{11}{30}$ donne

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{r} = \frac{11}{30}, \qquad u = v = w = 5, \qquad p = q = r = 6.$$

Enfin $\sigma = \frac{1}{3}$ donne

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{r} = \frac{1}{3}, \qquad u = v = w = p = q = r = 6.$$

Soit d'abord

$$u = v = w = p = q = r, \qquad \text{d'où} \qquad x = y = z = t, \qquad \frac{2}{x} + \frac{3}{u} = 1.$$

$x = \dfrac{2u}{u-3}$ élimine $u = 2, 4, 5$. Reste

$$x = y = z = t = \infty.$$

100^e *solution :* $x = y = z = t = \infty, \quad a = b = c = d = \frac{2}{3}.$

232. Soient maintenant $u = v = w$, $p = q = r$, on a

$$\frac{6}{x} + \frac{9}{u} = 3, \qquad x = \frac{2u}{u-3}, \qquad \text{d'où} \qquad x = \infty,$$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = 1.$$

$t = y = z = \dfrac{3p}{p-3}$ élimine $p = 2, 3, 5, 6$. Reste

$$p = 4.$$

101^e *solution :* $x = y = z = 12, \quad t = \infty, \quad a = b = c = \frac{2}{3}, \quad d = \frac{7}{12}.$

233. $u = 2$, $r = 6$, $v = w = p = q = 3$ donne

$$x = y = -12, \qquad z = t = 12.$$

102^e *solution :* $x = y = 12, \quad z = t = -12, \quad a = b = \frac{3}{4}, \quad c = d = \frac{7}{12}.$

234. $u = v = 2$, $r = q = 3$, $w = p = 3$ donnent

$$y = z = \infty, \qquad x = -6, \qquad t = 6;$$

solution déjà trouvée.

$u = 3$, $r = 6$, $v = w = p = q = 4$ donne

$$z = 6.$$

$u = v = 3$, $r = q = 6$, $w = p = 4$ donne

$$y = 8.$$

On ne pourrait donc que tomber sur des solutions déjà trouvées.

235. Nous pouvons maintenant résumer, dans le Tableau suivant, les solutions que nous avons trouvées.

La méthode que nous avons appliquée nous permet de dire que nous les avons trouvées toutes :

$$a = b = c = d = \frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{3},\ \frac{5}{9},\ \frac{7}{12},\ \frac{2}{3},\ \frac{5}{8},\ \frac{3}{5};$$

$a = b = c =$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	,
$d =$	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{18}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{12}$	

$a = b =$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	1	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	,
$c = d =$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{7}{12}$	

$a = b =$	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{7}{12}$	1	1	1	$\frac{1}{2}$	
$c =$	0	1	1	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{17}{18}$	$\frac{11}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{2}$	0	,
$d =$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{n}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}$	

$a =$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{6}$	
$b =$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{2}{3}$	,
$c =$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
$d =$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{3}$	

$$\begin{array}{r|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}
a=b=c= & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{7}{12} & \frac{3}{5} & \frac{5}{8} & \frac{2}{3} & \frac{5}{9} & \frac{5}{9} & \frac{5}{8} & \frac{2}{3} & \frac{7}{12} & \frac{7}{12} & \frac{7}{12} & \frac{3}{5} & \frac{3}{5} \\
d= & \frac{9}{20} & \frac{1}{2} & \frac{5}{3} & 1 & \frac{7}{6} & \frac{1}{2} & \frac{7}{15} & \frac{5}{12} & \frac{1}{3} & \frac{17}{18} & \frac{7}{9} & \frac{1}{2} & \frac{5}{12} & \frac{2}{3} & \frac{11}{12} & \frac{3}{4} & \frac{9}{10} & \frac{11}{15}
\end{array},$$

$$\begin{array}{r|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}
a=b= & 1 & \frac{2}{3} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{2}{3} & \frac{5}{8} & \frac{7}{12} & \frac{3}{5} & \frac{1}{2} & \frac{7}{12} & \frac{2}{3} & \frac{3}{4} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{4} \\
c= & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{7}{12} & \frac{1}{2} & \frac{7}{12} & \frac{17}{24} & \frac{2}{3} & \frac{11}{15} & \frac{5}{6} & \frac{3}{4} & \frac{5}{6} & \frac{7}{12} & \frac{7}{12} & \frac{5}{6} & \frac{1}{2} \\
d= & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{12} & \frac{5}{12} & \frac{5}{12} & \frac{1}{2} & \frac{7}{15} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{5}{12} & \frac{5}{12} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{7}{12}
\end{array},$$

$$\begin{array}{r|c|c|c|c|c|}
a=b=c= & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{8} & \frac{5}{8} & \frac{2}{3} \\
d= & \frac{5}{6} & \frac{1}{2} & \frac{7}{8} & \frac{17}{24} & \frac{7}{12}
\end{array}.$$

CHAPITRE V.

236. Soit
$$\varphi(u) = u^{a-1}(u-1)^{b-1}(u-x)^{\lambda-1}(u-y)^{\mu-1}.$$

Je poserai, avec M. Picard,

$$\mathrm{U}_0 = \int_{u_0}^{0} \varphi(u)\,du, \qquad \mathrm{U}_1 = \int_{u_0}^{1} \varphi(u)\,du,$$
$$\mathrm{U}_\infty = \int_{u_0}^{\infty} \varphi(u)\,du, \qquad \mathrm{U}_x = \int_{u_0}^{x} \varphi(u)\,du, \qquad \mathrm{U}_y = \int_{u_0}^{y} \varphi(u)\,du;$$

a, b, λ, μ sont des nombres *réels* satisfaisant aux inégalités

$$a > 0, \qquad b > 0, \qquad \lambda > 0, \qquad \mu > 0, \qquad a + b + \lambda + \mu < 3.$$

Les arguments de u, $(u-1)$, $u-x$, $u-y$ sont choisis d'une façon arbitraire, mais bien déterminée au point u_0 ; ensuite, on les fait varier d'une façon continue.

Cela posé, choisissons les trois intégrales

$$\omega_1 = \mathrm{U}_x - \mathrm{U}_0,$$
$$\omega_2 = \mathrm{U}_y - \mathrm{U}_0,$$
$$\omega_3 = \mathrm{U}_1 - \mathrm{U}_0.$$

Les chemins suivis par le point d'affixe u étant ceux qu'indique la

Fig. 14.

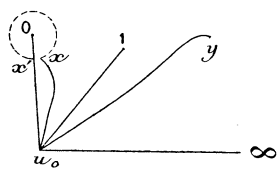


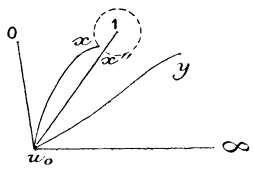
fig. 14, imaginons que le point x tourne autour de l'origine dans le sens direct. La substitution correspondante, calculée d'après la méthode de

M. Picard ([1]), sera

$$S_1 = \begin{vmatrix} \omega_1 & (2a + 2\lambda)\,\omega_1 \\ \omega_2 & \omega_2 + [(2\lambda) - 1]\,\omega_1 \\ \omega_3 & \omega_3 + [(2\lambda) - 1]\,\omega_1 \end{vmatrix}. \quad ([2])$$

Supposons maintenant que le point x tourne autour du point 1 (*fig.* 15),

Fig. 15.

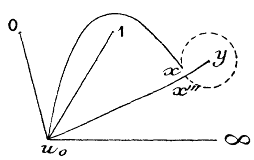


cette fois dans le sens inverse, on aura la deuxième substitution qui suit

$$S_2 = \begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_1 + [(-2\lambda) - (-2b - 2\lambda)]\,(\omega_3 - \omega_1) \\ \omega_2 & \omega_2 \\ \omega_3 & \omega_1 + \ (-2\lambda)\,(\omega_3 - \omega_1) \end{vmatrix}.$$

Un tour du point x, dans le sens inverse, autour du point y (*fig.* 16),

Fig. 16.



donne la substitution suivante :

$$S_3 = \begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_1[1-(-2\lambda)+(-2\lambda-2\mu)] + (-2\lambda-2b)[1-(-2\mu)]\{\omega_2+[(2b)-1]\,\omega_3\} \\ \omega_2 & \omega_1\,(2b)\,[1-(-2\lambda)] + (-2\lambda)\,\omega_2 + [1-(2b)]\,[1-(-2\lambda)]\,\omega_3 \\ \omega_3 & \omega_3 \end{vmatrix}.$$

Laissons maintenant x fixe et faisons tourner y autour du point 1 (*fig.* 17) dans le sens direct. On aura une quatrième substitution

$$S_4 = \begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_1 \\ \omega_2 & \omega_2 + (2\mu)\,[(2b) - 1]\,(\omega_2 - \omega_3) \\ \omega_3 & \omega_3 + [1 - (2\mu)]\,(\omega_2 - \omega_3) \end{vmatrix}.$$

([1]) *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. IX, année 1885, Ire Partie, p. 202.

([2]) J'emploie toujours la notation (a) pour $e^{i\pi a}$.

En faisant tourner le point y dans le sens direct autour du point x, on trouve la substitution S_3^{-1}.

Fig. 17.

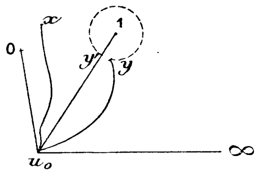
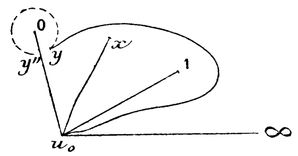


Fig. 18.



Enfin, en le faisant tourner dans le sens direct autour du point o (*fig.* 18), on trouve la cinquième et dernière substitution qui suit

$$S_5 = \left| \begin{array}{ll} \omega_1 & [(2\mu) + (-2\lambda) - (2\mu - 2\lambda)]\omega_1 + (-2b - 2\lambda)[(2\mu) - 1]\omega_2 \\ & \quad + (-2\lambda)[(2\mu) - 1][1 - (-2b)]\omega_3 \\ \omega_2 & [(2a + 2\lambda + 2b + 2\mu) - (2a + 2b + 2\mu) - (2b + 2\lambda + 2\mu) \\ & \qquad - (2\mu - 2\lambda) + (2b + 2\mu) + (2\mu) + (-2\lambda) - 1]\omega_1 \\ & \quad + [(2\mu - 2b - 2\lambda) + (2a + 2\mu) - (-2b - 2\lambda) - (2\mu) + 1]\omega_2 \\ & \quad + [(2a + 2b + 2\mu) - (2\mu - 2b - 2\lambda) - (2a + 2\mu) \\ & \qquad - (2b + 2\mu) + (2\mu - 2\lambda) + (-2\lambda - 2b) + (2\mu) - (-2\lambda]\omega_3 \\ \omega_3 & [(2\mu) - 1][1 - (-2\lambda)]\omega_1 + [(2\mu) - 1](-2b - 2\lambda)\omega_2 \\ & \quad + [1 - (-2\lambda) + (2\mu - 2\lambda) + (-2b - 2\lambda) - (2\mu - 2\lambda - 2b)]\omega_3 \end{array} \right|.$$

L'équation déterminante relative à S_1 admet la racine double $s = 1$ et la racine simple $s = (2a + 2\lambda)$; celle relative à S_2 admet la racine double $s = 1$ et la racine simple $s = (-2\lambda - 2b)$; celle relative à S_3 admet la racine double $s = 1$ et la racine simple $s = (-2\lambda - 2\mu)$; celle relative à S_4 la racine double $s = 1$ et la racine simple $s = (2\mu + 2b)$; celle relative à S_5 admet la racine double $s = 1$ et la racine simple $s = (2a + 2\mu)$.

237. Nous nous proposons, dans ce qui va suivre, de former la forme quadratique ternaire à indéterminées conjuguées, que les cinq substitutions précédentes laissent inaltérées, au cas où l'on prend pour a, b, λ, μ l'une des solutions données à la fin du Chapitre V.

Soit

$$\begin{aligned} f = {} & A\omega_1\omega_1^0 + A'\omega_2\omega_2^0 + A''\omega_3\omega_3^0 \\ & + B\omega_2\omega_3^0 + B_0\omega_2^0\omega_3 + B'\omega_3\omega_1^0 + B'_0\omega_3^0\omega_1 + B''\omega_1\omega_2^0 + B''_0\omega_1^0\omega_2 \end{aligned}$$

cette forme, A, A′, A″ étant des constantes réelles, B et B_0, B′ et B'_0, B″ et

B''_0 des quantités imaginaires conjuguées, ω_1^0, ω_2^0, ω_3^0 étant les imaginaires conjuguées de ω_1, ω_2, ω_3.

Je formerai le déterminant suivant

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B''_0 & B' \\ B'' & A' & B_0 \\ B'_0 & B & A'' \end{vmatrix}$$

et chercherai dans quel cas il est nul, en même temps que tous ses premiers mineurs, ou s'il existe des cas où δ est nul sans que tous ses premiers mineurs le soient.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que la substitution S_1 laisse la forme f inaltérée sont

$$\begin{aligned}
&B'' \sin(a+\lambda)\pi + (-a)\,(A' + B_0)\sin\lambda\pi = 0,\\
&B''_0 \sin(a+\lambda)\pi + (\;\;a)\,(A' + B\;\;)\sin\lambda\pi = 0,\\
&B' \sin(a+\lambda)\pi + (\;\;a)\,(A'' + B_0)\sin\lambda\pi = 0,\\
&B'_0 \sin(a+\lambda)\pi + (-a)\,(A'' + B\;\;)\sin\lambda\pi = 0.
\end{aligned}$$

La substitution S_2 nous donne quatre autres équations

$$\begin{aligned}
&B\;\;\sin\lambda\pi = (\lambda + b)B''_0 \sin b\pi,\\
&B_0 \sin\lambda\pi = (-\lambda - b)B'' \sin b\pi,\\
&B' \sin(\lambda - b)\pi = (-\lambda)A \sin b\pi - (-b)A'' \sin\lambda\pi,\\
&B'_0 \sin(\lambda - b)\pi = (\;\;\lambda)A \sin b\pi - (\;\;b)A'' \sin\lambda\pi.
\end{aligned}$$

Enfin la substitution S_4 peut se déduire de la substitution S_2 par le changement de ω_1 en ω_2, de ω_2 en ω_1, de λ en $-\mu$, et de b en $-b$. On en conclut

$$\begin{aligned}
&B' \sin\mu\pi \qquad\;\; = (b + \mu)B''_0 \sin b\pi,\\
&B'_0 \sin\mu\pi \qquad\;\; = (-b - \mu)B'' \sin b\pi,\\
&B\;\;\sin(\mu - b)\pi = (-\mu)A' \sin b\pi - (-b)A'' \sin\mu\pi,\\
&B_0 \sin(\mu - b)\pi = (\mu)A' \sin b\pi - (b)A'' \sin\mu\pi,
\end{aligned}$$

ce qui donne, en les considérant simultanément,

$$\begin{aligned}
\sigma A \;\; &= \sin\lambda\pi \sin(a + b + \mu)\pi,\\
\sigma A' &= \sin\mu\pi \sin(a + b + \lambda)\pi,\\
\sigma A'' &= \sin b\pi \sin(a + \lambda + \mu)\pi
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\sigma B &= -(\lambda + a)\sin b\pi \sin \mu\pi,\\
\sigma B_0 &= -(-\lambda - a)\sin b\pi \sin \mu\pi,\\
\sigma B' &= -(\mu + a)\sin b\pi \sin \lambda\pi,\\
\sigma B'_0 &= -(-\mu - a)\sin b\pi \sin \lambda\pi,\\
\sigma B'' &= -(b - a)\sin \lambda\pi \sin \mu\pi,\\
\sigma B''_0 &= -(a - b)\sin \lambda\pi \sin \mu\pi.
\end{aligned}$$

On en conclut

$$\sigma^3 \delta = \sin a\pi \sin b\pi \sin \lambda\pi \sin \mu\pi \sin(a + b + \lambda + \mu)\pi.$$

Or, parmi les solutions dont nous avons donné le Tableau à la fin du Chapitre IV, nous devons éliminer celles où l'un des nombres a, b, c, d est égal à 1 ou à 0; en effet, nous supposons que, dans l'expression $\varphi(u) = u^{a-1}(u-1)^{b-1}(u-x)^{\lambda-1}(u-y)^{\mu-1}$, aucun des facteurs n'a un exposant nul; et de plus, on doit avoir $a > 0$, $b > 0$, $\lambda > 0$, $\mu > 0$. Il en résulte que les nombres a, b, λ, μ sont certainement des *fractions*, et non pas des nombres entiers, et, par suite, *la condition nécessaire et suffisante pour que δ soit nul, c'est que $a + b + \lambda + \mu$ soit égal à un nombre entier.*

D'ailleurs, on a

$$\begin{aligned}
\sigma^2 a &= \sigma^3(A'A'' - BB_0) = \sin \mu\pi \sin b\pi \sin(a+\lambda)\pi \sin(a+b+\lambda+\mu)\pi,\\
\sigma^2 a' &= \sigma^2(A''A - B'B'_0) = \sin b\pi \sin \lambda\pi \sin(a+\mu)\pi \sin(a+b+\lambda+\mu)\pi,\\
\sigma^2 a'' &= \sigma^2(AA' - B''B''_0) = \sin \lambda\pi \sin \mu\pi \sin(a+\lambda)\pi \sin(a+b+\lambda+\mu)\pi,\\
\sigma^2 b &= \sigma^2(B'B'' - AB_0) = (-a)\sin \lambda\pi \sin \mu\pi \sin \nu\pi \sin(a+b+\lambda+\mu)\pi,\\
\sigma^2 b' &= \sigma^2(B''B - A'B'_0) = (-a)\sin \lambda\pi \sin \mu\pi \sin \nu\pi \sin(a+b+\lambda+\mu)\pi,\\
\sigma^2 b'' &= \sigma^2(BB' - A''B''_0) = (a)\sin \lambda\pi \sin \mu\pi \sin \nu\pi \sin(a+b+\lambda+\mu)\pi.
\end{aligned}$$

Et il résulte de ces formules que, *si δ est nul, il en sera de même de tous ses premiers mineurs.*

238. Nous avons donc à partager les solutions trouvées au Chapitre IV en deux catégories, celles pour lesquelles $a + b + \lambda + \mu$ est un nombre entier, et celles pour lesquelles $a + b + \lambda + \mu$ est une fraction.

En nous plaçant à un autre point de vue, nous aurons à distinguer les solutions pour lesquelles aucun des dix nombres $a+b$, $a+c$, $a+d$, $b+c$, $b+d$, $c+d$, $a+b+c$, $b+c+d$, $c+d+a$, $d+a+b$ n'est entier. Pour les solutions correspondantes, le groupe hyperfuchsien qui y est attaché est tel que le polyèdre fondamental est tout entier à l'intérieur de l'hypersphère limite; la surface du domaine fondamental n'a aucun point commun avec celle de cette hypersphère. Nous allons examiner successivement, en nous plaçant à ce double point de vue, les solutions trouvées au Chapitre IV.

Première catégorie : $a+b+c+d$ est entier.

$$a=b=c=d=\tfrac{1}{2},\qquad 2a-1=0,\qquad 2-3a=\tfrac{1}{2},\qquad 4a=2,$$

$$f=(\omega_1-\omega_2-\omega_3)(\omega_1^0+\omega_2^0-\omega_3^0),\qquad \varphi(u)=\frac{1}{\sqrt{u(u-1)(u-x)(u-y)}}.$$

Les cinq substitutions fondamentales sont

$$\begin{aligned}
S_1&=|\,\omega_1,\omega_2,\omega_3,\ \omega_1,\ \omega_2-2\omega_1,\ \omega_3-2\omega_1\,|,\\
S_2&=|\,\omega_1,\omega_2,\omega_3,\ 3\omega_1-2\omega_3,\ \omega_2,\ 2\omega_1-\omega_3\,|,\\
S_3&=|\,\omega_1,\omega_2,\omega_3,\ 3\omega_1+2\omega_2-4\omega_3,\ -2\omega_1-\omega_2+4\omega_3,\ \omega_3\,|,\\
S_4&=|\,\omega_1,\omega_2,\omega_3,\ \omega_1,\ 3\omega_2-2\omega_3,\ 2\omega_2-\omega_3\,|,\\
S_5&=|\,\omega_1,\omega_2,\omega_3,\ -3\omega_1-2\omega_3+4\omega_3,\ \omega_2,\ -4\omega_1-2\omega_2+5\omega_3\,|.
\end{aligned}$$

$$a=b=c=d=\tfrac{3}{4};\qquad 2a=1+\tfrac{1}{2},\qquad 2-3a=-\tfrac{1}{4},\qquad 4a=3,$$

$$f=(\omega_1-\omega_2+i\omega_3)(\omega_1^0-\omega_2^0-i\omega_3^0),\qquad \varphi(u)=\frac{1}{\sqrt[4]{u(u-1)(u-x)(u-y)}}.$$

$$\begin{aligned}
S_1&=|\,\omega_1,\omega_2,\omega_3,\ -\omega_1,\ \omega_2-(1+i)\omega_1,\ \omega_3-(1+i)\omega_1\,|,\\
S_2&=|\,\omega_1,\omega_2,\omega_3,\ (1+i)\omega_3-i\omega_1,\ \omega_2,\ (1-i)\omega_1+i\omega_3\,|,\\
S_3&=|\,\omega_1,\omega_2,\omega_3,\ -i\omega_1+(i-1)\omega_2+2\omega_3,\ -(i+1)\omega_1+i\omega_2+2\omega_3,\ \omega_3\,|,\\
S_4&=|\,\omega_1,\omega_2,\omega_3,\ \omega_1,\ i\omega_2+(1-i)\omega_3,\ (1+i)\omega_2-i\omega_3\,|,\\
S_5&=|\,\omega_1,\omega_2,\omega_3,\ -\omega_1+(i+1)\omega_2-2i\omega_3,\\
&\qquad -2(i+1)\omega_1+(2i+1)\omega_2+2(1-i)\omega_3,\ -2\omega_1+(1+i)\omega_2+(1-2i)\omega_3\,|.
\end{aligned}$$

Toutes les autres solutions rentrent dans la deuxième catégorie.

Citons, par exemple, le cas $a=b=c=d=\frac{1}{3}$. Ici

$$f=j(\omega_2\omega_3^0+\omega_3\omega_1^0)+j^2(\omega_2^0\omega_3+\omega_3^0\omega_1)+\omega_1\omega_2^0+\omega_3\omega_1^0,$$

où

$$j=\left(\tfrac{2}{3}\right)=e^{\frac{2i\pi}{3}},\qquad \delta=-1.$$

On peut écrire

$$f=uu_0+\tfrac{1}{2}vv_0-\tfrac{1}{2}ww_0,$$

en posant

$$\begin{aligned} u &= \omega_3, \\ v &= \omega_1 + \omega_2 - \omega_3, \\ w &= \omega_2 - \omega_1 + (j - j^2)\omega_3, \end{aligned}$$

d'où, inversement,

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \tfrac{1}{2}v - \tfrac{1}{2}w - j^2 u, \\ \omega_2 &= \tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{2}w - ju, \\ \omega_3 &= u. \end{aligned}$$

Voici quelles sont ici les cinq substitutions fondamentales et leurs transformées :

$$\begin{aligned} S_1 &= |\, \omega_1, \omega_2, \omega_3 \quad j^2\omega_1,\ \omega_2 + (j-1)\omega_1,\ \omega_3 + (j-1)\omega_1 \,|, \\ S_2 &= |\, \omega_1, \omega_2, \omega_3 \quad -2j^2\omega_1 + (j^2 - j)\omega_3,\ \omega_2,\ (1 - j^2)\omega_1 + j^2\omega_3 \,|, \\ S_3 &= |\, \omega_1, \omega_2, \omega_3 \quad -2j^2\omega_1 + (j-1)\omega_2 - 3j\omega_3,\ (j-1)\omega_1 + j^2\omega_2 + 3\omega_3,\ \omega_3 \,|, \\ S_4 &- |\, \omega_1, \omega_2, \omega_3 \quad \omega_1,\ -2j\omega_2 + (j - j^2)\omega_3,\ (1-j)\omega_2 + j\omega_3 \,|, \\ S_5 &= |\, \omega_1, \omega_2, \omega_3 \quad -2\omega_1 + (j^2 - j)\omega_2 - 3j^2\omega_3,\ -6\omega_1 + (j^2 - 3j)\omega_2 - 6j^2\omega_3, \\ &\qquad -3\omega_1 + (j^2 - j)\omega_2 + (1 - 3j^2)\omega_3 \,| \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} S_1 &= |\, u, v, w \quad j^2u + \tfrac{1}{2}(j-1)v - \tfrac{1}{2}(j-1)w,\ (j^2 - j)u - \tfrac{1}{2}jv + \tfrac{1}{2}(1 - j^2)w, \\ &\qquad (j^2 - j)u + \tfrac{1}{2}(j^2 - 1)v - \tfrac{1}{2}(j^2 - 3)w \,| \\ S_2 &= |\, u, v, w \quad ju + \tfrac{1}{2}(1 - j^2)v - \tfrac{1}{2}(1 - j^2)w,\ (j^2 - j)u - \tfrac{1}{2}j^2v + \tfrac{1}{2}(1 - j)w, \\ &\qquad (j^2 - j)u + \tfrac{1}{2}(j-1)v - \tfrac{1}{2}(j-3)w \,|, \\ S_3 &= |\, u, v, w \quad u,\ \tfrac{1}{2}(3j - 1)v - \tfrac{3}{2}(j+1)w,\ -\tfrac{3}{2}(j+1)v - \tfrac{1}{2}(j-3)w \,|, \\ S_4 &= |\, u, v, w \quad j^2u + \tfrac{1}{2}(1-j)v + \tfrac{1}{2}(1-j)w,\ (j - j^2)u - \tfrac{1}{2}jv - \tfrac{1}{2}(j+2)w, \\ &\qquad (j^2 - j)u + \tfrac{1}{2}(j+2)v + \tfrac{1}{2}(j+4)w \,|, \\ S_5 &= |\, u, v, w \quad j^2u + (j^2 - 1)v + (j^2 + 2)w,\ 2(j^2 - 1)u + (2j^2 - 1)v + 2(j^2 + 2)w, \\ &\qquad 2(2j^2 + 1)u + 2(2j^2 + 1)v + (2j + 5)w \,|. \end{aligned}$$

Le cas $a = b = c = d = \frac{2}{3}$ est à rapprocher du précédent (il suffit de changer i en $-i$ dans les formules que l'on vient d'écrire). Ce cas a été étudié spécialement par M. Picard (¹).

Je vais me borner, pour les autres cas, à énumérer les solutions (a, b, c, d), telles que, dans le groupe hyperfuchsien correspondant, le

---

(¹) *Sur des fonctions de deux variables analogues aux fonctions modulaires* (*Acta mathematica*, t. II, p. 114).

polyèdre fondamental n'ait aucun point commun avec l'hypersphère limite :

$$a = b = c = d = \frac{5}{9}, \quad \frac{7}{12}, \quad \frac{5}{8}, \quad \frac{3}{5},$$

$$\begin{array}{r|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}
a = b = c = & \frac{5}{9} & \frac{5}{8} & \frac{3}{5} & \frac{7}{12} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{7}{12} & \frac{3}{5} & \frac{5}{8} & \frac{5}{9} & \frac{5}{9} \\
d = & \frac{7}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{10} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{7}{12} & \frac{3}{10} & \frac{1}{3} & \frac{3}{8} & \frac{5}{12} & \frac{9}{20} & \frac{1}{2} & \frac{7}{15} & \frac{5}{12} & \frac{17}{18} & \frac{4}{9}
\end{array},$$

$$\begin{array}{r|c|c|c|c|c|c|c|c|}
a = b = c = & \frac{5}{8} & \frac{7}{12} & \frac{7}{12} & \frac{7}{12} & \frac{3}{5} & \frac{3}{5} & \frac{5}{8} & \frac{5}{8} \\
d = & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{11}{12} & \frac{3}{4} & \frac{9}{10} & \frac{11}{15} & \frac{7}{8} & \frac{17}{24}
\end{array},$$

$$\begin{array}{r|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}
a = b = & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{7}{12} & \frac{5}{8} & \frac{3}{5} & \frac{5}{12} & \frac{5}{9} & \frac{7}{12} & \frac{3}{4} & \frac{5}{8} & \frac{7}{12} & \frac{3}{5} & \frac{7}{12} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\
c = & \frac{7}{12} & \frac{9}{20} & \frac{5}{12} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{9}{10} & \frac{5}{6} & \frac{17}{18} & \frac{11}{12} & \frac{7}{12} & \frac{17}{24} & \frac{2}{3} & \frac{11}{15} & \frac{3}{4} & \frac{5}{6} & \frac{7}{12} \\
d = & \frac{1}{6} & \frac{3}{10} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{7}{8} & \frac{3}{10} & \frac{2}{3} & \frac{7}{18} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{12} & \frac{1}{2} & \frac{7}{15} & \frac{1}{2} & \frac{5}{12} & \frac{1}{2}
\end{array},$$

$$\begin{array}{r|c|c|c|c|}
a = b = & \frac{3}{4} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{4} \\
c = d = & \frac{3}{8} & \frac{5}{12} & \frac{7}{12} & \frac{7}{12}
\end{array}.$$

En tout...... $4 + 24 \times 4 + 16 \times 12 + 4 \times 6 = 316$ cas.

239. Pour terminer ce travail, je veux dire quelques mots du problème qui consiste à chercher si le système d'équations aux dérivées partielles (8) (n° 6) peut, pour certaines valeurs de α, β, β', γ, avoir son intégrale générale algébrique. Le problème revient à chercher pour quelles valeurs de a, b, λ, μ le groupe dont les cinq substitutions fondamentales sont S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 est un groupe fini.

En premier lieu, cherchons si l'on ne pourrait avoir un groupe dont les substitutions seraient de la forme

$$|\,\omega_1, \quad \omega_2, \quad \omega_3, \quad a\omega_1, \quad b\omega_2, \quad c\omega_3\,|,$$

a, b et c étant des racines de l'unité.

Remarquons tout d'abord que chacune des cinq substitutions S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 doit avoir pour forme canonique précisément une substitution de cette forme. Or les équations déterminantes des cinq substitutions considérées ont pour racines $(2a+2\lambda)$, $(-2b-2\lambda)$, $(-2\lambda-2\mu)$, $(2b+2\mu)$, $(2a+2\mu)$ (*voir* n° 236).

Soient

$$(2a+2\lambda)=\mathrm{A},\qquad (2b+2\lambda)=\mathrm{B},\qquad (2\lambda+2\mu)=\mathrm{C},$$
$$(2b+2\mu)=\mathrm{D},\qquad (2a+2\mu)=\mathrm{E},$$

A, B, C, D et E étant des racines de l'unité.

On en conclut

$$(2a)=\mathrm{A}(-2\lambda),$$
$$(2b)=\mathrm{B}(-2\lambda),$$
$$(2\mu)=\mathrm{C}(-2\lambda);$$

donc

$$\mathrm{D}=\mathrm{BC}(-4\lambda);$$

donc λ est réel et rationnel, et, par suite, il en est de même de a, b, μ.

La substitution S_1 sera de la forme indiquée si $(2\lambda)=1$, d'où il suit que λ doit être entier. Alors

$$\mathrm{S}_1=|\,\omega_1,\quad \omega_2,\quad \omega_3,\quad (2a)\omega_1,\quad \omega_2,\quad \omega_3\,|.$$

La deuxième devient

$$\mathrm{S}_2=\left|\begin{matrix}\omega_1 & (-2b)\omega_1+[1-(-2b)]\omega_3\\ \omega_2 & \omega_2\\ \omega_3 & \omega_3\end{matrix}\right|;$$

on en conclut que b doit être entier, et S_2 devient la substitution identique. Alors

$$\mathrm{S}_3=\left|\begin{matrix}\omega_1 & (-2\mu)\omega_1+[1-(-2\mu)]\omega_2\\ \omega_2 & \omega_2\\ \omega_3 & \omega_3\end{matrix}\right|;$$

on en conclut que μ doit être entier.

S_3 devient la substitution identique.

S_4 dans ces conditions se réduit aussi à la substitution identique, et

$$\mathrm{S}_5=|\,\omega_1,\quad \omega_2,\quad \omega_3,\quad \omega_1,\quad (2a)\omega_2,\quad \omega_3\,|.$$

Ainsi on trouve la solution suivante : a rationnel, b, λ, μ entiers. Comme on a

$$\beta+\beta'-\gamma=a-1,\qquad \gamma-\alpha=b,\qquad \beta=1-\lambda,\qquad \beta'=1-\mu,$$

on en conclut que β et β' sont entiers, ainsi que $\gamma-\alpha$, γ et α étant rationnels.

Si, d'une façon plus générale, on cherche si les substitutions du groupe peuvent être de la forme

$$|\omega_1, \quad \omega_2, \quad \omega_3, \quad a\omega_i, \quad b\omega_j, \quad c\omega_k|,$$

où i, j, k représentent l'une quelconque des permutations des indices 1, 2, 3, on retrouve les mêmes résultats.

Enfin si l'on essaye de faire en sorte que les substitutions soient de la forme $|\omega_i, \omega_j, \omega_k, \alpha\omega_i + \beta\omega_j, \gamma\omega_i + \delta\omega_j, \varepsilon\omega_k|$ ε étant racine de l'unité, et le groupe $|\omega_i, \omega_j, \alpha\omega_i + \beta\omega_j, \gamma\omega_i + \delta\omega_j|$ étant un groupe fini à deux variables, on retombe encore sur les mêmes résultats.

D'ailleurs si l'intégrale générale était une fonction algébrique de x et de y, elle serait une fonction algébrique de x seulement (y ayant une valeur constante quelconque). Donc le groupe formé par les trois premières substitutions prises seules devrait être fini. Or les groupes finis à trois variables autres que ceux déjà considérés dérivent de plus de *trois* substitutions fondamentales. Par suite, il n'y a pas d'autre solution que celle que nous avons indiquée plus haut.

240. Supposons maintenant que nous cherchions les cas où le système d'équations aux dérivées partielles (8), n° 6, admet *une seule* intégrale algébrique.

Je n'ai pas encore eu l'occasion d'écrire les équations auxquelles satisfait la série $F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y)$ considérée soit comme fonction de x seulement, soit comme fonction de y seulement. Ces équations, qui sont du troisième ordre, ont été données par M. Picard (1). Les voici

$$\begin{aligned}
&x(1-x)(x-y)\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} \\
&\quad +[(\beta+\gamma+2)x+(\beta'-\gamma-1)y-(\alpha+2\beta+4)x^2+(\alpha+\beta-\beta'+3)xy]\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \\
&\qquad +(\beta+1)[\gamma-(2\alpha+\beta+2)x+(\alpha-\beta'+1)y]\frac{\partial z}{\partial x}-\alpha\beta(\beta+1)z=0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&y(1-y)(y-x)\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} \\
&\quad +[(\beta'+\gamma+2)y+(\beta-\gamma-1)x-(\alpha+2\beta'+4)y^2+(\alpha+\beta'-\beta+3)xy]\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \\
&\qquad +(\beta'+1)[\gamma-(2\alpha+\beta'+2)y+(\alpha-\beta+1)x]\frac{\partial z}{\partial y}-\alpha\beta'(\beta'+1)z=0,
\end{aligned}$$

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XC, n° 22, p. 1267, 31 mai 1880.

Soit $z = f(x, y)$ une fonction de deux variables qui satisfasse simultanément aux deux équations. Considérée comme fonction de x, elle admettra comme points critiques les points $x = 0$, $x = \infty$, $x = 1$, $x = y$.

$$\text{Les racines de l'équation déterminante relative aux points}\ \left\{\begin{array}{l} x = 0, \\ x = \infty, \\ x = 1, \\ x = y, \end{array}\right. \text{sont} \left\{\begin{array}{l} a = 0,\ 1,\ 1 + \beta' - \gamma, \\ b = \alpha,\ \beta,\ \beta + 1, \\ c = 0,\ 1,\ \gamma - \alpha - \beta, \\ d = 0,\ 1,\ 1 - \beta - \beta'. \end{array}\right.$$

Considérée comme fonction de y, elle admettra comme points critiques les points $y = 0$, $y = \infty$, $y = 1$, $y = x$.

$$\text{Les racines de l'équation déterminante relative aux points}\ \left\{\begin{array}{l} y = 0, \\ y = \infty, \\ y = 1, \\ y = x, \end{array}\right. \text{sont} \left\{\begin{array}{l} a' = 0,\ 1,\ 1 + \beta - \gamma, \\ b' = \alpha,\ \beta',\ \beta' + 1, \\ c' = 0,\ 1,\ \gamma - \alpha - \beta', \\ d' = 0,\ 1,\ 1 - \beta - \beta'. \end{array}\right.$$

Si les équations précédentes admettent une intégrale algébrique unique, ce sera une fonction algébrique de x seul, ou de y seul, les dérivées partielles logarithmiques du premier ordre seront des fonctions rationnelles de x et de y.

L'intégrale sera donc de la forme

$$z = x^a y^{a'} (1 - x)^c (1 - y)^{c'} (x - y)^d g(x, y).$$

a, a', c, c', d étant réels et rationnels, $g(x, y)$ étant un polynôme entier en x et en y, de degré m en x, de degré n en y, et l'on aura

$$b = -(a + c + d + m),$$
$$b' = -(a' + c' + d' + n).$$

Dès lors, le Tableau des intégrales que nous avons donné à la fin du Chapitre II nous fournira aisément des exemples où le système d'équations aux dérivées partielles (8) admet une seule intégrale algébrique.

m étant entier et positif, $F_1(-m, \beta, \beta', \gamma; x, y)$ est un polynôme entier de degré m, en x et en y.

On aura encore, comme intégrales algébriques,

$$(1 - x)^{\frac{p}{q}} (1 - y)^n F_1\left(\gamma + m + n + \frac{p}{q}, -m, -n, \gamma; x, \frac{x - y}{y - 1}\right),$$

en posant $\beta' = -m$, $\gamma - \beta - \beta' = -n$, $\gamma - \alpha - \beta = \frac{p}{q}$, m, n, p, q étant entiers, positifs, puis

$$(1-y)^{\frac{p}{q}}(1-x)^m \mathrm{F}_1\left(\gamma + m + n + \frac{p}{q},\ -m,\ -n,\ \gamma;\ \frac{x-y}{x-1},\ y\right),$$

dans des circonstances analogues.

Si l'on pose $1 + \beta' - \gamma = \frac{p}{q}$, $\beta' = -n$, $1 + \alpha - \gamma = -m$, on aura l'intégrale algébrique

$$x^{\frac{p}{q}} y^n \mathrm{F}_1\left(\beta + \frac{p}{q},\ -m,\ -n,\ \beta - m - n;\ 1-x,\ \frac{y-x}{y}\right),$$

et, dans des circonstances analogues

$$y^{\frac{p}{q}} x^m \mathrm{F}_1\left(\beta' + \frac{p}{q},\ -m,\ -n,\ \beta' - m - n;\ \frac{x-y}{x},\ 1-y\right).$$

Si l'on pose $1 - \beta - \beta' = \frac{p}{q}$, $\gamma - \beta - \beta' = -n$, $1 + \alpha - \gamma = -m$, on aura l'intégrale algébrique

$$(y-x)^{\frac{p}{q}}(-x)^n(1-x)^m\ \mathrm{F}_1\left(1-\beta,\ -m,\ -n,\ 1-\beta-m-n-\frac{p}{q},\ \frac{1-y}{1-x},\ \frac{y}{x}\right).$$

Si l'on pose $1 + \beta - \gamma = \frac{p'}{q'}$, $1 + \beta' - \gamma = \frac{p}{q}$, $1 + \beta + \beta' - \gamma = -m$, on aura l'intégrale algébrique

$$x^{\frac{p}{q}} y^{\frac{p'}{q'}} (y-x)^m \mathrm{F}_1\left(-m,\ \alpha + m + \frac{p}{q} + \frac{p'}{q'},\ 1-\alpha,\ 1+\frac{p}{q};\ \frac{x(1-y)}{x-y},\ \frac{x}{x-y}\right).$$

Si l'on pose $1 + \beta' - \gamma = \frac{p}{q}$, $\gamma - \alpha - \beta = \frac{p'}{q'}$, $\beta' = -n$, $1 - \alpha = -m$, on aura l'intégrale algébrique

$$x^{\frac{p}{q}}(1-x)^{\frac{p'}{q'}}(y-x)^n\ \mathrm{F}_1\left[1+m+n+\frac{p}{q}+\frac{p'}{q'},\ -m,\ -n,\ 1+\frac{p}{q};\ x,\ \frac{x(1-y)}{x-y}\right]$$

et, dans des circonstances analogues,

$$y^{\frac{p}{q}}(1-y)^{\frac{p'}{q'}}(x-y)^m\ \mathrm{F}\left[1+m+n+\frac{p}{q}+\frac{p'}{q'} - m,\ -n,\ 1+\frac{p}{q},\ \frac{y(1-x)}{y-x},\ y\right].$$

En posant $\gamma-\alpha-\beta=\frac{p}{q}$, $\gamma-\alpha-\beta'=\frac{p'}{q'}$, $\gamma-\alpha=-m$, on aura l'intégrale algébrique

$$(1-x)^{\frac{p}{q}}(1-y)^{\frac{p'}{q'}}(x-y)^m\,\mathrm{F}_1\left[-m, 1-\alpha, \gamma-2m-\frac{p}{q}-\frac{p'}{q'}, 1+\frac{p}{q}; \frac{1-x}{y-x}, \frac{y(1-x)}{y-x}\right],$$

et ainsi de suite.

241. Pour finir, démontrons le théorème suivant, qui est une généralisation d'un théorème analogue concernant l'équation différentielle à laquelle satisfait la série hypergéométrique de Gauss ([1]).

Soient z_1, z_2, z_3 trois intégrales particulières, distinctes, du système d'équations aux dérivées partielles (8). Si l'on pose $p_i=\frac{\partial z_i}{\partial x}$, $q_i=\frac{\partial z_i}{\partial y}$, et si Δ désigne le déterminant

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix},$$

on sait que

$$\Delta = \mathrm{A}\,x^{\beta'-\gamma}\,y^{\beta-\gamma}\,(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta-1}\,(1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'-1}\,(x-y)^{-\beta-\beta}.$$

(*Voir* le Mémoire de M. Appell, déjà cité.)

Si z_1, z_2, z_3 sont des fonctions algébriques de x et de y, il en sera de même de $\omega_1=\frac{z_1}{z_3}$ et de $\omega_2=\frac{z_2}{z_3}$. *Réciproquement,* si ω_1 et ω_2 sont des fonctions algébriques de x et de y, et si Δ est aussi une fonction algébrique de x et de y (ce qui aura lieu si α, β, β', γ sont réels et rationnels), z_1, z_2 et z_3 seront aussi des fonctions algébriques de x et de y.

En effet, si ω_1, ω_2 sont des fonctions algébriques, il en sera de même de $\frac{\partial\omega_1}{\partial x}$, $\frac{\partial\omega_1}{\partial y}$, $\frac{\partial\omega_2}{\partial x}$, $\frac{\partial\omega_2}{\partial y}$. Or

$$\Delta = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} = z_1 z_2 z_3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{p_1}{z_1} & \frac{p_2}{z_2} & \frac{p_3}{z_3} \\ \frac{q_1}{z_1} & \frac{q_2}{z_2} & \frac{q_3}{z_3} \end{vmatrix} = \omega_1\omega_2 z_3^3 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{p_1}{z_1}-\frac{p_3}{z_3} & \frac{p_2}{z_2}-\frac{p_3}{z_3} & \frac{p_3}{z_3} \\ \frac{q_1}{z_1}-\frac{q_3}{z_3} & \frac{q_2}{z_2}-\frac{q_3}{z_3} & \frac{q_3}{z_3} \end{vmatrix};$$

([1]) *Voir* le Mémoire de M. Schwarz : *Sur les cas dans lesquels la série hypergéométrique de Gauss représente une fonction algébrique de son quatrième élément* (*Journal de Crelle,* t. LXXV, p. 292, 335).

d'ailleurs

$$\frac{1}{\omega_1}\frac{\partial\omega_1}{\partial x}=\frac{p_1}{z_1}-\frac{p_3}{z_3},\qquad \frac{1}{\omega_1}\frac{\partial\omega_1}{\partial y}=\frac{q_1}{z_1}-\frac{q_3}{z_3},$$
$$\frac{1}{\omega_2}\frac{\partial\omega_2}{\partial x}=\frac{p_2}{z_2}-\frac{p_3}{z_3},\qquad \frac{1}{\omega_2}\frac{\partial\omega_2}{\partial y}=\frac{q_2}{z_2}-\frac{q_3}{z_3};$$

donc

$$\Delta=z_3^3\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x}\frac{\partial\omega_2}{\partial y}-\frac{\partial\omega_1}{\partial y}\frac{\partial\omega_2}{\partial x}\right).$$

Donc z_3 est une fonction algébrique de x et de y, et par suite aussi z_1 et z_2.