
SUR LE SYSTÈME D'ÉQUATIONS
AUX
DÉRIVÉES PARTIELLES SIMULTANÉES

AUXQUELLES SATISFAIT LA SÉRIE HYPERGÉOMÉTRIQUE
A DEUX VARIABLES $F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y)$,

PAR M. R. LE VAVASSEUR,

Professeur au Lycée de Moulins.

Le présent travail est une modeste contribution à l'étude du système d'équations aux dérivées partielles simultanées (S) auxquelles satisfait la série hypergéométrique à deux variables $F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y)$.

Il est divisé en cinq Chapitres.

Dans le Chapitre I, je m'occupe des relations qui existent entre la fonction $F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y)$ et ses contiguës. Je démontre que toute fonction contiguë, $F_1(\alpha + p, \beta + q, \beta' + q', \gamma + r; x, y)$, p, q, q' et r étant des nombres entiers, est une fonction linéaire et homogène de F_1 , de $\frac{\partial F_1}{\partial x}$ et de $\frac{\partial F_1}{\partial y}$, les coefficients étant des fonctions rationnelles de x et de y . J'en déduis, par une voie naturelle, les équations aux dérivées partielles du second ordre auxquelles satisfait la fonction F_1 . En suivant une marche identique, j'étudie de la même façon les dix intégrales particulières bien connues qu'on obtient en donnant à g et h , dans l'expression

$$\int_g^h u^{\alpha-1} (1-u)^{\gamma-\alpha-1} (1-ux)^{-\beta} (1-uy)^{-\beta'} du,$$

les valeurs $0, 1, \infty, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}$.

Dans le Chapitre II, j'établis un Tableau de 64 intégrales du système

Fac. de T. — VII.

F. I

(S) analogue au Tableau des 24 intégrales de Kummer relatif à l'équation différentielle du second ordre à laquelle satisfait la série hypergéométrique de Gauss, $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$. C'est le développement d'une Note que M. Goursat a fait publier dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*.

Le Chapitre III est occupé par la recherche des relations qui existent entre trois ou quatre des dix intégrales précédemment citées, lorsqu'elles ne sont pas distinctes. J'ai insisté sur ce fait que les relations en question dépendent des positions de x et y . J'ai dressé quatorze Tableaux distincts de relations, je n'ai écrit que celles qu'on ne peut déduire simplement des relations déjà trouvées. J'ai adopté un système de numérotage qui permet de trouver immédiatement dans l'un des Tableaux la relation qui existe entre tel groupe que l'on voudra, de trois ou quatre intégrales non distinctes.

Soit

$$\varphi(u) = u^{a-1}(u-1)^{b-1}(u-x)^{c-1}(u-y)^{d-1},$$

$$\omega_1 = \int_0^x \varphi(u) du, \quad \omega_2 = \int_0^y \varphi(u) du, \quad \omega_3 = \int_0^1 \varphi(u) du;$$

enfin

$$\frac{\omega_1}{\omega_3} = \xi, \quad \frac{\omega_2}{\omega_3} = \eta.$$

M. Picard a démontré que si x et y , considérées comme fonctions de ξ et de η , étaient des fonctions uniformes de ξ et de η , les dix nombres $a + b - 1$, $a + c - 1$, $a + d - 1$, $b + c - 1$, $b + d - 1$, $c + d - 1$, $2 - b - c - d$, $2 - c - d - a$, $2 - d - a - b$, $2 - a - b - c$ devaient être les inverses de nombres entiers. Je me suis proposé, dans le Chapitre IV, de trouver tous les groupes de quatre nombres a, b, c, d , jouissant de cette propriété.

Dans le Chapitre V, j'établis le groupe du système (S) en suivant la méthode de M. Picard; puis, considérant la forme quadratique ternaire, à indéterminées conjuguées que ce groupe laisse inaltérée, j'établis que son déterminant invariant ne peut s'annuler qu'en même temps que tous ses premiers mineurs, répondant ainsi à une question que M. Picard a posée dans une Note insérée au *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XV, année 1886-1887, p. 148.

Je cherche ensuite dans quels cas le système (S) aura son intégrale générale algébrique.

CHAPITRE I.

1. Considérons l'expression

$$U = u^{\alpha-1} (1-u)^{\gamma-\alpha-1} (1-ux)^{-\beta} (1-uy)^{-\beta'},$$

dans laquelle on suppose que u prend des valeurs réelles appartenant à l'intervalle $(0, 1)$. Je choisis pour l'argument de u et pour l'argument de $(1-u)$ la valeur zéro. x et y sont des valeurs complexes ou réelles, mais, si elles sont réelles, inférieures à 1. Comme arguments de $(1-ux)$ et de $(1-uy)$, je choisis ceux qui s'annulent en même temps que u . Les nombres $\alpha, \beta, \beta', \gamma$ sont réels ou imaginaires. La partie réelle de α et celle de $(\gamma - \alpha)$ sont assujetties à être positives.

Dans ces conditions, l'intégrale définie

$$\Phi(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y) = \int_0^1 U du$$

a un sens. C'est une fonction bien déterminée de x et de y . Si l'on regarde la portion indéfinie de l'axe réel X qui est à droite du point $(+1)$ comme une coupure, que ne pourront franchir ni le point x , ni le point y , Φ sera une fonction uniforme de x et de y .

On a, en particulier,

$$\Phi(\alpha, \beta, \beta', \gamma; 0, 0) = \int_0^1 u^{\alpha-1} (1-u)^{\gamma-\alpha-1} du = B(\alpha, \gamma - \alpha),$$

en posant

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad \Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx \quad (1).$$

Nous définirons, avec M. Appell ⁽²⁾, l'expression (λ, k) par l'égalité

$$(\lambda, k) = \lambda(\lambda+1) \dots (\lambda+k-1).$$

⁽¹⁾ Voir le *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* de M. C. Jordan, t. II, p. 177, 190, 191.

⁽²⁾ Voir *Journal de Mathématiques pures et appliquées* de Liouville, t. VIII, année 1882, p. 173 et suivantes.

Par convention, le symbole $(\lambda, 0)$, qui n'a pas de sens par lui-même, représentera 1.

On voit alors immédiatement que l'on a

$$\frac{\partial^{m+n} \Phi(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y)}{\partial x^m \partial y^n} = (\beta, m) (\beta', n) \Phi(\alpha + m + n, \beta + m, \beta' + n, \gamma + m + n; x, y).$$

En conséquence, si nous posons

$$\Phi(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y) = \mathbf{B}(\alpha, \gamma - \alpha) \Phi_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y),$$

en sorte que

$$\Phi_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; 0, 0) = 1,$$

on déduit aisément de l'égalité précédente pour cette nouvelle fonction Φ_1 la formule suivante :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^{m+n} \Phi_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y)}{\partial x^m \partial y^n} \\ &= \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m)(\beta', n)}{(\gamma, m+n)} \Phi_1(\alpha + m + n, \beta + m, \beta' + n, \gamma + m + n; x, y). \end{aligned}$$

On conclut de là, en observant que $m! = (1, m)$,

$$\frac{1}{m!n!} \left[\frac{\partial^{m+n} \Phi_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y)}{\partial x^m \partial y^n} \right]_{x=0, y=0} = \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m)(\beta', n)}{(\gamma, m+n)(1, m)(1, n)}$$

et, par conséquent, la fonction Φ_1 sera représentée, pour x et y voisins de l'origine, par la série

$$\mathbf{F}_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m)(\beta', n)}{(\gamma, m+n)(1, m)(1, n)} x^m y^n.$$

M. Appell a démontré que cette série est convergente sous les conditions $|x| < 1$, $|y| < 1$, quelles que soient les valeurs de α, β, β' et γ (1). Elle servira donc à définir la fonction $\Phi_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y)$, quelles que soient les valeurs de α, β, β' et γ , tant qu'on aura $|x| < 1$, $|y| < 1$.

2. Soit p un nombre entier quelconque. Dans ce qui va suivre, pour abrégé, je désignerai par $\Phi(\alpha + p)$, $\Phi(\beta + p)$, $\Phi(\beta' + p)$, $\Phi(\gamma + p)$ les expressions $\Phi(\alpha + p, \beta, \beta', \gamma; x, y)$, $\Phi(\alpha, \beta + p, \beta', \gamma; x, y)$, $\Phi(\alpha, \beta, \beta' + p, \gamma; x, y)$, $\Phi(\alpha, \beta, \beta', \gamma + p; x, y)$, respectivement.

(1) Voir le Mémoire de M. Appell, *loc. cit.*

De même, q désignant un autre nombre entier, $\Phi(\alpha + p, \beta + q)$ représentera $\Phi(\alpha + p, \beta + q, \beta', \gamma; x, y)$, et ainsi de suite.

J'emploierai les mêmes abréviations pour la série $F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y)$.

Cela posé, si la partie réelle de α est supérieure à 1, l'intégrale $\int_0^1 \frac{U du}{u}$ aura un sens ainsi que $\Phi(\alpha - 1)$ et l'on verra sans difficulté qu'on a

$$\int_0^1 \frac{U du}{u} = \Phi(\alpha - 1) + \Phi.$$

De même, si la partie réelle de $(\gamma - \alpha)$ est supérieure à 1, l'intégrale $\int_0^1 \frac{U du}{1-u}$ aura un sens, ainsi que $\Phi(\gamma - 1)$ et l'on aura précisément

$$\int_0^1 \frac{U du}{1-u} = \Phi(\gamma - 1).$$

On a aussi

$$\int_0^1 \frac{U du}{1-ux} = \Phi(\beta + 1),$$

$$\int_0^1 \frac{U du}{1-uy} = \Phi(\beta' + 1)$$

et

$$\int_0^1 U u du = \Phi - \Phi(\gamma + 1).$$

Ensuite on trouvera aisément les relations suivantes :

$$\Phi(\alpha + 1) = \Phi(\gamma - 1) - \Phi,$$

$$\Phi(\beta - 1) = x \Phi(\gamma + 1) - (x - 1) \Phi,$$

$$\Phi(\beta' - 1) = y \Phi(\gamma + 1) - (y - 1) \Phi.$$

Les trois dernières relations donnent immédiatement, si l'on suppose $|x| < 1$, et $|y| < 1$, en tenant compte de la formule

$$\Phi(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma - \alpha)}{\Gamma(\gamma)} F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y),$$

qui a lieu dans les conditions données,

$$(1) \quad \alpha F_1(\alpha + 1) = (\gamma - 1) F_1(\gamma - 1) + (1 + \alpha - \gamma) F_1,$$

$$(2) \quad \gamma F_1(\beta - 1) = (\gamma - \alpha) x F_1(\gamma + 1) - \gamma(x - 1) F_1,$$

$$(3) \quad \gamma F_1(\beta' - 1) = (\gamma - \alpha) y F_1(\gamma + 1) - \gamma(y - 1) F_1.$$

3. De l'équation

$$U = u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(1-ux)^{-\beta}(1-uy)^{-\beta'},$$

je déduis

$$\frac{dU}{du} = U \left(\frac{\alpha-1}{u} + \frac{1+\alpha-\gamma}{1-u} + \frac{\beta x}{1-ux} + \frac{\beta' y}{1-uy} \right).$$

Intégrant les deux membres de cette équation, multipliés par du , depuis 0 jusqu'à 1, on trouve (en supposant toujours les parties réelles de α et de $\gamma - \alpha$ supérieures à 1)

$$(\alpha-1)[\Phi(\alpha-1) + \Phi] - (\gamma-\alpha-1)\Phi(\gamma-1) + \beta x \Phi(\beta+1) + \beta' y \Phi(\beta'+1) = 0,$$

et, par suite,

$$(4) \quad \begin{cases} (\gamma-\alpha)F_1(\alpha-1) + (\alpha-1)F_1 - (\gamma-1)F_1(\gamma-1) \\ + \beta x F_1(\beta+1) + \beta' y F_1(\beta'+1) = 0. \end{cases}$$

De même, on a

$$\frac{d(uU)}{du} = uU \left(\frac{\alpha}{u} + \frac{1+\alpha-\gamma}{1-u} + \frac{\beta x}{1-ux} + \frac{\beta' y}{1-uy} \right).$$

Multiplions les deux membres de cette équation par du et intégrons de 0 jusqu'à 1, il vient

$$\beta \Phi(\beta+1) + \beta' \Phi(\beta'+1) = (\gamma-\alpha-1)\Phi(\gamma-1) + (1+\beta+\beta'-\gamma)\Phi,$$

et, par suite,

$$(5) \quad \beta F_1(\beta+1) + \beta' F_1(\beta'+1) = (\gamma-1)F_1(\gamma-1) + (1+\beta+\beta'-\gamma)F_1.$$

Enfin, en partant de l'équation

$$\frac{d(u^2U)}{du} = u^2U \left(\frac{\alpha+1}{u} + \frac{1+\alpha-\gamma}{1-u} + \frac{\beta x}{1-ux} + \frac{\beta' y}{1-uy} \right),$$

multipliant les deux membres par du , puis intégrant de 0 à 1, on trouve

$$\begin{aligned} & [(2\gamma-\beta-\beta'-\alpha-1)xy - \beta y - \beta' x] \Phi - (\gamma-\beta-\beta')xy \Phi(\gamma+1) \\ & - (\gamma-\alpha-1)xy \Phi(\gamma-1) + \beta y \Phi(\beta+1) + \beta' x \Phi(\beta'+1) = 0, \end{aligned}$$

et, par suite,

$$(6) \quad \begin{cases} (\gamma-\alpha)(\gamma-\beta-\beta')xy F_1(\gamma+1) \\ = [(2\gamma-\beta-\beta'-\alpha-1)xy - \beta y - \beta' x] \gamma F_1 - \gamma(\gamma-1)xy F_1(\gamma-1) \\ + \beta \gamma y F_1(\beta+1) + \beta' \gamma x F_1(\beta'+1). \end{cases}$$

Nous avons ainsi obtenu *six* équations linéaires et homogènes entre F_1 , $F_1(\alpha - 1)$, $F_1(\beta - 1)$, $F_1(\beta' - 1)$, $F_1(\gamma - 1)$, $F_1(\alpha + 1)$, $F_1(\beta + 1)$, $F_1(\beta' + 1)$, $F_1(\gamma + 1)$, les coefficients étant des polynômes entiers en x et en y . La suite des calculs montrera que ces six relations sont distinctes. Nous pouvons dès lors énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Entre la fonction F_1 , et trois quelconques des huit fonctions contiguës $F_1(\alpha - 1)$, $F_1(\beta - 1)$, $F_1(\beta' - 1)$, $F_1(\gamma - 1)$, $F_1(\alpha + 1)$, $F_1(\beta + 1)$, $F_1(\beta' + 1)$, $F_1(\gamma + 1)$, existe une relation linéaire et homogène dont les coefficients sont des polynômes entiers en x et en y .*

4. Posons

$$u_{mn} = \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m)(\beta', n)}{(\gamma, m+n)(1, m)(1, n)} x^m y^n,$$

d'où

$$F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} u_{mn} = \mathbf{S} u_{mn}.$$

On a alors

$$F_1(\beta + 1) = F_1 + \frac{1}{\beta} \mathbf{S} m u_{mn},$$

$$F_1(\beta' + 1) = F_1 + \frac{1}{\beta'} \mathbf{S} n u_{mn}$$

et

$$F_1(\gamma - 1) = F_1 + \frac{1}{\gamma - 1} \mathbf{S} (m + n) u_{mn}.$$

D'ailleurs, on voit immédiatement que

$$\mathbf{S} m u_{mn} = x \frac{\partial F_1}{\partial x},$$

$$\mathbf{S} n u_{mn} = y \frac{\partial F_1}{\partial y}.$$

Donc

$$F_1(\beta + 1) = F_1 + \frac{x}{\beta} \frac{\partial F_1}{\partial x},$$

$$F_1(\beta' + 1) = F_1 + \frac{y}{\beta'} \frac{\partial F_1}{\partial y},$$

$$F_1(\gamma - 1) = F_1 + \frac{1}{\gamma - 1} \left(x \frac{\partial F_1}{\partial x} + y \frac{\partial F_1}{\partial y} \right).$$

On déduit de là que *les huit fonctions contiguës pourront s'exprimer*

en fonction linéaire et homogène de F_1 , de $\frac{\partial F_1}{\partial x}$ et de $\frac{\partial F_1}{\partial y}$, les coefficients étant des polynômes entiers en x et en y .

On a le Tableau suivant :

$$(\gamma - \alpha) F_1(\alpha - 1) = (\gamma - \alpha - \beta x - \beta' y) F_1 + x(1 - x) \frac{\partial F_1}{\partial x} + y(1 - y) \frac{\partial F_1}{\partial y},$$

$$(\gamma - \beta - \beta') F_1(\beta - 1) = (\gamma - \beta - \beta' - \alpha x) F_1 + x(1 - x) \frac{\partial F_1}{\partial x} + x(1 - y) \frac{\partial F_1}{\partial y},$$

$$(\gamma - \beta - \beta') F_1(\beta' - 1) = (\gamma - \beta - \beta' - \alpha y) F_1 + y(1 - y) \frac{\partial F_1}{\partial y} + y(1 - x) \frac{\partial F_1}{\partial x},$$

$$(\gamma - 1) F_1(\gamma - 1) = (\gamma - 1) F_1 + x \frac{\partial F_1}{\partial x} + y \frac{\partial F_1}{\partial y},$$

$$\alpha F_1(\alpha + 1) = \alpha F_1 + x \frac{\partial F_1}{\partial x} + y \frac{\partial F_1}{\partial y},$$

$$\beta F_1(\beta + 1) = \beta F_1 + x \frac{\partial F_1}{\partial x},$$

$$\beta' F_1(\beta' + 1) = \beta' F_1 + y \frac{\partial F_1}{\partial y},$$

$$(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta - \beta') F_1(\gamma + 1) = (\gamma - \alpha - \beta - \beta') \gamma F_1 + \gamma(1 - x) \frac{\partial F_1}{\partial x} + \gamma(1 - y) \frac{\partial F_1}{\partial y}.$$

De la formation effective de ce Tableau résulte que les équations (1), (2), ..., (6) sont bien distinctes, ainsi que nous l'avions annoncé.

5. La méthode que nous venons d'appliquer, pour trouver les huit premières fonctions contiguës en fonction linéaire et homogène de F_1 , de $\frac{\partial F_1}{\partial x}$ et de $\frac{\partial F_1}{\partial y}$, s'applique aussi aux suivantes.

Soit à calculer

$$\Phi(\alpha + p, \beta + q, \beta' + q', \gamma + r),$$

p, q, q' et r étant des nombres entiers, positifs ou négatifs. On part de la formule

$$\begin{aligned} & \Phi(\alpha + p, \beta + q, \beta' + q', \gamma + r) \\ &= \int_0^1 u^{\alpha+p-1} (1-u)^{\gamma-\alpha+r-p-1} (1-ux)^{-\beta-q} (1-uy)^{-\beta'-q'} du; \end{aligned}$$

si p est négatif, il faudra supposer que la partie réelle de α est supérieure à

— p ; de même, si $(r - p)$ est négatif, il faudra supposer que la partie réelle de $\gamma - \alpha$ est supérieure à $p - r$.

Sous ces conditions seulement, l'intégrale du second membre a un sens. Cette intégrale peut s'écrire

$$\int_0^1 U u^p (1-u)^{r-p} (1-ux)^{-q} (1-uy)^{-q'} du.$$

On décomposera alors la fonction rationnelle de u ,

$$u^p (1-u)^{r-p} (1-ux)^{-q} (1-uy)^{-q'}$$

en ses éléments simples. Supposons que l'on ait

$$\begin{aligned} & u^p (1-u)^{r-p} (1-ux)^{-q} (1-uy)^{-q'} \\ &= \sum a_h u^h + \sum \frac{A_\lambda}{u^\lambda} + \sum \frac{B_\mu}{(1-u)^\mu} + \sum \frac{C_\nu}{(1-ux)^\nu} + \sum \frac{C_{\nu'}}{(1-uy)^{\nu'}} \end{aligned}$$

($h, \lambda, \mu, \nu, \nu'$ étant des entiers positifs); on aura alors à calculer des intégrales de la forme

$$(7) \quad \int_0^1 u^h U du, \quad \int_0^1 \frac{U du}{u^\lambda}, \quad \int_0^1 \frac{U du}{(1-u)^\mu}, \quad \int_0^1 \frac{U du}{(1-ux)^\nu}, \quad \int_0^1 \frac{U du}{(1-uy)^{\nu'}}.$$

Or on a identiquement

$$\begin{aligned} \frac{d(u^{h+1}U)}{du} &= u^{h+1}U \left(\frac{\alpha+h}{u} + \frac{1+\alpha-\gamma}{1-u} + \frac{\beta x}{1-ux} + \frac{\beta' y}{1-uy} \right), \\ \frac{d}{du} \left[\frac{U}{(1-u)^{\mu-1}} \right] &= \frac{U}{(1-u)^{\mu-1}} \left(\frac{\alpha-1}{u} + \frac{\alpha-\gamma+\mu}{1-u} + \frac{\beta x}{1-ux} + \frac{\beta' y}{1-uy} \right), \\ \frac{d}{du} \left[\frac{U}{(1-ux)^{\nu-1}} \right] &= \frac{U}{(1-ux)^{\nu-1}} \left[\frac{\alpha-1}{u} + \frac{1+\alpha-\gamma}{1-u} + \frac{(\beta+\nu-1)x}{1-ux} + \frac{\beta' y}{1-uy} \right], \\ \frac{d}{du} \left[\frac{U}{(1-uy)^{\nu'-1}} \right] &= \frac{U}{(1-uy)^{\nu'-1}} \left[\frac{\alpha-1}{u} + \frac{1+\alpha-\gamma}{1-u} + \frac{\beta x}{1-ux} + \frac{(\beta'+\nu'-1)y}{1-uy} \right]. \end{aligned}$$

Enfin

$$\frac{d}{du} \left(\frac{U}{u^{\lambda-1}} \right) = \frac{U}{u^{\lambda-1}} \left(\frac{\alpha-\lambda}{u} + \frac{1+\alpha-\gamma}{1-u} + \frac{\beta x}{1-ux} + \frac{\beta' y}{1-uy} \right).$$

Multipliant par du les deux membres de l'une quelconque de ces équations, et intégrant, de 0 à 1, le premier membre est nul, et les équations obtenues, toute réduction faite, permettront de calculer les intégrales (7),

pourvu que l'on ait déjà calculé les intégrales analogues, où les exposants $h, \lambda, \mu, \nu, \nu'$ soient moindres.

On passe ensuite des formules concernant la fonction Φ aux formules concernant la fonction F_1 , sans aucune difficulté.

Ces dernières formules se trouvent ainsi démontrées pour certaines valeurs de $\alpha, \beta, \beta', \gamma$. Néanmoins, elles ont lieu pour toute valeur de $\alpha, \beta, \beta', \gamma$. Il suffit, pour s'en convaincre, d'observer qu'on peut les vérifier directement, en partant de la formule

$$F_1 = \sum u_{mn},$$

et que, dans le calcul de vérification, on n'a aucune restriction à faire sur les valeurs de α, β, β' et γ .

On peut donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Toute fonction contiguë $F_1(\alpha + p, \beta + q, \beta' + q', \gamma + r)$ est une fonction linéaire et homogène de F_1 , de $\frac{\partial F_1}{\partial x}$ et de $\frac{\partial F_1}{\partial y}$, les coefficients étant des fonctions rationnelles de x et de y .*

Je donne ici le Tableau des fonctions contiguës obtenues en remplaçant dans F_1 deux des quantités $\alpha, \beta, \beta', \gamma$ par $\alpha \pm 1, \beta \pm 1, \beta' \pm 1, \gamma \pm 1$.

$$\begin{aligned} & (\gamma - \alpha)(\gamma - \beta - \beta') F_1(\alpha - 1, \beta - 1) \\ &= [(\gamma - \beta - \beta')(\gamma - \alpha - \beta x - \beta' y) - (\gamma - \beta - \beta' - \alpha)(\alpha - 1)x] F_1 \\ &+ (1 + \gamma - \alpha - \beta - \beta') x(1 - x) \frac{\partial F_1}{\partial x} \\ &+ [(\gamma - \beta - \beta') y - (\alpha - 1)x] (1 - y) \frac{\partial F_1}{\partial y}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\gamma - \alpha)(\gamma - \beta - \beta') F_1(\alpha - 1, \beta' - 1) \\ &= [(\gamma - \beta - \beta')(\gamma - \alpha - \beta x - \beta' y) - (\gamma - \beta - \beta' - \alpha)(\alpha - 1)y] F_1 \\ &+ (1 + \gamma - \alpha - \beta - \beta') y(1 - y) \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ &+ [(\gamma - \beta - \beta') x - (\alpha - 1)y] (1 - x) \frac{\partial F_1}{\partial x}; \end{aligned}$$

$$(\gamma - 1) F_1(\alpha - 1, \gamma - 1) = (\gamma - 1 - \beta x - \beta' y) F_1 + x(1 - x) \frac{\partial F_1}{\partial x} + y(1 - y) \frac{\partial F_1}{\partial y};$$

$$\begin{aligned} \beta(\gamma - \alpha) \mathbf{F}_1(\alpha - 1, \beta + 1) &= [\gamma - \alpha - (1 + \beta - \alpha)x - \beta'y] \beta \mathbf{F}_1 \\ &\quad + (1 + \beta - \alpha)x(1 - x) \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial x} + \beta y(1 - y) \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial y}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta'(\gamma - \alpha) \mathbf{F}_1(\alpha - 1, \beta' + 1) &= [\gamma - \alpha - (1 + \beta' - \alpha)y - \beta x] \beta' \mathbf{F}_1 \\ &\quad + (1 + \beta' - \alpha)y(1 - y) \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial y} + \beta'x(1 - x) \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial x}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(\gamma - \alpha + 1)(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta - \beta') \mathbf{F}_1(\alpha - 1, \gamma + 1) \\ &= [(\gamma - \beta - \beta')(\gamma - \alpha - \beta x - \beta'y) - (\alpha - 1)(\gamma - \alpha - \beta - \beta')] \gamma \mathbf{F}_1 \\ &\quad + [(\gamma - \beta - \beta')x - (\alpha - 1)] \gamma(1 - x) \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial x} \\ &\quad + [(\gamma - \beta - \beta')y - (\alpha - 1)] \gamma(1 - y) \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial y}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(\gamma - \beta - \beta')(\gamma - \beta - \beta' + 1) \mathbf{F}_1(\beta - 1, \beta' - 1) \\ &= [(\gamma - \beta - \beta')(\gamma - \beta - \beta' + 1) + \alpha(\beta y + \beta'x) \\ &\quad - \alpha(\gamma - \beta - \beta' + 1)(x + y) - \alpha(\beta + \beta' - \alpha - 1)xy] \mathbf{F}_1 \\ &\quad + [(\beta + \beta' - \alpha - 1)xy + (1 - \beta)y + (1 + \gamma - \beta - 2\beta')x](1 - x) \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial x} \\ &\quad + [(\beta + \beta' - \alpha - 1)xy + (1 - \beta')x + (1 + \gamma - 2\beta - \beta')y](1 - y) \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial y}; \end{aligned}$$

$$(\gamma - 1) \mathbf{F}_1(\beta - 1, \gamma - 1) = (\gamma - 1 - \alpha x) \mathbf{F}_1 + (1 - x) \left(x \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial x} + y \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial y} \right),$$

$$(\gamma - 1) \mathbf{F}_1(\beta' - 1, \gamma - 1) = (\gamma - 1 - \alpha y) \mathbf{F}_1 + (1 - y) \left(x \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial x} + y \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial y} \right);$$

$$\begin{aligned} &\alpha(\gamma - \beta - \beta') \mathbf{F}_1(\alpha + 1, \beta - 1) \\ &= \alpha[(\beta + \beta' - \alpha - 1)x + (\gamma - \beta - \beta')] \mathbf{F}_1 - (\beta + \beta' - \alpha - 1)x(1 - x) \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial x} \\ &\quad + [(\beta + \beta' - \alpha - 1)xy - (\gamma - \alpha - 1)x + (\gamma - \beta - \beta')y] \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial y}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\alpha(\gamma - \beta - \beta') \mathbf{F}_1(\alpha + 1, \beta' - 1) \\ &= \alpha[(\beta + \beta' - \alpha - 1)y + (\gamma - \beta - \beta')] \mathbf{F}_1 - (\beta + \beta' - \alpha - 1)y(1 - y) \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial y} \\ &\quad + [(\beta + \beta' - \alpha - 1)xy - (\gamma - \alpha - 1)y + (\gamma - \beta - \beta')x] \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial x}; \end{aligned}$$

$$\beta' \mathbf{F}_1(\beta - 1, \beta' + 1) = \beta' \mathbf{F}_1 + (y - x) \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial y},$$

$$\beta \mathbf{F}_1(\beta + 1, \beta' - 1) = \beta \mathbf{F}_1 + (x - y) \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial x};$$

$$\begin{aligned}
& (\gamma - \alpha)(\gamma - \beta - \beta')(\gamma - \beta - \beta' + 1)y \mathbf{F}_1(\beta - 1, \gamma + 1) \\
&= [\alpha(\alpha - \gamma)xy + \alpha(\beta y + \beta'x) + (\gamma - \beta - \beta' + 1)(\gamma - \beta - \beta' + \alpha)y] \gamma \mathbf{F}_1 \\
&\quad + [(\gamma - \alpha)xy + (1 - \beta)y - \beta'x] \gamma(1 - x) \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial x} \\
&\quad + [(\gamma - \alpha)xy - (\gamma - \beta)x + (\gamma - 2\beta - \beta' + 1)y] \gamma(1 - y) \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial y},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\gamma - \alpha)(\gamma - \beta - \beta')(\gamma - \beta - \beta' + 1)x \mathbf{F}_1(\beta' - 1, \gamma + 1) \\
&= [\alpha(\alpha - \gamma)xy + \alpha(\beta y + \beta'x) + (\gamma - \beta - \beta' + 1)(\gamma - \beta - \beta' + \alpha)x] \gamma \mathbf{F}_1 \\
&\quad + [(\gamma - \alpha)xy + (1 - \beta')x - \beta y] \gamma(1 - y) \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial y} \\
&\quad + [(\gamma - \alpha)xy - (\gamma - \beta')y + (\gamma - 2\beta' - \beta + 1)x] \gamma(1 - x) \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial x};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha(\gamma - 1) \mathbf{F}_1(\alpha + 1, \gamma - 1) &= \left(\gamma - 1 + \frac{\beta x}{1 - x} + \frac{\beta' y}{1 - y} \right) \alpha \mathbf{F}_1 \\
&\quad + \left[\alpha - (\gamma - \alpha - 1) \frac{x}{1 - x} + \frac{\beta x}{1 - x} + \frac{\beta' y}{1 - y} \right] x \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial x} \\
&\quad + \left[\alpha - (\gamma - \alpha - 1) \frac{y}{1 - y} + \frac{\beta x}{1 - x} + \frac{\beta' y}{1 - y} \right] y \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial y};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \beta(\gamma - 1)(1 - x) \mathbf{F}_1(\beta + 1, \gamma - 1) \\
&= [\gamma - 1 - (\gamma - \alpha - 1)x] \beta \mathbf{F}_1 + [\beta - (\gamma - \alpha - 1)x] x \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial x} + \beta y \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial y},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \beta'(\gamma - 1)(1 - y) \mathbf{F}_1(\beta' + 1, \gamma - 1) \\
&= [\gamma - 1 - (\gamma - \alpha - 1)y] \beta' \mathbf{F}_1 + [\beta' - (\gamma - \alpha - 1)y] y \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial y} + \beta' x \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial x};
\end{aligned}$$

$$\alpha\beta(1 - x) \mathbf{F}_1(\alpha + 1, \beta + 1) = \alpha\beta \mathbf{F}_1 + (\alpha + \beta - \gamma + 1)x \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial x} + \beta y \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial y},$$

$$\alpha\beta'(1 - y) \mathbf{F}_1(\alpha + 1, \beta' + 1) = \alpha\beta' \mathbf{F}_1 + (\alpha + \beta' - \gamma + 1)y \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial y} + \beta' x \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial x};$$

$$\alpha(\gamma - \beta - \beta') \mathbf{F}_1(\alpha + 1, \gamma + 1) = \alpha\gamma \mathbf{F}_1 + \gamma \left[(x - 1) \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial x} + (y - 1) \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial y} \right];$$

$$\beta\beta'(x - y) \mathbf{F}_1(\beta + 1, \beta' + 1) = \beta\beta'(x - y) \mathbf{F}_1 + \beta'x^2 \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial x} - \beta y^2 \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial y};$$

$$\beta(\gamma - \alpha) \mathbf{F}_1(\beta + 1, \gamma + 1) = \beta\gamma \mathbf{F}_1 + \gamma(x - 1) \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial x},$$

$$\beta'(\gamma - \alpha) \mathbf{F}_1(\beta' + 1, \gamma + 1) = \beta'\gamma \mathbf{F}_1 + \gamma(y - 1) \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial y}.$$

6. Revenons à la formule démontrée au n° 1, savoir :

$$\frac{\partial^{m+n} F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y)}{\partial x^m \partial y^n} = \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m)(\beta', n)}{(\gamma, m+n)} F_1(\alpha+m+n, \beta+m, \beta'+n, \gamma+m+n; x, y).$$

De cette formule et du théorème énoncé au numéro précédent résulte le théorème suivant :

Les dérivées partielles d'ordre supérieur à 1 de la fonction F_1 peuvent s'exprimer en fonction linéaire et homogène de F_1 , de $\frac{\partial F_1}{\partial x}$ et de $\frac{\partial F_1}{\partial y}$, les coefficients étant des fonctions rationnelles de x et de y .

En particulier, si nous calculons les dérivées partielles du second ordre, en suivant toujours la même méthode de calcul, nous obtenons le système d'équations aux dérivées partielles qui suit :

$$(8) \left\{ \begin{array}{l} x(1-x)(x-y) \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + [\gamma(x-y) - (\alpha + \beta + 1)x^2 + (\alpha + \beta - \beta' + 1)xy + \beta'y] \frac{\partial F_1}{\partial x} \\ \qquad \qquad \qquad - \beta y(1-y) \frac{\partial F_1}{\partial y} - \alpha \beta (x-y) F_1 = 0, \\ y(1-y)(y-x) \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} + [\gamma(y-x) - (\alpha + \beta' + 1)y^2 + (\alpha + \beta' - \beta + 1)xy + \beta x] \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \qquad \qquad \qquad - \beta' x(1-x) \frac{\partial F_1}{\partial x} - \alpha \beta' (y-x) F_1 = 0, \\ (x-y) \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y} = \beta' \frac{\partial F_1}{\partial x} - \beta \frac{\partial F_1}{\partial y} \quad (1). \end{array} \right.$$

C'est ce système d'équations aux dérivées partielles que nous allons principalement étudier dans le présent travail. Nous en possédons déjà une intégrale particulière. Proposons-nous d'en trouver d'autres.

7. Envisageons pour cela l'intégrale définie

$$\Psi(x, \beta, \beta', \gamma; x, y) = \int_g^h u^{\alpha-1} (1-u)^{\gamma-\alpha-1} (1-ux)^{-\beta} (1-uy)^{-\beta'} du,$$

(1) Voir le Mémoire de M. Appell, *loc. cit.* — Pour l'étude de la dernière équation aux dérivées partielles, prise isolément, voir le Chapitre III de la II^e Partie des *Leçons sur la théorie générale des surfaces* de M. Darboux.

où g et h sont deux constantes quelconques, réelles ou imaginaires. Nous prendrons pour le chemin que suit u pour aller du point g au point h , une courbe arbitraire, donnée une fois pour toutes. Si elle part du point o , ou si elle y aboutit, on supposera la partie réelle de α plus grande que zéro; si elle part du point $(+1)$, ou si elle y aboutit, on devra supposer la partie réelle de $(\gamma - \alpha)$ supérieure à zéro. Si elle part du point à l'infini, ou si elle y aboutit, il faudra que la partie réelle de $(1 + \beta + \beta' - \gamma)$ soit supérieure à zéro. Si les points g, h ne coïncident ni l'un ni l'autre, ni avec le point o , ni avec le point $(+1)$, ni avec le point à l'infini, α, β, β' et γ sont arbitraires; mais le chemin que suit u ne doit passer ni par le point o , ni par le point $+1$, ni par le point à l'infini. De plus, $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$ ne devront pas se trouver sur ce chemin.

Cela posé, on a, comme pour la fonction Φ , d'abord

$$\frac{\partial^{m+n}\Psi(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y)}{\partial x^m \partial y^n} = (\beta, m)(\beta', n)\Psi(\alpha + m + n, \beta + m, \beta' + n, \gamma + m + n; x, y).$$

Ensuite, en posant

$$U(u) = u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(1-ux)^{-\beta}(1-uy)^{-\beta'},$$

on trouve

$$(9) \quad \Psi(\alpha + 1) = \Psi(\gamma - 1) - \Psi,$$

$$(10) \quad \Psi(\beta - 1) = x\Psi(\gamma + 1) - (x - 1)\Psi,$$

$$(11) \quad \Psi(\beta' - 1) = y\Psi(\gamma + 1) - (y - 1)\Psi,$$

puis

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\alpha - 1)[\Psi(\alpha - 1) + \Psi] - (\gamma - \alpha - 1)\Psi(\gamma - 1) \\ \quad + \beta x\Psi(\beta + 1) + \beta' y\Psi(\beta' + 1) = U(h) - U(g), \end{array} \right.$$

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta\Psi(\beta + 1) + \beta'\Psi(\beta' + 1) \\ = (\gamma - \alpha - 1)\Psi(\gamma - 1) + (1 + \beta + \beta' - \gamma)\Psi + hU(h) - gU(g). \end{array} \right.$$

Enfin

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} [(2\gamma - \beta - \beta' - \alpha - 1)xy - \beta y - \beta' x]\Psi - (\gamma - \beta - \beta')xy\Psi(\gamma + 1) \\ \quad - (\gamma - \alpha - 1)xy\Psi(\gamma - 1) + \beta y\Psi(\beta + 1) + \beta' x\Psi(\beta' + 1) \\ = h^2U(h) - g^2U(g). \end{array} \right.$$

Il résulte de là que, entre la fonction Ψ et trois quelconques des huit pre-

mières fonctions contiguës, il existe bien encore une relation linéaire, mais elle n'est plus toujours homogène.

D'ailleurs, si de la formule

$$\Psi(\beta + 1) = \int_g^h \frac{U du}{1 - ux},$$

on retranche membre à membre la formule

$$\Psi = \int_g^h U du,$$

il vient

$$\Psi(\beta + 1) - \Psi = x \int_g^h \frac{uU du}{1 - ux} = \frac{x}{\beta} \frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

On a donc

$$\Psi(\beta + 1) = \Psi + \frac{x}{\beta} \frac{\partial \Psi}{\partial x},$$

$$\Psi(\beta' + 1) = \Psi + \frac{y}{\beta'} \frac{\partial \Psi}{\partial y}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \beta \Psi(\beta + 1) + \beta' \Psi(\beta' + 1) &= (\beta + \beta') \Psi + x \frac{\partial \Psi}{\partial x} + y \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ &= (\gamma - \alpha - 1) \Psi(\gamma - 1) + (1 + \beta + \beta' - \gamma) \Psi + hU(h) - gU(g), \end{aligned}$$

et, par suite,

$$(\gamma - \alpha - 1) \Psi(\gamma - 1) = (\gamma - 1) \Psi + x \frac{\partial \Psi}{\partial x} + y \frac{\partial \Psi}{\partial y} + gU(g) - hU(h).$$

On voit donc que toute fonction

$$\Psi(\alpha \pm m, \beta \pm p, \beta' \pm p', \gamma \pm n; x, y)$$

et, en particulier, toute dérivée partielle de Ψ d'ordre supérieur à un, pourra s'exprimer linéairement en fonction de Ψ , de $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$ et de $\frac{\partial \Psi}{\partial y}$. Seulement on n'aura pas toujours une fonction linéaire et homogène. Les coefficients de Ψ , de $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$ et de $\frac{\partial \Psi}{\partial y}$ seront encore des fonctions rationnelles de x et de y ; le terme indépendant de Ψ , de $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$ et de $\frac{\partial \Psi}{\partial y}$ sera, en général, une fonction transcendante de x et de y .

Si nous cherchons en particulier l'expression des dérivées partielles du second ordre de Ψ , on arrive au résultat suivant :

$$\begin{aligned} x(1-x)(x-y) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + [\gamma(x-y) - (1+\alpha+\beta)x^2 + (1+\alpha+\beta-\beta')xy + \beta'y] \frac{\partial \Psi}{\partial x} \\ - \beta y(1-y) \frac{\partial \Psi}{\partial y} - \alpha \beta(x-y) \Psi = \beta(x-y) \left[\frac{g(1-g)U(g)}{1-gx} - \frac{h(1-h)U(h)}{1-hx} \right], \\ y(1-y)(y-x) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + [\gamma(y-x) - (1+\alpha+\beta')y^2 + (1+\alpha+\beta'-\beta)xy + \beta x] \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ - \beta' x(1-x) \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \alpha \beta'(y-x) \Psi = \beta'(y-x) \left[\frac{g(1-g)U(g)}{1-gy} - \frac{h(1-h)U(h)}{1-hy} \right], \\ (x-y) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = \beta' \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \beta \frac{\partial \Psi}{\partial y}. \end{aligned}$$

De là résulte ce fait important : lorsque les intégrales $\int_0^{-\infty} U du$ et $\int_{+1}^{+\infty} U du$ ont un sens, elles satisfont au système d'équations aux dérivées partielles (8); en effet, on a alors partie réelle de $\alpha > 0$, partie réelle de $(\gamma - \alpha) > 0$, partie réelle de $(1 + \beta + \beta' - \gamma) > 0$. Les seconds membres des deux premières équations aux dérivées partielles qui précèdent s'annulent donc pour $g = 0, 1, h = \pm \infty$.

8. D'autres solutions particulières vont nous être fournies par l'intégrale

$$I(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y) = \int_g^{\frac{h}{x}} u^{\alpha-1} (1-u)^{\gamma-\alpha-1} (1-ux)^{-\beta} (1-uy)^{-\beta'} du.$$

Ici encore, g et h sont des constantes quelconques. Donnons à x une valeur arbitraire, complexe ou réelle, et choisissons un chemin quelconque allant du point g au point $\frac{h}{x}$ en observant les conditions suivantes.

Si $g = 0$, ou $g = 1$, on devra supposer la partie réelle de α , ou la partie réelle de $(\gamma - \alpha)$ supérieure à zéro. Sinon, α et γ seront arbitraires. Si $h = 1$, on devra supposer que la partie réelle de β est inférieure à 1. Enfin, si $g = \infty$, la partie réelle de $(1 + \beta + \beta' - \gamma)$ devra être supérieure à zéro. En tous cas le chemin ne devra passer ni par le point 0, ni par le point +1, ni par les points $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}$, ni par le point à l'infini; si l'on fait ensuite varier x

d'une façon continue, le chemin suivi par u devra varier en satisfaisant toujours aux conditions précédentes.

Cela posé, on a pour la fonction I , en faisant pour α , β , β' et γ les restrictions nécessaires, les formules suivantes :

$$\begin{aligned} I(\alpha + 1) &= I(\gamma - 1) - I, \\ I(\beta - 1) &= xI(\gamma + 1) - (x - 1)I, \\ I(\beta' - 1) &= yI(\gamma + 1) - (y - 1)I, \end{aligned}$$

$$(\alpha - 1)[I(\alpha - 1) + I] - (\gamma - \alpha - 1)I(\gamma - 1) + \beta xI(\beta + 1) + \beta' yI(\beta' + 1) = U\left(\frac{h}{x}\right) - U(g),$$

$$\begin{aligned} &\beta I(\beta + 1) + \beta' I(\beta' + 1) \\ &= (\gamma - \alpha - 1)I(\gamma - 1) + (1 + \beta + \beta' - \gamma)I + \frac{h}{x}U\left(\frac{h}{x}\right) - gU(g), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &[(2\gamma - \beta - \beta' - \alpha - 1)xy - \beta y - \beta' x]I - (\gamma - \beta - \beta')xyI(\gamma + 1) \\ &- (\gamma - \alpha - 1)xyI(\gamma - 1) + \beta yI(\beta + 1) + \beta' xI(\beta' + 1) = \frac{h^2}{x^2}U\left(\frac{h}{x}\right) - g^2U(g). \end{aligned}$$

Il résulte de là qu'entre la fonction I et ses contiguës prises trois par trois il existe encore une relation linéaire, mais non toujours homogène.

D'autre part, les formules

$$\beta I(\beta + 1) = \beta I + x \frac{\partial I}{\partial x} + \frac{h}{x}U\left(\frac{h}{x}\right),$$

$$\beta' I(\beta' + 1) = \beta' I + y \frac{\partial I}{\partial y},$$

$$(\gamma - \alpha - 1)I(\gamma - 1) = (\gamma - 1)I + x \frac{\partial I}{\partial x} + y \frac{\partial I}{\partial y} + gU(g)$$

nous permettent d'affirmer que ces mêmes fonctions contiguës, et en particulier les dérivées partielles de I d'ordre supérieur à un, sont des fonctions linéaires (mais non toujours homogènes) de I , de $\frac{\partial I}{\partial x}$ et de $\frac{\partial I}{\partial y}$.

Les coefficients de I , de $\frac{\partial I}{\partial x}$ et de $\frac{\partial I}{\partial y}$ seront des fonctions rationnelles de x et de y , et le terme indépendant de I , $\frac{\partial I}{\partial x}$, $\frac{\partial I}{\partial y}$ sera en général une fonction transcendante de x et de y .

Si nous cherchons en particulier l'expression des dérivées partielles du

second ordre de \mathbf{I} , on tombe sur les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
& x(1-x)(x-y) \frac{\partial^2 \mathbf{I}}{\partial x^2} + [\gamma(x-y) - (\alpha + \beta + 1)x^2 + (\alpha + \beta - \beta' + 1)xy + \beta'y] \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial x} \\
& \quad - \beta y(1-y) \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial y} - \alpha \beta(x-y) \mathbf{I} \\
& = \frac{\beta(x-y)g(1-g) \mathbf{U}(g)}{1-gx} + \frac{h}{x}(1-h) \mathbf{U}\left(\frac{h}{x}\right) \left[\frac{(\gamma - \alpha - 1)(y-x)}{x-h} + \frac{\beta'y(x-1)}{x-hy} \right], \\
& y(1-y)(y-x) \frac{\partial^2 \mathbf{I}}{\partial y^2} + [\gamma(y-x) - (\alpha + \beta' + 1)y^2 + (\alpha + \beta' - \beta + 1)xy + \beta x] \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial y} \\
& \quad - \beta' x(1-x) \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial x} - \alpha \beta'(y-x) \mathbf{I} \\
& = \frac{\beta'(y-x)g(1-g) \mathbf{U}(g)}{1-gy} + \frac{\beta'(1-y)h(1-h) \mathbf{U}\left(\frac{h}{x}\right)}{x-hy}, \\
& (x-y) \frac{\partial^2 \mathbf{I}}{\partial x \partial y} + \beta \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial y} - \beta' \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial x} = \frac{\beta'}{x-hy} \frac{h}{x} (1-h) \mathbf{U}\left(\frac{h}{x}\right).
\end{aligned}$$

Les seconds membres de ces trois équations aux dérivées partielles s'annulent si l'on y fait $h = 1$, $g = 0$, $1, \infty$ en tenant compte des conditions auxquelles doivent alors satisfaire α , β , β' et γ .

Donc, lorsque les intégrales $\int_0^{\frac{1}{x}} \mathbf{U} du$, $\int_1^{\frac{1}{x}} \mathbf{U} du$, $\int_{\frac{1}{x}}^{\infty} \mathbf{U} du$ ont un sens, elles satisfont au système d'équations aux dérivées partielles (8).

D'ailleurs l'étude de l'intégrale $\int_g^{\frac{h}{y}} \mathbf{U} du$ se réduira à permuter dans les résultats précédemment obtenus pour l'intégrale $\int_g^{\frac{h}{x}} \mathbf{U} du$ à la fois x et y d'une part, β et β' d'autre part. Et, par suite, si les intégrales $\int_0^{\frac{1}{y}} \mathbf{U} du$, $\int_1^{\frac{1}{y}} \mathbf{U} du$, $\int_{\frac{1}{y}}^{+\infty} \mathbf{U} du$ ont un sens, elles satisfont aux équations aux dérivées partielles (8).

9. Il nous reste enfin à étudier l'intégrale $\int_{\frac{g}{x}}^{\frac{h}{y}} \mathbf{U} du = \mathbf{J}(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y)$, où g et h sont des constantes quelconques, de module fini et différent de

zéro. Si $g = 1$ ou $h = 1$, on devra avoir (partie réelle de β) < 1 ou (partie réelle de β') < 1 respectivement; x et y étant donnés, on choisira pour le chemin que doit décrire le point u une courbe quelconque partant du point $\frac{g}{x}$ pour aboutir au point $\frac{h}{y}$, en l'assujettissant à ne passer ni par le point 0, ni par le point 1, ni par les points $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}$, ni par le point à l'infini. Si ensuite x et y tiennent à varier d'une façon continue, on fera varier d'une façon continue les extrémités du chemin arbitrairement choisi, en tenant toujours compte des conditions précédentes.

Cela posé, on a tout d'abord

$$\begin{aligned} J(\alpha + 1) &= J(\gamma - 1) - J, \\ J(\beta - 1) &= xJ(\gamma + 1) - (x - 1)J, \\ J(\beta' - 1) &= yJ(\gamma + 1) - (y - 1)J, \\ (\alpha - 1)[J(\alpha - 1) + J] - (\gamma - \alpha - 1)J(\gamma - 1) + \beta xJ(\beta + 1) + \beta' yJ(\beta' + 1) \\ &= U\left(\frac{h}{y}\right) - U\left(\frac{g}{x}\right), \\ \beta J(\beta + 1) + \beta' J(\beta' + 1) \\ &= (\gamma - \alpha - 1)J(\gamma - 1) + (1 + \beta + \beta' - \gamma)J + \frac{h}{y}U\left(\frac{h}{y}\right) - \frac{g}{x}U\left(\frac{g}{x}\right), \\ [(2\gamma - \beta - \beta' - \alpha - 1)xy - \beta y - \beta' x]J - (\gamma - \beta - \beta')xyJ(\gamma + 1) \\ &\quad - (\gamma - \alpha - 1)xyJ(\gamma - 1) + \beta yJ(\beta + 1) + \beta' xJ(\beta' + 1) \\ &= \frac{h^2}{y^2}U\left(\frac{h}{y}\right) - \frac{g^2}{x^2}U\left(\frac{g}{x}\right). \end{aligned}$$

On peut donc énoncer, pour la fonction J , le même théorème que pour les fonctions Ψ et I . D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \beta J(\beta + 1) &= \beta J + x \frac{\partial J}{\partial x} - \frac{g}{x} U\left(\frac{g}{x}\right), \\ \beta' J(\beta' + 1) &= \beta' J + y \frac{\partial J}{\partial y} + \frac{h}{y} U\left(\frac{h}{y}\right), \\ (\gamma - \alpha - 1)J(\gamma - 1) &= (\gamma - 1)J + x \frac{\partial J}{\partial x} + y \frac{\partial J}{\partial y}. \end{aligned}$$

Les huit premières fonctions contiguës s'expriment donc linéairement en fonction de J , de $\frac{\partial J}{\partial x}$ et de $\frac{\partial J}{\partial y}$. La même méthode de calcul s'applique d'ailleurs aux fonctions contiguës suivantes, et en particulier aux dérivées

partielles de J d'ordre supérieur à un. Ainsi, si l'on fait le calcul pour les dérivées secondes, on trouve

$$\begin{aligned}
 & x(1-x)(x-y) \frac{\partial^2 J}{\partial x^2} + [\gamma(x-y) - (\alpha + \beta + 1)x^2 + (\alpha + \beta - \beta' + 1)xy + \beta'y] \frac{\partial J}{\partial x} \\
 & \quad - \beta y(1-y) \frac{\partial J}{\partial y} - \alpha\beta(x-y)J \\
 & = \frac{g}{x}(1-g)U\left(\frac{g}{x}\right) \left[\frac{\beta'y(1-x)}{x-gy} - \frac{(\gamma-\alpha-1)(x-y)}{x-g} \right] - \frac{\beta h(1-h)U\left(\frac{h}{g}\right)(1-x)}{y-hx}, \\
 & y(1-y)(y-x) \frac{\partial^2 J}{\partial y^2} + [\gamma(y-x) - (\alpha + \beta' + 1)y^2 + (\alpha + \beta' - \beta + 1)xy + \beta x] \frac{\partial J}{\partial y} \\
 & \quad - \beta'x(1-x) \frac{\partial J}{\partial x} - \alpha\beta'(y-x)J \\
 & = \frac{\beta'g(1-g)U\left(\frac{g}{x}\right)(1-y)}{x-gy} - \frac{h}{y}(1-h)U\left(\frac{h}{y}\right) \left[\frac{\beta x(1-y)}{y-hx} - \frac{(\gamma-\alpha-1)(y-x)}{y-h} \right], \\
 & (x-y) \frac{\partial^2 J}{\partial x \partial y} + \beta \frac{\partial J}{\partial y} - \beta' \frac{\partial J}{\partial x} = \frac{\beta}{y} \frac{h}{y}(1-h)U\left(\frac{h}{y}\right) + \frac{\beta'g}{x}(1-g)U\left(\frac{g}{x}\right).
 \end{aligned}$$

A la seule inspection de ces équations, on voit que si l'on suppose que l'intégrale $\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{y}} U du$ a un sens, elle satisfait aux équations aux dérivées partielles (8).

En résumé, nous avons trouvé dix intégrales particulières du système des équations aux dérivées partielles (8).

Ces dix intégrales ont déjà été signalées depuis longtemps par M. Picard (1). La méthode ici exposée permet d'établir d'une façon nette les relations qui lient la fonction de x et de y définie par l'une de ces dix intégrales, ses dérivées partielles du premier ordre, et les fonctions contiguës qui s'y rattachent.

(1) *Sur une extension aux fonctions de deux variables du problème de Riemann relatif aux fonctions hypergéométriques*, par M. Émile Picard (*Annales de l'École Normale supérieure*, t. X, année 1881, 2^e série, p. 305 et suiv.).

CHAPITRE II.

10. J'ai l'intention d'établir dans le présent Chapitre un Tableau de 60 intégrales du système (8) analogue au Tableau des 24 intégrales de Kummer relatif à l'équation différentielle du second ordre à laquelle satisfait la série hypergéométrique de Gauss, $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$. Ce Tableau a été signalé par M. Goursat dans une Note parue aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*.

Pour abrégér, je désignerai par $\overline{\arg x}$ celui des arguments de x qui est compris entre $-\pi$ et $+\pi$.

Reprenons l'intégrale $\int_0^1 U du$, telle que nous l'avons définie au n° 1 du Chapitre I. Posons $u = 1 - v$, d'où $v = 1 - u$; v et $(1 - v)$ seront réels, positifs, on pourra poser $\arg v = 0$, $\arg(1 - v) = 0$.

On a

$$1 - ux = (1 - x) \left(1 - \frac{vx}{x-1} \right);$$

or, d'après nos conventions, l'argument de $1 - ux$ varie de 0 à $\overline{\arg(1 - x)}$; d'autre part, les points $1 - x$, $1 - \frac{vx}{x-1}$ sont dans des régions différentes du plan, l'un au-dessus de l'axe réel X, l'autre au-dessous. On peut donc choisir pour arguments de $(1 - x)$ et de $\left(1 - \frac{vx}{x-1} \right)$ ceux qui sont compris entre $(-\pi)$ et $(+\pi)$, car leur produit aura encore un argument compris entre $(-\pi)$ et $(+\pi)$, comme celui de $(1 - ux)$.

La formule $1 - uy = (1 - y) \left(1 - \frac{vy}{y-1} \right)$ donne lieu aux mêmes conclusions. On a alors

$$\int_0^1 U du = (1 - x)^{-\beta} (1 - y)^{-\beta'} \int_0^1 v^{\gamma-\alpha-1} (1 - v)^{\alpha-1} \left(1 - \frac{vx}{x-1} \right)^{-\beta} \left(1 - \frac{vy}{y-1} \right)^{-\beta'} dv.$$

Sous la condition qu'on ait simultanément $\left| \frac{x}{x-1} \right| < 1$, $\left| \frac{y}{y-1} \right| < 1$,

cette dernière intégrale pourra être remplacée par un développement en série défini par l'équation

$$\int_0^1 \nu^{\gamma-\alpha-1} (1-\nu)^{\alpha-1} \left(1 - \frac{\nu x}{x-1}\right)^{-\beta} \left(1 - \frac{\nu y}{y-1}\right)^{-\beta'} d\nu \\ = B(\alpha, \gamma - \alpha) F_1\left(\gamma - \alpha, \beta, \beta', \gamma; \frac{x}{x-1}, \frac{y}{y-1}\right).$$

J'emploierai les mêmes notations que M. Goursat ⁽¹⁾. C_0 et C_1 seront les cercles de rayon égal à l'unité décrits des points 0 et +1 comme centres; E_0 et E_1 seront les portions de plan limitées par la corde commune à ces deux circonférences, prolongée indéfiniment, E_0 contenant le point 0, E_1 le point (+1). Cela posé, si x et y sont simultanément dans la région E_0 et à l'intérieur du cercle C_0 , on a identiquement

$$(15) \quad F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y) = (1-x)^{-\beta} (1-y)^{-\beta'} F_1\left(\gamma - \alpha, \beta, \beta', \gamma; \frac{x}{x-1}, \frac{y}{y-1}\right),$$

avec les conditions

$$-\pi < \arg(1-x) < +\pi, \\ -\pi < \arg(1-y) < +\pi \quad (2).$$

II. Posons maintenant

$$u = \frac{\nu}{1-x+\nu x}.$$

Tandis que u parcourt le segment rectiligne 0—(+1), le point ν parcourt un arc $OM(+1) = L$ d'une circonférence qui passe par les trois points 0, 1, $\frac{x-1}{x}$.

De la formule $u = \frac{\nu}{1-x+\nu x}$, je tire $\nu = \frac{u(1-x)}{1-ux}$ et, en posant $x = \xi + i\eta$,

$$\nu = \frac{u(1-\xi)(1-u\xi) - iu(1-u)\eta}{(1-u\xi)^2 + \eta^2};$$

je conclus de là que ν et x sont dans des régions différentes du plan. D'ailleurs

$$1 - ux = \frac{1}{1 - \nu \frac{x}{x-1}},$$

⁽¹⁾ Sur l'équation différentielle linéaire qui admet pour intégrale la série hypergéométrique (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, Supplément au t. X, année 1881, 2^e série, p. 11).

⁽²⁾ Cette formule a été donnée par M. Appell (*loc. cit.*).

donc x et $\left(1 - \nu \frac{x}{x-1}\right)$ sont dans la même région, et, par suite, $(1-x)$ et $\left(1 - \nu \frac{x}{x-1}\right)$ dans des régions différentes. On peut donc choisir pour chacune de ces quantités des arguments compris entre $(-\pi)$ et $(+\pi)$, le produit $(1-x)\left(1 - \nu \frac{x}{x-1}\right)$ aura encore un argument compris entre $(-\pi)$ et $(+\pi)$, et la formule $u = \frac{\nu}{(1-x)\left(1 - \nu \frac{x}{x-1}\right)}$ nous permet de

poser

$$\overline{\arg} \nu = \overline{\arg}(1-x) + \overline{\arg}\left(1 - \nu \frac{x}{x-1}\right).$$

L'égalité $1-u = \frac{1-\nu}{1-\nu \frac{x}{x-1}}$ nous permet de définir l'argument de $(1-\nu)$

par la formule

$$\overline{\arg}(1-\nu) = \overline{\arg}\left(1 - \nu \frac{x}{x-1}\right).$$

On a d'autre part

$$1-uy = \frac{1-\nu \frac{x-y}{x-1}}{1-\nu \frac{x}{x-1}} = (1-ux)\left(1 - \nu \frac{x-y}{x-1}\right).$$

On posera

$$\overline{\arg}\left(1 - \nu \frac{x-y}{x-1}\right) = \overline{\arg}(1-uy) - \overline{\arg}(1-ux);$$

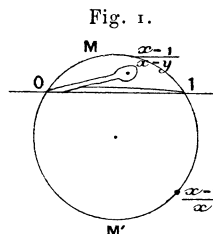
cela revient à choisir pour argument de $\left(1 - \nu \frac{x-y}{x-1}\right)$ celui qui s'annule pour $\nu = 0$. L'argument d'un facteur une fois choisi, on le laisse varier d'une façon continue, même si, dans sa variation, il franchit l'une des limites $(-\pi)$, $(+\pi)$.

Cela posé, on aura

$$\int_0^{+1} U du = (1-x)^{-\alpha} \int_L \nu^{\alpha-1} (1-\nu)^{\gamma-\alpha-1} \left(1 - \frac{\nu x}{x-1}\right)^{\beta+\beta'-\gamma} \left[1 - \frac{\nu(x-y)}{x-1}\right]^{-\beta'} d\nu.$$

L'intégrale du second membre est prise le long de l'arc de circonférence L . On ne peut pas toujours remplacer l'arc $L = \widehat{OM_1}$ que décrit le point ν par le segment rectiligne $0 \text{---} (+1)$. Il est vrai que l'on n'a pas à se préoccuper du point critique $\nu = \frac{x-1}{x}$ qui correspond à $u = \infty$, et qui,

par suite, est sur l'arc $\widehat{OM'I}$; mais le point critique $v = \frac{x-1}{x-y}$, qui corres-



pond à $u = \frac{1}{y}$, pourrait être situé à l'intérieur de l'aire $OIM'O$ (*fig. 1*). On aurait alors, en posant, pour abrégier,

$$V = v^{\alpha-1}(1-v)^{\gamma-\alpha-1} \left(1 - \frac{vx}{x-1}\right)^{\beta+\beta'-\gamma} \left[1 - \frac{v(x-y)}{x-1}\right]^{-\beta'}$$

$$\int_L V dv = (1 - e^{2i\pi\beta'}) \int_0^{\frac{x-1}{x-y}} V dv + e^{2i\pi\beta'} \int_0^1 V dv.$$

Maintenant, imaginons que l'on ait $\left|\frac{x}{x-1}\right| < 1$, $\left|\frac{x-y}{x-1}\right| < 1$, en sorte que les deux points $\frac{x-1}{x-y}$, $\frac{x-1}{x}$ soient *extérieurs* au cercle C_0 . Alors l'arc $\widehat{OM'I}$ devra être plus grand que l'arc $\widehat{OM'I}$, tandis que l'aire $OIM'O$ sera tout entière à l'intérieur de C_0 . Donc le point $\frac{x-1}{x-y}$ *ne pourra pas être situé dans cette aire*. Alors on aura

$$\int_0^1 U du = (1-x)^{-\alpha} \int_0^1 v^{\alpha-1}(1-v)^{\gamma-\alpha-1} \left(1 - \frac{vx}{x-1}\right)^{\beta+\beta'-\gamma} \left(1 - v \frac{x-y}{x-1}\right)^{-\beta'} dv,$$

et d'ailleurs

$$\int_0^1 v^{\alpha-1}(1-v)^{\gamma-\alpha-1} \left(1 - \frac{vx}{x-1}\right)^{\beta+\beta'-\gamma} \left(1 - v \frac{x-y}{x-1}\right)^{-\beta'} dv$$

$$= B(\alpha, \gamma - \alpha) F_1\left(\alpha, \gamma - \beta - \beta', \beta', \gamma; \frac{x}{x-1}, \frac{x-y}{x-1}\right).$$

Si donc x est à la fois dans E_0 et dans C_0 , et plus rapproché de y que de 1 , et si y est lui-même dans C_0 , on aura

$$(16) \quad F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y) = (1-x)^{-\alpha} F_1\left(\alpha, \gamma - \beta - \beta', \beta', \gamma; \frac{x}{x-1}, \frac{x-y}{x-1}\right)^{(1)}$$

(1) Cette formule a été donnée par M. Appell (*loc. cit.*).

avec

$$-\pi < \arg(1-x) < +\pi.$$

La formule de transformation $u = \frac{v}{1-y+vy}$ donne des résultats analogues. Il suffit de permuter, dans ce qui précède, x et y , β et β' .

Si donc x et y sont à la fois à l'intérieur de C_0 , si, en outre, y est dans la région E_0 et plus rapproché du point x que du point 1 , on aura

$$(17) \quad F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y) = (1-y)^{-\alpha} F_1\left(\alpha, \beta, \gamma - \beta - \beta', \gamma; \frac{y-x}{y-1}, \frac{y}{y-1}\right)$$

avec

$$-\pi < \arg(1-y) < +\pi.$$

12. Soit maintenant

$$u = \frac{1-v}{1-vx}.$$

Tandis que u parcourt le segment rectiligne $0 \text{---} (+1)$, le point v décrira l'arc $\Lambda = \widehat{0M1}$ d'une circonférence passant par les points $0, 1, \frac{1}{x}$. Je choisis comme arguments de $(1-x)$ et $(1-y)$ ceux qui sont compris entre $(-\pi)$ et $(+\pi)$, 0 , si ces quantités sont réelles.

v et x sont dans la même région du plan, v et $1-x$ dans des régions différentes. Je choisis pour argument de v celui qui est compris entre $(-\pi)$ et $(+\pi)$. Alors la formule

$$1-u = \frac{v(1-x)}{1-vx}$$

nous permet de poser

$$\overline{\arg}(1-vx) = \overline{\arg}v + \overline{\arg}(1-x).$$

On a, d'autre part,

$$\overline{\arg}(1-v) = \overline{\arg}(1-vx).$$

L'argument de $\left(1 - v \frac{y-x}{y-1}\right)$ se trouve ainsi déterminé par la condition qu'il s'annule pour $v = 0$. On a alors

$$\int_0^1 U du = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} (1-y)^{-\beta'} \int_{\Lambda} v^{\gamma-\alpha-1} (1-v)^{\alpha-1} (1-vx)^{\beta+\beta'-\gamma} \left(1 - v \frac{y-x}{y-1}\right)^{-\beta'} dv.$$

On ne pourra remplacer l'arc de circonférence Λ par le segment recti-

ligne $o \text{---} (+1)$ que si le point critique $v = \frac{y-1}{y-x}$ n'est pas sur l'aire $o1Mo$; c'est ce qui a lieu si l'on a

$$|x| < 1, \left| \frac{y-x}{y-1} \right| < 1.$$

D'ailleurs

$$\begin{aligned} & \int_0^1 v^{\gamma-\alpha-1} (1-v)^{\alpha-1} (1-vx)^{\beta+\beta'-\gamma} \left(1-v\frac{y-x}{y-1}\right)^{-\beta'} dv \\ &= \mathbf{B}(\alpha, \gamma-\alpha) \mathbf{F}_1\left(\gamma-\alpha, \gamma-\beta-\beta', \beta', \gamma; x, \frac{y-x}{y-1}\right). \end{aligned}$$

Par suite, si x et y sont simultanément dans C_0 et si, en même temps, y est plus voisin de x que du point $+1$, on aura

$$(18) \quad \mathbf{F}_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y) = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} (1-y)^{-\beta'} \mathbf{F}_1\left(\gamma-\alpha, \gamma-\beta-\beta', \beta', \gamma; x, \frac{y-x}{y-1}\right)$$

avec

$$\begin{aligned} -\pi &< \arg(1-x) < +\pi, \\ -\pi &< \arg(1-y) < +\pi. \end{aligned}$$

Si l'on pose $u = \frac{1-v}{1-vy}$, il suffira de permuter, dans les résultats que nous venons d'obtenir, x et y d'une part, β et β' de l'autre, en sorte que, si x et y sont simultanément à l'intérieur de C_0 , x étant plus voisin de y que du point $(+1)$, on a

$$(19) \quad \mathbf{F}_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y) = (1-x)^{-\beta} (1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'} \mathbf{F}_1\left(\gamma-\alpha, \beta, \gamma-\beta-\beta', \gamma; \frac{x-y}{x-1}, y\right)$$

avec

$$\begin{aligned} -\pi &< \arg(1-x) < +\pi, \\ -\pi &< \arg(1-y) < +\pi. \end{aligned}$$

13. En résumé, posons

$$\int_0^1 U du = \mathbf{B}(\alpha, \gamma-\alpha) \varphi_1.$$

Si x et y sont tous les deux à l'intérieur de C_0 , on a

$$\varphi_1 = \mathbf{F}_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y).$$

Lorsque x et y sont simultanément dans la région E_0

$$\varphi_1 = (1-x)^{-\beta} (1-y)^{-\beta'} \mathbf{F}_1\left(\gamma-\alpha, \beta, \beta', \gamma; \frac{x}{x-1}, \frac{y}{y-1}\right)$$

avec

$$\begin{aligned} -\pi &< \arg(1-x) < +\pi. \\ -\pi &< \arg(1-y) < +\pi. \end{aligned}$$

Si x est dans la région E_0 , et plus voisin du point y que du point $(+1)$,

$$\varphi_1 = (1-x)^{-\alpha} F_1\left(\alpha, \gamma - \beta - \beta', \beta', \gamma; \frac{x}{x-1}, \frac{x-y}{x-1}\right)$$

avec

$$-\pi < \arg(1-x) < +\pi.$$

Si y est pris dans la région E_0 et plus voisin de x que de $(+1)$,

$$\varphi_1 = (1-y)^{-\alpha} F_1\left(\alpha, \beta, \gamma - \beta - \beta', \gamma; \frac{y-x}{y-1}, \frac{y}{y-1}\right), \quad [-\pi < \arg(1-y) < +\pi].$$

Si x est à l'intérieur de C_0 et y plus voisin de x que de $(+1)$,

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} (1-y)^{-\beta'} F_1\left(\gamma-\alpha, \gamma-\beta-\beta', \beta', \gamma; x, \frac{y-x}{y-1}\right), \\ &[-\pi < \arg(1-x) < +\pi], \\ &[-\pi < \arg(1-y) < +\pi]. \end{aligned}$$

Enfin, si y est à l'intérieur de C_0 et y plus voisin de x que de $(+1)$,

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= (1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'} (1-x)^{-\beta} F_1\left(\gamma-\alpha, \beta, \gamma-\beta-\beta', \gamma; \frac{x-y}{x-1}, y\right), \\ &[-\pi < \arg(1-x) < +\pi], \\ &[-\pi < \arg(1-y) < +\pi]. \end{aligned}$$

14. Envisageons maintenant l'intégrale

$$\int_0^{-\infty} u^{\alpha-1} (1-u)^{\gamma-\alpha-1} (1-ux)^{-\beta} (1-uy)^{-\beta'} du,$$

u est réel et négatif. Son argument pourra être pris soit égal à $(+\pi)$, soit égal à $(-\pi)$. On posera

$$\arg(1-u) = 0.$$

Pour arguments de $1-ux$ et de $1-uy$, on choisit ceux qui s'annulent pour $u = 0$.

On doit avoir

$$(\text{Partie réelle de } \alpha) > 0, \quad \text{Partie réelle de } (1 + \beta + \beta' - \gamma) > 0.$$

Les variables x et y seront assujetties à ne pas franchir le segment $(-\infty) - 0$.

A ces conditions, l'intégrale a un sens et définit une fonction uniforme de x et de y .

Choisissons d'abord $(+\pi)$ pour argument de u . Posons

$$u = e^{i\pi} \frac{v}{1-v},$$

v étant une quantité réelle appartenant à l'intervalle $(0, 1)$.

On posera

$$\arg v = 0, \quad \arg(1-v) = 0.$$

Pour arguments de $1-v(1-x)$ et de $1-v(1-y)$, il faudra prendre ceux qui s'annulent pour $v = 0$; et alors on a

$$\int_0^{-\infty} U du = e^{2i\pi} \int_0^1 v^{\alpha-1} (1-v)^{\beta+\beta'-\gamma} [1-v(1-x)]^{-\beta} [1-v(1-y)]^{-\beta'} dv,$$

ou bien

$$\int_0^{-\infty} U du = e^{2i\pi} \mathbf{B}(\alpha, 1+\beta+\beta'-\gamma) \varphi_2.$$

D'ailleurs, en se reportant aux formules (15), (16), (17), (18) et (19), on voit que, si x et y sont simultanément dans C_1 ,

$$\varphi_2 = \mathbf{F}_1(\alpha, \beta, \beta', 1+\alpha+\beta+\beta'-\gamma; 1-x, 1-y).$$

Si x et y sont simultanément dans E_1 ,

$$\varphi_2 = x^{-\beta} y^{-\beta'} \mathbf{F}_1\left(1+\beta+\beta'-\gamma, \beta, \beta', 1+\alpha+\beta+\beta'-\gamma; \frac{x-1}{x}, \frac{y-1}{y}\right)$$

avec

$$(-\pi < \arg x < +\pi),$$

$$(-\pi < \arg y < +\pi).$$

Si x est dans la région E_1 et plus voisin de y que de l'origine,

$$\varphi_2 = x^{-\alpha} \mathbf{F}_1\left(\alpha, 1+\alpha-\gamma, \beta', 1+\alpha+\beta+\beta'-\gamma; \frac{x-1}{x}, \frac{x-y}{x}\right)$$

avec

$$(-\pi < \arg x < +\pi).$$

Si y est dans la région E_1 et plus voisin de x que de l'origine

$$\varphi_2 = y^{-\alpha} F_1 \left(\alpha, \beta, 1 + \alpha - \gamma, 1 + \alpha + \beta + \beta' - \gamma; \frac{y-x}{y}, \frac{y-1}{y} \right)$$

avec

$$(-\pi < \arg y < +\pi).$$

Si x est à l'intérieur de C_1 et y plus voisin de x que de l'origine,

$$\varphi_2 = x^{1+\beta'-\gamma} y^{-\beta'} F_1 \left(1 + \beta + \beta' - \gamma, 1 + \alpha - \gamma, \beta', 1 + \alpha + \beta + \beta' - \gamma; 1-x, \frac{y-x}{y} \right),$$

Si y est à l'intérieur de C_1 et x plus voisin de y que de l'origine

$$\varphi_2 = x^{-\beta} y^{1+\beta-\gamma} F_1 \left(1 + \beta + \beta' - \gamma, \beta, 1 + \alpha - \gamma, 1 + \alpha + \beta + \beta' - \gamma; \frac{x-y}{x}, 1-y \right).$$

Dans ces deux dernières formules, on a

$$(-\pi < \arg x < +\pi),$$

$$(-\pi < \arg y < +\pi).$$

Rappelons que, si l'on prend $\arg u = +\pi$,

$$\int_0^{-\infty} U du = e^{+\alpha i \pi} B(\alpha, 1 + \beta + \beta' - \gamma) \varphi_2,$$

et, si l'on prend $\arg u = -\pi$,

$$\int_0^{-\infty} U du = e^{-\alpha i \pi} B(\alpha, 1 + \beta + \beta' - \gamma) \varphi_2,$$

15. Prenons maintenant l'intégrale

$$\int_{+1}^{+\infty} u^{\alpha-1} (1-u)^{\gamma-\alpha-1} (1-ux)^{-\beta} (1-uy)^{-\beta'} du.$$

On prendra l'argument de u égal à zéro. Celui de $(1-u)$, quantité réelle négative, pourra être pris égal soit à $(+\pi)$, soit à $(-\pi)$.

Observons que les points x et y sont assujettis à ne pas prendre de valeurs réelles comprises entre 0 et 1. Pour rendre la fonction uniforme, nous interdirons aux variables x et y de franchir le segment rectiligne $0 \text{ --- } (+\infty)$. On pourra donc choisir pour argument de $1-ux$, $1-uy$ ceux qui sont compris entre $(-\pi)$ et $(+\pi)$.

On a, bien entendu,

Partie réelle de $(\gamma - \alpha) > 0$,

Partie réelle de $(1 + \beta + \beta' - \gamma) > 0$.

Cela posé, soit $u = \frac{1}{v}$, v étant réel, et appartenant à l'intervalle $(0, 1)$.
Soit aussi $\arg v = 0$.

Supposons qu'on choisisse $+\pi$ pour argument de $1 - u$, de sorte que

$$1 - u = e^{i\pi} \frac{1 - v}{v}, \quad \text{avec} \quad \arg(1 - v) = 0.$$

D'ailleurs

$$1 - ux = (-x) \frac{1 - \frac{v}{x}}{v}, \quad 1 - uy = (-y) \frac{1 - \frac{v}{y}}{v}.$$

Comme $(-x)$ et $(1 - \frac{v}{x})$ sont dans des régions différentes, je puis choisir pour arguments de $(-x)$ et de $1 - \frac{v}{x}$ ceux qui sont compris entre $(-\pi)$ et $(+\pi)$. Même remarque pour les arguments de $(-y)$ et de $(1 - \frac{v}{y})$.

Alors

$$\int_{+1}^{+\infty} U du = e^{(\gamma - \alpha - 1)i\pi} (-x)^{-\beta} (-y)^{-\beta'} \int_0^{+1} v^{\beta + \beta' - \gamma} (1 - v)^{\gamma - \alpha - 1} \left(1 - \frac{v}{x}\right)^{-\beta} \left(1 - \frac{v}{y}\right)^{-\beta'} dv.$$

D'ailleurs, on a, sous les conditions $|x| > 1$, $|y| > 1$,

$$\begin{aligned} & \int_0^{+1} v^{\beta + \beta' - \gamma} (1 - v)^{\gamma - \alpha - 1} \left(1 - \frac{v}{x}\right)^{-\beta} \left(1 - \frac{v}{y}\right)^{-\beta'} dv \\ &= B(1 + \beta + \beta' - \gamma, \gamma - \alpha) F_1\left(1 + \beta + \beta' - \gamma, \beta, \beta', 1 + \beta + \beta' - \alpha; \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right). \end{aligned}$$

Si donc on pose, avec la condition $\arg(1 - u) = +\pi$,

$$\int_{+1}^{+\infty} U du = e^{(\gamma - \alpha - 1)i\pi} B(1 + \beta + \beta' - \gamma, \gamma - \alpha) \varphi_3,$$

avec la condition $\arg(1 - u) = -\pi$,

$$\int_{+1}^{+\infty} U du = e^{(1 + \alpha - \gamma)i\pi} B(1 + \beta + \beta' - \gamma, \gamma - \alpha) \varphi_3,$$

on aura pour φ_3 les formes suivantes.

Si x et y sont tous les deux extérieurs au cercle C_0 ,

$$\varphi_3 = (-x)^{-\beta}(-y)^{-\beta'} F_1\left(1 + \beta + \beta' - \gamma, \beta, \beta', 1 + \beta + \beta' - \alpha; \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right).$$

Ici, on a

$$\begin{aligned} -\pi &< \arg(-x) < +\pi, \\ -\pi &< \arg(-y) < +\pi. \end{aligned}$$

Si x et y sont tous les deux extérieurs au cercle C_1 ,

$$\varphi_3 = (1-x)^{-\beta}(1-y)^{-\beta'} F_1\left(\gamma - \alpha, \beta, \beta', 1 + \beta + \beta' - \alpha; \frac{1}{1-x}, \frac{1}{1-y}\right).$$

Je dis qu'on a

$$(-\pi) < \arg(1-x) < (+\pi), \quad (-\pi) < \arg(1-y) < (+\pi).$$

En effet, reportons-nous à la formule (15); le facteur $(1-x)^{-\beta}$ provient du produit $(-x)^{-\beta}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-\beta}$; or l'argument de $(-x)$ a été choisi entre $(-\pi)$ et $(+\pi)$, et dans la formule (15) (après qu'on y a changé x en $\frac{1}{x}$), le facteur $\left(1 - \frac{1}{x}\right)$ a aussi son argument compris entre $(-\pi)$ et $(+\pi)$.

D'ailleurs $(-x)$ et $\left(1 - \frac{1}{x}\right)$ sont dans des régions différentes, on a donc

$$\overline{\arg(1-x)} = \overline{\arg(-x)} + \overline{\arg\left(1 - \frac{1}{x}\right)}, \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Si x est extérieur au cercle C_1 , et $\frac{1}{x}$ plus voisin de $\frac{1}{y}$ que de 1,

$$\varphi_3 = (-x)^{1+\beta-\gamma}(-y)^{-\beta'}(1-x)^{\gamma-1-\beta-\beta'} F_1\left(1 + \beta + \beta' - \gamma, 1 - \alpha, \beta', 1 + \beta + \beta' - \alpha; \frac{1}{1-x}, \frac{y-x}{y(1-x)}\right),$$

avec

$$\begin{aligned} -\pi &< \arg(-x) < +\pi, \\ -\pi &< \arg(-y) < +\pi, \\ -\pi &< \arg(1-x) < +\pi. \end{aligned}$$

Si y est extérieur au cercle C_1 , et $\frac{1}{y}$ plus voisin de $\frac{1}{x}$ que de 1,

$$\begin{aligned} \varphi_3 &= (-y)^{1+\beta-\gamma}(-x)^{-\beta}(1-y)^{\gamma-1-\beta-\beta'} \\ &\times F_1\left(1 + \beta + \beta' - \gamma, \beta, 1 - \alpha, 1 + \beta + \beta' - \alpha; \frac{x-y}{x(1-y)}, \frac{1}{1-y}\right) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} -\pi &< \arg(-x) < +\pi, \\ -\pi &< \arg(-y) < +\pi, \\ -\pi &< \arg(1-y) < +\pi. \end{aligned}$$

Si x est extérieur à C_0 et $\frac{1}{y}$ plus voisin de $\frac{1}{x}$ que de 1,

$$\varphi_3 = (-x)^{\alpha-\gamma} (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} (1-y)^{-\beta'} F_1\left(\gamma-\alpha, 1-\alpha, \beta', 1+\beta+\beta'-\alpha; \frac{1}{x}, \frac{x-y}{x(1-y)}\right)$$

avec

$$\begin{aligned} -\pi &< \arg(-x) < +\pi, \\ -\pi &< \arg(1-x) < +\pi, \\ -\pi &< \arg(1-y) < +\pi. \end{aligned}$$

Si y est extérieur à C_0 , et $\frac{1}{x}$ plus voisin de $\frac{1}{y}$ que de 1,

$$\varphi_3 = (-y)^{\alpha-\gamma} (1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'} (1-x)^{-\beta} F_1\left(\gamma-\alpha, \beta, 1-\alpha, 1+\beta+\beta'-\alpha; \frac{y-x}{y(1-x)}, \frac{1}{y}\right)$$

avec

$$\begin{aligned} -\pi &< \arg(-y) < +\pi, \\ -\pi &< \arg(1-x) < +\pi, \\ -\pi &< \arg(1-y) < +\pi. \end{aligned}$$

16. Examinons actuellement l'intégrale

$$\int_0^{\frac{1}{x}} u^{\alpha-1} (1-u)^{\gamma-\alpha-1} (1-ux)^{-\beta} (1-uy)^{-\beta'} du.$$

Nous faisons décrire à u le chemin qui va de l'origine au point $\frac{1}{x}$ en droite ligne. Si ω est l'argument de $(-x)$, supposé compris entre $(-\pi)$ et $(+\pi)$, et si l'on veut, pour l'argument de u , un argument compris, lui aussi, entre $(-\pi)$ et $(+\pi)$, il faudra poser $\arg u = \pi - \omega$, si le point $(-x)$ est dans la région supérieure du plan, et $\arg u = -\pi - \omega$, si le point $(-x)$ est dans la région inférieure.

Dans le premier, on écrira

$$u = e^{+\pi i} \frac{v}{(-x)} \quad v \text{ étant réel, et appartenant à l'intervalle } (0, 1),$$

et, dans le deuxième cas,

$$u = e^{-i\pi} \frac{v}{(-x)}, \quad v \text{ étant réel et appartenant à l'intervalle } (0, 1).$$

$$1 - u = 1 - \frac{v}{x} : \text{ on choisira l'argument qui s'annule pour } v = 0;$$

$$1 - ux = 1 - v; \arg(1 - ux) = \arg(1 - v) = 0;$$

$$1 - uy = 1 - \frac{vy}{x} : \text{ on choisira l'argument qui s'annule pour } v = 0.$$

On doit avoir

$$\text{Partie réelle de } (\alpha) > 0,$$

$$\text{Partie réelle de } (1 - \beta) > 0,$$

x est assujéti à ne pas prendre de valeurs réelles comprises entre 0 et 1, de façon que le point $(+1)$ ne soit pas sur le parcours de la variable u . Le point $\frac{1}{y}$ ne devra pas, lui non plus, être situé sur ce parcours.

Supposons que $(-x)$ soit dans la région supérieure du plan; alors

$$\overline{\arg} u = \pi - \overline{\arg}(-x),$$

et

$$\int_0^{\frac{1}{x}} U du = e^{2i\pi} (-x)^{-\alpha} \int_0^1 v^{\alpha-1} (1-v)^{-\beta} \left(1 - \frac{v}{x}\right)^{\gamma-\alpha-1} \left(1 - \frac{vy}{x}\right)^{-\beta'} dv.$$

D'ailleurs, sous les conditions $\left|\frac{1}{x}\right| < 1$, $\left|\frac{y}{x}\right| < 1$,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 v^{\alpha-1} (1-v)^{-\beta} \left(1 - \frac{v}{x}\right)^{\gamma-\alpha-1} \left(1 - v \frac{y}{x}\right)^{-\beta'} dv \\ & = \mathbf{B}(\alpha, 1-\beta) \mathbf{F}_1\left(\alpha, 1+\alpha-\gamma, \beta', 1+\alpha-\beta; \frac{1}{x}, \frac{y}{x}\right). \end{aligned}$$

On peut donc poser, si l'on a $\overline{\arg} u = \pi - \overline{\arg}(-x)$,

$$\int_0^{\frac{1}{x}} U du = e^{2i\pi} \mathbf{B}(\alpha, 1-\beta) \varphi_4,$$

et, si l'on a $\overline{\arg} u = -\pi - \overline{\arg}(-x)$,

$$\int_0^{\frac{1}{x}} U du = e^{-2i\pi} \mathbf{B}(\alpha, 1-\beta) \varphi_4,$$

l'intégrale φ_4 pouvant, d'ailleurs, prendre les formes suivantes :

Si x est extérieur au cercle C_0 , et y plus voisin de l'origine que le point x ,

$$\varphi_i = (-x)^{-\alpha} \mathbf{F}_1\left(\alpha, 1 + \alpha - \gamma, \beta', 1 + \alpha - \beta; \frac{1}{x}, \frac{y}{x}\right)$$

avec

$$(-\pi) < \arg(-x) < +\pi.$$

Si x est extérieur au cercle C_1 et y plus voisin de l'origine que du point x ,

$$\varphi_i = (-x)^{1+\beta'-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-1}(y-x)^{-\beta'} \mathbf{F}_1\left(1-\beta, 1+\alpha-\gamma, \beta', 1+\alpha-\beta; \frac{1}{1-x}, \frac{y}{y-x}\right).$$

On a toujours

$$-\pi < \arg(-x) < +\pi.$$

D'autre part,

$$\overline{\arg}(1-x) = \overline{\arg}\left(1 - \frac{1}{x}\right) + \overline{\arg}(-x);$$

donc

$$-\pi < \arg(1-x) < +\pi.$$

Enfin

$$\arg(y-x) = \overline{\arg}\left(1 - \frac{y}{x}\right) + \overline{\arg}(-x).$$

Si x est extérieur au cercle C_1 , et y plus voisin de 1 que x ,

$$\varphi_i = (1-x)^{-\alpha} \mathbf{F}_1\left(\alpha, \gamma - \beta - \beta', \beta', 1 + \alpha - \beta; \frac{1}{1-x}, \frac{1-y}{1-x}\right)$$

avec

$$-\pi < \arg(1-x) < +\pi.$$

Si y est plus voisin de 1 que de x , et aussi plus voisin de 0 que de x ,

$$\varphi_i = (y-x)^{-\alpha} \mathbf{F}_1\left(\alpha, 1 + \alpha - \gamma, \gamma - \beta - \beta', 1 + \alpha - \beta; \frac{y-1}{y-x}, \frac{y}{y-x}\right)$$

avec

$$\arg(y-x) = \overline{\arg}\left(1 - \frac{y}{x}\right) + \overline{\arg}(-x).$$

Si x est extérieur à C_0 et y plus voisin de 1 que de x ,

$$\varphi_i = (-x)^{\beta+\beta'-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}(y-x)^{-\beta'} \mathbf{F}_1\left(1-\beta, \gamma - \beta - \beta', \beta', 1 + \alpha - \beta; \frac{1}{x}, \frac{y-1}{y-x}\right)$$

avec

$$\begin{aligned} -\pi < \arg(-x) < +\pi, \\ -\pi < \arg(1-x) < +\pi, \\ \arg(y-x) = \overline{\arg}\left(1 - \frac{y}{x}\right) + \overline{\arg}(-x). \end{aligned}$$

Enfin, si y est à la fois plus voisin des points 1 et 0 que x ,

$$\varphi_2 = (-x)^{\beta+\beta'-\gamma} (1-x)^{\gamma-\alpha-1} (y-x)^{1-\beta-\beta'} \mathbf{F}_1\left(1-\beta, 1+\alpha-\gamma, \gamma-\beta-\beta', 1+\alpha-\beta; \frac{1-y}{1-x}, \frac{y}{x}\right)$$

avec

$$\begin{aligned} -\pi < \arg(-x) < +\pi, \\ -\pi < \arg(1-x) < +\pi, \\ \arg(y-x) = \overline{\arg}\left(1 - \frac{y}{x}\right) + \overline{\arg}(-x). \end{aligned}$$

L'intégrale $\int_0^{\frac{1}{y}} \mathbf{U} du$ donne lieu à des considérations analogues. Il suffit de permuter dans les résultats précédents x et y d'une part, β et β' de l'autre.

Si l'on a $\overline{\arg} u = \pi - \overline{\arg}(-y)$

$$\int_0^{\frac{1}{y}} \mathbf{U} du = e^{\alpha i \pi} \mathbf{B}(\alpha, 1-\beta') \varphi_3,$$

et si l'on a $\overline{\arg} u = -\pi - \overline{\arg}(-y)$

$$\int_0^{\frac{1}{y}} \mathbf{U} du = e^{-\alpha i \pi} \mathbf{B}(\alpha, 1-\beta') \varphi_3,$$

l'intégrale φ_3 pouvant d'ailleurs prendre les formes suivantes.

Si y est extérieur au cercle C_0 et x plus voisin de l'origine que y ,

$$\varphi_3 = (-y)^{-\alpha} \mathbf{F}_1\left(\alpha, \beta, 1+\alpha-\gamma, 1+\alpha-\beta'; \frac{x}{y}, \frac{1}{y}\right)$$

avec

$$-\pi < \arg(-y) < +\pi.$$

Si y est extérieur au cercle C_1 , et x plus voisin de l'origine que de y ,

$$\varphi_s = (-y)^{1+\beta-\gamma}(1-y)^{\gamma-\alpha-1}(x-y)^{-\beta} F_1\left(1-\beta', \beta, 1+\alpha-\gamma, 1+\alpha-\beta'; \frac{x}{x-y}, \frac{1}{1-y}\right)$$

avec

$$-\pi < \arg(-y) < +\pi,$$

$$-\pi < \arg(1-y) < +\pi,$$

$$\arg(x-y) = \overline{\arg}\left(1-\frac{x}{y}\right) + \overline{\arg}(-y).$$

Si y est extérieur au cercle C_1 , et x plus voisin de 1 que y ,

$$\varphi_s = (1-y)^{-\alpha} F_1\left(\alpha, \beta, \gamma-\beta-\beta', 1+\alpha-\beta'; \frac{1-x}{1-y}, \frac{1}{1-y}\right)$$

avec

$$-\pi < \arg(1-y) < +\pi.$$

Si x est plus voisin de 1 et de 0 que de y ,

$$\varphi_s = (x-y)^{-\alpha} F_1\left(\alpha, \gamma-\beta-\beta', 1+\alpha-\gamma, 1+\alpha-\beta'; \frac{x}{x-y}, \frac{x-1}{x-y}\right)$$

avec

$$\arg(x-y) = \overline{\arg}\left(1-\frac{x}{y}\right) + \overline{\arg}(-y).$$

Si y est extérieur à C_0 , et x plus voisin de 1 que de y ,

$$\varphi_s = (-y)^{\beta+\beta'-\gamma}(1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'}(x-y)^{-\beta} F_1\left(1-\beta', \beta, \gamma-\beta-\beta', 1+\alpha-\beta'; \frac{x-1}{x-y}, \frac{1}{y}\right)$$

avec

$$-\pi < \arg(-y) < +\pi,$$

$$-\pi < \arg(1-y) < +\pi,$$

$$\arg(x-y) = \overline{\arg}\left(1-\frac{x}{y}\right) + \overline{\arg}(-y).$$

Enfin, si x est à la fois plus voisin des points 1 et 0 que y ,

$$\varphi_s = (-y)^{\beta+\beta'-\gamma}(1-y)^{\gamma-\alpha-1}(x-y)^{1-\beta-\beta'} F_1\left(1-\beta', \gamma-\beta-\beta', 1+\alpha-\gamma, 1+\alpha-\beta'; \frac{x}{y}, \frac{1-x}{1-y}\right)$$

avec

$$-\pi < \arg(-y) < +\pi,$$

$$-\pi < \arg(1-y) < +\pi,$$

$$\arg(x-y) = \overline{\arg}\left(1 - \frac{x}{y}\right) + \overline{\arg}(-y).$$

17. Soit à étudier l'intégrale

$$\int_{\frac{1}{x}}^{\infty} u^{\alpha-1} (1-u)^{\gamma-\alpha-1} (1-ux)^{-\beta} (1-uy)^{-\beta'} du.$$

Ici nous poserons $u = \frac{1}{\nu x}$, ν étant une quantité réelle appartenant à l'intervalle $(0, 1)$; on aura donc

$$\arg u = -\overline{\arg} x.$$

On doit donc avoir

$$\text{Partie réelle de } (1-\beta) > 0,$$

$$\text{Partie réelle de } (1+\beta+\beta'-\gamma) > 0.$$

D'autre part,

$$1-u = 1 - \frac{1}{\nu x};$$

il ne faut pas que cette quantité puisse devenir nulle. x est donc assujetti à ne pas prendre de valeurs réelles supérieures à 1.

De même

$$1-uy = 1 - \frac{y}{\nu x};$$

il ne faut pas que ce facteur puisse s'annuler. Donc $\frac{y}{x}$ est assujetti à ne pas prendre de valeurs réelles comprises entre 0 et 1, c'est-à-dire que x et y ne devront pas se trouver en ligne droite avec l'origine, du même côté par rapport à l'origine, y étant compris entre l'origine et le point x .

Maintenant

$$1-u = (-1) \frac{1-\nu x}{\nu x}.$$

Pour argument de $1-\nu x$, je choisis celui qui s'annule pour $\nu = 0$. Si l'on veut que l'argument de $1-u$ soit compris entre $-\pi$ et $+\pi$, si x est dans

la partie supérieure du plan, il faudra poser

$$1 - u = e^{+i\pi} \frac{1 - vx}{vx} \quad \text{et} \quad 1 - u = e^{-i\pi} \frac{1 - vx}{vx}$$

lorsque x sera dans la partie inférieure.

De même

$$1 - uy = (-1) \frac{y}{vx} \left(1 - v \frac{x}{y}\right);$$

on choisira pour argument de $1 - v \frac{x}{y}$ celui qui s'annule pour $v = 0$. De plus, si l'on veut que l'argument de $1 - uy$ soit compris entre $-\pi$ et $+\pi$, si $\frac{x}{y}$ est dans la partie supérieure du plan, on posera

$$1 - uy = e^{+i\pi} \frac{y}{vx} \left(1 - v \frac{x}{y}\right);$$

si, au contraire, $\frac{x}{y}$ est dans la partie inférieure du plan, on écrira

$$1 - uy = e^{-i\pi} \frac{y}{vx} \left(1 - v \frac{x}{y}\right).$$

Si l'on pose $x = \xi + i\eta$, $y = \xi' + i\eta'$,

$$\frac{x}{y} = \frac{\xi\xi' + \eta\eta' + i(\eta\xi' - \xi\eta')}{(\xi'^2 + \eta'^2)}.$$

Si $\frac{x}{y}$ est dans la partie supérieure du plan, on a

$$\eta\xi' - \xi\eta' > 0.$$

Par suite, si l'on parcourt le périmètre du triangle Oxy dans le sens Oxy , on a l'aire du triangle à sa droite. On aura l'aire du triangle à sa gauche si le point $\frac{x}{y}$ est sur la partie inférieure du plan.

Enfin,

$$1 - ux = e^{\pm\pi i} \frac{1 - v}{v}.$$

On aura alors

$$\int_{\frac{1}{x}}^{\infty} U du = e^{\pm\beta i\pi + \pm\beta' i\pi + \varepsilon' \gamma - \alpha - 1} i\pi x^{1+\beta'-\gamma} y^{-\beta'} \int_0^1 v^{\beta+\beta'-\gamma} (1-v)^{-\beta} (1-vx)^{\gamma-\alpha-1} \left(1 - \frac{vx}{y}\right)^{-\beta'} dv,$$

les valeurs de ε , ε' , ε'' étant déterminées ainsi qu'il suit :

Si $\arg(1 - ux) = +\pi$,	$\varepsilon = -1$.
Si $\arg(1 - ux) = -\pi$,	$\varepsilon = +1$.
Si $\frac{x}{y}$ est dans la partie supérieure du plan,	$\varepsilon' = -1$.
Si $\frac{x}{y}$ est dans la partie inférieure du plan,	$\varepsilon' = +1$.
Si x est dans la partie supérieure du plan,	$\varepsilon'' = +1$.
Si x est dans la partie inférieure du plan,	$\varepsilon'' = -1$.

D'ailleurs, sous les conditions $|x| < 1$, $\left|\frac{x}{y}\right| < 1$,

$$\int_0^1 v^{\beta+\beta'-\gamma}(1-v)^{-\beta}(1-vx)^{\gamma-\alpha-1} \left(1-v\frac{x}{y}\right)^{-\beta'} dv$$

$$= \mathbf{B}(1+\beta+\beta'-\gamma, 1-\beta) \mathbf{F}_1\left(1+\beta+\beta'-\gamma, 1+\alpha-\gamma, \beta', 2+\beta'-\gamma; x, \frac{x}{y}\right).$$

En résumé,

$$\int_{\frac{1}{x}}^{\infty} \mathbf{U} du = e^{\varepsilon\beta i\pi + \varepsilon'\beta' i\pi + \varepsilon''(\gamma-\alpha-1)i\pi} \mathbf{B}(1+\beta+\beta'-\gamma, 1-\beta) \varphi_6,$$

φ_6 ayant l'une des six formes qui suivent.

Si x est dans \mathbf{C}_0 et plus voisin de l'origine que y ,

$$\varphi_6 = x^{1+\beta'-\gamma} y^{-\beta'} \mathbf{F}_1\left(1+\beta+\beta'-\gamma, 1+\alpha-\gamma, \beta', 2+\beta'-\gamma; x, \frac{x}{y}\right)$$

avec

$$-\pi < \arg x < +\pi$$

et

$$\arg y = \overline{\arg x} - \overline{\arg \frac{x}{y}}.$$

Si x est plus voisin de l'origine que de 1 et de y ,

$$\varphi_6 = x^{1+\beta'-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-1}(y-x)^{-\beta'} \mathbf{F}_1\left(1-\beta, 1+\alpha-\gamma, \beta', 2+\beta'-\gamma; \frac{x}{x-1}, \frac{x}{x-y}\right).$$

On a d'abord

$$-\pi < \arg x < +\pi,$$

puis

$$-\pi < \arg(1-x) < +\pi,$$

enfin

$$\arg(y-x) = \overline{\arg\left(\frac{y}{x} - 1\right)} + \overline{\arg x}.$$

Si x est dans la région E_0 et $\frac{1}{y}$ plus voisin de 1 que $\frac{1}{x}$,

$$\varphi_6 = x^{1+\beta-\gamma} y^{-\beta} (1-x)^{\gamma-\beta-\beta'-1} F_1 \left[1+\beta+\beta'-\gamma, 1-\alpha, \beta', 2+\beta'-\gamma; \frac{x}{x-1}, \frac{x(y-1)}{y(x-1)} \right],$$

avec

$$\begin{aligned} -\pi &< \arg x < +\pi, \\ \arg y &= \overline{\arg x} - \overline{\arg \frac{x}{y}}, \\ -\pi &< \arg(1-x) < +\pi. \end{aligned}$$

Si $\frac{1}{y}$ est plus voisin de 1 et de 0 que de $\frac{1}{x}$,

$$\varphi_6 = x^{1+\beta-\gamma} y^{1+\beta-\gamma} (y-x)^{\gamma-\beta-\beta'-1} F_1 \left[1+\beta+\beta'-\gamma, 1+\alpha-\gamma, 1-\alpha, 2+\beta'-\gamma; \frac{x(1-y)}{x-y}, \frac{x}{x-y} \right]$$

avec

$$\begin{aligned} -\pi &< \arg x < +\pi, \\ \arg y &= \overline{\arg x} - \overline{\arg \frac{x}{y}}, \\ \arg(y-x) &= \overline{\arg\left(\frac{y}{x} - 1\right)} + \overline{\arg x}. \end{aligned}$$

Si x est dans C_0 et si $\frac{1}{y}$ est plus voisin de 1 que de $\frac{1}{x}$,

$$\varphi_6 = x^{1+\beta-\gamma} (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} (y-x)^{-\beta'} F_1 \left[1-\beta, 1-\alpha, \beta', 2+\beta'-\gamma; x, \frac{x(1-y)}{x-y} \right],$$

avec

$$\begin{aligned} -\pi &< \arg x < +\pi, \\ -\pi &< \arg(1-x) < +\pi, \\ \arg(y-x) &= \overline{\arg\left(\frac{y}{x} - 1\right)} + \overline{\arg x}. \end{aligned}$$

Enfin, si x est plus voisin de l'origine que y , et $\frac{1}{y}$ plus voisin de 1 que de $\frac{1}{x}$,

$$\varphi_6 = x^{1+\beta'-\gamma} y^{\beta-1} (y-x)^{1-\beta-\beta'} (1-x)^{\gamma-\alpha-1} F_1 \left[1-\beta, 1+\alpha-\gamma, 1-\alpha, 2+\beta'-\gamma; \frac{x(y-1)}{y(x-1)}, \frac{x}{y} \right],$$

avec

$$\begin{aligned} -\pi &< \arg x < +\pi, \\ -\pi &< \arg(1-x) < +\pi, \\ \arg y &= \overline{\arg x} - \overline{\arg\left(\frac{x}{y}\right)}, \\ \arg(y-x) &= \overline{\arg\left(\frac{y}{x} - 1\right)} + \overline{\arg x}. \end{aligned}$$

Pour obtenir les résultats concernant l'intégrale $\int_{\frac{1}{y}}^{\infty} U du$, il n'y a qu'à permuter, dans ce qui précède, x et y , β et β' .

On a donc

$$\int_{\frac{1}{y}}^{\infty} U du e^{\varepsilon\beta i\pi + \varepsilon'\beta' i\pi + \varepsilon''(\gamma - \alpha - 1)i\pi} \mathbf{B}(1 + \beta + \beta' - \gamma, 1 - \beta') \varphi_7,$$

ε , ε' et ε'' étant déterminés comme il suit :

$$\begin{aligned} \text{Si } \arg(1-uy) &= +\pi, & \varepsilon' &= -1, \\ \text{Si } \arg(1-uy) &= -\pi, & \varepsilon' &= +1. \end{aligned}$$

Si $\frac{y}{x}$ est dans la partie supérieure du plan, $\varepsilon = -1$,

Si $\frac{y}{x}$ est dans la partie inférieure du plan, $\varepsilon = +1$,

Si y est dans la partie supérieure du plan, $\varepsilon'' = +1$,

Si y est dans la partie inférieure du plan, $\varepsilon'' = -1$.

φ_7 aura, d'ailleurs, l'une des six formes ci-jointes :

Si y est dans le cercle C_0 et plus voisin de l'origine que x ,

$$\varphi_7 = y^{1+\beta-\gamma} x^{-\beta} \mathbf{F}_1\left(1 + \beta + \beta' - \gamma, \beta, 1 + \alpha - \gamma, 2 + \beta - \gamma; \frac{y}{x}, y\right);$$

Si y est plus voisin de l'origine que de 1 et de x ,

$$\varphi_7 = y^{1+\beta-\gamma} (1-y)^{\gamma-\alpha-1} (x-y)^{-\beta} \mathbf{F}_1\left(1 - \beta', \beta, 1 + \alpha - \gamma, 2 + \beta - \gamma; \frac{y}{y-x}, \frac{y}{y-1}\right);$$

Si y est dans la région E_0 , et $\frac{1}{x}$ plus voisin de 1 que $\frac{1}{y}$,

$$\varphi_7 = y^{1+\beta-\gamma} x^{-\beta} (1-y)^{\gamma-1-\beta-\beta'} \mathbf{F}_1\left[1 + \beta + \beta' - \gamma, \beta, 1 - \alpha, 2 + \beta - \gamma; \frac{y(x-1)}{x(y-1)}, \frac{y}{y-1}\right];$$

Fac. de T. — VII.

F.6

Si $\frac{1}{x}$ est plus voisin de 1 et de 0 que de $\frac{1}{y}$,

$$\varphi_7 = y^{1+\beta-\gamma} x^{1+\beta-\gamma} (x-y)^{\gamma-1-\beta-\beta'} F_1 \left[1+\beta+\beta'-\gamma, 1-\alpha, 1+\alpha-\gamma, 2+\beta-\gamma; \frac{y}{y-x}, \frac{y(1-x)}{y-x} \right];$$

Si y est dans C_0 , et si $\frac{1}{x}$ est plus voisin de 1 que de $\frac{1}{y}$,

$$\varphi_7 = y^{1+\beta-\gamma} (1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'} (x-y)^{-\beta} F_1 \left[1-\beta', \beta, 1-\alpha, 2+\beta-\gamma; \frac{y(1-x)}{y-x}, y \right];$$

Enfin, si y est plus voisin de l'origine que x , et $\frac{1}{x}$ plus voisin de 1 que $\frac{1}{y}$,

$$\varphi_7 = y^{1+\beta-\gamma} x^{\beta-1} (x-y)^{1-\beta-\beta'} (1-y)^{\gamma-\alpha-1} F_1 \left[1-\beta', 1-\alpha, 1+\alpha-\gamma, 2+\beta-\gamma; \frac{y}{x}, \frac{y(x-1)}{x(y-1)} \right].$$

Dans ces formules, on a

$$\begin{aligned} -\pi &< \arg y < +\pi, \\ -\pi &< \arg(1-y) < +\pi, \\ \arg x &= \overline{\arg y} - \overline{\arg \frac{y}{x}}, \\ \arg(x-y) &= \overline{\arg \left(\frac{x}{y} - 1 \right)} + \overline{\arg y}. \end{aligned}$$

18. Nous arrivons à l'intégrale

$$\int_{+1}^{+\frac{1}{x}} u^{\alpha-1} (1-u)^{\gamma-\alpha-1} (1-ux)^{-\beta} (1-uy)^{-\beta'} du.$$

On doit avoir

$$\begin{aligned} \text{Partie réelle de } (\gamma - \alpha) &> 0, \\ \text{Partie réelle de } (1 - \beta) &> 0. \end{aligned}$$

On fera décrire à u le chemin rectiligne qui va du point 1 au point $\frac{1}{x}$; on posera, en conséquence, $u = 1 - \nu \frac{x-1}{x}$, ν étant une variable réelle appartenant à l'intervalle (0, 1). Ce facteur ne doit pas s'annuler. Or l'équation $u = 0$ équivaut à $x = 1 - \frac{1}{1-\nu}$; donc x est assujéti à ne pas prendre de valeurs réelles négatives.

De même

$$1 - uy = (1 - y) \left[1 - \nu \frac{y(1-x)}{x(1-y)} \right].$$

Ce dernier facteur ne doit pas s'annuler; $\frac{x(1-y)}{y(1-x)}$ est assujéti à ne pas prendre de valeur réelle, positive, comprise entre zéro et 1. Géométriquement, les points $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{x}$ ne devront pas être en ligne droite avec le point + 1, $\frac{1}{y}$ étant plus près de 1 que $\frac{1}{x}$.

Passons aux arguments.

$u = 1 - \nu \frac{x-1}{x}$; on prendra pour argument de u celui qui s'annule pour $\nu = 0$.

$1 - u = -\frac{1-x}{x} \nu$; si x est dans la partie supérieure du plan, $\frac{1}{x}$ est dans la partie inférieure; il en est de même de $\frac{1-x}{x} = \frac{1}{x} - 1$. Si x est dans la partie supérieure du plan, on posera donc

$$\left(1 - u = e^{+i\pi} \frac{1-x}{x} \nu \right),$$

et si x est dans la partie inférieure,

$$1 - u = e^{-i\pi} \frac{1-x}{x} \nu,$$

en choisissant pour argument de $\frac{1-x}{x}$ celui qui est compris entre $-\pi$ et $+\pi$. L'argument de ν est égal à zéro.

$1 - ux = (1-x)(1-\nu)$; posons $\arg(1-\nu) = 0$. Choisissons pour argument de $(1-x)$ celui qui est compris entre $-\pi$ et $+\pi$; alors

$$\arg(1-ux) = \overline{\arg}(1-x).$$

Remarquons que l'on a

$$\overline{\arg} x = \overline{\arg}(1-x) - \overline{\arg} \frac{1-x}{x},$$

$(1-uy) = (1-y) \left[1 - \frac{\nu y(1-x)}{x(1-y)} \right]$. On prendra pour argument de $(1-y)$ celui qui est compris entre $-\pi$ et $+\pi$, et pour argument de $1 - \frac{\nu y(1-x)}{x(1-y)}$ celui qui s'annule pour $\nu = 0$.

On arrive alors aux résultats suivants :

Si x est dans la partie supérieure du plan,

$$\int_1^{\frac{1}{x}} U du = e^{(\gamma-\alpha-1)i\pi} \mathbf{B}(\gamma-\alpha, 1-\beta) \varphi_8;$$

Si x est dans la partie inférieure du plan,

$$\int_1^{\frac{1}{x}} U du = e^{(1+\alpha-\gamma)i\pi} \mathbf{B}(\gamma-\alpha, 1-\beta) \varphi_8;$$

D'ailleurs, φ_8 prend les six formes qui suivent :

Si x est dans E_1 , et $\frac{1}{x}$ plus près de 1 que $\frac{1}{y}$,

$$\varphi_8 = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} x^{\alpha-\gamma} (1-y)^{-\beta'} \mathbf{F}_1 \left[\gamma-\alpha, 1-\alpha, \beta', 1+\gamma-\alpha-\beta; \frac{x-1}{x}, \frac{y(1-x)}{x(1-y)} \right],$$

les arguments de x , $1-x$, $1-y$ étant compris entre $-\pi$ et $+\pi$;

Si x est dans C_1 , et $\frac{1}{x}$ plus voisin de 1 que de $\frac{1}{y}$,

$$\varphi_8 = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} x^{1+\beta'-\gamma} (x-y)^{-\beta'} \mathbf{F}_1 \left[1-\beta, 1-\alpha, \beta', 1+\gamma-\alpha-\beta; 1-x, \frac{y(1-x)}{y-x} \right];$$

Si x est dans C_1 plus près de 1 que y ,

$$\varphi_8 = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} (1-y)^{-\beta'} \mathbf{F}_1 \left(\gamma-\alpha, \gamma-\beta-\beta', \beta', 1+\gamma-\alpha-\beta; 1-x, \frac{x-1}{y-1} \right);$$

Si x est plus voisin de 1 que de y , $\frac{1}{x}$ plus voisin de 1 que de $\frac{1}{y}$,

$$\varphi_8 = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} (1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'} (x-y)^{\alpha-\gamma} \mathbf{F}_1 \left[\gamma-\alpha, 1-\alpha, \gamma-\beta-\beta', 1+\gamma-\alpha-\beta; \frac{1-x}{y-x}, \frac{y(1-x)}{y-x} \right];$$

Si x est dans la région E_1 , plus voisin de 1 que de y ,

$$\varphi_8 = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} x^{\beta+\beta'-\gamma} (x-y)^{-\beta'} \mathbf{F}_1 \left[1-\beta, \gamma-\beta-\beta', \beta', 1+\gamma-\alpha-\beta; \frac{x-1}{x}, \frac{1-x}{y-x} \right];$$

Si enfin x est plus voisin de 1 que y , et $\frac{1}{x}$ plus voisin de 1 que $\frac{1}{y}$,

$$\varphi_8 = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} x^{\beta+\beta'-\gamma} (1-y)^{\beta-1} (x-y)^{1-\beta-\beta'} \mathbf{F}_1 \left[1-\beta, 1-\alpha, \gamma-\beta-\beta', 1+\gamma-\alpha-\beta; \frac{x-1}{y-1}, \frac{y(1-x)}{x(1-y)} \right].$$

Dans ces formules, les arguments de x , $1-x$, $1-y$ sont compris entre $-\pi$ et $+\pi$.

On a, d'autre part,

$$\arg(x-y) = \overline{\arg\left[1 - \frac{\gamma(1-x)}{x(1-y)}\right]} + \overline{\arg x} + \overline{\arg(1-y)}.$$

En permutant, dans ces résultats, x et y , β et β' , on aura ceux qui concernent l'intégrale $\int_{+1}^{+\frac{1}{y}} U du$.

Les voici : si y est dans la partie supérieure du plan,

$$\int_1^{\frac{1}{y}} U du = e^{(\gamma-\alpha-1)i\pi} \mathbf{B}(\gamma-\alpha, 1-\beta') \varphi_9;$$

Si y est dans la partie inférieure du plan,

$$\int_1^{\frac{1}{y}} U du = e^{-(\gamma-\alpha-1)i\pi} \mathbf{B}(\gamma-\alpha, 1-\beta') \varphi_9,$$

φ_2 pourra prendre l'une des six formes qui suivent :

Si y est dans E_1 , $\frac{1}{y}$ plus voisin de 1 que $\frac{1}{x}$,

$$\varphi_9 = (1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'} y^{\alpha-\gamma} (1-x)^{-\beta} \mathbf{F}_1\left[\gamma-\alpha, \beta, 1-\alpha, 1+\gamma-\alpha-\beta'; \frac{x(1-y)}{y(1-x)}, \frac{y-1}{y}\right];$$

Si y est dans C_1 , et $\frac{1}{y}$ plus près de 1 que $\frac{1}{x}$,

$$\varphi_9 = (1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'} y^{1+\beta-\gamma} (y-x)^{-\beta} \mathbf{F}_1\left[1-\beta', \beta, 1-\alpha, 1+\gamma-\alpha-\beta'; \frac{x(1-y)}{x-y}, 1-y\right];$$

Si y est, dans C_1 , plus voisin de 1 que x ,

$$\varphi_9 = (1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'} (1-x)^{-\beta} \mathbf{F}_1\left(\gamma-\alpha, \beta, \gamma-\beta-\beta', 1+\gamma-\alpha-\beta'; \frac{y-1}{x-1}, 1-y\right);$$

Si y est plus voisin de 1 que de x et $\frac{1}{y}$ plus voisin de 1 que de $\frac{1}{x}$,

$$\varphi_9 = (1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'} (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} (y-x)^{\alpha-\gamma} \mathbf{F}_1\left[\gamma-\alpha, \gamma-\beta-\beta', 1-\alpha, 1+\gamma-\alpha-\beta'; \frac{x(1-y)}{x-y}, \frac{1-y}{x-y}\right];$$

Si y est, dans la région E_1 , plus voisin de 1 que de x ,

$$\varphi_3 = (1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'} y^{\beta+\beta'-\gamma} (y-x)^{-\beta} F_1\left(1-\beta', \beta, \gamma-\beta-\beta', 1+\gamma-\alpha-\beta'; \frac{1-y}{x-y}, \frac{y-1}{y}\right);$$

Enfin, si y est plus voisin de 1 que x , $\frac{1}{y}$ plus voisin de 1 que $\frac{1}{x}$,

$$\varphi_3 = (1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'} y^{\beta+\beta'-\gamma} (1-x)^{\beta'-1} (y-x)^{1-\beta-\beta'} F_1\left[1-\beta', \gamma-\beta-\beta', 1-\alpha, 1+\gamma-\alpha-\beta'; \frac{x(1-y)}{y(1-x)}, \frac{y-1}{x-1}\right].$$

Dans ces formules, les arguments de y , $1-x$, $1-y$ sont compris entre $-\pi$ et $+\pi$, et l'on a

$$\arg(y-x) = \overline{\arg\left[1 - \frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right]} + \overline{\arg y} + \overline{\arg(1-x)}.$$

19. Reste enfin à étudier l'intégrale

$$\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{y}} u^{\alpha-1} (1-u)^{\gamma-\alpha-1} (1-ux)^{-\beta} (1-uy)^{-\beta'} du.$$

En premier lieu, on doit avoir

$$\text{Partie réelle de } (1-\beta) > 0.$$

$$\text{Partie réelle de } (1-\beta') > 0.$$

Le chemin décrit par u sera le segment rectiligne allant de $\frac{1}{x}$ à $\frac{1}{y}$.

Posons

$$u = \frac{1}{x} \left[1 - \frac{v(y-x)}{y} \right],$$

v étant réel et appartenant à l'intervalle $(0, 1)$. Ce facteur ne doit pas s'annuler. Or l'égalité $1 - v \frac{y-x}{y} = 0$ revient à $\frac{x}{y} = 1 - \frac{1}{v}$: la condition revient donc géométriquement à la suivante : les points x et y ne doivent pas être à la fois en ligne droite avec l'origine, et de part et d'autre de l'origine.

D'ailleurs $1-u = \frac{x-1}{x} \left[1 - v \frac{y-x}{y(1-x)} \right]$ ne doit pas non plus s'annuler.

Or l'équation

$$1 - v \frac{y-x}{y(1-x)} = 0$$

peut s'écrire

$$\frac{1 - \frac{1}{y}}{1 - \frac{1}{x}} = 1 - \frac{1}{v};$$

on en conclut que le point 1 ne doit pas se trouver sur le segment de droite qui va de $\frac{1}{x}$ à $\frac{1}{y}$.

Dans la formule $u = \frac{1}{x} \left[1 - \frac{v(y-x)}{y} \right]$, je choisis comme argument de x celui qui est compris entre $-\pi$ et $+\pi$, et comme argument de $1 - \frac{v(y-x)}{y}$ celui qui s'annule pour $v = 0$; on a donc

$$\arg u = \overline{\arg} \left(1 - v + v \frac{x}{y} \right) - \overline{\arg} x, \quad 1 - u = \frac{x-1}{x} \left[1 - v \frac{y-x}{y(1-x)} \right];$$

et l'on aura

$$\arg(1-u) = \overline{\arg} \left(1 - \frac{1}{x} \right) + \overline{\arg} \left[1 - v \frac{y-x}{y(1-x)} \right],$$

$$1 - ux = \frac{y-x}{y} v, \quad \text{d'où} \quad \arg(1-ux) = \overline{\arg} \left(1 - \frac{x}{y} \right).$$

Enfin

$$1 - uy = e^{i\pi} \frac{y-x}{y} (1-v).$$

On posera

$$\varepsilon = +1 \quad \text{si } \frac{y}{x} \text{ est dans la partie inférieure du plan,}$$

$$\varepsilon = -1 \quad \text{si } \frac{y}{x} \text{ est dans la partie supérieure du plan.}$$

Alors on a

$$\int_x^{\frac{1}{y}} U du = e^{(1-\varepsilon\beta')i\pi} \mathbf{B}(1-\beta, 1-\beta') \varphi_{10},$$

φ_{10} pouvant d'ailleurs se mettre sous les six formes suivantes :

Si y est plus voisin de x que de l'origine, et $\frac{1}{x}$ plus voisin de $\frac{1}{y}$ que de 1,

$$\varphi_{10} = (y-x)^{1-\beta-\beta'} (x-1)^{\gamma-\alpha-1} x^{1+\beta'-\gamma} y^{\beta-1} \mathbf{F}_1 \left[1-\beta, 1-\alpha, 1+\alpha-\gamma, 2-\beta-\beta'; \frac{y-x}{y}, \frac{y-x}{y(1-x)} \right];$$

Si x est plus voisin de y que de l'origine et que de 1 ,

$$\varphi_{10} = (y-x)^{1-\beta-\beta'} (x-1)^{\gamma-\alpha-1} x^{\beta+\beta'-\gamma} F_1 \left(1-\beta, \gamma-\beta-\beta', 1+\alpha-\gamma, 2-\beta-\beta'; \frac{x-y}{x}, \frac{y-x}{1-x} \right);$$

Si y est plus voisin de x que de 1 , et aussi $\frac{1}{y}$ plus voisin de $\frac{1}{x}$ que de 1 ,

$$\varphi_{10} = (y-x)^{1-\beta-\beta'} (x-1)^{\gamma-\alpha-\beta} x^{\beta+\beta'-\gamma} (y-1)^{\beta-1} F_1 \left[1-\beta, 1-\alpha, \gamma-\beta-\beta', 2-\beta-\beta'; \frac{x-y}{1-y}, \frac{x-y}{x(1-y)} \right];$$

Si y est plus voisin de x que de l'origine et de 1 ,

$$\varphi_{10} = (y-x)^{1-\beta-\beta'} (y-1)^{\gamma-\alpha-1} y^{\beta+\beta'-\gamma} F_1 \left(1-\beta', 1+\alpha-\gamma, \gamma-\beta-\beta', 2-\beta-\beta'; \frac{x-y}{1-y}, \frac{y-x}{y} \right);$$

Si x est plus voisin de y que de 1 , et $\frac{1}{x}$ plus voisin de $\frac{1}{y}$ que de 1 ,

$$\varphi_{10} = (y-x)^{1-\beta-\beta'} (y-1)^{\gamma-\alpha-\beta'} y^{\beta+\beta'-\gamma} (x-1)^{\beta'-1} F_1 \left[1-\beta', \gamma-\beta-\beta', 1-\alpha, 2-\beta-\beta'; \frac{y-x}{y(1-x)}, \frac{y-x}{1-x} \right];$$

Enfin, si x est plus voisin de y que de l'origine, et $\frac{1}{y}$ plus voisin de $\frac{1}{x}$ que de 1 ,

$$\varphi_{10} = (y-x)^{1-\beta-\beta'} (y-1)^{\gamma-\alpha-1} y^{1+\beta-\gamma} x^{\beta'-1} F_1 \left[1-\beta', 1+\alpha-\gamma, 1-\alpha, 2-\beta-\beta'; \frac{y-x}{x(y-1)}, \frac{x-y}{x} \right].$$

Dans ces formules, les arguments de x et de $(x-1)$ sont compris entre $-\pi$ et $+\pi$.

On a d'autre part

$$\arg y = \overline{\arg} \frac{y}{x} + \overline{\arg} x,$$

$$\arg(y-1) = \overline{\arg} \left(\frac{x}{y} \frac{y-1}{x-1} \right) + \overline{\arg} \frac{y}{x} + \overline{\arg}(x-1),$$

$$\arg(y-x) = \overline{\arg} \left(\frac{y}{x} - 1 \right) + \overline{\arg} x.$$

20. En résumé, voici le Tableau des soixante intégrales annoncé au début

de ce Chapitre :

$$\varphi_1 = \left\{ \begin{array}{l} F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y), \\ (1-x)^{-\beta}(1-y)^{-\beta'} F_1\left(\gamma - \alpha, \beta, \beta', \gamma; \frac{x}{x-1}, \frac{y}{y-1}\right), \\ (1-x)^{-\alpha} F_1\left(\alpha, \gamma - \beta - \beta', \beta', \gamma; \frac{x}{x-1}, \frac{x-y}{x-1}\right), \\ (1-y)^{-\alpha} F_1\left(\alpha, \beta, \gamma - \beta - \beta', \gamma; \frac{y-x}{y-1}, \frac{y}{y-1}\right), \\ (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}(1-y)^{-\beta'} F_1\left(\gamma - \alpha, \gamma - \beta - \beta', \beta', \gamma; x, \frac{y-x}{y-1}\right), \\ (1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'}(1-x)^{-\beta} F_1\left(\gamma - \alpha, \beta, \gamma - \beta - \beta', \gamma; \frac{x-y}{x-1}, y\right); \end{array} \right.$$

$$\varphi_2 = \left\{ \begin{array}{l} F_1(\alpha, \beta, \beta', 1 + \alpha + \beta + \beta' - \gamma; 1-x, 1-y), \\ x^{-\beta} y^{-\beta'} F_1\left(1 + \beta + \beta' - \gamma, \beta, \beta', 1 + \alpha + \beta + \beta' - \gamma; \frac{x-1}{x}, \frac{y-1}{y}\right), \\ x^{-\alpha} F_1\left(\alpha, 1 + \alpha - \gamma, \beta', 1 + \alpha + \beta + \beta' - \gamma; \frac{x-1}{x}, \frac{x-y}{x}\right), \\ y^{-\alpha} F_1\left(\alpha, \beta, 1 + \alpha - \gamma, 1 + \alpha + \beta + \beta' - \gamma; \frac{y-x}{y}, \frac{y-1}{y}\right), \\ x^{1+\beta-\gamma} y^{-\beta'} F_1\left(1 + \beta + \beta' - \gamma, 1 + \alpha - \gamma, \beta', 1 + \alpha + \beta + \beta' - \gamma; 1-x, \frac{y-x}{y}\right), \\ y^{1+\beta-\gamma} x^{-\beta} F_1\left(1 + \beta + \beta' - \gamma, \beta, 1 + \alpha - \gamma, 1 + \alpha + \beta + \beta' - \gamma; \frac{x-y}{x}, 1-y\right); \end{array} \right.$$

$$\varphi_3 = \left\{ \begin{array}{l} (-x)^{-\beta}(-y)^{-\beta'} F_1\left(1 + \beta + \beta' - \gamma, \beta, \beta', 1 + \beta + \beta' - \alpha; \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right), \\ (1-x)^{-\beta}(1-y)^{-\beta'} F_1\left(\gamma - \alpha, \beta, \beta', 1 + \beta + \beta' - \alpha; \frac{1}{1-x}, \frac{1}{1-y}\right), \\ (-x)^{1+\beta-\gamma}(-y)^{-\beta'}(1-x)^{\gamma-1-\beta-\beta'} F_1\left[1 + \beta + \beta' - \gamma, 1 - \alpha, \beta', 1 + \beta + \beta' - \alpha; \frac{1}{1-x}, \frac{y-x}{y(1-x)}\right], \\ (-y)^{1+\beta-\gamma}(-x)^{-\beta}(1-y)^{\gamma-1-\beta-\beta'} F_1\left[1 + \beta + \beta' - \gamma, \beta, 1 - \alpha, 1 + \beta + \beta' - \alpha; \frac{x-y}{x(1-y)}, \frac{1}{1-y}\right], \\ (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}(-x)^{\alpha-\gamma}(1-y)^{-\beta'} F_1\left[\gamma - \alpha, 1 - \alpha, \beta', 1 + \beta + \beta' - \alpha; \frac{1}{x}, \frac{x-y}{x(1-y)}\right], \\ (1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'}(-y)^{\alpha-\gamma}(1-x)^{-\beta} F_1\left(\gamma - \alpha, \beta, 1 - \alpha, 1 + \beta + \beta' - \alpha; \frac{y-x}{y(1-x)}, \frac{1}{y}\right); \end{array} \right.$$

$$\varphi_4 = \left\{ \begin{array}{l} (-x)^{-\alpha} F_1 \left(\alpha, 1 + \alpha - \gamma, \beta', 1 + \alpha - \beta; \frac{1}{x}, \frac{y}{x} \right), \\ (-x)^{1+\beta-\gamma} (1-x)^{\gamma-\alpha-1} (y-x)^{-\beta'} F_1 \left(1 - \beta, 1 + \alpha - \gamma, \beta', 1 + \alpha - \beta; \frac{1}{1-x}, \frac{y}{y-x} \right), \\ (1-x)^{-\alpha} F_1 \left(\alpha, \gamma - \beta - \beta', \beta', 1 + \alpha - \beta; \frac{1}{1-x}, \frac{1-y}{1-x} \right), \\ (y-x)^{-\alpha} F_1 \left(\alpha, 1 + \alpha - \gamma, \gamma - \beta - \beta', 1 + \alpha - \beta; \frac{y-1}{y-x}, \frac{y}{y-x} \right), \\ (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} (-x)^{\beta+\beta'-\gamma} (y-x)^{-\beta'} F_1 \left(1 - \beta, \gamma - \beta - \beta', \beta', 1 + \alpha - \beta; \frac{1}{x}, \frac{y-1}{y-x} \right), \\ (y-x)^{1-\beta-\beta'} (-x)^{\beta+\beta'-\gamma} (1-x)^{\gamma-\alpha-1} F_1 \left(1 - \beta, 1 + \alpha - \gamma, \gamma - \beta - \beta', 1 + \alpha - \beta; \frac{1-y}{1-x}, \frac{y}{x} \right); \end{array} \right.$$

$$\varphi_5 = \left\{ \begin{array}{l} (-y)^{-\alpha} F_1 \left(\alpha, \beta, 1 + \alpha - \gamma, 1 + \alpha - \beta'; \frac{x}{y}, \frac{1}{y} \right), \\ (-y)^{1+\beta-\gamma} (1-y)^{\gamma-\alpha-1} (x-y)^{-\beta'} F_1 \left(1 - \beta', \beta, 1 + \alpha - \gamma, 1 + \alpha - \beta'; \frac{x}{x-y}, \frac{1}{1-y} \right), \\ (1-y)^{-\alpha} F_1 \left(\alpha, \beta, \gamma - \beta - \beta', 1 + \alpha - \beta'; \frac{1-x}{1-y}, \frac{1}{1-y} \right), \\ (x-y)^{-\alpha} F_1 \left(\alpha, \gamma - \beta - \beta', 1 + \alpha - \gamma, 1 + \alpha - \beta'; \frac{x}{x-y}, \frac{x-1}{x-y} \right), \\ (1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'} (-y)^{\beta+\beta'-\gamma} (x-y)^{-\beta'} F_1 \left(1 - \beta', \beta, \gamma - \beta - \beta', 1 + \alpha - \beta'; \frac{x-1}{x-y}, \frac{1}{y} \right), \\ (x-y)^{1-\beta-\beta'} (-y)^{\beta+\beta'-\gamma} (1-y)^{\gamma-\alpha-1} F_1 \left(1 - \beta', \gamma - \beta - \beta', 1 + \alpha - \gamma, 1 + \alpha - \beta'; \frac{x}{y}, \frac{1-x}{1-y} \right); \end{array} \right.$$

$$\varphi_6 = \left\{ \begin{array}{l} x^{1+\beta'-\gamma} y^{-\beta'} F_1 \left(1 + \beta + \beta' - \gamma, 1 + \alpha - \gamma, \beta', 2 + \beta' - \gamma; x, \frac{x}{y} \right), \\ x^{1+\beta'-\gamma} (1-x)^{\gamma-\alpha-1} (y-x)^{-\beta'} F_1 \left(1 - \beta, 1 + \alpha - \gamma, \beta', 2 + \beta' - \gamma; \frac{x}{x-1}, \frac{x}{x-y} \right), \\ x^{1+\beta'-\gamma} y^{-\beta'} (1-x)^{\gamma-\beta-\beta'-1} F_1 \left[1 + \beta + \beta' - \gamma, 1 - \alpha, \beta', 2 + \beta' - \gamma; \frac{x}{x-1}, \frac{x(y-1)}{y(x-1)} \right], \\ x^{1+\beta'-\gamma} y^{1+\beta-\gamma} (y-x)^{\gamma-\beta-\beta'-1} F_1 \left[1 + \beta + \beta' - \gamma, 1 + \alpha - \gamma, 1 + \alpha, 2 + \beta' - \gamma; \frac{x(1-y)}{x-y}, \frac{x}{x-y} \right], \\ x^{1+\beta'-\gamma} (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} (y-x)^{-\beta'} F_1 \left[1 - \beta, 1 - \alpha, \beta', 2 + \beta' - \gamma; x, \frac{x(1-y)}{x-y} \right], \\ x^{1+\beta'-\gamma} (y-x)^{1-\beta-\beta'} y^{\beta-1} (1-x)^{\gamma-\alpha-1} F_1 \left[1 - \beta, 1 + \alpha - \gamma, 1 - \alpha, 2 + \beta' - \gamma; \frac{x(y-1)}{y(x-1)}, \frac{x}{y} \right]; \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
 \varphi_7 = & \left\{ \begin{aligned}
 & y^{1+\beta-\gamma} x^{-\beta} F_1 \left(1 + \beta + \beta' - \gamma, \beta, 1 + \alpha - \gamma, 2 + \beta - \gamma; \frac{y}{x}, y \right), \\
 & y^{1+\beta-\gamma} (1-y)^{\gamma-\alpha-1} (x-y)^{-\beta} F_1 \left(1 - \beta', \beta, 1 + \alpha - \gamma, 2 + \beta - \gamma; \frac{y}{y-x}, \frac{y}{y-1} \right), \\
 & y^{1+\beta-\gamma} x^{-\beta} (1-y)^{\gamma-1-\beta-\beta'} F_1 \left[1 + \beta + \beta' - \gamma, \beta, 1 - \alpha, 2 + \beta - \gamma; \frac{y(x-1)}{x(y-1)}, \frac{y}{y-1} \right], \\
 & y^{1+\beta-\gamma} x^{1+\beta'-\gamma} (x-y)^{\gamma-1-\beta-\beta'} F_1 \left[1 + \beta + \beta' - \gamma, 1 - \alpha, 1 + \alpha - \gamma, 2 + \beta - \gamma; \frac{y}{y-x}, \frac{y(1-x)}{y-x} \right], \\
 & y^{1+\beta-\gamma} (1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'} (x-y)^{-\beta} F_1 \left[1 - \beta', \beta, 1 - \alpha, 2 + \beta - \gamma; \frac{y(1-x)}{y-x}, y \right], \\
 & y^{1+\beta-\gamma} (x-y)^{1-\beta-\beta'} x^{\beta-1} (1-y)^{\gamma-\alpha-1} F_1 \left[1 - \beta', 1 - \alpha, 1 + \alpha - \gamma, 2 + \beta - \gamma; \frac{y}{x}, \frac{y(x-1)}{x(y-1)} \right];
 \end{aligned} \right. \\
 \\
 \varphi_8 = & \left\{ \begin{aligned}
 & (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} x^{\alpha-\gamma} (1-y)^{-\beta'} F_1 \left[\gamma - \alpha, 1 - \alpha, \beta', 1 + \gamma - \alpha - \beta; \frac{x-1}{x}, \frac{y(1-x)}{x(1-y)} \right], \\
 & (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} x^{1+\beta'-\gamma} (x-y)^{-\beta'} F_1 \left[1 - \beta, 1 - \alpha, \beta', 1 + \gamma - \alpha - \beta; 1-x, \frac{y(1-x)}{y-x} \right], \\
 & (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} (1-y)^{-\beta'} F_1 \left(\gamma - \alpha, \gamma - \beta - \beta', \beta', 1 + \gamma - \alpha - \beta; 1-x, \frac{y-1}{x-1} \right), \\
 & (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} (1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'} (x-y)^{\alpha-\gamma} F_1 \left[\gamma - \alpha, 1 - \alpha, \gamma - \beta - \beta', 1 + \gamma - \alpha - \beta; \frac{1-x}{y-x}, \frac{y(1-x)}{y-x} \right], \\
 & (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} x^{\beta+\beta'-\gamma} (x-y)^{-\beta'} F_1 \left(1 - \beta, \gamma - \beta - \beta', \beta', 1 + \gamma - \alpha - \beta; \frac{x-1}{x}, \frac{x-1}{x-y} \right), \\
 & (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} (x-y)^{1-\beta-\beta'} x^{\beta+\beta'-\gamma} (1-y)^{\beta-1} F_1 \left[1 - \beta, 1 - \alpha, \gamma - \beta - \beta', 1 + \gamma - \alpha - \beta; \frac{y-1}{x-1}, \frac{y(1-x)}{x(1-y)} \right];
 \end{aligned} \right. \\
 \\
 \varphi_9 = & \left\{ \begin{aligned}
 & (1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'} y^{\alpha-\gamma} (1-x)^{-\beta} F_1 \left[\gamma - \alpha, \beta, 1 - \alpha, 1 + \gamma - \alpha - \beta'; \frac{x(1-y)}{y(1-x)}, \frac{y-1}{y} \right], \\
 & (1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'} y^{1+\beta-\gamma} (y-x)^{-\beta} F_1 \left[1 - \beta', \beta, 1 - \alpha, 1 + \gamma - \alpha - \beta'; \frac{x(1-y)}{x-y}, 1-y \right], \\
 & (1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'} (1-x)^{-\beta} F_1 \left[\gamma - \alpha, \beta, \gamma - \beta - \beta', 1 + \gamma - \alpha - \beta'; \frac{y-1}{x-1}, 1-y \right], \\
 & (1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'} (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} (y-x)^{\alpha-\gamma} F_1 \left[\gamma - \alpha, \gamma - \beta - \beta', 1 - \alpha, 1 + \gamma - \alpha - \beta'; \frac{x(1-y)}{x-y}, \frac{1-y}{x-y} \right], \\
 & (1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'} y^{\beta+\beta'-\gamma} (y-x)^{-\beta} F_1 \left[1 - \beta', \beta, \gamma - \beta - \beta', 1 + \gamma - \alpha - \beta'; \frac{1-y}{x-y}, \frac{y-1}{y} \right], \\
 & (1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'} (y-x)^{1-\beta-\beta'} y^{\beta+\beta'-\gamma} (1-x)^{\beta-1} F_1 \left[1 - \beta', \gamma - \beta - \beta', 1 - \alpha, 1 + \gamma - \alpha - \beta'; \frac{x(1-y)}{y(1-x)}, \frac{y-1}{x-1} \right];
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

$$\varphi_{10} = \left\{ \begin{array}{l} (y-x)^{1-\beta-\beta'} x^{1+\beta'-\gamma} (x-1)^{\gamma-\alpha-1} y^{\beta-1} \mathbf{F}_1 \left[1-\beta, 1-\alpha, 1+\alpha-\gamma, 2-\beta-\beta'; \frac{y-x}{y}, \frac{y-x}{y(1-x)} \right], \\ (y-x)^{1-\beta-\beta'} y^{1+\beta-\gamma} (y-1)^{\gamma-\alpha-1} x^{\beta-1} \mathbf{F}_1 \left[1-\beta', 1+\alpha-\gamma, 1-\alpha, 2-\beta-\beta'; \frac{y-x}{x(1-y)}, \frac{x-y}{x} \right], \\ (y-x)^{1-\beta-\beta'} (x-1)^{\gamma-\alpha-1} x^{\beta+\beta'-\gamma} \mathbf{F}_1 \left[1-\beta, \gamma-\beta-\beta', 1+\alpha-\gamma, 2-\beta-\beta'; \frac{x-y}{x}, \frac{y-x}{1-x} \right], \\ (y-x)^{1-\beta-\beta'} (y-1)^{\gamma-\alpha-1} y^{\beta+\beta'-\gamma} \mathbf{F}_1 \left[1-\beta', 1+\alpha-\gamma, \gamma-\beta-\beta', 2-\beta-\beta'; \frac{x-y}{1-y}, \frac{y-x}{y} \right], \\ (y-x)^{1-\beta-\beta'} (x-1)^{\gamma-\alpha-\beta} x^{\beta+\beta'-\gamma} (y-1)^{\beta-1} \mathbf{F}_1 \left[1-\beta, 1-\alpha, \gamma-\beta-\beta', 2-\beta-\beta'; \frac{x-y}{1-y}, \frac{x-y}{x(1-y)} \right], \\ (y-x)^{1-\beta-\beta'} (y-1)^{\gamma-\alpha-\beta'} y^{\beta+\beta'-\gamma} (x-1)^{\beta-1} \mathbf{F}_1 \left[1-\beta', \gamma-\beta-\beta', 1-\alpha, 2-\beta-\beta'; \frac{y-x}{y(1-x)}, \frac{1-x}{1-x} \right]. \end{array} \right.$$

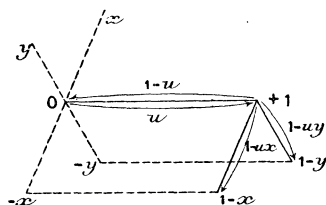
CHAPITRE III.

21. Les dix intégrales précédentes ne sont pas distinctes. Entre quatre d'entre elles existe certainement une relation linéaire. Parfois même, si on les prend trois par trois, certains groupes, pour des positions convenablement choisies de x et de y dans le plan, seront composés de trois intégrales non distinctes, entre lesquelles, par conséquent, il existera une relation linéaire et homogène. Le point capital que je désire bien mettre en évidence, c'est que les relations cherchées ne subsistent pas pour toutes les positions de x et de y dans le plan. C'est ce que je vais d'abord établir.

Rendons-nous compte, en premier lieu, des chemins suivis par les points $1 - u$, $1 - ux$, $1 - uy$ quand le point u suit un chemin déterminé. Nous n'examinerons que les cas particuliers nécessaires pour la suite.

1° Le point u va sur l'axe réel X , de 0 à 1 (*fig. 2*); le point $1 - u$ va sur X , de 1 à 0 ; le point $1 - ux$ va en ligne droite du point 1 au point $(1 - x)$ et, de même, le point $1 - uy$ va en ligne droite du point 1 au point $1 - y$.

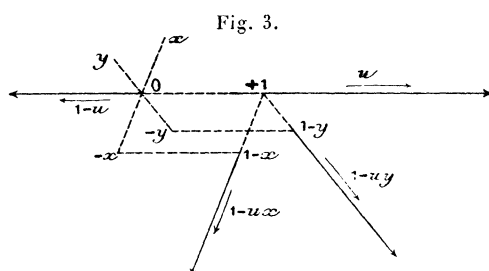
Fig. 2.



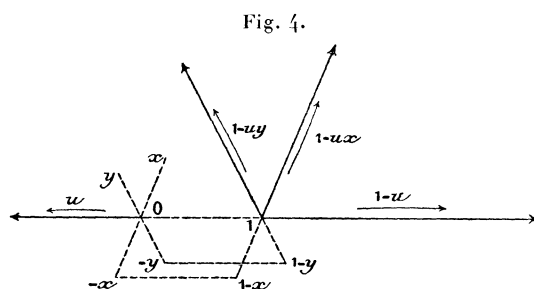
2° Le point u va sur X de $+1$ à $+\infty$ (*fig. 3*); le point $(1 - u)$ va sur X de 0 à $(-\infty)$; $1 - ux$ va de $(1 - x)$ à l'infini sur la droite $(1, 1 - x)$; $1 - uy$ va de $(-y)$ à l'infini sur la droite $(1, 1 - y)$.

3° Le point u va sur X de 0 à $(-\infty)$ (*fig. 4*); le point $(1 - u)$ va sur X de $+1$ à $+\infty$; le point $(1 - ux)$ va de 1 à l'infini sur la droite $(1, 1 - x)$; le point $1 - uy$ va de 1 à l'infini sur la droite $(1, 1 - y)$.

4° u va en ligne droite de 0 à $\frac{1}{x}$ (*fig. 5*); $1-u$ va en ligne droite de 1 à

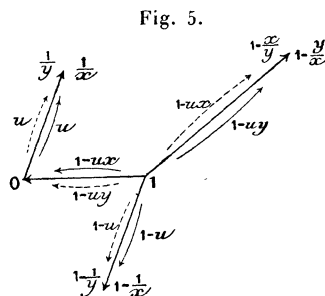


$1 - \frac{1}{x}$; $1 - ux$ va sur X de 1 à 0; $1 - uy$ va en ligne droite de 1 à $1 - \frac{y}{x}$.



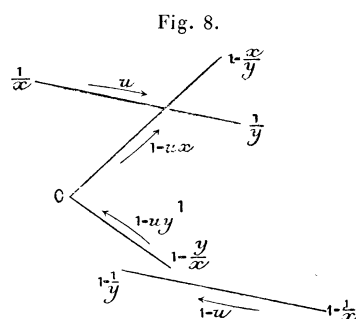
5° u va en ligne droite de 0 à $\frac{1}{y}$ (*fig. 5*); $1-u$ va en ligne droite de 1 à $1 - \frac{1}{y}$; $1-ux$ va en ligne droite de 1 à $1 - \frac{x}{y}$; et $(1-uy)$ va sur X de 1 à 0.

6° u va en ligne droite de 1 à $\frac{1}{x}$ (*fig. 6*); $1-u$ va en ligne droite de 0 à $1 - \frac{1}{x}$; $1-ux$ va en ligne droite de $1-x$ à 0; $1-uy$ va en ligne droite de $1-y$ à $1 - \frac{y}{x}$.



7° u va en ligne droite du point 1 au point $\frac{1}{y}$ (*fig. 6*); $1-u$ va en ligne

$1 - \frac{1}{x}$ à $1 - \frac{1}{y}$; $1 - ux$ va de 0 à $1 - \frac{x}{y}$; et $1 - uy$ de $1 - \frac{y}{x}$ à 0, toujours en ligne droite.



11° Si le point u décrit une circonférence de rayon ρ autour de 0 comme centre, le point $1 - u$ décrit, dans le même sens, une circonférence de même rayon autour de 1 comme centre; $1 - ux$ décrit, dans le même sens, autour du point 1 comme centre une circonférence de rayon $\rho|x|$; et $1 - uy$ décrit, dans le même sens, autour du point 1 comme centre une circonférence de rayon $\rho|y|$.

12° Le point u décrit une circonférence de rayon ρ autour du point 1 comme centre; $1 - u$ décrit, dans le même sens, une circonférence de rayon ρ autour de l'origine comme centre; $1 - ux$ décrit, dans le même sens, une circonférence de rayon $\rho|x|$ autour du point $(1 - x)$ comme centre; $1 - uy$ décrit, dans le même sens, une circonférence de rayon $\rho|y|$ autour du point $(1 - y)$ comme centre.

13° Le point u décrit du point $\frac{1}{x}$ comme centre une circonférence de rayon ρ ; le point $1 - u$ décrit, dans le même sens, autour du point $1 - \frac{1}{x}$ comme centre une circonférence de rayon ρ ; le point $1 - ux$ décrit, dans le même sens, autour de 0 comme centre une circonférence de rayon $\rho|x|$; enfin le point $1 - uy$ décrit, dans le même sens, autour du point $1 - \frac{y}{x}$ une circonférence de rayon $\rho|y|$.

14° Le point u décrit autour de $\frac{1}{y}$ comme centre une circonférence de rayon ρ ; $1 - u$ décrit, dans le même sens, autour de $1 - \frac{1}{y}$ comme centre une circonférence de rayon ρ ; $1 - ux$ décrit, dans le même sens, autour de $1 - \frac{x}{y}$ comme centre une circonférence de rayon $\rho|x|$; enfin $1 - uy$ décrit autour de 0 comme centre une circonférence de rayon $\rho|y|$.

22. Précisons maintenant les arguments choisis pour u , $1 - u$, $1 - ux$, $1 - uy$ dans les dix intégrales que nous aurons à considérer.

1° Dans l'intégrale $\int_0^1 U du$, on a

$$\arg u = 0, \quad \arg(1 - u) = 0.$$

L'argument de $(1 - ux)$ reste compris entre 0 et $\overline{\arg}(1 - x)$;

L'argument de $(1 - uy)$ reste compris entre 0 et $\overline{\arg}(1 - y)$.

On posera

$$\int_0^1 U du = B(\alpha, \gamma - \alpha) \varphi_1 = \psi_1.$$

2° Dans l'intégrale $\int_0^{+\infty} U du$,

$$\arg u = \pm \pi, \quad \arg(1 - u) = 0.$$

L'argument de $(1 - ux)$ varie entre 0 et $\overline{\arg} x$;

L'argument de $(1 - uy)$ varie entre 0 et $\overline{\arg} y$.

Soit

$$\psi_2 = B(\alpha, 1 + \beta + \beta' - \gamma) \varphi_2,$$

on aura, en posant $(\alpha) = e^{\alpha i \pi}$,

$$\int_0^{-\infty} U du = (\alpha) \psi_2 \quad \text{si} \quad \arg u = + \pi,$$

$$\int_0^{-\infty} U du = (-\alpha) \psi_2 \quad \text{si} \quad \arg u = - \pi.$$

3° Dans l'intégrale $\int_{+1}^{+\infty} U du$,

$$\arg u = 0, \quad \arg(1 - u) = \pm \pi.$$

L'argument de $(1 - ux)$ varie entre $\overline{\arg}(-x)$ et $\overline{\arg}(1 - x)$;

L'argument de $(1 - uy)$ varie entre $\overline{\arg}(-y)$ et $\overline{\arg}(1 - y)$.

Si l'on pose

$$\psi_3 = B(1 + \beta + \beta' - \gamma, \gamma - \alpha) \varphi_3,$$

on aura

$$\int_{+1}^{+\infty} U du = (\gamma - \alpha - 1)\psi_3 \quad \text{si} \quad \arg(1-u) = \pi,$$

$$\int_{+1}^{+\infty} U du = (1 + \alpha - \gamma)\psi_3 \quad \text{si} \quad \arg(1-u) = -\pi.$$

4° Dans l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{x}} U du$,

$$\arg u = \overline{\arg} \frac{1}{x} = \pm \pi - \overline{\arg}(-x);$$

on prendra le signe + si x est dans la partie inférieure du plan, le signe — si x est dans la partie supérieure. L'argument de $(1-u)$ varie entre 0 et $\overline{\arg}\left(1 - \frac{1}{x}\right)$. L'argument de $1-ux$ est nul; l'argument de $1-uy$ varie de 0 à $\overline{\arg}\left(1 - \frac{y}{x}\right)$.

Soit

$$\psi_4 = \mathbf{B}(\alpha, 1-\beta)\varphi_4;$$

si x est dans la partie supérieure du plan,

$$\int_0^{\frac{1}{x}} U du = (-\alpha)\psi_4;$$

si x est dans la partie inférieure du plan,

$$\int_0^{\frac{1}{y}} U du = (\alpha)\psi_4.$$

5° Dans l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{y}} U du$,

$$\arg u = \overline{\arg} \frac{1}{y} = \pm \pi - \overline{\arg}(-y).$$

L'argument de $(1-u)$ varie entre 0 et $\overline{\arg}\left(1 - \frac{1}{y}\right)$; l'argument de $1-ux$ varie entre 0 et $\overline{\arg}\left(1 - \frac{x}{y}\right)$; l'argument de $1-uy$ est nul.

Soit

$$\psi_3 = \mathbf{B}(\alpha, 1-\beta')\varphi_3;$$

si y est dans la partie supérieure du plan,

$$\int_0^{\frac{1}{y}} U du = (-\alpha)\psi_3;$$

si y est dans la partie inférieure du plan,

$$\int_0^{\frac{1}{y}} U du = (\alpha)\psi_3.$$

6° Dans l'intégrale $\int_{\frac{1}{x}}^{\infty} U du$, on a

$$\arg u = \overline{\arg} \frac{1}{x} = -\overline{\arg} x.$$

L'argument de $(1 - u)$ varie entre

$$\overline{\arg} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \quad \text{et} \quad \overline{\arg} \left(-\frac{1}{x}\right) = \pm \pi - \overline{\arg} x;$$

l'argument de $(1 - uy)$ varie entre

$$\overline{\arg} \left(1 - \frac{y}{x}\right) \quad \text{et} \quad \overline{\arg} \left(-\frac{y}{x}\right) = \pm \pi - \overline{\arg} \left(\frac{x}{y}\right);$$

l'argument de $1 - ux$ est égal à $\pm \pi$.

Soit

$$\psi_6 = B(1 + \beta + \beta' - \gamma, 1 - \beta)\varphi_6,$$

on aura

$$\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} U du = [\varepsilon\beta + \varepsilon'\beta' + \varepsilon''(\gamma - \alpha - 1)]\psi_6,$$

avec

$$\begin{aligned} \varepsilon = -1 & \quad \text{si} \quad \arg(1 - ux) = +\pi, \\ \varepsilon = +1 & \quad \text{si} \quad \arg(1 - ux) = -\pi, \\ \varepsilon' = -1 & \quad \text{si} \quad \frac{x}{y} \text{ est dans la partie supérieure du plan,} \\ \varepsilon' = +1 & \quad \text{si} \quad \frac{x}{y} \text{ est dans la partie inférieure du plan,} \\ \varepsilon'' = +1 & \quad \text{si} \quad x \text{ est dans la partie supérieure du plan,} \\ \varepsilon'' = -1 & \quad \text{si} \quad x \text{ est dans la partie inférieure du plan.} \end{aligned}$$

7° Dans l'intégrale $\int_1^{\infty} U du$, on a

$$\arg u = \overline{\arg} \frac{1}{y} = -\overline{\arg} y.$$

L'argument de $(1 - u)$ varie entre

$$\overline{\arg} \left(1 - \frac{1}{y}\right) \quad \text{et} \quad \overline{\arg} \left(-\frac{1}{y}\right) = \pm \pi - \overline{\arg} y;$$

l'argument de $(1 - ux)$ varie entre

$$\overline{\arg} \left(1 - \frac{x}{y}\right) \quad \text{et} \quad \arg \left(-\frac{x}{y}\right) = \pm \pi - \overline{\arg} \frac{x}{y};$$

l'argument de $1 - uy$ est égal à $\pm \pi$.

Soit

$$\psi_7 = B(1 + \beta + \beta' - \gamma, 1 - \beta') \varphi_7,$$

on aura

$$\int_{\frac{1}{y}}^{\infty} U du = [\varepsilon \beta + \varepsilon' \beta' + \varepsilon''(\gamma - \alpha - 1)] \psi_6,$$

avec

$$\varepsilon = -1 \quad \text{si } \frac{y}{x} \text{ est dans la partie supérieure du plan,}$$

$$\varepsilon = +1 \quad \text{si } \frac{y}{x} \text{ est dans la partie inférieure du plan,}$$

$$\varepsilon' = -1 \quad \text{si } \arg(1 - uy) = +\pi,$$

$$\varepsilon' = +1 \quad \text{si } \arg(1 - uy) = -\pi,$$

$$\varepsilon'' = +1 \quad \text{si } y \text{ est dans la partie supérieure du plan,}$$

$$\varepsilon'' = -1 \quad \text{si } y \text{ est dans la partie inférieure du plan.}$$

8° Passons à l'intégrale $\int_1^{\frac{1}{x}} U du$.

L'argument de u varie de 0 à $\overline{\arg} \frac{1}{x}$; on a

$$\arg(1 - ux) = \overline{\arg}(1 - x).$$

L'argument de $(1 - u)$ est égal à

$$\overline{\arg}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \pm \pi + \overline{\arg}\left(\frac{1-x}{x}\right).$$

Si le segment de droite $\left(1 - y, 1 - \frac{y}{x}\right)$ ne coupe pas l'axe réel X , ou le coupe à droite du point o , l'argument de $(1 - uy)$ varie entre $\overline{\arg}(1 - y)$ et $\overline{\arg}\left(1 - \frac{y}{x}\right)$.

Si le segment de droite $\left(1 - y, 1 - \frac{y}{x}\right)$ coupe l'axe réel X à gauche du point o , si y est sur la partie supérieure du plan, l'argument de $1 - uy$ varie entre $\overline{\arg}(1 - y)$ et $\overline{\arg}\left(1 - \frac{y}{x}\right) - 2\pi$; tandis que, si y est sur la partie inférieure du plan, l'argument de $1 - uy$ varie entre $\overline{\arg}(1 - y)$ et $\overline{\arg}\left(1 - \frac{y}{x}\right) + 2\pi$.

Si maintenant l'on pose

$$\psi_s = B(\gamma - \alpha, 1 - \beta)\varphi_s,$$

on a, si x est dans la partie supérieure du plan,

$$\int_1^{\frac{1}{x}} U du = (\gamma - \alpha - 1)\psi_s,$$

et, si x est dans la partie inférieure du plan,

$$\int_1^{\frac{1}{x}} U du = (1 + \alpha - \gamma)\psi_s.$$

9° De même pour l'intégrale $\int_1^{\frac{1}{y}} U du$.

L'argument de u varie de o à $\overline{\arg}\frac{1}{y}$; on a

$$\arg(1 - uy) = \overline{\arg}(1 - y);$$

l'argument de $(1 - u)$ est égal à

$$\overline{\arg}\left(1 - \frac{1}{y}\right) = \pm \pi + \overline{\arg}\left(\frac{1-y}{y}\right).$$

Si le segment de droite $\left(1 - x, 1 - \frac{x}{y}\right)$ ne coupe pas l'axe réel X, ou le coupe à droite du point o, l'argument de $1 - ux$ varie entre $\overline{\arg}(1 - x)$ et $\overline{\arg}\left(1 - \frac{x}{y}\right)$.

Si le segment de droite $\left(1 - x, 1 - \frac{x}{y}\right)$ coupe X à gauche du point o, si x est sur la partie supérieure du plan, on a

$$\overline{\arg}(1 - x) \geq \arg(1 - ux) \geq \overline{\arg}\left(1 - \frac{x}{y}\right) - 2\pi;$$

si x est sur la partie inférieure du plan, on a

$$\overline{\arg}(1 - x) \leq \arg(1 - ux) \leq \overline{\arg}\left(1 - \frac{x}{y}\right) + 2\pi.$$

Soit

$$\psi_3 = \mathbf{B}(\gamma - \alpha, 1 - \beta') \varphi_3;$$

si y est sur la partie supérieure du plan,

$$\int_1^{\frac{1}{y}} \mathbf{U} du = (\gamma - \alpha - 1) \psi_3;$$

si y est sur la partie inférieure du plan,

$$\int_1^{\frac{1}{y}} \mathbf{U} du = (1 + \alpha - \gamma) \psi_3.$$

10° Enfin envisageons l'intégrale $\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{y}} \mathbf{U} du$.

D'abord

$$\arg(1 - ux) = \overline{\arg}\left(1 - \frac{x}{y}\right),$$

puis

$$\arg(1 - uy) = \overline{\arg}\left(1 - \frac{y}{x}\right) = \pm \pi + \overline{\arg}\left(\frac{y - x}{x}\right).$$

Ensuite, si le segment rectiligne $\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$ ne rencontre pas l'axe réel X, ou

le rencontre en un point situé à droite du point o , l'argument de u variera entre $\overline{\arg \frac{1}{x}}$ et $\overline{\arg \frac{1}{y}}$; si ce segment $\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$ coupe X en un point situé à gauche du point o , on aura, si x est sur la partie supérieure du plan,

$$\overline{\arg \frac{1}{x}} \geq \arg u \geq -2\pi + \overline{\arg \frac{1}{y}};$$

si x est sur la partie inférieure du plan,

$$\overline{\arg \frac{1}{x}} \leq \arg u \leq +2\pi + \overline{\arg \frac{1}{y}}.$$

De même, si le segment rectiligne $\left(1 - \frac{1}{x}, 1 - \frac{1}{y}\right)$ ne coupe pas l'axe réel X , ou le rencontre en un point situé à droite de o , l'argument de $1 - u$ variera entre $\overline{\arg\left(1 - \frac{1}{x}\right)}$ et $\overline{\arg\left(1 - \frac{1}{y}\right)}$. S'il coupe l'axe réel en un point situé à gauche de o , si x est sur la partie supérieure du plan,

$$\overline{\arg\left(1 - \frac{1}{x}\right)} \leq \arg(1 - u) \leq +2\pi + \overline{\arg\left(1 - \frac{1}{y}\right)};$$

si x est sur la partie inférieure du plan,

$$\overline{\arg\left(1 - \frac{1}{x}\right)} \geq \arg(1 - u) \geq -2\pi + \overline{\arg\left(1 - \frac{1}{y}\right)}.$$

Soit

$$\psi_{10} = B(1 - \beta, 1 - \beta') \varphi_{10};$$

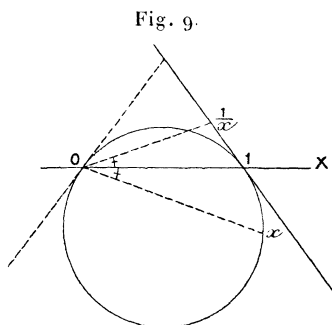
si $\frac{x}{y}$ est sur la partie supérieure du plan,

$$\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{y}} U du = (1 - \beta') \psi_{10};$$

si $\frac{x}{y}$ est sur la partie inférieure du plan,

$$\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{y}} U du = (1 + \beta') \psi_{10}.$$

23. Les droites Ox , $O\frac{1}{x}$ sont également inclinées sur X (*fig. 9*); de plus, $\frac{1}{x}$ est sur la tangente au point 1, à la circonférence passant par les



points 0 , 1 , x , de sorte que, si l'on fait varier x , en l'assujettissant à rester sur une circonférence quelconque passant par les points 0 , 1 , le point $\frac{1}{x}$ se meut sur la tangente au point 1 à cette circonférence.

La droite qui joint le point $1 - y$ au point $(1 - \frac{y}{x})$ a pour équation

$$\begin{vmatrix} z & z' & 1 \\ 1 - y & 1 - y' & 1 \\ 1 - \frac{y}{x} & 1 - \frac{y'}{x'} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(z et z' désignent deux quantités imaginaires conjuguées). Nous avons besoin de savoir en quelle région se trouve son point d'intersection avec X . Soit ζ l'abscisse de ce point d'intersection. On a

$$\zeta = \frac{xx'(y - y') + xy' - yx' - yy'(x - x')}{xx'(y - y') + xy' - yx'}$$

Supposons que le point x soit fixe et le point y variable, l'équation

$$yy'(x - x') = xx'(y - y') + xy' - yx'$$

représente précisément le cercle qui passe par les points 0 , 1 , x , et

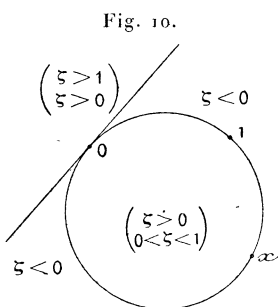
$$xx'(y - y') + xy' - yx' = 0$$

est l'équation de la tangente à ce cercle à l'origine.

En faisant $y = y' = \frac{1}{2}$, on trouve, en posant $x = \varepsilon + i\eta$,

$$\zeta = \frac{\frac{1}{2}i\eta}{i\eta} = \frac{1}{2}.$$

Il en résulte que ζ sera négatif si y est à l'extérieur de la circon-



rence 0, 1, x , et du même côté de la tangente en 0 que la circonférence.

Sinon ζ est positif.

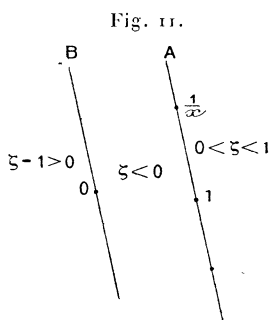
D'ailleurs

$$\zeta - 1 = \frac{yy'(x' - x)}{xx'(y - y') + xy' - yx'};$$

$\zeta - 1$ sera donc positif dans la région du plan séparée par la tangente qui ne contient pas la circonférence, et négatif dans l'autre.

Avec le point $\frac{1}{y}$ les résultats sont encore plus simples. Soient A (fig. 11)

la droite $(1, \frac{1}{x})$, B la parallèle à A menée par l'origine.



Si $\frac{1}{y}$ est dans la région séparée par B et ne contenant pas A, la droite $(1 - y, 1 - \frac{y}{x})$ coupe X à droite du point 1.

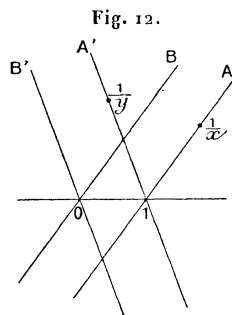
Si $\frac{1}{y}$ est dans la bande comprise entre A et B, la droite $(1-y, 1-\frac{y}{x})$ coupe X à gauche de o.

Si $\frac{1}{y}$ est dans la région séparée par A, qui ne contient pas B, la droite $(1-y, 1-\frac{y}{x})$ coupe X entre o et 1.

Des considérations analogues nous indiqueront en quelle région sera le point d'intersection de la droite $(1-x, 1-\frac{x}{y})$ avec X. Il suffit de permuter x et y dans ce qui précède.

1° Supposons x et y tous les deux dans la partie inférieure du plan. Supposons $\frac{1}{y}$ situé dans la région séparée par B et ne contenant pas A.

On voit que, nécessairement, $\frac{1}{x}$ est dans la région séparée par A' qui ne contient pas B' (fig. 12). Ainsi la droite $(1-y, 1-\frac{y}{x})$ coupe X à



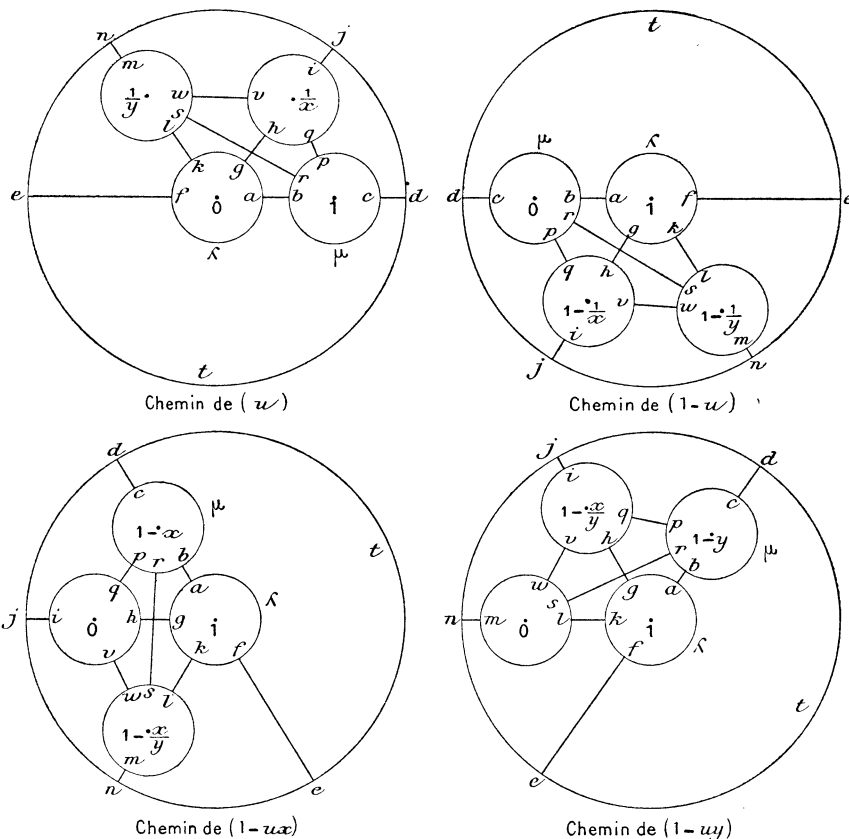
droite de 1 et la droite $(1-x, 1-\frac{x}{y})$ coupe X entre o et 1. D'ailleurs, puisque le triangle $o \frac{1}{x} \frac{1}{y}$ est à gauche de l'observateur qui parcourt dans le sens $o \frac{1}{x} \frac{1}{y}$ son périmètre, c'est que $\frac{y}{x}$ est dans la partie inférieure du plan.

D'autre part, x est dans la partie inférieure du plan; il en est de même de $\frac{-y}{-x} = x$. Or $(-y)$ et $(-\frac{y}{x})$ sont simultanément dans la partie supérieure, donc le point $\frac{1-y}{1-\frac{y}{x}}$ est, lui aussi, comme $\frac{-y}{-x} = x$ dans la partie inférieure du plan.

Bref, le triangle $(o, 1-y, 1-\frac{y}{x})$ est à gauche de l'observateur.

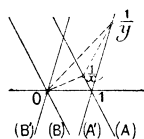
Voici alors le schéma des chemins que parcourront les variables u , $1 - u$, $1 - ux$, $1 - uy$.

TABLEAU I.



Si le point $\frac{1}{y}$ vient sur B la droite $(1 - \frac{y}{x}, 1 - y)$ devient parallèle à X.
 Si $\frac{1}{y}$ entre dans la bande AB, la droite $(1 - \frac{y}{x}, 1 - y)$ coupera X à gauche

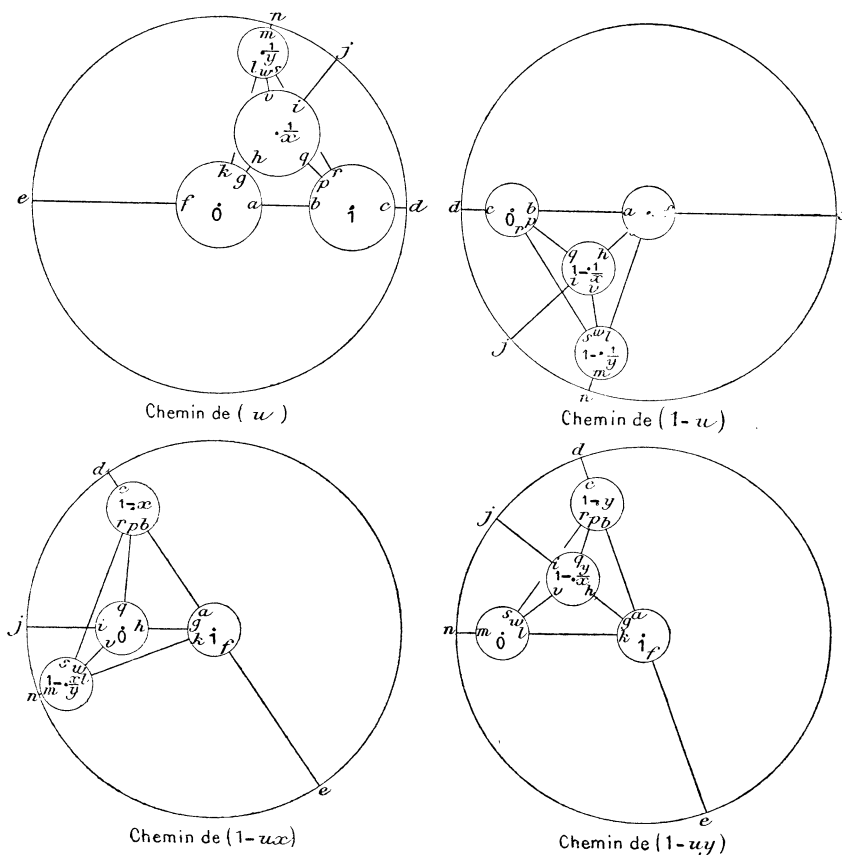
Fig. 13.



du point o. Mais le segment $(1 - \frac{y}{x}, 1 - y)$ reste tout entier dans la partie supérieure du plan. Ces deux cas rentrent donc dans le premier.

Dans le Tableau II, on suppose toujours que $x, y, \frac{y}{x}$ sont dans la partie inférieure du plan, mais $\frac{1}{y}$ est dans la région séparée par A qui ne contient

TABLEAU II.



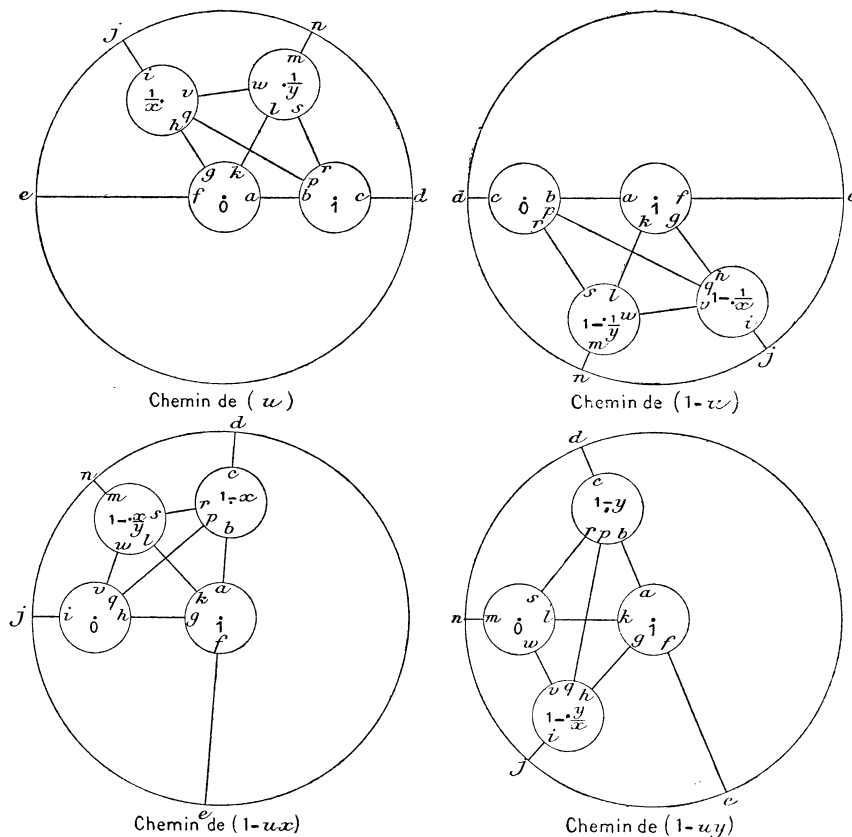
pas B. Alors le segment $(1-x, 1-\frac{x}{y})$ coupe X à gauche de o. Le point $\frac{1}{x}$ est à l'intérieur du triangle $(o, 1, \frac{1}{y})$ (fig. 13).

Dans le Tableau III, $\frac{y}{x}$ vient sur la partie supérieure du plan, $1-\frac{x}{y}$ passe aussi dans la partie supérieure; le segment $(1-y, 1-\frac{y}{x})$ coupe le segment $(o, 1)$ entre o et 1, etc. On obtient de la sorte quatorze Tableaux.

24. Voici maintenant comment nous allons opérer. Imaginons un système de trois ou quatre intégrales qui, pour les positions de x et de y con-

sidérées, ne soient pas distinctes. Supposons qu'il existe dans l'un des quatorze Tableaux précédents une aire dont les côtés rectilignes correspondent

TABLEAU III.



aux intégrales envisagées, telle que ces côtés ne se coupent pas, telle enfin qu'à l'intérieur de cette aire la fonction

$$U = u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(1-ux)^{-\beta}(1-uy)^{-\beta'}$$

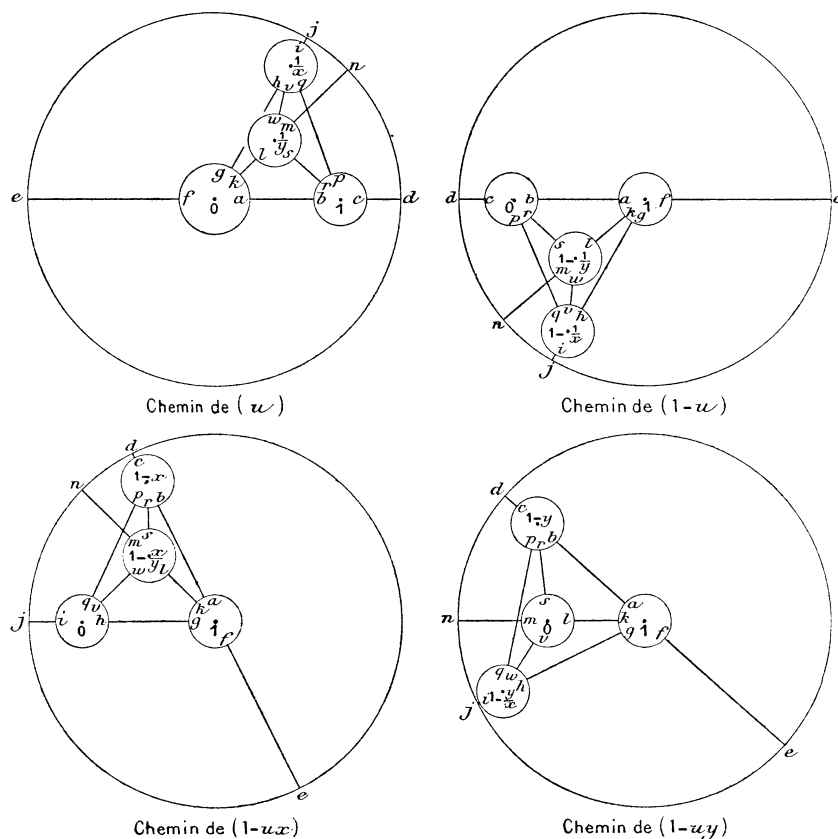
considérée comme fonction de u , soit holomorphe.

Nous supposons que l'on a

- Partie réelle de $\alpha > 0$,
- Partie réelle de $(\gamma - \alpha) > 0$,
- Partie réelle de $(1 - \beta) > 0$,
- Partie réelle de $(1 - \beta') > 0$,
- Partie réelle de $(1 + \beta + \beta' - \gamma) > 0$.

Alors les intégrales de la forme $\int_C U du$, C étant un arc de circonférence de rayon infiniment petit ayant pour centres les points $0, 1, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}$; ou un arc de circonférence de rayon infiniment grand ayant pour centre 0 , sont des quantités infiniment petites, qui deviennent nulles à la limite.

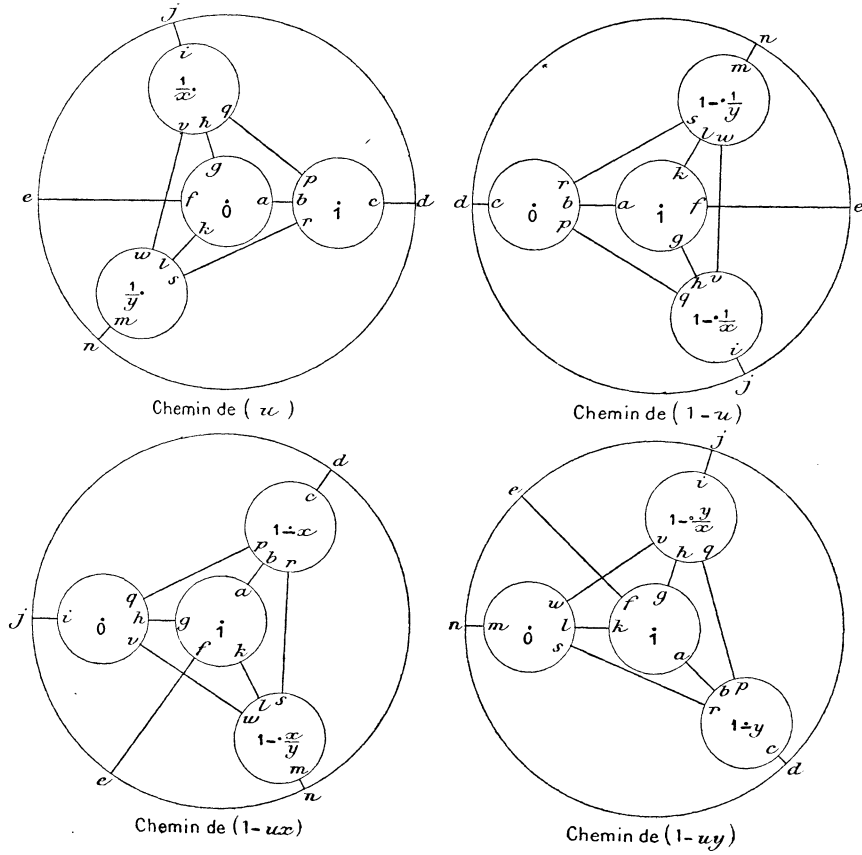
TABLEAU IV.



L'aire trouvée, on forme un Tableau dans lequel, en suivant d'une façon continue sur les schémas des Tableaux précédents, les chemins de $u, 1 - u, 1 - ux, 1 - uy$, on indiquera si les arguments de $u, 1 - u, 1 - ux, 1 - uy$ sont bien ceux que nous avons choisis pour préciser la définition des fonctions $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{10}$, ou de combien ils en diffèrent. N désignant l'argument normal choisi, on aura à écrire si l'argument trouvé est N ou $N + 2\pi$ ou $N - 2\pi$. Si l'argument trouvé est $0, +\pi, \text{ ou } -\pi$, on l'écrira dans le

Tableau. Le Tableau formé, on en déduit immédiatement la relation par l'application du théorème de Cauchy.

TABLEAU V.



Premier exemple. — Soit à trouver, dans le Tableau I, la relation qui existe entre ψ_1, ψ_2, ψ_3 . Considérons l'aire

$$ab.\mu.cd.t.ef.\lambda.$$

Formons le Tableau suivant :

Chemin.	arg u .	arg $(1-u)$.	arg $(1-ux)$.	arg $(1-uy)$.
ab	0	0	N	N
cd	0	$+\pi$	N	N
ef	$-\pi$	0	N	N

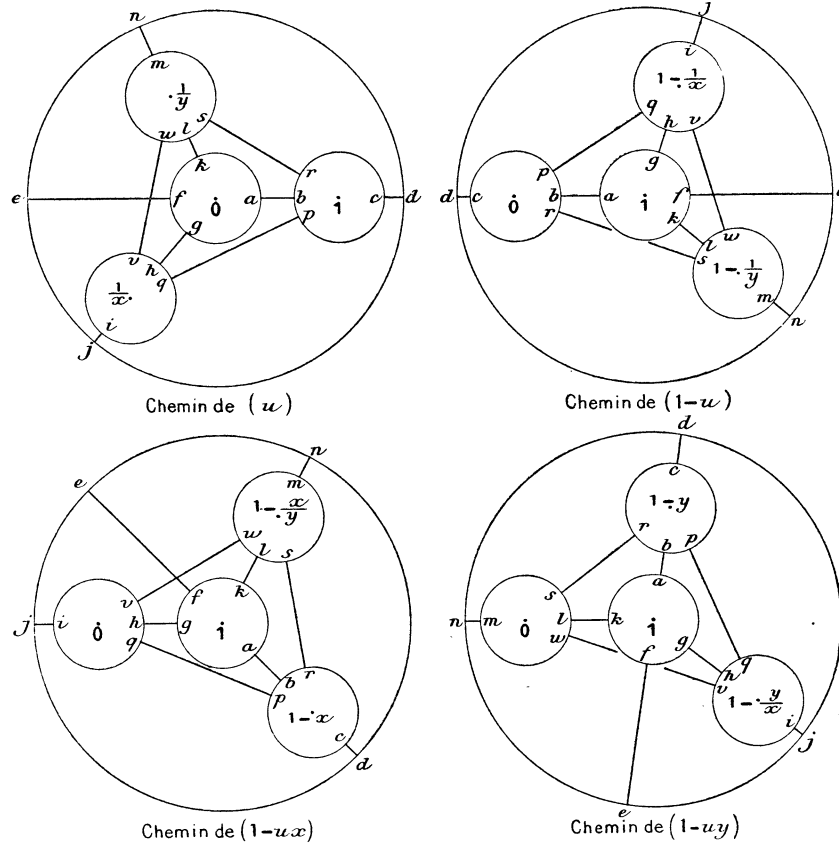
formule qui peut s'écrire

$$(\beta + \beta')\psi_1 \sin(\gamma - \alpha)\pi + \psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi - (\gamma + \beta')\psi_4 \sin \beta\pi - (\gamma - \beta)\psi_5 \sin \beta'\pi = 0.$$

Troisième exemple. — Soit encore à trouver la relation qui existe entre $\psi_1, \psi_2, \psi_4, \psi_5$. Envisageons l'aire

$ab.rpc\mu.ba.\lambda.fe.td.jiq.kg$ (Tableau I),

TABLEAU VIII.



et formons le Tableau suivant :

Chemin.	arg u .	arg $(1-u)$.	arg $(1-ux)$.	arg $(1-uy)$.
ab	0	0	N	N
ba	0	-2π	N	N
fe	$-\pi$	-2π	N	N
ji	N	N	$+\pi$	N
hg	N	N	0	N

D'où la formule

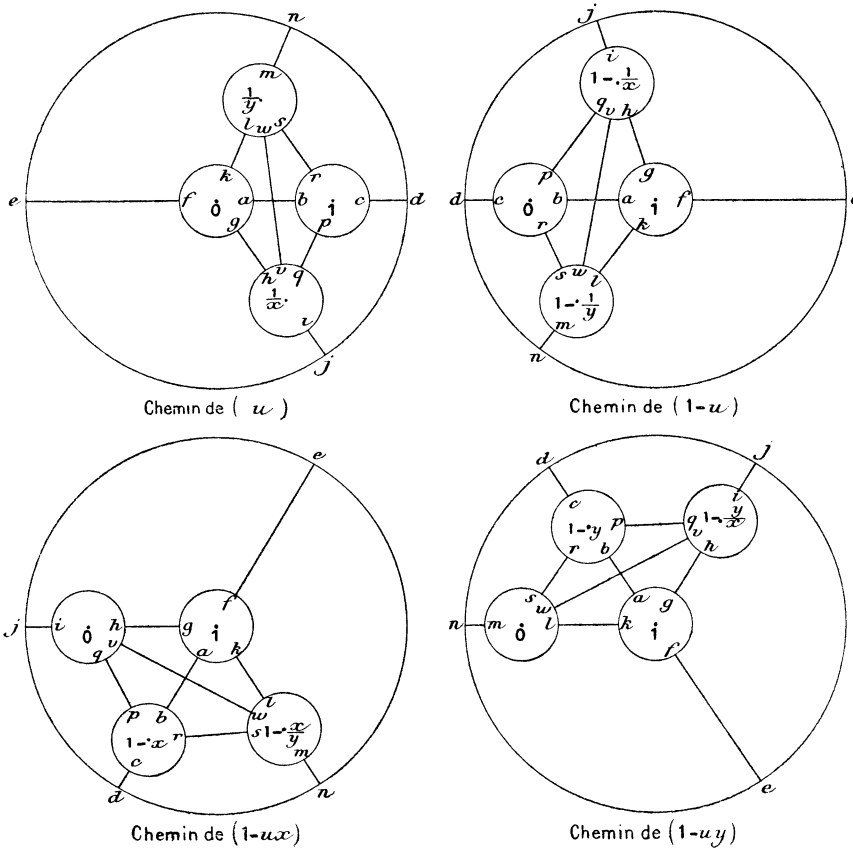
$$[1 - (2\alpha - 2\gamma)]\psi_1 + (\alpha - 2\gamma)\psi_2 - (-\beta - \beta' + 1 + \alpha - \gamma)\psi_6 - (\alpha)\psi_4 = 0,$$

qu'on peut écrire

$$2i\psi_1 \sin(\gamma - \alpha)\pi + (-\gamma)\psi_2 - (\gamma)\psi_4 + (-\beta - \beta')\psi_6 = 0.$$

Remarque. — Au cas où deux chemins rectilignes se croisent, la relation

TABLEAU IX.



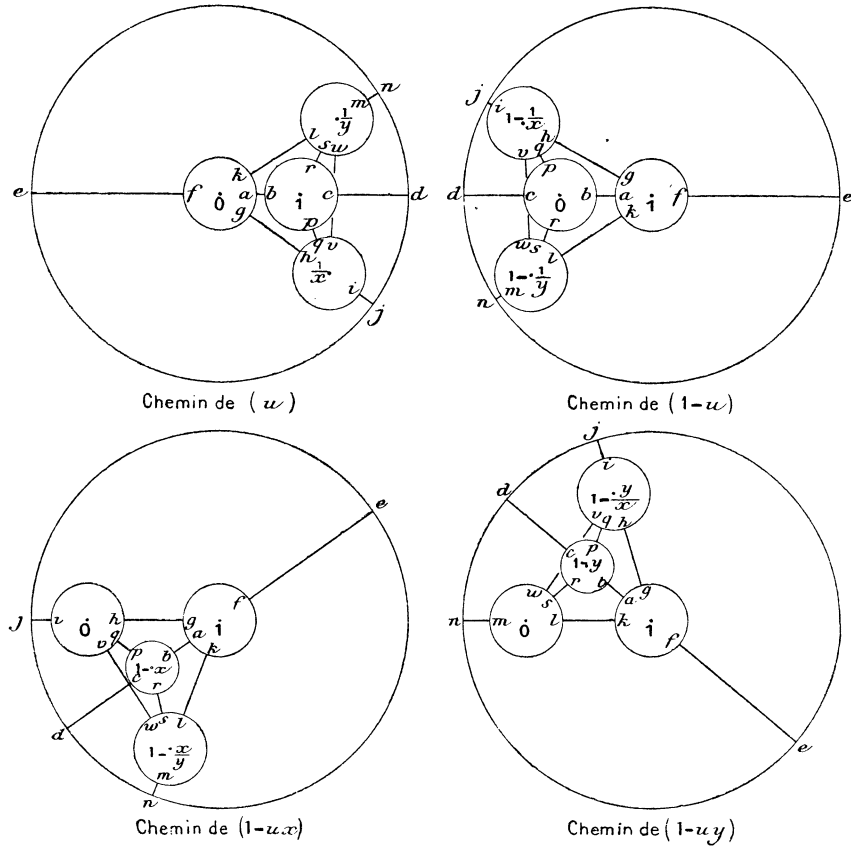
correspondant à l'aire où ce fait se produit se déduira des relations déjà trouvées par voie d'élimination.

Voici les quatorze Tableaux de relations. Je désigne par (ijk) la relation qui existe entre ψ_i, ψ_j, ψ_k , quand elles ne sont pas distinctes; par $(ijkh)$ la relation qui existe entre ψ_i, ψ_j, ψ_k et ψ_h .

TABLEAU I (voir page 67).

- (1, 2, 3) $(\alpha)\psi_1 - \psi_2 - (\gamma)\psi_3 = 0,$ $[(\alpha) = e^{\alpha i\pi}],$
- (1, 2, 4, 5) $(\beta + \beta')\psi_1 \sin(\gamma - \alpha)\pi + \psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $- (\gamma + \beta')\psi_4 \sin\beta\pi - (\gamma - \beta)\psi_5 \sin\beta'\pi = 0,$
- (1, 2, 4, 6) $2i\psi_1 \sin(\gamma - \alpha)\pi + (-\gamma)\psi_2 - (\gamma)\psi_4 + (-\beta - \beta')\psi_6 = 0,$

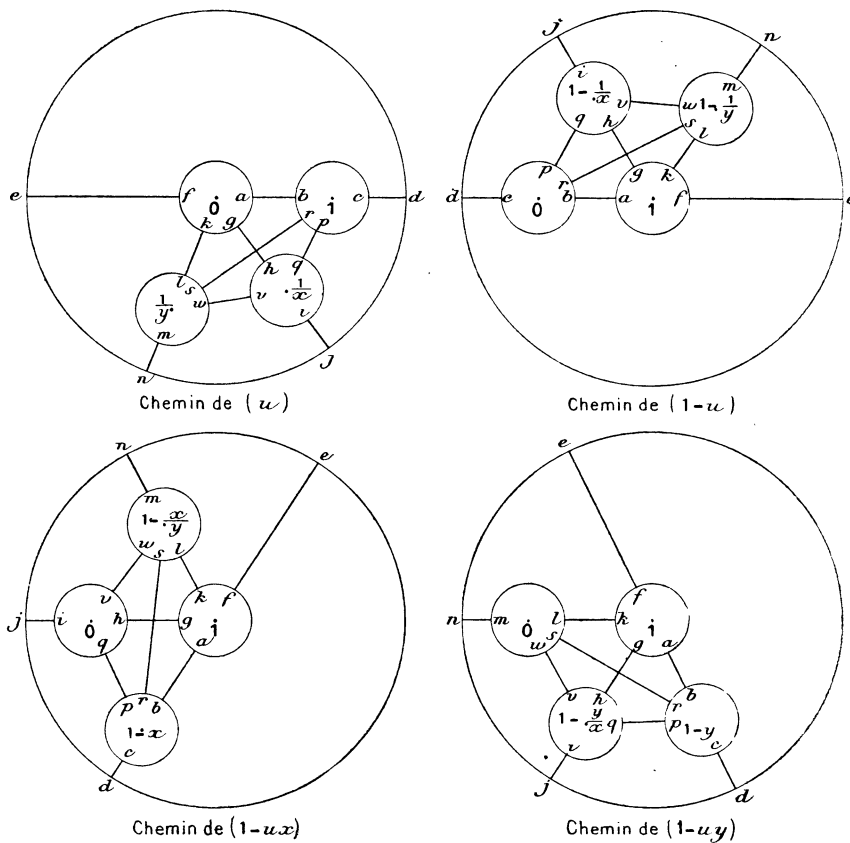
TABLEAU X.



- (1, 2, 4, 7) $(\beta)\psi_1 \sin(\gamma - \alpha)\pi + \psi_2 \sin(\beta - \gamma)\pi - (\gamma)\psi_4 \sin\beta\pi - \psi_7 \sin\beta'\pi = 0,$
- (1, 2, 4, 9) $[(\beta + \beta') \sin(\gamma - \alpha)\pi - (\gamma - \alpha - \beta) \sin\beta'\pi]\psi_1$
 $+ \psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi - (\gamma + \beta')\psi_4 \sin\beta\pi + (-\beta)\psi_9 \sin\beta'\pi = 0,$
- (1, 2, 4, 10) $(\beta + \beta')\psi_1 \sin(\gamma - \alpha)\pi + \psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $- (\gamma)\psi_4 \sin(\beta + \beta')\pi + (\gamma - \alpha - \beta - \beta')\psi_{10} \sin\beta'\pi = 0,$
- (1, 2, 5, 6) $(\beta')\psi_1 \sin(\gamma - \alpha)\pi + \psi_2 \sin(\beta' - \gamma)\pi - (\gamma)\psi_5 \sin\beta'\pi - \psi_6 \sin\beta\pi = 0,$

- (1, 2, 5, 8) $(\beta')\psi_1 \sin(\gamma - \alpha - \beta)\pi + \psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $-(\gamma - \beta)\psi_5 \sin\beta'\pi + (\beta')\psi_8 \sin\beta\pi = 0,$
- (1, 2, 5, 10) $(\beta + \beta')\psi_1 \sin(\gamma - \alpha)\pi + \psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $-(\gamma)\psi_5 \sin(\beta + \beta')\pi - (\gamma - \alpha)\psi_{10} \sin\beta\pi = 0,$
- (1, 2, 6, 7) $\psi_1 \sin(\gamma - \alpha)\pi - \psi_2 \sin\gamma\pi - (-\beta')\psi_6 \sin\beta\pi - (\beta)\psi_7 \sin\beta'\pi = 0,$

TABLEAU XI.



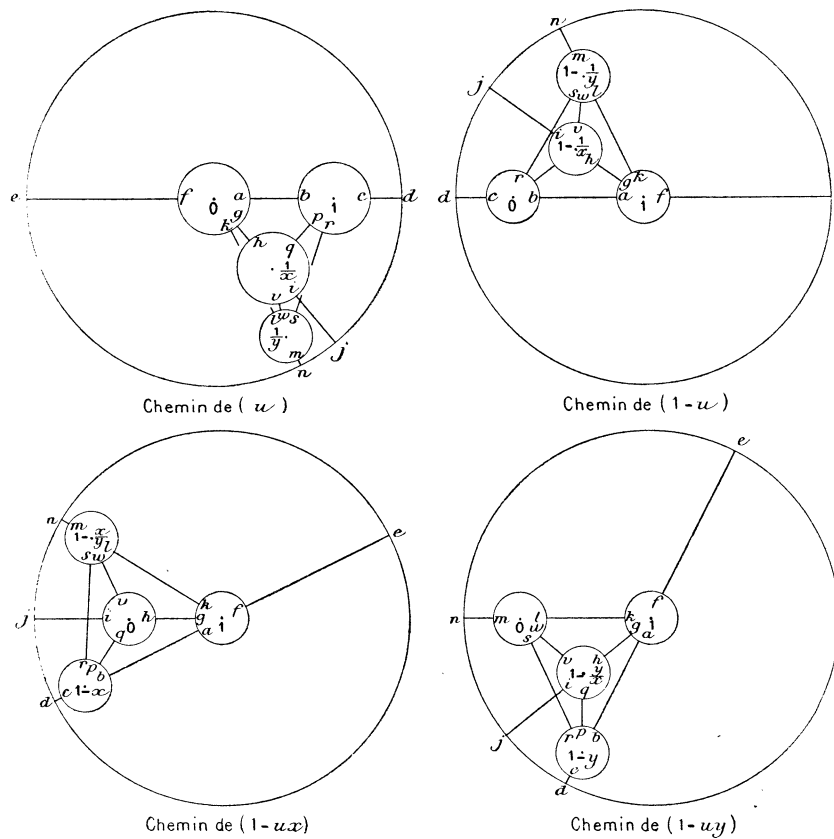
- (1, 2, 6, 8) $\psi_1 - (-\alpha)\psi_2 - (\gamma - \alpha - \beta - \beta')\psi_6 - (\gamma - \alpha)\psi_8 = 0,$
- (1, 2, 6, 9) $\psi_1 \sin(\gamma - \alpha - \beta')\pi + \psi_2 \sin(\beta' - \gamma)\pi - \psi_6 \sin\beta\pi + \psi_8 \sin\beta'\pi = 0,$
- (1, 2, 6, 10) $\psi_1 \sin(\gamma - \alpha)\pi - \psi_2 \sin\gamma\pi - \psi_6 \sin(\beta + \beta')\pi + (\gamma - \alpha)\psi_{10} \sin\beta'\pi = 0,$
- (1, 2, 7, 8) $\psi_1 \sin(\gamma - \alpha - \beta)\pi + \psi_2 \sin(\beta - \gamma)\pi - \psi_7 \sin\beta'\pi + \psi_8 \sin\beta\pi = 0,$
- (1, 2, 7, 9) $\psi_1 - (\alpha)\psi_2 - (\beta + \beta' + \alpha - \gamma)\psi_7 - (\alpha - \gamma)\psi_9 = 0,$
- (1, 2, 7, 10) $\psi_1 \sin(\gamma - \alpha)\pi - \psi_2 \sin\gamma\pi - \psi_7 \sin(\beta + \beta')\pi$
 $-(\gamma - \alpha - \beta - \beta')\psi_{10} \sin\beta\pi = 0,$

$$(1, 2, 8, 9) \quad \psi_1 \sin(\gamma - \alpha - \beta - \beta')\pi + \psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi + (\beta')\psi_8 \sin \beta \\ + (-\beta)\psi_9 \sin \beta' = 0,$$

$$(1, 2, 8, 10) \quad \psi_1 \sin(\gamma - \alpha - \beta - \beta')\pi + \psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi + \psi_8 \sin(\beta + \beta')\pi \\ + (\gamma - \alpha - \beta - \beta')\psi_{10} \sin \beta'\pi = 0,$$

$$(1, 2, 9, 10) \quad \psi_1 \sin(\gamma - \alpha - \beta - \beta')\pi + \psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi + \psi_9 \sin(\beta + \beta')\pi \\ - (\gamma - \alpha)\psi_{10} \sin \beta\pi = 0,$$

TABLEAU XII.



$$(1, 3, 4, 5) \quad \psi_1 \sin(\beta + \beta' - \alpha)\pi + \psi_3 \sin(\gamma - \beta - \beta')\pi - (\beta')\psi_4 \sin \beta\pi \\ - (-\beta)\psi_5 \sin \beta'\pi = 0,$$

$$(1, 3, 4, 6) \quad \psi_1 - (\alpha - \gamma)\psi_3 - (\alpha)\psi_4 + (\alpha - \gamma - \beta - \beta')\psi_6 = 0,$$

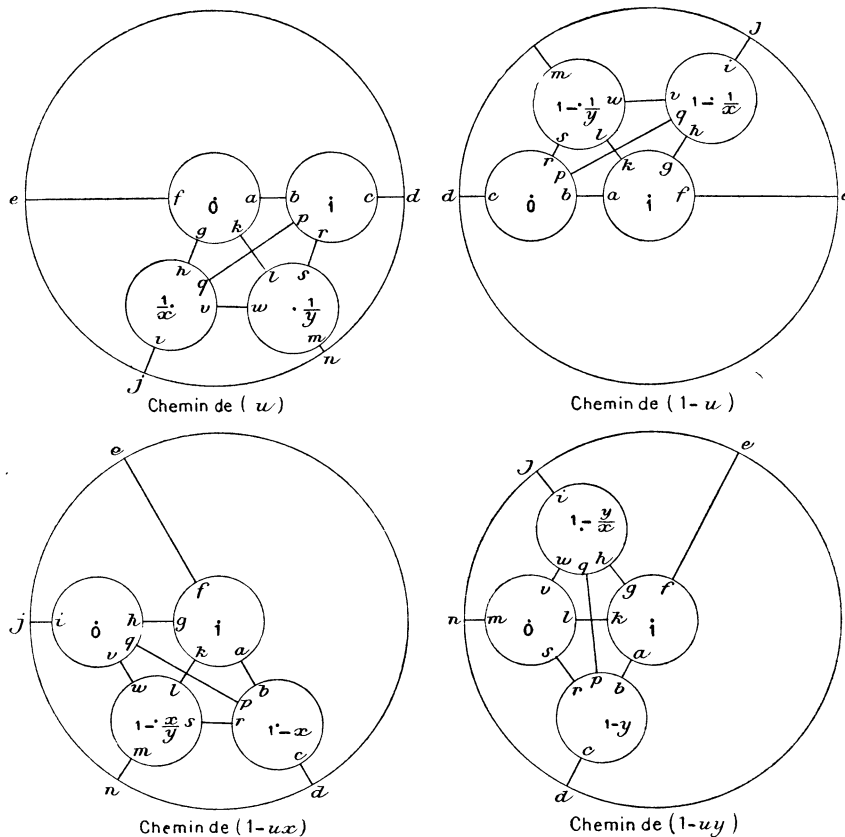
$$(1, 3, 4, 7) \quad \psi_1 \sin(\beta - \alpha)\pi + \psi_3 \sin(\gamma - \beta)\pi - \psi_4 \sin \beta\pi - (-\gamma)\psi_7 \sin \beta'\pi = 0,$$

$$(1, 3, 4, 9) \quad [(\beta' - \alpha) \sin \beta\pi - (-\beta - \beta') \sin \alpha\pi] \psi_1 - \psi_3 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi \\ - (\beta')\psi_4 \sin \beta\pi + (-\beta - \gamma)\psi_9 \sin \beta'\pi = 0,$$

$$(1, 3, 4, 10) \quad \psi_1 \sin(\beta + \beta' - \alpha)\pi + \psi_3 \sin(\gamma - \beta - \beta')\pi \\ - \psi_4 \sin(\beta + \beta')\pi + (-\alpha - \beta - \beta')\psi_{10} \sin \beta'\pi = 0,$$

- (1, 3, 5, 6) $\psi_1 \sin(\beta' - \alpha)\pi + \psi_3 \sin(\gamma - \beta')\pi - \psi_5 \sin \beta'\pi - (-\gamma)\psi_6 \sin \beta\pi = 0,$
- (1, 3, 5, 7) $\psi_1 - (\gamma - \alpha)\psi_3 + (\beta + \beta' - \alpha - \gamma)\psi_7 - (-\alpha)\psi_5 = 0,$
- (1, 3, 5, 8) $(-\beta)\psi_1 \sin(\beta' - \alpha)\pi + \psi_3 \sin(\gamma - \beta - \beta')\pi$
 $- (-\beta)\psi_5 \sin \beta'\pi + (\beta' - \gamma)\psi_6 \sin \beta\pi = 0,$
- (1, 3, 5, 10) $\psi_1 \sin(\beta + \beta' - \alpha)\pi + \psi_3 \sin(\gamma - \beta - \beta')\pi - \psi_5 \sin(\beta + \beta')\pi$
 $- (-\alpha)\psi_{10} \sin \beta\pi = 0,$

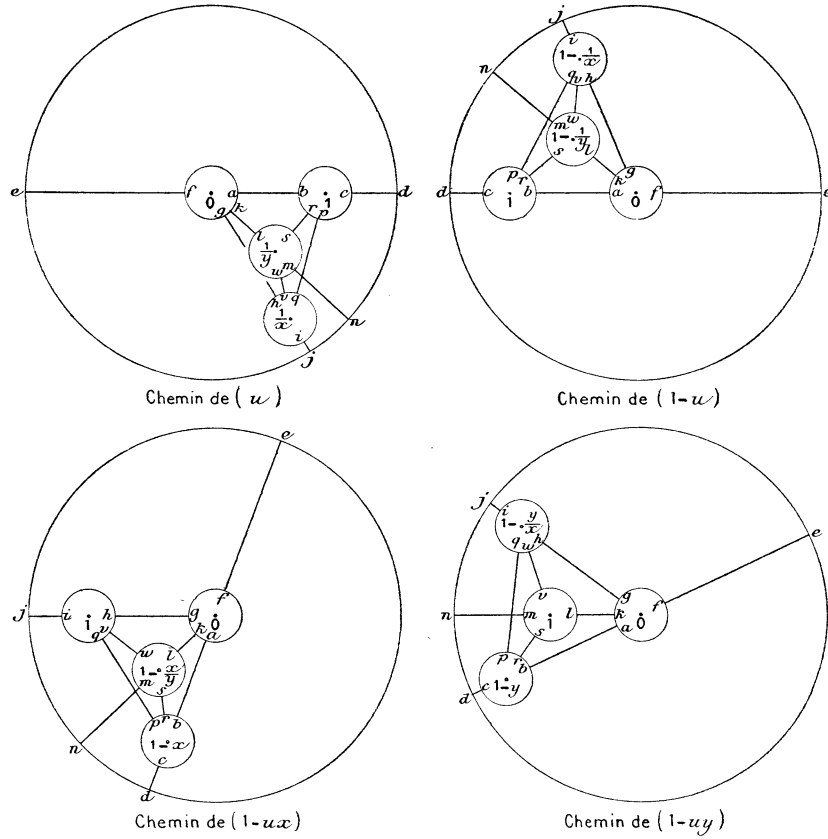
TABLEAU XIII.



- (1, 3, 6, 7) $\psi_1 \sin \alpha\pi - \psi_3 \sin \gamma\pi + (-\gamma - \beta')\psi_6 \sin \beta\pi + (\beta - \gamma)\psi_7 \sin \beta'\pi = 0,$
- (1, 3, 6, 9) $\psi_1 \sin \alpha\pi + (\beta')\psi_3 \sin(\beta' - \gamma)\pi + (\beta' - \gamma)\psi_6 \sin \beta\pi - (\beta' - \gamma)\psi_9 \sin \beta'\pi = 0,$
- (1, 3, 6, 10) $\psi_1 \sin \alpha\pi - \psi_3 \sin \gamma\pi + (-\gamma)\psi_6 \sin(\beta + \beta')\pi - (-\alpha)\psi_{10} \sin \beta'\pi = 0,$
- (1, 3, 7, 8) $\psi_1 \sin \alpha\pi + (\beta)\psi_3 \sin(\beta - \gamma)\pi + (\beta - \gamma)\psi_7 \sin \beta'\pi - (\beta - \gamma)\psi_8 \sin \beta\pi = 0,$
- (1, 3, 7, 9) $2i\psi_1 \sin \alpha\pi - (\gamma)\psi_3 + (\beta + \beta' - \gamma)\psi_7 + (-\gamma)\psi_9 = 0,$
- (1, 3, 7, 10) $\psi_1 \sin \alpha\pi - \psi_3 \sin \gamma\pi + (-\gamma)\psi_7 \sin(\beta + \beta')\pi + (-\alpha - \beta - \beta')\psi_{10} \sin \beta\pi = 0,$

- (1, 3, 8, 9) $(\gamma - \beta - \beta')\psi_1 \sin \alpha\pi + (\gamma)\psi_3 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $- (\beta')\psi_8 \sin \beta\pi - (-\beta)\psi_9 \sin \beta'\pi = 0,$
- (1, 3, 8, 10) $(\gamma - \beta - \beta')\psi_1 \sin \alpha\pi + (\gamma)\psi_3 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $- \psi_8 \sin(\beta + \beta')\pi - (\gamma - \alpha - \beta - \beta')\psi_{10} \sin \beta'\pi = 0,$
- (1, 3, 9, 10) $(\gamma - \beta - \beta')\psi_1 \sin \alpha\pi + (\gamma)\psi_3 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $- \psi_9 \sin(\beta + \beta')\pi + (\gamma - \alpha)\psi_{10} \sin \beta\pi = 0,$

TABLEAU XIV.



- (1, 4, 5, 6) $\psi_1 \sin(\gamma - \alpha)\pi + (\beta')\psi_4 \sin(\beta' - \gamma)\pi - (\beta' - \gamma)\psi_5 \sin \beta'\pi$
 $- (-\gamma)\psi_6 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi = 0,$
- (1, 4, 5, 7) $\psi_1 \sin(\gamma - \alpha)\pi - (\gamma - \beta)\psi_4 \sin \beta\pi + (-\beta)\psi_5 \sin(\beta - \gamma)\pi$
 $- (-\gamma)\psi_7 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi = 0,$
- (1, 4, 6, 7) $(\gamma)\psi_1 \sin(\gamma - \alpha)\pi - (\gamma)\psi_4 \sin \gamma\pi - (-\beta')\psi_6 \sin(\beta - \gamma)\pi$
 $- (\beta - \gamma)\psi_7 \sin \beta'\pi = 0,$
- (1, 4, 6, 9) $[(\gamma - \alpha) \sin(\beta' - \gamma)\pi + (-\beta') \sin \alpha\pi]\psi_1 - (\gamma)\psi_4 \sin(\beta' - \gamma)\pi$
 $+ (-\beta')\psi_6 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi - \psi_9 \sin \beta'\pi = 0,$

- (1, 4, 6, 10) $\psi_1 \sin(\gamma - \alpha)\pi - \psi_4 \sin \gamma\pi - (-\gamma)\psi_6 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $- (-\alpha - \gamma)\psi_{10} \sin \beta'\pi = 0,$
- (1, 4, 7, 9) $[\sin(\gamma - \alpha)\pi + (-\alpha - \beta) \sin(\beta - \gamma)\pi]\psi_1 - (\gamma - \beta)\psi_4 \sin \beta\pi$
 $- (-\gamma)\psi_7 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi - (-\beta - \gamma)\psi_9 \sin(\beta - \gamma)\pi = 0,$
- (1, 4, 7, 10) $\psi_1 \sin(\gamma - \alpha)\pi - \psi_4 \sin \gamma\pi - (-\gamma)\psi_7 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $- (-\alpha - \beta - \beta')\psi_{10} \sin(\beta - \gamma)\pi = 0,$
- (1, 4, 8) $\psi_1 - (\alpha)\psi_4 - (\alpha - \gamma)\psi_8 = 0,$
- (1, 4, 9, 10) $\psi_1 - (\alpha)\psi_4 - (\alpha - \gamma)\psi_9 + (-\beta')\psi_{10} = 0,$
- (1, 5, 6, 7) $(\gamma)\psi_1 \sin(\gamma - \alpha)\pi - (\gamma)\psi_5 \sin \gamma\pi - (\gamma - \beta')\psi_6 \sin \beta\pi$
 $- (\beta)\psi_7 \sin(\beta' - \gamma)\pi = 0,$
- (1, 5, 6, 8) $\psi_1 \sin(\beta' - \alpha)\pi - \psi_5 \sin \beta'\pi + (-\beta')\psi_6 \sin(\gamma - \beta - \beta')\pi$
 $+ \psi_8 \sin(\gamma - \beta')\pi = 0,$
- (1, 5, 6, 10) $\psi_1 \sin(\gamma - \alpha)\pi - \psi_5 \sin \gamma\pi - (-\gamma)\psi_6 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $+ (-\alpha)\psi_{10} \sin(\beta' - \gamma)\pi = 0,$
- (1, 5, 7, 8) $\psi_1 \sin(\gamma - \alpha - \beta)\pi + \psi_5 \sin(\beta - \gamma)\pi$
 $- (\beta - \gamma)\psi_7 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi + \psi_8 \sin \beta\pi = 0,$
- (1, 5, 7, 10) $\psi_1 \sin(\gamma - \alpha)\pi - \psi_5 \sin \gamma\pi - (-\gamma)\psi_7 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $- (\gamma - \alpha - \beta - \beta')\psi_{10} \sin \beta\pi = 0,$
- (1, 5, 8, 10) $\psi_1 - (\alpha)\psi_5 - (\alpha - \gamma)\psi_8 - (-\beta')\psi_{10} = 0,$
- (1, 5, 9) $\psi_1 - (\alpha)\psi_5 - (\alpha - \gamma)\psi_9 = 0,$
- (1, 6, 7, 8) $\psi_1 \sin \alpha\pi + (-\beta')\psi_6 \sin(\beta - \gamma)\pi + (\beta - \gamma)\psi_7 \sin \beta'\pi - \psi_8 \sin \gamma\pi = 0,$
- (1, 6, 7, 9) $\psi_1 \sin \alpha\pi + (\gamma - \beta')\psi_6 \sin \beta\pi + (\beta)\psi_7 \sin(\beta' - \gamma)\pi - \psi_9 \sin \gamma\pi = 0,$
- (1, 6, 8, 9) $\psi_1 \sin \alpha\pi + \psi_6 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi + (\beta')\psi_8 \sin(\beta' - \gamma)\pi$
 $- (\beta' - \gamma)\psi_9 \sin \beta'\pi = 0,$
- (1, 6, 8, 10) $\psi_1 \sin \alpha\pi + \psi_6 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi - \psi_8 \sin \gamma\pi - (-\alpha)\psi_{10} \sin \beta'\pi = 0,$
- (1, 6, 9, 10) $\psi_1 \sin \alpha\pi + \psi_6 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi - \psi_9 \sin \gamma\pi - (\gamma - \alpha)\psi_{10} \sin(\beta' - \gamma)\pi = 0,$
- (1, 7, 8, 9) $\psi_1 \sin \alpha\pi + \psi_7 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi - (\gamma - \beta)\psi_8 \sin \beta\pi$
 $+ (-\beta)\psi_9 \sin(\beta - \gamma)\pi = 0,$
- (1, 7, 8, 10) $\psi_1 \sin \alpha\pi + \psi_7 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi - \psi_8 \sin \gamma\pi$
 $+ (\gamma - \alpha - \beta - \beta')\psi_{10} \sin(\beta - \gamma)\pi = 0,$
- (1, 7, 9, 10) $\psi_1 \sin \alpha\pi + \psi_7 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi - \psi_9 \sin \gamma\pi + (2\gamma - \alpha - \beta - \beta')\psi_{10} \sin \beta\pi = 0,$
- (2, 3, 4, 5) $\psi_2 \sin(\beta + \beta' - \alpha)\pi + (\beta + \beta')\psi_3 \sin(\gamma - \alpha)\pi$
 $- (\alpha + \beta')\psi_4 \sin \beta\pi - (\alpha - \beta)\psi_5 \sin \beta'\pi = 0,$
- (2, 3, 4, 6) $(-\alpha)\psi_2 + 2i\psi_3 \sin(\gamma - \alpha)\pi - (\alpha)\psi_4 + (\alpha - \gamma - \beta - \beta')\psi_6 = 0,$
- (2, 3, 4, 7) $\psi_2 \sin(\beta - \alpha)\pi + (\beta)\psi_3 \sin(\gamma - \alpha)\pi - (\alpha)\psi_4 \sin \beta\pi - (\alpha - \gamma)\psi_7 \sin \beta'\pi = 0,$

- (2, 3, 4, 8) $(-\alpha)\psi_2 + (\gamma - \alpha)\psi_3 - (\alpha)\psi_4 - (\alpha - \gamma)\psi_8 = 0,$
- (2, 3, 4, 9) $[(\beta + \beta' - \alpha) \sin \beta \pi - (-\beta') \sin \alpha \pi] \psi_2$
 $+ [(2\beta + \beta') \sin(\gamma - \alpha)\pi - (\gamma - \alpha) \sin \beta' \pi] \psi_3$
 $- (\alpha + \beta + \beta') \psi_4 \sin \beta \pi + (\alpha - \gamma) \psi_9 \sin \beta' \pi = 0,$
- (2, 3, 4, 10) $\psi_2 \sin(\beta + \beta' - \alpha)\pi + (\beta + \beta') \psi_3 \sin(\gamma - \alpha)\pi$
 $- (\alpha) \psi_4 \sin(\beta + \beta')\pi + (-\beta - \beta') \psi_{10} \sin \beta' \pi = 0,$
- (2, 3, 5, 6) $\psi_2 \sin(\beta' - \alpha)\pi + (\beta') \psi_3 \sin(\gamma - \alpha)\pi - (\alpha) \psi_5 \sin \beta' \pi$
 $- (\alpha - \gamma) \psi_6 \sin \beta \pi = 0,$
- (2, 3, 5, 8) $\psi_2 \sin(\beta' - \alpha)\pi + (\beta + \beta') \psi_3 \sin(\gamma - \alpha - \beta)\pi$
 $- (\alpha) \psi_5 \sin \beta' \pi + (\beta + \beta' + \alpha - \gamma) \psi_8 \sin \beta \pi = 0,$
- (2, 3, 5, 9) $(-\alpha)\psi_2 + (\gamma - \alpha)\psi_3 - (\alpha)\psi_5 - (\alpha - \gamma)\psi_9 = 0,$
- (2, 3, 5, 10) $\psi_2 \sin(\beta + \beta' - \alpha)\pi + (\beta + \beta') \psi_3 \sin(\gamma - \alpha)\pi$
 $- (\alpha) \psi_5 \sin(\beta + \beta')\pi - \psi_{10} \sin \beta \pi = 0,$
- (2, 3, 6, 7) $\psi_2 \sin \alpha \pi + \psi_3 \sin(\alpha - \gamma)\pi + (\alpha - \beta' - \gamma) \psi_6 \sin \beta \pi$
 $+ (\alpha + \beta - \gamma) \psi_7 \sin \beta' \pi = 0,$
- (2, 3, 6, 9) $\psi_2 \sin \alpha \pi + (\beta') \psi_3 \sin(\alpha + \beta' - \gamma) + (\alpha + \beta' - \gamma) \psi_6 \sin \beta \pi$
 $- (\alpha + \beta' - \gamma) \psi_9 \sin \beta' \pi = 0,$
- (2, 3, 6, 10) $\psi_2 \sin \alpha \pi + \psi_3 \sin(\alpha - \gamma)\pi + (\alpha - \gamma) \psi_6 \sin(\beta + \beta')\pi - \psi_{10} \sin \beta' \pi = 0,$
- (2, 3, 7, 8) $\psi_2 \sin \alpha \pi + (\beta) \psi_3 \sin(\alpha + \beta - \gamma)\pi + (\alpha + \beta - \gamma) \psi_7 \sin \beta' \pi$
 $- (\alpha + \beta - \gamma) \psi_8 \sin \beta \pi = 0,$
- (2, 3, 7, 9) $2i\psi_2 \sin \alpha \pi - (\gamma - \alpha)\psi_3 + (\alpha + \beta + \beta' - \gamma) \psi_7 + (\alpha - \gamma) \psi_9 = 0,$
- (2, 3, 7, 10) $\psi_2 \sin \alpha \pi + \psi_3 \sin(\alpha - \gamma)\pi + (\alpha - \gamma) \psi_7 \sin(\beta + \beta')\pi$
 $+ (-\beta - \beta') \psi_{10} \sin \beta \pi = 0,$
- (2, 3, 8, 9) $\psi_2 \sin \alpha \pi + (\beta + \beta') \psi_3 \sin(\alpha + \beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $- (\alpha + \beta + 2\beta' - \gamma) \psi_8 \sin \beta \pi - (\alpha + \beta' - \gamma) \psi_9 \sin \beta' \pi = 0,$
- (2, 3, 8, 10) $\psi_2 \sin \alpha \pi + (\beta + \beta') \psi_3 \sin(\alpha + \beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $- (\alpha + \beta + \beta' - \gamma) \psi_8 \sin(\beta + \beta')\pi - \psi_{10} \sin \beta' \pi = 0,$
- (2, 3, 9, 10) $\psi_2 \sin \alpha \pi + (\beta + \beta') \psi_3 \sin(\alpha + \beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $- (\alpha + \beta + \beta' - \gamma) \psi_9 \sin(\beta + \beta')\pi + (\beta + \beta') \psi_{10} \sin \beta \pi = 0,$
- (2, 4, 5, 6) $(-\beta') \psi_2 - (\beta') \psi_4 + 2i\psi_5 \sin \beta' \pi + (\beta - \gamma) \psi_6 = 0,$
- (2, 4, 5, 8) $\psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi + (\alpha + \beta') \psi_4 \sin(\gamma - \alpha - \beta)\pi$
 $- (\gamma - \beta) \psi_5 \sin \beta' \pi + (\alpha + \beta + \beta' - \gamma) \psi_8 \sin(\gamma - \alpha)\pi = 0,$
- (2, 4, 5, 9) $\psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi - (\gamma + \beta') \psi_4 \sin \beta \pi$
 $+ [(\alpha + \beta + \beta') \sin(\gamma - \alpha)\pi - (\gamma - \beta) \sin \beta' \pi] \psi_5$
 $+ (\alpha + \beta + \beta' - \gamma) \psi_9 \sin(\gamma - \alpha)\pi = 0,$
- (2, 4, 6, 7) $\psi_2 - \psi_4 + (\beta - \beta' - \gamma) \psi_6 + 2i(\beta - \gamma) \psi_7 \sin \beta' \pi = 0,$

- (2, 4, 6, 8) $(-\alpha)\psi_2 - (\alpha)\psi_4 + (\gamma - \alpha - \beta - \beta')\psi_6 + 2i\psi_8 \sin(\gamma - \alpha)\pi = 0,$
- (2, 4, 6, 9) $[(\gamma - \beta') \sin(\gamma - \alpha)\pi - (-\alpha) \sin \beta' \pi] \psi_2 - (\gamma)\psi_4 \sin(\gamma - \alpha - \beta')\pi$
 $+ [(\beta) \sin(\gamma - \alpha)\pi - (\gamma - \alpha - \beta - \beta') \sin \beta' \pi] \psi_6$
 $+ 2i\psi_8 \sin \beta' \pi \sin(\alpha - \gamma)\pi = 0,$
- (2, 4, 6, 10) $\psi_2 - \psi_4 + (\beta + \beta' - \gamma)\psi_6 - 2i(-\alpha)\psi_{10} \sin \beta' \pi = 0,$
- (2, 4, 7, 8) $\psi_2 \sin(\beta - \gamma)\pi + (\alpha)\psi_4 \sin(\gamma - \alpha - \beta)\pi$
 $- \psi_7 \sin \beta' \pi + (\alpha + \beta - \gamma)\psi_8 \sin(\gamma - \alpha)\pi = 0,$
- (2, 4, 7, 9) $[(-\beta) \sin(\beta - \gamma)\pi + (\alpha) \sin(\gamma - \alpha)\pi] \psi_2 - (\gamma - \beta)\psi_4 \sin \beta \pi$
 $+ [(\alpha + \beta + \beta' - \gamma) \sin(\gamma - \alpha)\pi - (-\beta) \sin \beta' \pi] \psi_7$
 $+ (\alpha - \gamma)\psi_9 \sin(\gamma - \alpha)\pi = 0,$
- (2, 4, 7, 10) $\psi_2 - \psi_4 + (\beta + \beta' - \gamma)\psi_7 + (-\alpha - \beta')\psi_{10} = 0,$
- (2, 4, 8, 9) $(\alpha)\psi_4 \sin(\gamma - \alpha - \beta - \beta')\pi + \psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $+ [(\beta') \sin \beta \pi + (\alpha - \gamma) \sin(\gamma - \alpha - \beta - \beta')\pi] \psi_8 + (-\beta)\psi_9 \sin \beta' \pi = 0,$
- (2, 4, 8, 10) $\psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi + (\alpha)\psi_4 \sin(\gamma - \alpha - \beta - \beta')\pi$
 $+ (\alpha + \beta + \beta' - \gamma)\psi_8 \sin(\gamma - \alpha)\pi + (\gamma - \alpha - \beta - \beta')\psi_{10} \sin \beta' \pi = 0,$
- (2, 4, 9, 10) $\psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi - (\alpha)\psi_4 \sin(\alpha + \beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $+ (\alpha + \beta + \beta' - \gamma)\psi_9 \sin(\gamma - \alpha)\pi$
 $+ [(\gamma - \alpha - \beta - \beta') \sin \beta' \pi - (\beta) \sin(\gamma - \alpha)\pi] \psi_{10} = 0,$
- (2, 5, 6, 8) $\psi_2 \sin(\beta' - \alpha)\pi - (\alpha)\psi_5 \sin \beta' \pi + \psi_6 \sin(\gamma - \alpha - \beta)\pi$
 $+ (\beta')\psi_8 \sin(\gamma - \alpha)\pi = 0,$
- (2, 5, 6, 9) $\psi_2 \sin(\beta' - \gamma)\pi + (\alpha)\psi_5 \sin(\gamma - \alpha - \beta')\pi - \psi_6 \sin \beta \pi$
 $+ (\alpha + \beta' - \gamma)\psi_9 \sin(\gamma - \alpha)\pi = 0,$
- (2, 5, 6, 10) $\psi_2 - \psi_5 + (\beta + \beta' - \gamma)\psi_6 - (\beta' - \alpha)\psi_{10} = 0,$
- (2, 5, 7) $\psi_2 - \psi_5 + (\beta + \beta' - \gamma)\psi_7 = 0,$
- (2, 5, 8, 9) $\psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi + (\alpha)\psi_5 \sin(\gamma - \alpha - \beta - \beta')\pi$
 $+ (\beta')\psi_8 \sin \beta \pi + (\alpha + \beta' - \gamma)\psi_9 \sin(\gamma - \alpha - \beta)\pi = 0,$
- (2, 5, 8, 10) $\psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi + (\alpha)\psi_5 \sin(\gamma - \alpha - \beta - \beta')\pi$
 $+ (\alpha + \beta + \beta' - \gamma)\psi_8 \sin(\gamma - \alpha)\pi + \psi_{10} \sin(\gamma - \alpha - \beta)\pi = 0,$
- (2, 5, 9, 10) $\psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi + (\alpha)\psi_5 \sin(\gamma - \alpha - \beta - \beta')\pi$
 $+ (\alpha + \beta + \beta' - \gamma)\psi_9 \sin(\gamma - \alpha)\pi - (\gamma - \alpha)\psi_{10} \sin \beta \pi = 0,$
- (2, 6, 7, 8) $\psi_2 \sin \alpha \pi + (-\beta')\psi_6 \sin(\alpha + \beta - \gamma)\pi + (\alpha + \beta - \gamma)\psi_7 \sin \beta' \pi$
 $+ \psi_8 \sin(\alpha - \gamma)\pi = 0,$
- (2, 6, 7, 9) $\psi_2 \sin \alpha \pi + (\gamma - \alpha - \beta')\psi_6 \sin \beta \pi + (\beta)\psi_7 \sin(\alpha + \beta' - \gamma)\pi$
 $+ \psi_9 \sin(\alpha - \gamma)\pi = 0,$
- (2, 6, 8, 9) $\psi_2 \sin \alpha \pi + \psi_6 \sin(\alpha + \beta + \beta' - \gamma)\pi + (\beta')\psi_8 \sin(\alpha + \beta' - \gamma)\pi$
 $- (\alpha + \beta' - \gamma)\psi_9 \sin \beta' \pi = 0,$
- (2, 6, 8, 10) $\psi_2 \sin \alpha \pi + \psi_6 \sin(\alpha + \beta + \beta' - \gamma)\pi + \psi_8 \sin(\alpha - \gamma)\pi - \psi_{10} \sin \beta' \pi = 0,$

- (2, 6, 9, 10) $\psi_2 \sin \alpha \pi + \psi_6 \sin(\alpha + \beta + \beta' - \gamma)\pi + \psi_9 \sin(\alpha - \gamma)\pi$
 $+ (\gamma - \alpha)\psi_{10} \sin(\gamma - \alpha - \beta')\pi = 0,$
- (2, 7, 8, 9) $\psi_2 \sin \alpha \pi + \psi_7 \sin(\alpha + \beta + \beta' - \gamma)\pi - (\gamma - \alpha - \beta)\psi_8 \sin \beta \pi$
 $+ (-\beta)\psi_9 \sin(\alpha + \beta - \gamma)\pi = 0,$
- (2, 7, 8, 10) $\psi_2 \sin \alpha \pi + \psi_7 \sin(\alpha + \beta + \beta' - \gamma)\pi + \psi_8 \sin(\alpha - \gamma)\pi$
 $+ (\gamma - \alpha - \beta - \beta')\psi_{10} \sin(\alpha + \beta - \gamma)\pi = 0,$
- (2, 7, 9, 10) $\psi_2 \sin \alpha \pi + \psi_7 \sin(\alpha + \beta + \beta' - \gamma)\pi + \psi_9 \sin(\alpha - \gamma)\pi$
 $+ (2\gamma - 2\alpha - \beta - \beta')\psi_{10} \sin \beta \pi = 0,$
- (3, 4, 5, 6) $\psi_3 \sin(\gamma - \alpha)\pi + (\beta')\psi_4 \sin(\beta' - \alpha)\pi - (\beta' - \alpha)\psi_5 \sin \beta' \pi$
 $+ (-\gamma)\psi_6 \sin(\alpha - \beta - \beta')\pi = 0,$
- (3, 4, 5, 7) $\psi_3 \sin(\gamma - \alpha)\pi - (\alpha - \beta)\psi_4 \sin \beta \pi + (-\beta)\psi_5 \sin(\beta - \alpha)\pi$
 $+ (-\gamma)\psi_7 \sin(\alpha - \beta - \beta')\pi = 0,$
- (3, 4, 5, 8) $\psi_3 \sin(\gamma - \beta - \beta')\pi + (\alpha - \beta)\psi_4 \sin(\beta' - \alpha)\pi$
 $- (-\beta)\psi_5 \sin \beta' \pi + (\alpha - \gamma)\psi_8 \sin(\beta + \beta' - \alpha)\pi = 0,$
- (3, 4, 5, 9) $\psi_3 \sin(\gamma - \beta - \beta')\pi - (\beta')\psi_4 \sin \beta \pi$
 $+ [(\alpha) \sin(\beta + \beta' - \alpha)\pi - (-\beta) \sin \beta' \pi]\psi_5$
 $+ (\alpha - \gamma)\psi_9 \sin(\beta + \beta' - \alpha)\pi = 0,$
- (3, 4, 6, 7) $\psi_3 \sin(\gamma - \alpha)\pi - \psi_4 \sin \alpha \pi + (-\beta' - \gamma)\psi_6 \sin(\alpha - \beta)\pi$
 $- (\beta - \alpha - \gamma)\psi_7 \sin \beta' \pi = 0,$
- (3, 4, 6, 9) $[(\alpha) \sin(\gamma - \alpha)\pi - (\beta' - \gamma) \sin \beta' \pi]\psi_3 - (\alpha)\psi_4 \sin \alpha \pi$
 $+ [(\alpha - \beta - \beta' - \gamma) \sin \alpha \pi - (\beta' - \gamma) \sin \beta \pi]\psi_6 + (\beta' - \gamma)\psi_9 \sin \beta' \pi = 0,$
- (3, 4, 6, 10) $\psi_3 \sin(\gamma - \alpha)\pi - \psi_4 \sin \alpha \pi + (-\gamma)\psi_6 \sin(\alpha - \beta - \beta')\pi$
 $+ (-2\alpha)\psi_{10} \sin \beta' \pi = 0,$
- (3, 4, 7, 8) $\psi_3 \sin(\gamma - \beta)\pi - (\alpha - \beta)\psi_4 \sin \alpha \pi - (-\gamma)\psi_7 \sin \beta' \pi$
 $+ (\alpha - \gamma)\psi_8 \sin(\beta - \alpha)\pi = 0,$
- (3, 4, 7, 9) $[(\gamma - \alpha) \sin \beta \pi - (\beta - \gamma) \sin \alpha \pi]\psi_3 - 2i\psi_4 \sin \alpha \pi \sin \beta \pi$
 $+ [(-\beta' - \gamma) \sin \alpha \pi - (\beta + \beta' - \gamma - \alpha) \sin \beta \pi]\psi_7 + (-\gamma)\psi_9 \sin(\alpha - \beta)\pi = 0,$
- (3, 4, 7, 10) $\psi_3 \sin(\gamma - \alpha)\pi - \psi_4 \sin \alpha \pi + (-\gamma)\psi_7 \sin(\alpha - \beta - \beta')\pi$
 $+ (-\alpha - \beta - \beta')\psi_{10} \sin(\alpha - \beta)\pi = 0,$
- (3, 4, 8, 9) $(\gamma)\psi_3 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi + (\alpha + \gamma - \beta - \beta')\psi_4 \sin \alpha \pi$
 $+ [(\alpha - \beta - \beta') \sin \alpha \pi - (\beta') \sin \beta \pi]\psi_8 - (-\beta)\psi_9 \sin \beta' \pi = 0,$
- (3, 4, 8, 10) $\psi_3 \sin(\gamma - \beta - \beta')\pi - (\alpha - \beta - \beta')\psi_4 \sin \alpha \pi$
 $+ (\alpha - \gamma)\psi_8 \sin(\beta + \beta' - \alpha)\pi + (-\alpha - \beta - \beta')\psi_{10} \sin \beta' \pi = 0,$
- (3, 4, 9, 10) $\psi_3 \sin(\gamma - \beta - \beta')\pi - (\alpha - \beta - \beta')\psi_4 \sin \alpha \pi$
 $+ (\alpha - \gamma)\psi_9 \sin(\beta + \beta' - \alpha)\pi$
 $+ (-\beta - \beta')[(-\beta') \sin \alpha \pi - (\beta + \beta' - \alpha) \sin \beta \pi]\psi_{10} = 0,$
- (3, 5, 6, 7) $\psi_3 \sin(\gamma - \alpha)\pi - \psi_5 \sin \alpha \pi - (\alpha - \beta' - \gamma)\psi_6 \sin \beta \pi$
 $+ (\beta - \gamma)\psi_7 \sin(\alpha - \beta')\pi = 0,$

- (3, 5, 6, 9) $\psi_3 \sin(\gamma - \beta')\pi - (\alpha - \beta')\psi_5 \sin \alpha\pi - (-\gamma)\psi_6 \sin \beta\pi$
 $+ (\alpha - \gamma)\psi_9 \sin(\beta' - \alpha)\pi = 0,$
- (3, 5, 6, 10) $\psi_3 \sin(\gamma - \alpha)\pi - \psi_5 \sin \alpha\pi + (-\gamma)\psi_6 \sin(\alpha - \beta - \beta')\pi$
 $- (-\alpha)\psi_{10} \sin(\alpha - \beta')\pi = 0,$
- (3, 5, 7, 8) $\psi_3 \sin(\gamma - \alpha - \beta)\pi - (-\beta)\psi_5 \sin \alpha\pi + (-\gamma)\psi_7 \sin(\alpha - \beta')\pi$
 $+ (\alpha - \gamma)\psi_8 \sin \beta\pi = 0,$
- (3, 5, 7, 9) $(\gamma - \alpha)\psi_3 - 2i\psi_5 \sin \alpha\pi - (\beta + \beta' - \alpha - \gamma)\psi_7 - (\alpha - \gamma)\psi_9 = 0,$
- (3, 5, 7, 10) $\psi_3 \sin(\gamma - \alpha)\pi - \psi_5 \sin \alpha\pi + (-\gamma)\psi_7 \sin(\alpha - \beta - \beta')\pi$
 $- (-\beta - \beta')\psi_{10} \sin \beta\pi = 0,$
- (3, 5, 8, 9) $\psi_3 \sin(\gamma - \beta - \beta')\pi - (\alpha - \beta - \beta')\psi_5 \sin \alpha\pi$
 $+ (\beta' - \gamma)\psi_8 \sin \beta\pi + (\alpha - \beta - \gamma)\psi_9 \sin(\beta' - \alpha)\pi = 0,$
- (3, 5, 8, 10) $\psi_3 \sin(\gamma - \beta - \beta')\pi - (\alpha - \beta - \beta')\psi_5 \sin \alpha\pi$
 $+ (\alpha - \gamma)\psi_8 \sin(\beta + \beta' - \alpha)\pi + (-\beta - \beta')\psi_{10} \sin(\beta' - \alpha)\pi = 0,$
- (3, 5, 9, 10) $\psi_3 \sin(\gamma - \beta - \beta')\pi - (\alpha - \beta - \beta')\psi_5 \sin \alpha\pi$
 $+ (\alpha - \gamma)\psi_9 \sin(\beta + \beta' - \alpha)\pi - (-\alpha)\psi_{10} \sin \beta\pi = 0,$
- (3, 6, 7, 9) $\psi_3 + 2i(-\beta')\psi_6 \sin \beta - (\beta - \beta')\psi_7 - \psi_9 = 0,$
- (3, 6, 8) $\psi_3 - (-\beta - \beta')\psi_6 - \psi_8 = 0,$
- (3, 6, 9, 10) $\psi_3 - (-\beta - \beta')\psi_6 - \psi_9 + (\gamma - \alpha - \beta')\psi_{10} = 0,$
- (3, 7, 8, 9) $(\beta)\psi_3 - (-\beta')\psi_7 - 2i\psi_8 \sin \beta\pi - (-\beta)\psi_9 = 0,$
- (3, 7, 8, 10) $\psi_3 - (-\beta - \beta')\psi_7 - \psi_8 - (\gamma - \alpha - 2\beta - \beta')\psi_{10} = 0,$
- (3, 7, 9, 10) $\psi_3 - (-\beta - \beta')\psi_7 - \psi_9 + 2i(\gamma - \alpha - \beta - \beta')\psi_{10} \sin \beta\pi = 0,$
- (4, 5, 6, 7) $\psi_4 - \psi_5 - (\beta - \beta' - \gamma)\psi_6 + (\beta - \beta' - \gamma)\psi_7 = 0,$
- (4, 5, 6, 8) $(\alpha)\psi_4 \sin(\beta' - \alpha)\pi - \psi_5 \sin \beta'\pi$
 $+ (-\beta')\psi_6 \sin(\gamma - \beta - \beta')\pi + (\alpha - \beta')\psi_8 \sin(\gamma - \alpha)\pi = 0,$
- (4, 5, 6, 9) $(\beta')\psi_4 \sin(\beta' - \gamma)\pi + [(\alpha) \sin(\gamma - \alpha)\pi - (\beta' - \gamma) \sin \beta'\pi]\psi_5$
 $- (-\gamma)\psi_6 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi + (\alpha - \gamma)\psi_9 \sin(\gamma - \alpha)\pi = 0,$
- (4, 5, 7, 8) $(\alpha)\psi_4 \sin(\gamma - \alpha - \beta)\pi + \psi_5 \sin(\beta - \gamma)\pi$
 $+ (\beta - \gamma)\psi_7 \sin(\gamma - \beta - \beta')\pi + (\alpha + \beta - \gamma)\psi_8 \sin(\gamma - \alpha)\pi = 0,$
- (4, 5, 7, 9) $(\gamma)\psi_4 \sin \beta\pi + [(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \gamma)\pi + \sin(\gamma - \beta)\pi]\psi_5$
 $+ (\beta - \gamma)\psi_7 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi + (\alpha + \beta - \gamma)\psi_9 \sin(\alpha - \gamma)\pi = 0,$
- (4, 5, 8, 9) $\psi_4 - \psi_5 + (-\gamma)\psi_8 - (-\gamma)\psi_9 = 0,$
- (4, 5, 10) $(\alpha)\psi_4 - (\alpha)\psi_5 - (-\beta')\psi_{10} = 0,$
- (4, 6, 7, 8) $(\alpha)\psi_4 \sin \alpha\pi - (-\beta')\psi_6 \sin(\gamma - \beta)\pi + (\beta - \gamma)\psi_7 \sin \beta'\pi$
 $+ (\alpha)\psi_8 \sin(\alpha - \gamma)\pi = 0,$
- (4, 6, 7, 9) $\psi_4 \sin \alpha\pi + [(\gamma - \alpha - \beta') \sin \beta\pi - (\beta - \beta' - \gamma) \sin \alpha\pi]\psi_6$
 $+ [(\beta - \beta') \sin(\alpha - \gamma)\pi + (\beta - \alpha - \gamma) \sin \beta'\pi]\psi_7 + \psi_9 \sin(\alpha - \gamma)\pi = 0,$

- (4, 6, 8, 9) $\psi_4 \sin \alpha \pi + (-\alpha) \psi_6 \sin(\beta + \beta' - \gamma) \pi$
 $+ [(-\gamma) \sin \alpha \pi + (\beta' - \alpha) \sin(\beta' - \gamma) \pi] \psi_8 - (\beta' - \alpha - \gamma) \psi_9 \sin \beta' \pi = 0,$
- (4, 6, 8, 10) $(\alpha) \psi_4 \sin \alpha \pi + \psi_6 \sin(\beta + \beta' - \gamma) \pi$
 $+ (\alpha) \psi_8 \sin(\alpha - \gamma) \pi - (-\alpha) \psi_{10} \sin \beta' \pi = 0,$
- (4, 6, 9, 10) $(\alpha) \psi_4 \sin \alpha \pi + \psi_6 \sin(\beta + \beta' - \gamma) \pi + (\alpha) \psi_9 \sin(\alpha - \gamma) \pi$
 $+ (-\alpha) [(\gamma - \beta') \sin(\gamma - \alpha) \pi - (-\alpha) \sin \beta' \pi] \psi_{10} = 0,$
- (4, 7, 8, 9) $(\alpha) \psi_4 \sin \alpha \pi + \psi_7 \sin(\beta + \beta' - \gamma) \pi$
 $+ [(\alpha - \gamma) \sin \alpha \pi - (\gamma - \beta) \sin \beta \pi] \psi_8 + (-\beta) \psi_9 \sin(\beta - \gamma) \pi = 0,$
- (4, 7, 8, 10) $(\alpha) \psi_4 \sin \alpha \pi + \psi_7 \sin(\beta + \beta' - \gamma) \pi$
 $+ (\alpha) \psi_8 \sin(\alpha - \gamma) \pi + (\gamma - \alpha - \beta - \beta') \psi_{10} \sin(\beta - \gamma) \pi = 0,$
- (4, 7, 9, 10) $(\alpha) \psi_4 \sin \alpha \pi + \psi_7 \sin(\beta + \beta' - \gamma) \pi + (\alpha) \psi_9 \sin(\alpha - \gamma) \pi$
 $+ [(2\gamma - \alpha - \beta - \beta') \sin \beta \pi - (-\beta') \sin \alpha \pi] \psi_{10} = 0,$
- (5, 6, 7, 8) $\psi_5 \sin \alpha \pi + (-\beta') \psi_6 \sin(\alpha + \beta - \gamma) \pi$
 $+ (\beta - \gamma) \psi_7 \sin(\beta' - \alpha) \pi + \psi_8 \sin(\alpha - \gamma) \pi = 0,$
- (5, 6, 7, 9) $\psi_5 \sin \alpha \pi + (\gamma - \alpha - \beta') \psi_6 \sin \beta \pi$
 $+ (\beta - \alpha) \psi_7 \sin(\beta' - \gamma) \pi + \psi_9 \sin(\alpha - \gamma) \pi = 0,$
- (5, 6, 8, 9) $\psi_5 \sin \alpha \pi + (-\alpha) \psi_6 \sin(\beta + \beta' - \gamma) \pi$
 $+ (\beta' - \alpha) \psi_8 \sin(\beta' - \gamma) \pi + (\beta' - \gamma) \psi_9 \sin(\alpha - \beta') \pi = 0,$
- (5, 6, 8, 10) $(\alpha) \psi_5 \sin \alpha \pi + \psi_6 \sin(\beta + \beta' - \gamma) \pi$
 $+ (\alpha) \psi_8 \sin(\alpha - \gamma) \pi + \psi_{10} \sin(\alpha - \beta') \pi = 0,$
- (5, 6, 9, 10) $(\alpha) \psi_5 \sin \alpha \pi + \psi_6 \sin(\beta + \beta' - \gamma) \pi$
 $+ (\alpha) \psi_9 \sin(\alpha - \gamma) \pi + (\gamma - \alpha) \psi_{10} \sin(\gamma - \beta') \pi = 0,$
- (5, 7, 8, 9) $(\alpha) \psi_5 \sin \alpha \pi + \psi_7 \sin(\beta + \beta' - \gamma) \pi$
 $- (\gamma - \beta) \psi_8 \sin \beta \pi + (\alpha - \beta) \psi_9 \sin(\alpha + \beta - \gamma) \pi = 0,$
- (5, 7, 8, 10) $(\alpha) \psi_5 \sin \alpha \pi + \psi_7 \sin(\beta + \beta' - \gamma) \pi$
 $+ (\alpha) \psi_8 \sin(\alpha - \gamma) \pi + (\gamma - \beta - \beta') \psi_{10} \sin(\alpha + \beta - \gamma) \pi = 0,$
- (5, 7, 9, 10) $(\alpha) \psi_5 \sin \alpha \pi + \psi_7 \sin(\beta + \beta' - \gamma) \pi$
 $+ (\alpha) \psi_9 \sin(\alpha - \gamma) \pi + (2\gamma - \alpha - \beta - \beta') \psi_{10} \sin \beta \pi = 0,$
- (6, 7, 8, 9) $(\beta - \beta') \psi_6 - (\beta - \beta') \psi_7 + \psi_8 - \psi_9 = 0,$
- (6, 7, 10) $\psi_6 - \psi_7 - (\gamma - \alpha - \beta) \psi_{10} = 0,$
- (8, 9, 10) $\psi_8 - \psi_9 + (\gamma - \alpha - \beta') \psi_{10} = 0.$

TABLEAU II (voir page 68).

(1, 2, 3), (1, 2, 4, 5), (1, 2, 4, 6), (1, 2, 4, 7) (voir le Tableau I).

(1, 2, 4, 9) $\psi_1 \sin(\gamma - \alpha - \beta') \pi + (-\beta) \psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma) \pi$
 $- (\gamma - \beta - \beta') \psi_4 \sin \beta \pi + \psi_9 \sin \beta' \pi = 0,$

(1, 2, 4, 10), (1, 2, 5, 6), (1, 2, 5, 8) (voir le Tableau I).

- (1, 2, 5, 9) $(\alpha + \beta + \beta' - \gamma)\psi_1 + 2i\psi_2 \sin(\gamma - \beta - \beta')\pi$
 $-(\gamma - \beta - \beta')\psi_5 - (\beta + \beta')\psi_9 = 0,$
- (1, 2, 5, 10), (1, 2, 6, 7), (1, 2, 6, 8) (*voir le Tableau I*),
- (1, 2, 6, 9) $[(-\beta) \sin(\gamma - \alpha)\pi - (\alpha + \beta + \beta' - \gamma) \sin \beta'\pi] \psi_1$
 $+ [(\beta + \beta' - \gamma) \sin \beta'\pi - (-\beta) \sin \gamma\pi] \psi_2$
 $- (-\beta - \beta')\psi_6 \sin \beta\pi + (\beta + \beta')\psi_7 \sin \beta'\pi = 0,$
- (1, 2, 6, 10), (1, 2, 7, 8) (*voir le Tableau I*),
- (1, 2, 7, 9) $\psi_1 - (-\alpha)\psi_2 - (\gamma - \alpha - \beta - \beta')\psi_7 - (\gamma - \alpha)\psi_9 = 0,$
- (1, 2, 7, 10) (*voir le Tableau I*),
- (1, 2, 8, 9) $\psi_1 \sin(\gamma - \alpha - \beta - \beta')\pi + \psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $+ (-\beta')\psi_8 \sin \beta\pi + (\beta)\psi_9 \sin \beta'\pi = 0,$
- (1, 2, 8, 10) (*voir le Tableau I*),
- (1, 2, 9, 10) $\psi_1 \sin(\gamma - \alpha - \beta - \beta')\pi + \psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $+ \psi_9 \sin(\beta + \beta')\pi - (\gamma - \alpha - 2\beta - 2\beta')\psi_{10} \sin \beta\pi = 0,$
- (1, 3, 4, 5), (1, 3, 4, 6), (1, 3, 4, 7) (*voir le Tableau I*),
- (1, 3, 4, 9) $\psi_1 \sin(\beta - \alpha)\pi - (\beta')\psi_3 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi - \psi_4 \sin \beta\pi$
 $+ (\beta + \beta' - \gamma)\psi_9 \sin \beta'\pi = 0,$
- (1, 3, 4, 10), (1, 3, 5, 6), (1, 3, 5, 7), (1, 3, 5, 8) (*voir le Tableau I*),
- (1, 3, 5, 9) $\psi_1 + 2i(\beta + \beta' - \alpha)\psi_3 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $- (-\alpha)\psi_5 - (2\beta + 2\beta' - \alpha - \gamma)\psi_9 = 0,$
- (1, 3, 5, 10), (1, 3, 6, 7) (*voir le Tableau I*),
- (1, 3, 6, 9) $(-\beta)\psi_1 \sin \alpha\pi + [(\beta') \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi - (-\gamma) \sin \beta\pi] \psi_3$
 $+ (-\gamma - \beta - \beta')\psi_6 \sin \beta\pi - (\beta + \beta' - \gamma)\psi_9 \sin \beta'\pi = 0,$
- (1, 3, 6, 10), (1, 3, 7, 8), (1, 3, 7, 10) (*voir le Tableau I*),
- (1, 3, 8, 9) $(\gamma - \beta - \beta')\psi_1 \sin \alpha\pi + (\gamma)\psi_3 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $- (-\beta')\psi_8 \sin \beta\pi - (\beta)\psi_9 \sin \beta'\pi = 0,$
- (1, 3, 8, 10) (*voir le Tableau I*),
- (1, 3, 9, 10) $\psi_1 \sin \alpha\pi + (\beta + \beta')\psi_3 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $- (\beta + \beta' - \gamma)\psi_9 \sin(\beta + \beta')\pi + (-\alpha - \beta - \beta')\psi_{10} \sin \beta\pi = 0,$
- (1, 4, 5, 6), (1, 4, 5, 7) (*voir le Tableau I*),
- (1, 4, 5, 9) $(\beta)\psi_1 - 2i(\alpha)\psi_4 \sin \beta\pi - (\alpha - \beta)\psi_5 - (\alpha + \beta - \gamma)\psi_9 = 0,$
- (1, 4, 6, 7) (*voir le Tableau I*),
- (1, 4, 6, 9) $[(\beta - \alpha) \sin \beta'\pi - (\gamma - \beta - \beta') \sin(\gamma - \alpha)\pi] \psi_1$
 $+ [(-\beta') \sin \beta\pi - (\gamma) \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi] \psi_4$
 $+ (-\beta - \beta')\psi_6 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi - (\beta - \gamma)\psi_9 \sin \beta'\pi = 0,$
- (1, 4, 6, 10) (*voir le Tableau I*),

- (1, 4, 7, 9) $\psi_1 \sin(\beta - \alpha)\pi - \psi_4 \sin\beta\pi$
 $+ (-\beta)\psi_7 \sin(\gamma - \beta - \beta')\pi + \psi_9 \sin(\gamma - \beta)\pi = 0,$
- (1, 4, 7, 10), (1, 4, 8) (*voir le Tableau I*),
- (1, 4, 9, 10) $\psi_1 - (\alpha)\psi_4 - (\beta - \gamma)\psi_9 + (-2\beta - \beta')\psi_{10} = 0,$
- (1, 5, 6, 7), (1, 5, 6, 8) (*voir le Tableau I*),
- (1, 5, 6, 9) $[(\gamma + \beta' - \alpha) \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi - (\alpha) \sin\beta\pi] \psi_1$
 $- [(\gamma + \beta') \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi - \sin\beta\pi] \psi_5$
 $- 2i\psi_6 \sin\beta\pi \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi - (\beta + \beta')\psi_9 \sin(\beta' - \gamma)\pi = 0,$
- (1, 5, 6, 10), (1, 5, 7, 8) (*voir le Tableau I*),
- (1, 5, 7, 9) $\psi_1 - (-\alpha)\psi_5 + 2i(-\alpha)\psi_7 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi - (\gamma - \alpha)\psi_9 = 0,$
- (1, 5, 7, 10) (*voir le Tableau I*),
- (1, 5, 8, 9) $(-\beta)\psi_1 - (\alpha - \beta)\psi_5 + 2i(\alpha - \gamma)\psi_8 \sin\beta\pi - (\alpha + \beta - \gamma)\psi_9 = 0,$
- (1, 5, 8, 10) (*voir le Tableau I*),
- (1, 5, 9, 10) $\psi_1 - (\alpha)\psi_5 - (\alpha - \gamma)\psi_9 - 2i(-\beta - \beta')\psi_{10} \sin\beta\pi = 0,$
- (1, 6, 7, 8) (*voir le Tableau I*),
- (1, 6, 7, 9) $\psi_1 \sin\alpha\pi + (-\beta' - \gamma)\psi_6 \sin\beta\pi$
 $+ [(\beta - \gamma) \sin\beta'\pi - (-\beta - \beta') \sin\gamma\pi] \psi_7 - \psi_9 \sin\gamma\pi = 0,$
- (1, 6, 8, 9) $(\gamma - \beta - \beta')\psi_1 \sin\alpha\pi + (\gamma - \beta - \beta')\psi_6 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $+ [(\gamma) \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi - (-\beta') \sin\beta\pi] \psi_8 - (\beta)\psi_9 \sin\beta'\pi = 0,$
- (1, 6, 8, 10) (*voir le Tableau I*),
- (1, 6, 9, 10) $\psi_1 \sin\alpha\pi + \psi_6 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi - \psi_9 \sin\gamma\pi$
 $- (\gamma - \alpha - \beta - \beta')[(\beta + \beta' - \gamma) \sin\beta'\pi - (-\beta) \sin\gamma\pi] \psi_{10} = 0,$
- (1, 7, 8, 9) $\psi_1 \sin\alpha\pi + \psi_7 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi - (\beta - \gamma)\psi_8 \sin\beta\pi + (\beta)\psi_9 \sin(\beta - \gamma)\pi = 0,$
- (1, 7, 8, 10) (*voir le Tableau I*),
- (1, 7, 9, 10) $\psi_1 \sin\alpha\pi + \psi_7 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi - \psi_9 \sin\gamma\pi + (-\alpha - \beta - \beta')\psi_{10} \sin\beta\pi = 0,$
- (2, 3, 4, 5), (2, 3, 4, 6), (2, 3, 4, 7), (2, 3, 4, 8) (*voir le Tableau I*),
- (2, 3, 4, 9) $\psi_2 \sin(\beta - \alpha)\pi + (\beta + \beta')\psi_3 \sin(\gamma - \alpha - \beta')$
 $+ (\alpha + \beta + \beta' - \gamma)\psi_9 \sin\beta'\pi - (\alpha)\psi_4 \sin\beta\pi = 0,$
- (2, 3, 4, 10), (2, 3, 5, 6), (2, 3, 5, 8) (*voir le Tableau I*),
- (2, 3, 5, 9) $\psi_2 + (2\beta + 2\beta' - \gamma)\psi_3 - \psi_5 - (2\beta + 2\beta' - \gamma)\psi_9 = 0.$
- (2, 3, 5, 10), (2, 3, 6, 7) (*voir le Tableau I*),
- (2, 3, 6, 9) $(-\beta)\psi_2 \sin\alpha\pi + [(\alpha + \beta + \beta' - \gamma) \sin\beta'\pi - (-\beta) \sin(\gamma - \alpha)\pi] \psi_3$
 $+ (\alpha - \beta - \beta' - \gamma)\psi_6 \sin\beta\pi - (\alpha + \beta + \beta' - \gamma)\psi_9 \sin\beta'\pi = 0,$
- (2, 3, 6, 10), (2, 3, 7, 8), (2, 3, 7, 10) (*voir le Tableau I*),
- (2, 3, 8, 9) $\psi_2 \sin\alpha\pi + (\beta + \beta')\psi_3 \sin(\alpha + \beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $- (\alpha + \beta - \gamma)\psi_8 \sin\beta\pi - (\alpha + 2\beta + \beta' - \gamma)\psi_9 \sin\beta'\pi = 0,$

(2, 3, 8, 10) (voir le Tableau I),

$$(2, 3, 9, 10) \quad \psi_2 \sin \alpha \pi + (\beta + \beta') \psi_3 \sin(\alpha + \beta + \beta' - \gamma) \pi \\ - (\alpha + \beta + \beta' - \gamma) \psi_9 \sin(\beta + \beta') \pi + (-\beta - \beta') \psi_{10} \sin \beta \pi = 0,$$

(2, 4, 5, 6), (2, 4, 5, 8) (voir le Tableau I),

$$(2, 4, 5, 9) \quad (\gamma - \alpha - \beta') \psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma) \pi - (\alpha) \psi_4 \sin \beta \pi \\ + (\gamma - \beta - \beta') \psi_5 \sin(\gamma - \alpha - \beta') \pi + (\beta) \psi_9 \sin(\gamma - \alpha) \pi = 0,$$

(2, 4, 6, 7), (2, 4, 6, 8) (voir le Tableau I),

$$(2, 4, 6, 9) \quad (-\beta)[(\beta - \alpha) \sin \beta \pi - (\gamma - \beta - \beta') \sin(\gamma - \alpha) \pi] \psi_2 \\ - (\gamma - \beta - \beta')[(\beta + \beta' + \alpha - \gamma) \sin \beta' \pi - (-\beta) \sin(\gamma - \alpha) \pi] \psi_4 \\ + (-\beta - \beta') \psi_6 \sin(\alpha + \beta' - \gamma) \pi + 2i \psi_9 \sin \beta' \pi \sin(\gamma - \alpha) \pi = 0,$$

(2, 4, 6, 10), (2, 4, 7, 8) (voir le Tableau I),

$$(2, 4, 7, 9) \quad \psi_2 \sin(\beta - \alpha) \pi - (\alpha) \psi_4 \sin \beta \pi \\ + \psi_7 \sin(\gamma - \alpha - \beta') \pi + (\beta) \psi_9 \sin(\gamma - \alpha) \pi = 0,$$

(2, 4, 7, 10) (voir le Tableau I),

$$(2, 4, 8, 9) \quad \psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma) \pi + (\alpha) \psi_4 \sin(\gamma - \alpha - \beta - \beta') \pi \\ + (\alpha + \beta - \gamma) \psi_8 \sin(\gamma - \alpha - \beta') \pi + (\beta) \psi_9 \sin \beta' \pi = 0,$$

(2, 4, 8, 10) (voir le Tableau I),

$$(2, 4, 9, 10) \quad \psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma) \pi + (\alpha) \psi_4 \sin(\gamma - \alpha - \beta - \beta') \pi \\ + (\alpha + \beta + \beta' - \gamma) \psi_9 \sin(\gamma - \alpha) \pi + (-\beta - \beta') \psi_{10} \sin(\alpha + \beta' - \gamma) \pi = 0,$$

(2, 5, 6, 8) (voir le Tableau I),

$$(2, 5, 6, 9) \quad [(\beta) \sin(\beta' - \alpha) \pi - (\gamma - \beta - \beta') \sin(\gamma - \alpha) \pi] \psi_2 \\ - [(\alpha + \beta) \sin \beta' \pi + (\gamma - \beta - \beta') \sin(\alpha - \gamma) \pi] \psi_3 \\ - (\alpha + \beta - \gamma) \psi_6 \sin \beta \pi - (\beta + \beta') \psi_9 \sin(\alpha - \gamma) \pi = 0,$$

(2, 5, 6, 10), (2, 5, 7) (voir le Tableau I),

$$(2, 5, 8, 9) \quad (\gamma - \alpha) \psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma) \pi + (\gamma) \psi_3 \sin(\gamma - \alpha - \beta - \beta') \pi \\ + (\alpha + 2\beta + \beta' - \gamma) \psi_8 \sin \beta \pi + (+2\beta + \beta') \psi_9 \sin(\gamma - \alpha - \beta) \pi = 0,$$

(2, 5, 8, 10) (voir le Tableau I),

$$(2, 5, 9, 10) \quad (\gamma - \alpha) \psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma) \pi + (\gamma) \psi_3 \sin(\gamma - \alpha - \beta - \beta') \pi \\ + (\beta + \beta') \psi_9 \sin(\gamma - \alpha) \pi - \psi_{10} \sin \beta \pi = 0,$$

(2, 6, 7, 8) (voir le Tableau I),

$$(2, 6, 7, 9) \quad \psi_2 \sin \alpha \pi + [(\alpha + \beta - \gamma) \sin \beta' \pi + (-\beta - \beta') \sin(\alpha - \gamma) \pi] \psi_7 \\ + (\alpha - \beta' - \gamma) \psi_6 \sin \beta \pi + \psi_9 \sin(\alpha - \gamma) \pi = 0,$$

$$(2, 6, 8, 9) \quad \psi_2 \sin \alpha \pi + \psi_6 \sin(\alpha + \beta + \beta' - \gamma) \pi \\ + [(\beta + \beta') \sin(\alpha + \beta + \beta' - \gamma) \pi - (\alpha + \beta - \gamma) \sin \beta \pi] \psi_8 \\ - (\alpha + 2\beta + \beta' - \gamma) \psi_9 \sin \beta' \pi = 0,$$

(2, 6, 8, 10) (voir le Tableau I),

$$(2, 6, 9, 10) \quad \psi_2 \sin \alpha \pi + \psi_6 \sin(\alpha + \beta + \beta' - \gamma)\pi - \psi_9 \sin(\gamma - \alpha)\pi \\ - [\sin \beta' \pi - (\gamma - \alpha - 2\beta - \beta') \sin(\gamma - \alpha)\pi] \psi_{10} = 0,$$

$$(2, 7, 8, 9) \quad \psi_2 \sin \alpha \pi + \psi_7 \sin(\alpha + \beta + \beta' - \gamma)\pi \\ - (\alpha + \beta - \gamma) \psi_8 \sin \beta \pi + (\beta) \psi_9 \sin(\alpha + \beta - \gamma)\pi = 0,$$

(2, 7, 8, 10) (*voir le Tableau I*),

$$(2, 7, 9, 10) \quad \psi_2 \sin \alpha \pi + \psi_7 \sin(\alpha + \beta + \beta' - \gamma)\pi \\ + \psi_9 \sin(\alpha - \gamma)\pi + (-\beta - \beta') \psi_{10} \sin \beta \pi = 0,$$

(3, 4, 5, 6), (3, 4, 5, 7), (3, 4, 5, 8) (*voir le Tableau I*),

$$(3, 4, 5, 9) \quad \psi_3 \sin(\gamma - \beta - \beta')\pi - (2\alpha - 2\beta - \beta') \psi_4 \sin \beta \pi \\ + (\alpha - 2\beta - \beta') \psi_5 \sin(\beta - \alpha)\pi + (\alpha - \gamma) \psi_9 \sin(\beta + \beta' - \alpha)\pi = 0,$$

(3, 4, 6, 7) (*voir le Tableau I*),

$$(3, 4, 6, 9) \quad [(\alpha - \gamma) \sin(\alpha - \beta)\pi + (\beta') \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi] \psi_3 \\ + (\alpha - \beta) \psi_4 \sin \alpha \pi + (\alpha - \beta - \beta' - \gamma) \psi_6 \sin(\beta - \alpha)\pi \\ - (\beta + \beta' - \gamma) \psi_9 \sin \beta' \pi = 0,$$

(3, 4, 6, 10), (3, 4, 7, 8), (3, 4, 7, 10) (*voir le Tableau I*),

$$(3, 4, 8, 9) \quad \psi_3 \sin(\gamma - \beta - \beta')\pi - (\alpha - \beta - \beta') \psi_4 \sin \alpha \pi \\ + (\alpha - \beta' - \gamma) \psi_8 \sin(\beta - \alpha)\pi + (\beta - \gamma) \psi_9 \sin \beta' \pi = 0,$$

(3, 4, 8, 10) (*voir le Tableau I*),

$$(3, 4, 9, 10) \quad \psi_3 \sin(\gamma - \beta - \beta')\pi - (\alpha - \beta - \beta') \psi_4 \sin \alpha \pi \\ + (\alpha - \gamma) \psi_9 \sin(\beta + \beta' - \alpha)\pi + (-2\beta - 2\beta') \psi_{10} \sin(\alpha - \beta)\pi = 0,$$

(3, 5, 6, 7) (*voir le Tableau I*),

$$(3, 5, 6, 9) \quad [(2\beta + 2\beta' - \alpha - \gamma) \sin(\alpha - \beta')\pi + (\beta' - \alpha) \sin(\gamma - \alpha)\pi] \psi_3 \\ - (\beta' - \alpha) \psi_3 \sin \alpha \pi - (-\gamma) \psi_6 \sin \beta \pi \\ + (2\beta + 2\beta' - \gamma - \alpha) \psi_9 \sin(\beta' - \alpha)\pi = 0,$$

(3, 5, 6, 10), (3, 5, 7, 8), (3, 5, 7, 10) (*voir le Tableau I*),

$$(3, 5, 8, 9) \quad \psi_3 \sin(\gamma - \beta - \beta')\pi - (\alpha - \beta - \beta') \psi_3 \sin \alpha \pi \\ + (2\alpha - \beta' - \gamma) \psi_8 \sin \beta \pi + (\alpha + \beta - \gamma) \psi_9 \sin(\beta' - \alpha)\pi = 0,$$

(3, 5, 8, 10) (*voir le Tableau I*),

$$(3, 5, 9, 10) \quad \psi_3 \sin(\gamma - \beta - \beta')\pi - (\alpha - \beta - \beta') \psi_3 \sin \alpha \pi \\ + (\alpha - \gamma) \psi_9 \sin(\beta + \beta' - \alpha)\pi - (\alpha - 2\beta - 2\beta') \psi_{10} \sin \beta \pi = 0,$$

$$(3, 6, 9, 10) \quad (\beta + \beta') \psi_3 - \psi_6 - (\beta + \beta') \psi_9 + (\gamma - \alpha - \beta) \psi_{10} = 0,$$

(3, 7, 8, 10) (*voir le Tableau I*),

$$(3, 7, 9) \quad \psi_3 - (-\beta - \beta') \psi_7 - \psi_9 = 0,$$

(4, 5, 6, 7), (4, 5, 6, 8) (*voir le Tableau I*),

$$(4, 5, 6, 9) \quad [(\alpha + \beta + \beta' - \gamma) \sin(\beta' - \alpha)\pi - (\alpha - \beta) \sin(\gamma - \alpha)\pi] \psi_4 \\ - [(\beta + \beta' - \gamma) \sin \beta' \pi + (\alpha - \beta) \sin(\alpha - \gamma)\pi] \psi_5 \\ - (\beta - \gamma) \psi_6 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi - (\alpha + \beta - \gamma) \psi_9 \sin(\alpha - \gamma)\pi = 0,$$

(4, 5, 7, 8) (voir le Tableau I),

$$(4, 5, 7, 9) \quad (\alpha)\psi_4 \sin \beta \pi + \psi_5 \sin(\alpha - \beta)\pi \\ + (\beta - \alpha)\psi_7 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi + (\beta)\psi_9 \sin(\alpha - \gamma)\pi = 0,$$

$$(4, 5, 8, 9) \quad \psi_4 - \psi_5 + (2\beta - \gamma)(\psi_8 - \psi_9) = 0,$$

(4, 5, 10) (voir le Tableau I),

(4, 6, 7, 8) (voir le Tableau I),

$$(4, 6, 7, 9) \quad (\beta)\psi_4 \sin \alpha \pi + [(-\beta') \sin(\alpha - \gamma)\pi + (2\beta - \gamma - \alpha) \sin \beta' \pi] \psi_7 \\ - (\beta - \beta' - \gamma)\psi_6 \sin(\alpha - \beta)\pi + (\beta)\psi_9 \sin(\alpha - \gamma)\pi = 0,$$

$$(4, 6, 8, 9) \quad (\alpha - \beta - \beta')\psi_4 \sin \alpha \pi \\ + [\sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi + (\alpha - \beta' - \gamma) \sin(\alpha - \beta)\pi] \psi_8 \\ + (-\beta - \beta')\psi_6 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi - (\beta - \gamma)\psi_9 \sin \beta' \pi = 0,$$

(4, 6, 8, 10) (voir le Tableau I),

$$(4, 6, 9, 10) \quad \psi_4 \sin \alpha \pi + (-\alpha)\psi_6 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi + \psi_9 \sin(\alpha - \gamma)\pi \\ - [(-2\alpha) \sin \beta' \pi + (\gamma - \alpha - 2\beta - \beta') \sin(\alpha - \gamma)\pi] \psi_{10} = 0,$$

$$(4, 7, 8, 9) \quad (\alpha)\psi_4 \sin \alpha \pi + \psi_7 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi + (\alpha + \beta - \gamma)\psi_8 \sin(\alpha - \beta)\pi \\ + (\beta)\psi_9 \sin(\beta - \gamma)\pi = 0,$$

(4, 7, 8, 10) (voir le Tableau I),

$$(4, 7, 9, 10) \quad (\alpha)\psi_4 \sin \alpha \pi + \psi_7 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi + (\alpha)\psi_9 \sin(\alpha - \gamma)\pi \\ + (-\beta - \beta')\psi_{10} \sin(\beta - \alpha)\pi = 0,$$

(5, 6, 7, 8) (voir le Tableau I),

$$(5, 6, 7, 9) \quad \psi_5 \sin \alpha \pi + (\alpha - \beta' - \gamma)\psi_6 \sin \beta \pi \\ + [(\beta - \gamma) \sin(\beta' - \alpha)\pi - (-\beta - \beta') \sin(\gamma - \alpha)\pi] \psi_7 \\ + \psi_9 \sin(\alpha - \gamma)\pi = 0,$$

$$(5, 6, 8, 9) \quad \psi_5 \sin \alpha \pi + (-\alpha)\psi_6 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi \\ + [(2\beta + \beta' - \gamma) \sin(\beta' - \alpha)\pi - \sin(\gamma - \alpha)\pi] \psi_8 \\ + (2\beta + \beta' - \gamma)\psi_9 \sin(\alpha - \beta')\pi = 0,$$

(5, 6, 8, 10) (voir le Tableau I),

$$(5, 6, 9, 10) \quad \psi_5 \sin \alpha \pi + (-\alpha)\psi_6 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi + \psi_9 \sin(\alpha - \gamma)\pi \\ + [(\gamma - \alpha - 2\beta - \beta') \sin(\gamma - \alpha)\pi + (-\alpha) \sin(\alpha - \beta')\pi] \psi_{10} = 0,$$

$$(5, 7, 8, 9) \quad \psi_5 \sin \alpha \pi + (-\alpha)\psi_7 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi - (\alpha + \beta - \gamma)\psi_8 \sin \beta \pi \\ + (\beta)\psi_9 \sin(\alpha + \beta - \gamma)\pi = 0,$$

(5, 7, 8, 10) (voir le Tableau I).

$$(5, 7, 9, 10) \quad \psi_5 \sin \alpha \pi + (-\alpha)\psi_7 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi + \psi_9 \sin(\alpha - \gamma)\pi \\ + (-\beta - \beta')\psi_{10} \sin \beta \pi = 0,$$

$$(6, 7, 8, 9) \quad \psi_6 - \psi_7 + (\beta + \beta')\psi_8 - (\beta + \beta')\psi_9 = 0,$$

$$(6, 7, 10) \quad (voir le Tableau I), \quad (8, 9, 10) \quad \psi_8 - \psi_9 + (\gamma - \alpha - 2\beta - \beta')\psi_{10} = 0.$$

TABLEAUX III ET IV (voir p. 69, 70).

Les formules correspondantes se déduisent respectivement des formules des Tableaux I et II par la règle suivante : 1° On permutera β et β' ; 2° ψ_1, ψ_2, ψ_3 restent inaltérés; 3° on permutera ψ_4 avec ψ_5, ψ_6 avec ψ_7, ψ_8 avec ψ_9, ψ_{10} se change en $-(\beta + \beta')\psi_{10}$.

Exemples :

(1, 2, 3) même formule qu'au Tableau I.

$$(1, 2, 4, 5) \quad (\beta + \beta')\psi_1 \sin(\gamma - \alpha)\pi + \psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi \\ - (\gamma - \beta')\psi_4 \sin\beta\pi - (\gamma + \beta)\psi_5 \sin\beta'\pi = 0,$$

$$(1, 2, 4, 10) \quad (\beta + \beta')\psi_1 \sin(\gamma - \alpha)\pi + \psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi \\ - (\gamma)\psi_4 \sin(\beta + \beta')\pi + (\gamma - \alpha + \beta + \beta')\psi_{10} \sin\beta'\pi = 0,$$

.....

(Ces formules se rapportent au Tableau III).

TABLEAU V (voir p. 71).

$$(1, 2, 3, 4) \quad (\beta)\psi_1 - (\alpha - \beta)\psi_2 - (\alpha + \beta - \gamma)\psi_3 - 2i(\alpha)\psi_4 \sin\beta\pi = 0,$$

$$(1, 2, 3, 5) \quad (-\beta')\psi_1 - (\beta' - \alpha)\psi_2 - (\gamma - \alpha - \beta')\psi_3 + 2i(-\alpha)\psi_5 \sin\beta'\pi = 0,$$

$$(1, 2, 3, 6) \quad \psi_1 - (\alpha)\psi_2 - (\alpha - \gamma)\psi_3 - 2i(\alpha - \beta' - \gamma)\psi_6 \sin\beta\pi = 0,$$

$$(1, 2, 3, 7) \quad \psi_1 - (-\alpha)\psi_2 - (\gamma - \alpha)\psi_3 + 2i(\beta + \gamma - \alpha)\psi_7 \sin\beta'\pi = 0,$$

$$(1, 2, 3, 8) \quad (-\beta)\psi_1 - (\alpha - \beta)\psi_2 - (\alpha + \beta - \gamma)\psi_3 + 2i(\alpha - \gamma)\psi_8 \sin\beta\pi = 0,$$

$$(1, 2, 3, 9) \quad (\beta')\psi_1 - (\beta' - \alpha)\psi_2 - (\gamma - \alpha - \beta')\psi_3 - 2i(\gamma - \alpha)\psi_9 \sin\beta'\pi = 0,$$

$$(1, 2, 3, 10) \quad [(\alpha + \beta') \sin\beta\pi + (\beta - \alpha) \sin\beta'\pi]\psi_1 - \psi_2 \sin(\beta + \beta') \\ + [(\gamma - \beta') \sin\beta + (\beta - \gamma) \sin\beta']\psi_3 \\ - 2i(-\alpha - \beta')\psi_{10} \sin\beta \sin\beta' = 0,$$

$$(1, 2, 4, 5) \quad (\beta - \beta')\psi_1 \sin(\gamma - \alpha)\pi + \psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi - (\gamma - \beta')\psi_4 \sin\beta\pi \\ - (\beta - \gamma)\psi_5 \sin\beta'\pi = 0,$$

$$(1, 2, 4, 7) \quad \psi_1 \sin(\gamma - \alpha)\pi + (-\beta)\psi_2 \sin(\beta - \gamma)\pi - (\gamma - \beta)\psi_4 \sin\beta\pi \\ - (\beta)\psi_7 \sin\beta'\pi = 0,$$

$$(1, 2, 4, 9) \quad (\beta)\psi_1 \sin(\gamma - \alpha - \beta')\pi + \psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi \\ - (\gamma - \beta')\psi_4 \sin\beta\pi + (\beta)\psi_9 \sin\beta'\pi = 0,$$

$$(1, 2, 4, 10) \quad (\beta - \beta')\psi_1 \sin(\gamma - \alpha)\pi + \psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi \\ - [(\beta - \beta') \sin\gamma\pi + \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi]\psi_4 \\ + (\beta - \beta' - \alpha - \gamma)\psi_{10} \sin\beta'\pi = 0,$$

- (1, 2, 5, 6) $\psi_1 \sin(\gamma - \alpha)\pi + (\beta')\psi_2 \sin(\beta' - \gamma)\pi - (\beta' - \gamma)\psi_5 \sin\beta'\pi$
 $- (-\beta')\psi_6 \sin\beta\pi = 0,$
- (1, 2, 5, 8) $(-\beta')\psi_1 \sin(\gamma - \alpha - \beta)\pi + \psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $-(\beta - \gamma)\psi_5 \sin\beta'\pi + (-\beta')\psi_8 \sin\beta\pi = 0,$
- (1, 2, 5, 10) $(\beta - \beta')\psi_1 \sin(\gamma - \alpha)\pi + \psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $- [(\beta - \beta') \sin\gamma\pi + \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi]\psi_5$
 $-(\gamma - \alpha - 2\beta')\psi_{10} \sin\beta\pi = 0,$
- (1, 2, 6, 7) $\psi_1 \sin(\gamma - \alpha)\pi - \psi_2 \sin\gamma\pi - (-\beta')\psi_6 \sin\beta\pi - (\beta)\psi_7 \sin\beta'\pi = 0,$
- (1, 2, 6, 8) $\psi_1 - (\alpha)\psi_2 - (\alpha + \beta - \beta' - \gamma)\psi_6 - (\alpha - \gamma)\psi_8 = 0,$
- (1, 2, 6, 9) $\psi_1 \sin(\alpha + \beta' - \gamma)\pi + \psi_2 \sin(\gamma - \beta')\pi$
 $+ (-2\beta')\psi_6 \sin\beta\pi - \psi_9 \sin\beta'\pi = 0,$
- (1, 2, 6, 10) $\psi_1 \sin(\gamma - \alpha)\pi - \psi_2 \sin\gamma\pi$
 $- (-\gamma)[(\beta - \beta') \sin\gamma\pi + \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi]\psi_6$
 $+ (-\alpha - \gamma)\psi_{10} \sin\beta'\pi = 0,$
- (1, 2, 7, 8) $\psi_1 \sin(\alpha + \beta - \gamma)\pi + \psi_2 \sin(\gamma - \beta)\pi + (2\beta)\psi_7 \sin\beta'\pi - \psi_8 \sin\beta\pi = 0,$
- (1, 2, 7, 9) $\psi_1 - (-\alpha)\psi_2 - (\beta - \beta' + \gamma - \alpha)\psi_7 - (\gamma - \alpha)\psi_9 = 0,$
- (1, 2, 7, 10) $\psi_1 \sin(\gamma - \alpha)\pi - \psi_2 \sin\gamma\pi$
 $- (\gamma)[(\beta - \beta') \sin\gamma\pi + \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi]\psi_7$
 $-(\gamma - \alpha - \beta - \beta')\psi_{10} \sin\beta\pi = 0,$
- (1, 2, 8, 9) $\psi_1 \sin(\alpha + \beta + \beta' - \gamma)\pi + \psi_2 \sin(\gamma - \beta - \beta')\pi$
 $- (-\beta')\psi_8 \sin\beta\pi - (\beta)\psi_9 \sin\beta'\pi = 0,$
- (1, 2, 8, 10) $[(\beta' - \beta) \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi + (\alpha - \gamma) \sin\alpha\pi]\psi_1$
 $- (\alpha + \beta' - \beta)\psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $- (\alpha - \gamma)[(\gamma - \beta) \sin\beta\pi + (\beta' - \gamma) \sin\beta'\pi]\psi_8$
 $- (-\gamma)\psi_{10} \sin\beta'\pi = 0,$
- (1, 2, 9, 10) $[(\beta' - \beta) \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi + (\gamma - \alpha) \sin\alpha\pi]\psi_1$
 $- (\beta' - \beta - \alpha)\psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $- (\gamma - \alpha)[(\gamma - \beta) \sin\beta\pi + (\beta' - \gamma) \sin\beta'\pi]\psi_9$
 $+ (\gamma - 2\alpha - \beta - \beta')\psi_{10} \sin\beta\pi = 0,$
- (1, 3, 4, 5) $\psi_1 \sin(\beta + \beta' - \alpha)\pi + \psi_3 \sin(\gamma - \beta - \beta')\pi$
 $- (\beta')\psi_4 \sin\beta\pi - (-\beta)\psi_5 \sin\beta'\pi = 0,$
- (1, 3, 4, 6) $\psi_1 - (\alpha - \gamma)\psi_3 - (\alpha)\psi_4 + (\alpha - \beta - \beta' - \gamma)\psi_6 = 0,$
- (1, 3, 4, 7) $\psi_1 \sin(\alpha - \beta)\pi + \psi_3 \sin(\beta - \gamma)\pi + \psi_4 \sin\beta\pi + (\gamma)\psi_7 \sin\beta'\pi = 0,$
- (1, 3, 4, 9) $\psi_1 \sin(\alpha - \beta)\pi + (-\beta')\psi_3 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $+ \psi_4 \sin\beta\pi - (\gamma - \beta - \beta')\psi_9 \sin\beta'\pi = 0,$
- (1, 3, 4, 10) $\psi_1 \sin(\beta + \beta' - \alpha)\pi - \psi_3 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi - \psi_4 \sin(\beta + \beta')\pi$
 $+ (-\alpha - \beta - \beta')\psi_{10} \sin\beta'\pi = 0,$

- (1, 3, 5, 6) $\psi_1 \sin(\alpha - \beta')\pi + \psi_3 \sin(\beta' - \gamma)\pi + \psi_5 \sin\beta'\pi + (-\gamma)\psi_6 \sin\beta\pi = 0,$
- (1, 3, 5, 7) $\psi_1 - (\gamma - \alpha)\psi_3 - (-\alpha)\psi_5 + (\beta + \beta' + \gamma - \alpha)\psi_7 = 0,$
- (1, 3, 5, 8) $\psi_1 \sin(\alpha - \beta')\pi + (\beta)\psi_3 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $+ \psi_5 \sin\beta'\pi - (\beta + \beta' - \gamma)\psi_8 \sin\beta\pi = 0,$
- (1, 3, 5, 10) $\psi_1 \sin(\beta + \beta' - \alpha)\pi - \psi_3 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $- \psi_5 \sin(\beta + \beta')\pi - (-\alpha)\psi_{10} \sin\beta\pi = 0,$
- (1, 3, 6, 7) $\psi_1 \sin\alpha\pi - \psi_3 \sin\gamma\pi + (-\beta' - \gamma)\psi_6 \sin\beta\pi + (\beta + \gamma)\psi_7 \sin\beta'\pi = 0.$
- (1, 3, 6, 9) $\psi_1 \sin\alpha\pi + (-\beta')\psi_3 \sin(\beta' - \gamma)\pi + (-\beta' - \gamma)\psi_6 \sin\beta\pi$
 $- (\gamma - \beta')\psi_9 \sin\beta'\pi = 0,$
- (1, 3, 6, 10) $\psi_1 \sin\alpha\pi - \psi_3 \sin\gamma\pi + (-\gamma)\psi_6 \sin(\beta + \beta')\pi - (-\alpha)\psi_{10} \sin\beta'\pi = 0,$
- (1, 3, 7, 8) $\psi_1 \sin\alpha\pi + (\beta)\psi_3 \sin(\beta - \gamma)\pi + (\beta + \gamma)\psi_7 \sin\beta'\pi$
 $- (\beta - \gamma)\psi_8 \sin\beta\pi = 0,$
- (1, 3, 7, 10) $\psi_1 \sin\alpha\pi - \psi_3 \sin\gamma\pi + (\gamma)\psi_7 \sin(\beta + \beta')\pi$
 $+ (-\alpha - \beta - \beta')\psi_{10} \sin\beta\pi = 0,$
- (1, 3, 8, 9) $(\beta' - \beta)\psi_1 \sin\alpha\pi + \psi_3 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $- (\beta' - \gamma)\psi_8 \sin\beta\pi - (\gamma - \beta)\psi_9 \sin\beta'\pi = 0,$
- (1, 3, 8, 10) $\psi_1 \sin\alpha\pi + (\beta + \beta')\psi_3 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $- (\beta + \beta' - \gamma)\psi_8 \sin(\beta + \beta')\pi - (-\alpha)\psi_{10} \sin\beta'\pi = 0,$
- (1, 3, 9, 10) $\psi_1 \sin\alpha\pi + (-\beta - \beta')\psi_3 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $- (\gamma - \beta - \beta')\psi_9 \sin(\beta + \beta')\pi + (-\alpha - \beta - \beta')\psi_{10} \sin\beta\pi = 0,$
- (1, 4, 5, 6) $\psi_1 \sin(\gamma - \alpha)\pi + (\beta')\psi_4 \sin(\beta' - \gamma)\pi$
 $- (\beta' - \gamma)\psi_5 \sin\beta'\pi - (-\gamma)\psi_6 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi = 0,$
- (1, 4, 5, 7) $\psi_1 \sin(\gamma - \alpha)\pi - (\gamma - \beta)\psi_4 \sin\beta\pi + (-\beta)\psi_5 \sin(\beta - \gamma)\pi$
 $- (\gamma)\psi_7 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi = 0,$
- (1, 4, 6, 7) $\psi_1 \sin(\gamma - \alpha)\pi - \psi_4 \sin\gamma\pi - (-\beta' - \gamma)\psi_6 \sin(\beta - \gamma)\pi$
 $- (\beta)\psi_7 \sin\beta'\pi = 0,$
- (1, 4, 6, 9) $\psi_1 \sin(\gamma - \alpha - \beta')\pi + \psi_4 \sin(\beta' - \gamma)\pi$
 $- (-\beta' - \gamma)\psi_6 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi + \psi_9 \sin\beta'\pi = 0,$
- (1, 4, 6, 10) $\psi_1 \sin(\gamma - \alpha)\pi - \psi_4 \sin\gamma\pi - (-\gamma)\psi_6 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $+ (-\alpha - \gamma)\psi_{10} \sin\beta'\pi = 0,$
- (1, 4, 7, 9) $\psi_1 \sin(\alpha - \beta)\pi + \psi_4 \sin\beta\pi + (\beta)\psi_7 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $+ \psi_9 \sin(\beta - \gamma)\pi = 0,$
- (1, 4, 7, 10) $\psi_1 \sin(\gamma - \alpha)\pi - \psi_4 \sin\gamma\pi - (\gamma)\psi_7 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $+ (-\alpha - \beta - \beta')\psi_{10} \sin(\gamma - \beta)\pi = 0,$
- (1, 4, 8) $\psi_1 - (\alpha)\psi_4 - (\alpha - \gamma)\psi_8 = 0,$
- (1, 4, 9, 10) $(\alpha)\psi_1 - \psi_4 - (\gamma)\psi_9 + (\beta' - \alpha)\psi_{10} = 0,$

- (1, 5, 6, 7) $\psi_1 \sin(\gamma - \alpha)\pi - \psi_3 \sin \gamma\pi - (-\beta')\psi_6 \sin \beta\pi$
 $- (\beta + \gamma)\psi_7 \sin(\beta' - \gamma)\pi = 0,$
- (1, 5, 6, 8) $\psi_1 \sin(\alpha - \beta')\pi + \psi_5 \sin \beta'\pi + (-\beta)\psi_6 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $+ \psi_8 \sin(\beta' - \gamma)\pi = 0,$
- (1, 5, 6, 10) $\psi_1 \sin(\gamma - \alpha)\pi - \psi_3 \sin \gamma\pi - (-\gamma)\psi_6 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $- (-\alpha)\psi_{10} \sin(\gamma - \beta')\pi = 0,$
- (1, 5, 7, 8) $\psi_1 \sin(\gamma - \alpha - \beta)\pi + \psi_5 \sin(\beta - \gamma)\pi$
 $- (\beta + \gamma)\psi_7 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi + \psi_8 \sin \beta\pi = 0,$
- (1, 5, 7, 10) $\psi_1 \sin(\gamma - \alpha)\pi - \psi_3 \sin \gamma\pi - (\gamma)\psi_7 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $- (\gamma - \alpha - \beta - \beta')\psi_{10} \sin \beta\pi = 0,$
- (1, 5, 8, 10) $(-\alpha)\psi_1 - \psi_3 - (-\gamma)\psi_8 - (-\alpha - \beta')\psi_{10} = 0,$
- (1, 5, 9) $\psi_1 - (-\alpha)\psi_3 - (\gamma - \alpha)\psi_9 = 0,$
- (1, 6, 7, 8) $\psi_1 \sin \alpha\pi + (-\beta')\psi_6 \sin(\beta - \gamma)\pi + (\beta + \gamma)\psi_7 \sin \beta'\pi - \psi_8 \sin \gamma\pi = 0,$
- (1, 6, 7, 9) $\psi_1 \sin \alpha\pi + (-\beta' - \gamma)\psi_6 \sin \beta\pi + (\beta)\psi_7 \sin(\beta' - \gamma)\pi - \psi_9 \sin \gamma\pi = 0,$
- (1, 6, 8, 9) $(\beta')\psi_1 \sin \alpha\pi + (-\beta')\psi_6 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi + \psi_8 \sin(\beta' - \gamma)\pi$
 $- (\gamma)\psi_9 \sin \beta'\pi = 0,$
- (1, 6, 8, 10) $\psi_1 \sin \alpha\pi + \psi_6 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi - \psi_8 \sin \gamma\pi - (-\alpha)\psi_{10} \sin \beta'\pi = 0,$
- (1, 6, 9, 10) $(\gamma)\psi_1 \sin \alpha\pi + (-\gamma)\psi_6 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi - (\gamma)\psi_9 \sin \gamma\pi$
 $+ (-\alpha)\psi_{10} \sin(\gamma - \beta')\pi = 0,$
- (1, 7, 8, 9) $(-\beta)\psi_1 \sin \alpha\pi + (\beta)\psi_7 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $- (-\gamma)\psi_8 \sin \beta\pi + \psi_9 \sin(\beta - \gamma)\pi = 0,$
- (1, 7, 8, 10) $(-\gamma)\psi_1 \sin \alpha\pi + (\gamma)\psi_7 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi - (-\gamma)\psi_8 \sin \gamma\pi$
 $- (-\alpha - \beta - \beta')\psi_{10} \sin(\gamma - \beta)\pi = 0,$
- (1, 7, 9, 10) $\psi_1 \sin \alpha\pi + \psi_7 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi - \psi_9 \sin \gamma\pi$
 $+ (-\alpha - \beta - \beta')\psi_{10} \sin \beta\pi = 0,$
- (1, 8, 9, 10) $2i\psi_1 \sin \alpha\pi + (-\gamma)\psi_8 - (\gamma)\psi_9 + (-\alpha - \beta')\psi_{10} = 0,$
- (2, 3, 4, 5) $(\beta' - \beta)\psi_2 \sin(\beta + \beta' - \alpha)\pi + \psi_3 \sin(\gamma - \alpha)\pi - (\alpha - \beta)\psi_4 \sin \beta\pi$
 $- (\beta' - \alpha)\psi_5 \sin \beta'\pi = 0,$
- (2, 3, 4, 7) $(-\beta)\psi_2 \sin(\beta - \alpha)\pi + \psi_3 \sin(\gamma - \alpha)\pi - (\alpha - \beta)\psi_4 \sin \beta\pi$
 $- (\beta + \gamma - \alpha)\psi_7 \sin \beta'\pi = 0,$
- (2, 3, 4, 8) $(-\beta)\psi_2 + (\beta - \gamma)\psi_3 - (-\beta)\psi_4 - (\beta - \gamma)\psi_8 = 0,$
- (2, 3, 4, 9) $(-\beta)\psi_2 \sin(\beta - \alpha)\pi + (-\beta')\psi_3 \sin(\gamma - \alpha - \beta')\pi$
 $- (\alpha - \beta)\psi_4 \sin \beta\pi + (\gamma - \alpha - \beta')\psi_9 \sin \beta'\pi = 0,$
- (2, 3, 4, 10) $\psi_2 \sin(\beta + \beta' - \alpha)\pi + (\beta - \beta')\psi_3 \sin(\gamma - \alpha)\pi$
 $- [(\beta - \beta') \sin \alpha\pi + \sin(\beta + \beta' - \alpha)\pi]\psi_4$
 $+ (\beta - \beta' - 2\alpha)\psi_{10} \sin \beta'\pi = 0,$

- (2, 3, 5, 6) $(\beta')\psi_2 \sin(\beta' - \alpha)\pi + \psi_3 \sin(\gamma - \alpha)\pi - (\beta' - \alpha)\psi_5 \sin \beta'\pi$
 $- (\alpha - \beta' - \gamma)\psi_6 \sin \beta\pi = 0,$
- (2, 3, 5, 8) $(\beta')\psi_2 \sin(\beta' - \alpha)\pi + (\beta)\psi_3 \sin(\gamma - \alpha - \beta)\pi$
 $- (\beta' - \alpha)\psi_5 \sin \beta'\pi + (\alpha + \beta - \gamma)\psi_8 \sin \beta\pi = 0,$
- (2, 3, 5, 9) $(\beta')\psi_2 + (\gamma - \beta')\psi_3 - (\beta')\psi_5 - (\gamma - \beta')\psi_9 = 0,$
- (2, 3, 5, 10) $\psi_2 \sin(\beta + \beta' - \alpha)\pi + (\beta - \beta')\psi_3 \sin(\gamma - \alpha)\pi$
 $- [(\beta - \beta') \sin \alpha\pi + \sin(\beta + \beta' - \alpha)\pi]\psi_5 - (-2\beta')\psi_{10} \sin \beta\pi = 0,$
- (2, 3, 6, 7) $\psi_2 \sin \alpha\pi + \psi_3 \sin(\alpha - \gamma)\pi + (\alpha - \beta' - \gamma)\psi_6 \sin \beta\pi$
 $+ (\beta + \gamma - \alpha)\psi_7 \sin \beta'\pi = 0,$
- (2, 3, 6, 9) $\psi_2 \sin \alpha\pi + (-\beta')\psi_3 \sin(\alpha + \beta' - \gamma)\pi + (\alpha - \beta' - \gamma)\psi_6 \sin \beta\pi$
 $- (\gamma - \alpha - \beta')\psi_9 \sin \beta'\pi = 0,$
- (2, 3, 6, 10) $\psi_2 \sin \alpha\pi + \psi_3 \sin(\alpha - \gamma)\pi$
 $+ (-\gamma)[(\beta - \beta') \sin \alpha\pi + \sin(\beta + \beta' - \alpha)\pi]\psi_6 - (-2\alpha)\psi_{10} \sin \beta'\pi = 0,$
- (2, 3, 7, 8) $\psi_2 \sin \alpha\pi + (\beta)\psi_3 \sin(\alpha + \beta - \gamma)\pi + (\beta + \gamma - \alpha)\psi_7 \sin \beta'\pi$
 $- (\alpha + \beta - \gamma)\psi_8 \sin \beta\pi = 0,$
- (2, 3, 7, 10) $\psi_2 \sin \alpha\pi + \psi_3 \sin(\alpha - \gamma)\pi$
 $+ (\gamma)[(\beta - \beta') \sin \alpha\pi + \sin(\beta + \beta' - \alpha)\pi]\psi_7$
 $+ (-\beta - \beta')\psi_{10} \sin \beta\pi = 0,$
- (2, 3, 8, 9) $\psi_2 \sin \alpha\pi + (\beta - \beta')\psi_3 \sin(\alpha + \beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $- (\alpha + \beta - \gamma)\psi_8 \sin \beta\pi - (\gamma - \alpha - \beta')\psi_9 \sin \beta'\pi = 0,$
- (2, 3, 8, 10) $(\alpha - \beta)\psi_2 \sin \alpha\pi + [(\alpha + \beta - \gamma) \sin \alpha\pi + (\beta') \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi]\psi_3$
 $- (-\gamma)[(\beta + \beta') \sin \beta'\pi + (2\alpha) \sin \beta\pi]\psi_8 - (-\alpha - \beta)\psi_{10} \sin \beta'\pi = 0,$
- (2, 3, 9, 10) $(\beta' - \alpha)\psi_2 \sin \alpha\pi + [(\gamma - \alpha - \beta') \sin \alpha\pi + (-\beta) \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi]\psi_3$
 $- (\gamma)[(-\beta - \beta') \sin \beta\pi + (-2\alpha) \sin \beta'\pi]\psi_9$
 $+ (-\alpha - \beta - 2\beta')\psi_{10} \sin \beta\pi = 0,$
- (2, 4, 5, 8) $\psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi - (\alpha - \beta')\psi_4 \sin(\alpha + \beta - \gamma)\pi$
 $- (\beta - \gamma)\psi_5 \sin \beta'\pi + (\alpha + \beta - \beta' - \gamma)\psi_8 \sin(\gamma - \alpha)\pi = 0,$
- (2, 4, 5, 9) $\psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi - (\gamma - \beta')\psi_4 \sin \beta\pi$
 $- (\beta - \alpha)\psi_5 \sin(\alpha + \beta' - \gamma)\pi + (\gamma + \beta - \beta' - \alpha)\psi_9 \sin(\gamma - \alpha)\pi = 0,$
- (2, 4, 6) $\psi_2 - \psi_4 + (\beta - \beta' - \gamma)\psi_6 = 0,$
- (2, 4, 7, 8) $(-\beta)\psi_2 \sin(\beta - \gamma)\pi - (\alpha - \beta)\psi_4 \sin(\alpha + \beta - \gamma)\pi$
 $- (\beta)\psi_7 \sin \beta'\pi + (\alpha - \gamma)\psi_8 \sin(\gamma - \alpha)\pi = 0,$
- (2, 4, 7, 9) $(-\beta)\psi_2 \sin(\beta - \alpha)\pi - (\alpha - \beta)\psi_4 \sin \beta\pi$
 $+ (\beta)\psi_7 \sin(\gamma - \alpha - \beta')\pi + \psi_9 \sin(\gamma - \alpha)\pi = 0,$
- (2, 4, 7, 10) $\psi_2 - \psi_4 + (\beta - \beta' + \gamma)\psi_7 + (-\alpha - \beta')\psi_{10} = 0,$
- (2, 4, 8, 9) $\psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi - (\alpha)\psi_4 \sin(\alpha + \beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $+ (\alpha + \beta - \gamma)\psi_8 \sin(\gamma - \alpha - \beta')\pi + (\beta)\psi_9 \sin \beta'\pi = 0,$

- (2, 4, 8, 10) $(-\alpha)\psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $- [(-\alpha) \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi + (\beta - \beta' - \gamma) \sin \alpha\pi] \psi_4$
 $- (\beta - \beta' - \gamma)\psi_8 \sin(\alpha - \gamma)\pi + (\beta - \beta' - \gamma - 2\alpha)\psi_{10} \sin \beta'\pi = 0,$
- (2, 4, 9, 10) $\psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi + [(\beta - \alpha) \sin(\gamma - \alpha - \beta')\pi - (\gamma - \beta') \sin \beta\pi] \psi_4$
 $+ (\gamma - \alpha + \beta - \beta')\psi_9 \sin(\gamma - \alpha)\pi$
 $- (\beta - \beta' - 2\alpha)\psi_{10} \sin(\gamma - \alpha - \beta')\pi = 0,$
- (2, 5, 6, 8) $(\beta')\psi_2 \sin(\beta' - \alpha)\pi - (\beta' - \alpha)\psi_5 \sin \beta'\pi$
 $+ (-\beta')\psi_6 \sin(\gamma - \alpha - \beta)\pi + \psi_8 \sin(\gamma - \alpha)\pi = 0,$
- (2, 5, 6, 9) $(\beta')\psi_2 \sin(\beta' - \gamma)\pi - (\beta' - \alpha)\psi_5 \sin(\alpha + \beta' - \gamma)\pi$
 $- (-\beta')\psi_6 \sin \beta\pi + (\gamma - \alpha)\psi_9 \sin(\gamma - \alpha)\pi = 0,$
- (2, 5, 6, 10) $\psi_2 - \psi_5 + (\beta - \beta' - \gamma)\psi_6 - (-\alpha - \beta')\psi_{10} = 0,$
- (2, 5, 7) $\psi_2 - \psi_5 + (\beta - \beta' + \gamma)\psi_7 = 0,$
- (2, 5, 8, 9) $\psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi - (-\alpha)\psi_5 \sin(\alpha + \beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $+ (-\beta')\psi_8 \sin \beta\pi + (\gamma - \alpha - \beta')\psi_9 \sin(\gamma - \alpha - \beta)\pi = 0,$
- (2, 5, 8, 10) $\psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $- [(\alpha - \beta') \sin(\alpha + \beta - \gamma)\pi + (\beta - \gamma) \sin \beta'\pi] \psi_5$
 $+ (\alpha + \beta - \beta' - \gamma)\psi_8 \sin(\gamma - \alpha)\pi + (-2\beta')\psi_{10} \sin(\gamma - \alpha - \beta)\pi = 0,$
- (2, 5, 9, 10) $(\alpha)\psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $- [(\alpha) \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi + (\beta - \beta' + \gamma) \sin \alpha\pi] \psi_5$
 $- (\beta - \beta' + \gamma)\psi_9 \sin(\alpha - \gamma)\pi - (-2\alpha + \gamma - 2\beta')\psi_{10} \sin \beta\pi = 0,$
- (2, 6, 7, 8) $\psi_2 \sin \alpha\pi + (-\beta')\psi_6 \sin(\alpha + \beta - \gamma)\pi$
 $+ (\gamma - \alpha + \beta)\psi_7 \sin \beta'\pi + \psi_8 \sin(\alpha - \gamma)\pi = 0,$
- (2, 6, 7, 9) $\psi_2 \sin \alpha\pi + (\alpha - \beta' - \gamma)\psi_6 \sin \beta\pi + (\beta)\psi_7 \sin(\alpha + \beta' - \gamma)\pi$
 $+ \psi_9 \sin(\alpha - \gamma)\pi = 0,$
- (2, 6, 8, 9) $(\beta')\psi_2 \sin \alpha\pi + (-\beta')\psi_6 \sin(\alpha + \beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $+ \psi_8 \sin(\alpha + \beta' - \gamma)\pi - (\gamma - \alpha)\psi_9 \sin \beta'\pi = 0,$
- (2, 6, 8, 10) $\psi_2 \sin \alpha\pi + [(\beta - \beta' - \gamma) \sin \alpha\pi + (-\alpha) \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi] \psi_6$
 $+ \psi_8 \sin(\alpha - \gamma)\pi - (-2\alpha)\psi_{10} \sin \beta'\pi = 0,$
- (2, 6, 9, 10) $(\gamma)\psi_2 \sin \alpha\pi + [(\alpha - \gamma) \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi + (\beta - \beta') \sin \alpha\pi] \psi_6$
 $+ (\gamma)\psi_9 \sin(\alpha - \gamma)\pi - (-\alpha)\psi_{10} \sin(\alpha + \beta' - \gamma)\pi = 0,$
- (2, 7, 8, 9) $(-\beta)\psi_2 \sin \alpha\pi + (\beta)\psi_7 \sin(\alpha + \beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $- (\alpha - \gamma)\psi_8 \sin \beta\pi + \psi_9 \sin(\alpha + \beta - \gamma)\pi = 0,$
- (2, 7, 8, 10) $(-\gamma)\psi_2 \sin \alpha\pi + [(\gamma - \alpha) \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi + (\beta - \beta') \sin \alpha\pi] \psi_7$
 $+ (-\gamma)\psi_8 \sin(\alpha - \gamma)\pi - (-\alpha - \beta - \beta')\psi_{10} \sin(\alpha + \beta - \gamma)\pi = 0,$
- (2, 7, 9, 10) $\psi_2 \sin \alpha\pi + [(\beta - \beta' + \gamma) \sin \alpha\pi + (\alpha) \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi] \psi_7$
 $+ \psi_9 \sin(\alpha - \gamma)\pi + (-2\alpha - \beta - \beta')\psi_{10} \sin \beta\pi = 0,$

- (2, 8, 9, 10) $2i\psi_2 \sin \alpha \pi \sin(\beta + \beta' - \gamma) \pi$
 $- [(\alpha - \gamma) \sin(\beta + \beta' - \gamma) \pi + (\beta - \beta') \sin \alpha \pi] \psi_8$
 $- [(\gamma - \alpha) \sin(\beta + \beta' - \gamma) \pi + (\beta - \beta') \sin \alpha \pi] \psi_9$
 $+ (\alpha - \beta') \psi_{10} \sin(\alpha + \beta + \beta' - \gamma) \pi = 0,$
- (3, 4, 5, 6) $\psi_3 \sin(\gamma - \alpha) \pi + (\beta') \psi_4 \sin(\beta' - \alpha) \pi - (\beta' - \alpha) \psi_5 \sin \beta' \pi$
 $- (-\gamma) \psi_6 \sin(\beta + \beta' - \alpha) \pi = 0,$
- (3, 4, 5, 7) $\psi_3 \sin(\gamma - \alpha) \pi - (\alpha - \beta) \psi_4 \sin \beta \pi + (-\beta) \psi_5 \sin(\beta - \alpha) \pi$
 $- (\gamma) \psi_7 \sin(\beta + \beta' - \alpha) \pi = 0,$
- (3, 4, 5, 8) $\psi_3 \sin(\gamma - \beta - \beta') \pi + (\alpha - \beta) \psi_4 \sin(\beta' - \alpha) \pi$
 $- (-\beta) \psi_5 \sin \beta' \pi + (\alpha - \gamma) \psi_8 \sin(\beta + \beta' - \alpha) \pi = 0,$
- (3, 4, 5, 9) $\psi_3 \sin(\gamma - \beta - \beta') \pi - (\beta') \psi_4 \sin \beta \pi + (\beta' - \alpha) \psi_5 \sin(\beta - \alpha) \pi$
 $+ (\gamma - \alpha) \psi_9 \sin(\beta + \beta' - \alpha) \pi = 0,$
- (3, 4, 6, 7) $\psi_3 \sin(\gamma - \alpha) \pi - \psi_4 \sin \alpha \pi + (-\beta' - \gamma) \psi_6 \sin(\alpha - \beta) \pi$
 $- (\beta + \gamma - \alpha) \psi_7 \sin \beta' \pi = 0,$
- (3, 4, 6, 9) $\psi_3 \sin(\gamma - \alpha - \beta') \pi - (\beta') \psi_4 \sin \alpha \pi$
 $- (-\gamma) \psi_6 \sin(\beta - \alpha) \pi + (\gamma - \alpha) \psi_9 \sin \beta' \pi = 0,$
- (3, 4, 6, 10) $\psi_3 \sin(\gamma - \alpha) \pi - \psi_4 \sin \alpha \pi - (-\gamma) \psi_6 \sin(\beta + \beta' - \alpha) \pi$
 $+ (-2\alpha) \psi_{10} \sin \beta' \pi = 0,$
- (3, 4, 7, 8) $\psi_3 \sin(\gamma - \beta) \pi - (\alpha - \beta) \psi_4 \sin \alpha \pi$
 $- (\gamma) \psi_7 \sin \beta' \pi + (\alpha - \gamma) \psi_8 \sin(\beta - \alpha) \pi = 0,$
- (3, 4, 7, 10) $\psi_3 \sin(\gamma - \alpha) \pi - \psi_4 \sin \alpha \pi - (\gamma) \psi_7 \sin(\beta + \beta' - \alpha) \pi$
 $+ (-\alpha - \beta - \beta') \psi_{10} \sin(\alpha - \beta) \pi = 0,$
- (3, 4, 8, 9) $\psi_3 \sin(\gamma - \beta - \beta') \pi - (\alpha + \beta' - \beta) \psi_4 \sin \alpha \pi$
 $- (\alpha + \beta' - \gamma) \psi_8 \sin(\alpha - \beta) \pi + (\gamma - \beta) \psi_9 \sin \beta' \pi = 0,$
- (3, 4, 8, 10) $\psi_3 \sin(\beta + \beta' - \gamma) \pi + (\alpha - \beta - \beta') \sin \alpha \pi$
 $- (\alpha - \gamma) \psi_8 \sin(\beta + \beta' - \alpha) \pi - (-\alpha - \beta - \beta') \psi_{10} \sin \beta' \pi = 0,$
- (3, 4, 9, 10) $\psi_3 \sin(\beta + \beta' - \gamma) \pi + (\beta + \beta' - \alpha) \psi_4 \sin \alpha \pi$
 $- (\gamma - \alpha) \psi_9 \sin(\beta + \beta' - \alpha) \pi + (-2\alpha) \psi_{10} \sin(\beta - \alpha) \pi = 0,$
- (3, 5, 6, 7) $\psi_3 \sin(\gamma - \alpha) \pi - \psi_5 \sin \alpha \pi - (\alpha - \beta' - \gamma) \psi_6 \sin \beta \pi$
 $+ (\beta + \gamma) \psi_7 \sin(\alpha - \beta') \pi = 0,$
- (3, 5, 6, 9) $\psi_3 \sin(\gamma - \beta') \pi - (\beta' - \alpha) \psi_5 \sin \alpha \pi - (-\gamma) \psi_6 \sin \beta \pi$
 $+ (\gamma - \alpha) \psi_9 \sin(\beta' - \alpha) \pi = 0,$
- (3, 5, 6, 10) $\psi_3 \sin(\gamma - \alpha) \pi - \psi_5 \sin \alpha \pi - (-\gamma) \psi_6 \sin(\beta + \beta' - \alpha) \pi$
 $- (-\alpha) \psi_{10} \sin(\alpha - \beta') \pi = 0,$
- (3, 5, 7, 8) $\psi_3 \sin(\gamma - \alpha - \beta) \pi - (-\beta) \psi_5 \sin \alpha \pi - (\gamma) \psi_7 \sin(\beta' - \alpha) \pi$
 $+ (\alpha - \gamma) \psi_8 \sin \beta \pi = 0,$
- (3, 5, 7, 10) $\psi_3 \sin(\gamma - \alpha) \pi - \psi_5 \sin \alpha \pi - (\gamma) \psi_7 \sin(\beta + \beta' - \alpha) \pi$
 $- (-\beta - \beta') \psi_{10} \sin \beta \pi = 0,$

- (3, 5, 8, 9) $\psi_3 \sin(\gamma - \beta - \beta')\pi - (\beta' - \beta - \alpha)\psi_5 \sin \alpha\pi$
 $+ (\beta' - \gamma)\psi_8 \sin \beta\pi - (\gamma - \alpha - \beta)\psi_9 \sin(\alpha - \beta')\pi = 0,$
- (3, 5, 8, 10) $\psi_3 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi + (\alpha - \beta - \beta')\psi_5 \sin \alpha\pi$
 $- (\alpha - \gamma)\psi_8 \sin(\beta + \beta' - \alpha)\pi - (-\beta - \beta')\psi_{10} \sin(\beta' - \alpha)\pi = 0,$
- (3, 5, 9, 10) $\psi_3 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi + (\beta + \beta' - \alpha)\psi_5 \sin \alpha\pi$
 $- (\gamma - \alpha)\psi_9 \sin(\beta + \beta' - \alpha)\pi + (-\alpha)\psi_{10} \sin \beta\pi = 0,$
- (3, 6, 8) $\psi_3 - (-\beta - \beta')\psi_6 - \psi_8 = 0,$
- (3, 6, 9, 10) $(\gamma)\psi_3 - (\beta + \beta' - \gamma)\psi_6 - (\gamma)\psi_9 + (\beta' - \alpha)\psi_{10} = 0,$
- (3, 7, 8, 10) $(-\gamma)\psi_3 - (\gamma - \beta - \beta')\psi_7 - (-\gamma)\psi_8 - (-\alpha - 2\beta - \beta')\psi_{10} = 0,$
- (3, 7, 9) $\psi_3 - (\beta + \beta')\psi_7 - \psi_9 = 0,$
- (3, 8, 9, 10) $2\psi_3 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi - (\beta + \beta' - \gamma)\psi_8$
 $+ (\gamma - \beta - \beta')\psi_9 - (-\alpha - \beta)\psi_{10} = 0,$
- (4, 5, 6, 7) $(\beta' - \beta)\psi_4 - (\beta' - \beta)\psi_5 - (-\gamma)\psi_6 + (\gamma)\psi_7 = 0,$
- (4, 5, 6, 8) $\psi_4 \sin(\beta' - \alpha)\pi - (-\alpha)\psi_5 \sin \beta'\pi$
 $- (-\alpha - \beta')\psi_6 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi + (-\beta')\psi_8 \sin(\gamma - \alpha)\pi = 0,$
- (4, 5, 6, 9) $\psi_4 \sin(\beta' - \gamma)\pi + (-\alpha)\psi_5 \sin(\gamma - \alpha - \beta')\pi$
 $- (-\beta' - \gamma)\psi_6 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi + (\gamma - \alpha - \beta')\psi_9 \sin(\gamma - \alpha)\pi = 0,$
- (4, 5, 7, 8) $(\alpha)\psi_4 \sin(\gamma - \alpha - \beta)\pi + \psi_5 \sin(\beta - \gamma)\pi$
 $- (\beta + \gamma)\psi_7 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi + (\alpha + \beta - \gamma)\psi_8 \sin(\gamma - \alpha)\pi = 0,$
- (4, 5, 7, 9) $(\alpha)\psi_4 \sin \beta\pi + \psi_5 \sin(\alpha - \beta)\pi + (\alpha + \beta)\psi_7 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $+ (\beta)\psi_9 \sin(\alpha - \gamma)\pi = 0,$
- (4, 5, 8, 9) $(\alpha)\psi_4 - (-\alpha)\psi_5 + (\alpha - \gamma)\psi_8 - (\gamma - \alpha)\psi_9 = 0,$
- (4, 5, 10) $\psi_4 - \psi_5 - (-\alpha - \beta')\psi_{10} = 0,$
- (4, 6, 7, 8) $\psi_4 \sin \alpha\pi + (-\alpha - \beta')\psi_6 \sin(\beta - \gamma)\pi$
 $+ (\beta + \gamma - \alpha)\psi_7 \sin \beta'\pi + \psi_8 \sin(\alpha - \gamma)\pi = 0,$
- (4, 6, 7, 9) $\psi_4 \sin \alpha\pi + (-\beta' - \gamma)\psi_6 \sin(\beta - \alpha)\pi$
 $+ (\beta)\psi_7 \sin(\alpha + \beta' - \gamma)\pi + \psi_9 \sin(\alpha - \gamma)\pi = 0,$
- (4, 6, 8, 9) $(\beta')\psi_4 \sin \alpha\pi + (-\alpha - \beta')\psi_6 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $+ \psi_8 \sin(\alpha + \beta' - \gamma)\pi - (\gamma - \alpha)\psi_9 \sin \beta'\pi = 0,$
- (4, 6, 8, 10) $\psi_4 \sin \alpha\pi + (-\alpha)\psi_6 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $+ \psi_8 \sin(\alpha - \gamma)\pi - (-2\alpha)\psi_{10} \sin \beta'\pi = 0,$
- (4, 6, 9, 10) $(\gamma)\psi_4 \sin \alpha\pi + (\alpha - \gamma)\psi_6 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $+ (\gamma)\psi_9 \sin(\alpha - \gamma)\pi - (-\alpha)\psi_{10} \sin(\alpha + \beta' - \gamma)\pi = 0,$
- (4, 7, 8, 9) $(-\beta)\psi_4 \sin \alpha\pi + (\beta - \alpha)\psi_7 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $+ (-\gamma)\psi_8 \sin(\alpha - \beta)\pi + (-\alpha)\psi_9 \sin(\beta - \gamma)\pi = 0,$
- (4, 7, 8, 10) $(-\gamma)\psi_4 \sin \alpha\pi + (\gamma - \alpha)\psi_7 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $+ (-\gamma)\psi_8 \sin(\alpha - \gamma)\pi + (-2\alpha - \beta - \beta')\psi_{10} \sin(\beta - \gamma)\pi = 0,$

- (4, 7, 9, 10) $\psi_4 \sin \alpha \pi + (\alpha) \psi_7 \sin(\beta + \beta' - \gamma) \pi$
 $+ \psi_9 \sin(\alpha - \gamma) \pi + (-\alpha - \beta - \beta') \psi_{10} \sin(\beta - \alpha) \pi = 0,$
- (4, 8, 9, 10) $2i \psi_4 \sin \alpha \pi + (\alpha - \gamma) \psi_8 - (\gamma - \alpha) \psi_9 + (-2\alpha - \beta') \psi_{10} = 0,$
- (5, 6, 7, 8) $\psi_5 \sin \alpha \pi + (-\beta') \psi_6 \sin(\alpha + \beta - \gamma) \pi$
 $+ (\beta + \gamma) \psi_7 \sin(\beta' - \alpha) \pi + \psi_8 \sin(\alpha - \gamma) \pi = 0,$
- (5, 6, 7, 9) $\psi_5 \sin \alpha \pi + (\alpha - \beta' - \gamma) \psi_6 \sin \beta \pi$
 $+ (\alpha + \beta) \psi_7 \sin(\beta' - \gamma) \pi + \psi_9 \sin(\alpha - \gamma) \pi = 0,$
- (5, 6, 8, 9) $(\beta') \psi_5 \sin \alpha \pi + (\alpha - \beta') \psi_6 \sin(\beta + \beta' - \gamma) \pi$
 $+ (\alpha) \psi_8 \sin(\beta' - \gamma) \pi + (\gamma) \psi_9 \sin(\alpha - \beta') \pi = 0,$
- (5, 6, 8, 10) $\psi_5 \sin \alpha \pi + (-\alpha) \psi_6 \sin(\beta + \beta' - \gamma) \pi$
 $+ \psi_8 \sin(\alpha - \gamma) \pi - (-\alpha) \psi_{10} \sin(\beta' - \alpha) \pi = 0,$
- (5, 6, 9, 10) $(\gamma) \psi_5 \sin \alpha \pi + (\alpha - \gamma) \psi_6 \sin(\beta + \beta' - \gamma) \pi$
 $+ (\gamma) \psi_9 \sin(\alpha - \gamma) \pi - \psi_{10} \sin(\beta' - \gamma) \pi = 0,$
- (5, 7, 8, 9) $(-\beta) \psi_5 \sin \alpha \pi + (\alpha + \beta) \psi_7 \sin(\beta + \beta' - \gamma) \pi$
 $- (\alpha - \gamma) \psi_8 \sin \beta \pi + \psi_9 \sin(\alpha + \beta - \gamma) \pi = 0,$
- (5, 7, 8, 10) $(-\gamma) \psi_5 \sin \alpha \pi + (\gamma - \alpha) \psi_7 \sin(\beta + \beta' - \gamma) \pi$
 $+ (-\gamma) \psi_8 \sin(\alpha - \gamma) \pi + (-\alpha - \beta - \beta') \psi_{10} \sin(\alpha + \beta - \gamma) \pi = 0,$
- (5, 7, 9, 10) $\psi_5 \sin \alpha \pi + (\alpha) \psi_7 \sin(\beta + \beta' - \gamma) \pi + \psi_9 \sin(\alpha - \gamma) \pi$
 $+ (-\beta - \beta') \psi_{10} \sin \beta \pi = 0,$
- (5, 8, 9, 10) $2i \psi_5 \sin \alpha \pi + (\alpha - \gamma) \psi_8 - (\gamma - \alpha) \psi_9 + (-\beta') \psi_{10} = 0,$
- (6, 7, 8, 9) $(-\beta - \beta') \psi_6 - (\beta + \beta') \psi_7 + \psi_8 - \psi_9 = 0,$
- (6, 7, 10) $(-\gamma) \psi_6 - (\gamma) \psi_7 - (-\alpha - \beta) \psi_{10} = 0,$
- (6, 8, 9, 10) $2i \psi_6 \sin(\beta + \beta' - \gamma) \pi - (\gamma) \psi_8 + (\gamma) \psi_9 - (\beta' - \alpha) \psi_{10} = 0,$
- (7, 8, 9, 10) $2i \psi_7 \sin(\beta + \beta' - \gamma) \pi - (-\gamma) \psi_8 + (-\gamma) \psi_9 - (-\alpha - 2\beta - \beta') \psi_{10} = 0.$

Remarque. — A chaque formule de ce Tableau en correspond une autre du même Tableau, que l'on peut déduire de la première par les règles suivantes :

1° Dans les coefficients de $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5, \psi_6, \psi_7, \psi_8, \psi_9$ on change i en $-i$ en laissant $\alpha, \beta, \beta', \gamma$ invariables, puis on permute β et β', ψ_4 et ψ_5, ψ_6 et ψ_7, ψ_8 et ψ_9 ;

2° On multiplie le coefficient de ψ_{10} par $-(2\alpha + \beta + \beta')$, puis on change i en $-i$, en laissant $\alpha, \beta, \beta', \gamma$ invariables; puis enfin on permute β et β' .

$(-\alpha - \beta)$ devient par exemple $-(-\alpha - \beta)$; $(-\alpha - \beta')$ devient $-(-\alpha - \beta')$.

$(-\alpha - \beta - \beta')$ devient $-(-\alpha)$, lequel devient $+(-\alpha - \beta - \beta')$, etc., etc.

Certaines formules se correspondent à elles-mêmes.

TABLEAU VI (voir p. 72).

Remarque I. — Les formules de ce Tableau, qui ne contiennent ni ψ_6 , ni ψ_7 , ni ψ_{10} , sont les mêmes que dans le Tableau V.

Remarque II. — Dans les formules qui contiennent ψ_6 , ou ψ_7 , ou ψ_8 et ψ_7 , sans contenir ψ_{10} , il suffira d'ajouter $2\beta'$ à la quantité entre parenthèses dans le coefficient de ψ_6 , et de retrancher 2β à la quantité entre parenthèses dans le coefficient de ψ_7 . Cela tient à ce que le point $\frac{y}{x}$ passe de la partie inférieure du plan dans la partie supérieure.

Exemple. — La relation

$$\psi_1 - (\alpha)\psi_2 - (\alpha - \gamma)\psi_3 - 2i(\alpha - \beta' - \gamma)\psi_6 \sin \beta\pi = 0$$

du Tableau V devient dans le Tableau VI

$$\psi_1 - (\alpha)\psi_2 - (\alpha - \gamma)\psi_3 - 2i(\alpha + \beta' - \gamma)\psi_6 \sin \beta\pi = 0.$$

Cela posé, voici les relations du Tableau VI :

(1, 2, 3, 4), (1, 2, 3, 5) (voir le Tableau V),

(1, 2, 3, 6), (1, 2, 3, 7) ⁽¹⁾,

(1, 2, 3, 8), (1, 2, 3, 9) (voir le Tableau V),

$$\begin{aligned} (1, 2, 3, 10) \quad & \psi_1 \sin(\beta + \beta')\pi - [(\beta' - \alpha) \sin \beta\pi + (\alpha - \beta) \sin \beta'\pi] \psi_2 \\ & - [(\gamma - \alpha - \beta') \sin \beta\pi + (\alpha + \beta - \gamma) \sin \beta'\pi] \psi_3 \\ & - 2i(\beta')\psi_{10} \sin \beta\pi \sin \beta'\pi = 0, \end{aligned}$$

(1, 2, 4, 5) (voir le Tableau V), (1, 2, 4, 7) ⁽¹⁾, (1, 2, 4, 9) (voir le Tableau V),

$$\begin{aligned} (1, 2, 4, 10) \quad & \psi_1 \sin(\gamma - \alpha)\pi + (\beta' - \beta)\psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi \\ & - [(\gamma - \beta) \sin \beta\pi + (2\alpha + \beta' - \gamma) \sin \beta'\pi] \psi_4 \\ & + (\alpha + 2\beta' - \gamma)\psi_{10} \sin \beta'\pi = 0, \end{aligned}$$

(1, 2, 5, 6) ⁽¹⁾, (1, 2, 5, 8) (voir le Tableau V),

$$\begin{aligned} (1, 2, 5, 10) \quad & (\beta - \beta')\psi_1 \sin(\gamma - \alpha)\pi + \psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi \\ & - (-\alpha)[(\gamma - \alpha - \beta') \sin \beta\pi + (\alpha + \beta - \gamma) \sin \beta'\pi] \psi_5 - (\gamma - \alpha)\psi_{10} = 0, \end{aligned}$$

⁽¹⁾ Voir la remarque II, p. 101.

- (1, 2, 6, 7), (1, 2, 6, 8), (1, 2, 6, 9) ⁽¹⁾,
 (1, 2, 6, 10) $(-\beta')\psi_1 \sin(\gamma - \alpha)\pi$
 $- [(\alpha - \beta') \sin(\gamma - \alpha)\pi + (\alpha + \beta' - \gamma) \sin \alpha\pi] \psi_2$
 $- [\sin \beta\pi + (2\alpha + \beta + \beta' - 2\gamma) \sin \beta'\pi] \psi_6 + (\alpha + \beta' - \gamma) \psi_{10} \sin \beta'\pi = 0,$
- (1, 2, 7, 8), (1, 2, 7, 9) ⁽¹⁾,
 (1, 2, 7, 10) $(-\beta)\psi_1 \sin(\gamma - \alpha)$
 $- [(\beta - \alpha) \sin(\gamma - \alpha)\pi + (\gamma - \alpha - \beta) \sin \alpha\pi] \psi_2$
 $+ [\sin \beta'\pi + (2\gamma - 2\alpha - \beta - \beta') \sin \beta\pi] \psi_7 - (\gamma - \alpha - \beta') \psi_{10} \sin \beta'\pi = 0,$
- (1, 2, 8, 9) (*voir le Tableau V*),
 (1, 2, 8, 10) $\psi_1 \sin(\alpha + \beta + \beta' - \gamma)\pi - \psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $- [(-\beta') \sin \beta\pi + (2\alpha - 2\gamma + \beta) \sin \beta'\pi] \psi_8$
 $- (\alpha + \beta + \beta' - \gamma) \psi_{10} \sin \beta'\pi = 0,$
- (1, 2, 9, 10) $\psi_1 \sin(\alpha + \beta + \beta' - \gamma)\pi - \psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $- [(\beta) \sin \beta'\pi + (2\gamma - 2\alpha - \beta') \sin \beta\pi] \psi_9 + (\gamma - \alpha) \psi_{10} \sin \beta\pi = 0,$
- (1, 3, 4, 5) (*voir le Tableau V*), (1, 3, 4, 6), (1, 3, 4, 7) ⁽¹⁾,
 (1, 3, 4, 9) (*voir le Tableau V*),
 (1, 3, 4, 10) $\psi_1 \sin(\beta + \beta' - \alpha)\pi - \psi_3 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $- [(2\alpha - \beta) \sin \beta'\pi + (\beta') \sin \beta\pi] \psi_4 + (\alpha + \beta' - \beta) \psi_{10} \sin \beta'\pi = 0,$
- (1, 3, 5, 6), (1, 3, 5, 7) ⁽¹⁾, (1, 3, 5, 8) (*voir le Tableau V*),
 (1, 3, 5, 10) $\psi_1 \sin(\beta + \beta' - \alpha)\pi - \psi_3 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $- [(-\beta) \sin \beta'\pi + (\beta' - 2\alpha) \sin \beta\pi] \psi_5 - (2\beta' - \alpha) \psi_{10} \sin \beta\pi = 0,$
- (1, 3, 6, 7), (1, 3, 6, 9) ⁽¹⁾,
 (1, 3, 6, 10) $\psi_1 \sin \alpha\pi - [(\alpha - \gamma) \sin \alpha\pi + (\alpha - 2\beta') \sin(\gamma - \alpha)\pi] \psi_3$
 $+ [(2\alpha - \beta - \gamma) \sin \beta'\pi + (\beta' - \gamma) \sin \beta\pi] \psi_6 - (\alpha) \psi_{10} \sin \beta'\pi = 0,$
- (1, 3, 7, 8) ⁽¹⁾,
 (1, 3, 7, 10) $\psi_1 \sin \alpha\pi - [(\gamma - \alpha) \sin \alpha\pi + (2\beta - \alpha) \sin(\gamma - \alpha)\pi] \psi_3$
 $+ [(\gamma - 2\alpha + \beta') \sin \beta\pi + (\gamma - \beta) \sin \beta'\pi] \psi_7 + (\beta + \beta' - \alpha) \psi_{10} \sin \beta\pi = 0,$
- (1, 3, 8, 9) (*voir le Tableau V*),
 (1, 3, 8, 10) $\psi_1 \sin \alpha\pi + (\beta - \beta') \psi_3 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $- [(\beta - \gamma) \sin \beta\pi + (2\alpha - \beta' - \gamma) \sin \beta'\pi] \psi_8 - (\alpha) \psi_{10} \sin \beta'\pi = 0,$
- (1, 3, 9, 10) $\psi_1 \sin \alpha\pi + (\beta - \beta') \psi_3 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $- [(\gamma - \beta') \sin \beta'\pi + (\gamma + \beta - 2\alpha) \sin \beta\pi] \psi_9$
 $+ (\beta + \beta' - \alpha) \psi_{10} \sin \beta\pi = 0,$
- (1, 4, 5, 6), (1, 4, 5, 7), (1, 4, 6, 7), (1, 4, 6, 9) ⁽¹⁾,

⁽¹⁾ Voir la remarque II, p. 101.

- (1, 4, 6, 10) $(-\alpha - \beta')\psi_1 \sin(\gamma - \alpha)\pi$
 $+ [(-\beta') \sin(\alpha - \gamma)\pi - (\beta' - \gamma) \sin \alpha\pi] \psi_4$
 $- (\beta' - \alpha - \gamma)\psi_6 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi + (\beta' - \gamma)\psi_{10} \sin \beta'\pi = 0,$
- (1, 4, 7, 9) ⁽¹⁾,
- (1, 4, 7, 10) $(\beta - \alpha)\psi_1 \sin(\gamma - \alpha)\pi + [(\alpha) \sin(\beta - \gamma)\pi - (\gamma - \alpha) \sin \beta\pi] \psi_4$
 $- (\gamma - \alpha - \beta)\psi_7 \sin(\beta + \beta' - \gamma) - (\beta')\psi_{10} \sin(\beta - \gamma)\pi = 0,$
- (1, 4, 8) (voir le Tableau V),
- (1, 4, 9, 10) $\psi_1 - (\alpha)\psi_4 - (\gamma - \alpha)\psi_9 + (\beta')\psi_{10} = 0,$
- (1, 5, 6, 7), (1, 5, 6, 8) ⁽¹⁾,
- (1, 5, 6, 10) $(\alpha - \beta')\psi_1 \sin(\gamma - \alpha)\pi$
 $+ [(-\alpha) \sin(\beta' - \gamma)\pi - (\alpha - \gamma) \sin \beta'\pi] \psi_5$
 $- (\alpha + \beta' - \gamma)\psi_6 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi + (\beta')\psi_{10} \sin(\beta' - \gamma)\pi = 0,$
- (1, 5, 7, 8) ⁽¹⁾,
- (1, 5, 7, 10) $(\alpha + \beta)\psi_1 \sin(\gamma - \alpha)\pi + [(\beta) \sin(\alpha - \gamma)\pi - (\gamma - \beta) \sin \alpha\pi] \psi_5$
 $- (\gamma - \alpha - \beta)\psi_7 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi - (\beta' + \gamma)\psi_{10} \sin \beta\pi = 0,$
- (1, 5, 8, 10) $\psi_1 - (-\alpha)\psi_5 - (\alpha - \gamma)\psi_8 - (\beta')\psi_{10} = 0,$
- (1, 5, 9) (voir le Tableau V), (1, 6, 7, 8), (1, 6, 7, 9) ⁽¹⁾,
- (1, 6, 7, 10) $2i\psi_1 \sin \alpha\pi \sin(\gamma - \alpha)\pi$
 $+ [(\beta + \beta' - \gamma) \sin(\gamma - \alpha)\pi + (\beta' - \beta) \sin \alpha\pi] \psi_6$
 $+ [(\gamma - \beta - \beta') \sin(\gamma - \alpha)\pi + (\beta' - \beta) \sin \alpha\pi] \psi_7 - (\beta')\psi_{10} \sin \gamma\pi = 0,$
- (1, 6, 8, 9) ⁽¹⁾,
- (1, 6, 8, 10) $\psi_1 \sin \alpha\pi + \psi_6 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $- [(\alpha - 2\beta') \sin(\gamma - \alpha)\pi + (\alpha - \gamma) \sin \alpha\pi] \psi_8 - (\alpha)\psi_{10} \sin \beta'\pi = 0,$
- (1, 6, 9, 10) $\psi_1 \sin \alpha\pi + \psi_6 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $- [(2\gamma - \alpha - 2\beta') \sin(\gamma - \alpha)\pi + (\gamma - \alpha) \sin \alpha\pi] \psi_9$
 $+ (\gamma - \alpha)\psi_{10} \sin(\gamma - \beta')\pi = 0,$
- (1, 7, 8, 9) ⁽¹⁾,
- (1, 7, 8, 10) $\psi_1 \sin \alpha\pi + \psi_7 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $- [(\alpha + 2\beta - 2\gamma) \sin(\gamma - \alpha)\pi + (\alpha - \gamma) \sin \alpha\pi] \psi_8$
 $- (\alpha + \beta + \beta' - \gamma)\psi_{10} \sin(\gamma - \beta)\pi = 0,$
- (1, 7, 9, 10) $\psi_1 \sin \alpha\pi + \psi_7 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $- [(2\beta - \alpha) \sin(\gamma - \alpha)\pi + (\gamma - \alpha) \sin \alpha\pi] \psi_9$
 $+ (\beta + \beta' - \alpha)\psi_{10} \sin \beta\pi = 0,$
- (2, 3, 4, 5) (voir le Tableau V), (2, 3, 4, 7) ⁽¹⁾,
- (2, 3, 4, 8), (2, 3, 4, 9) (voir le Tableau V),

⁽¹⁾ Voir la remarque II, p. 101.

- (2, 3, 4, 10) $\psi_2 \sin(\beta + \beta' - \alpha)\pi + (\beta - \beta')\psi_3 \sin(\gamma - \alpha)\pi$
 $- (\alpha)\psi_4 \sin(\beta + \beta')\pi + (\beta + \beta')\psi_{10} \sin\beta'\pi = 0,$
- (2, 3, 5, 6) ⁽¹⁾, (2, 3, 5, 8), (2, 3, 5, 9) (*voir le Tableau V*),
- (2, 3, 5, 10) $\psi_2 \sin((\beta + \beta' - \alpha)\pi + (\beta - \beta')\psi_3 \sin(\gamma - \alpha)\pi$
 $- (\alpha)\psi_5 \sin(\beta + \beta')\pi - \psi_{10} \sin\beta\pi = 0,$
- (2, 3, 6, 7), (2, 3, 6, 9) ⁽¹⁾,
- (2, 3, 6, 10) $\psi_2 \sin\alpha\pi - (-2\beta')\psi_3 \sin(\gamma - \alpha)\pi$
 $+ (\alpha - \gamma)\psi_6 \sin(\beta + \beta')\pi - \psi_{10} \sin\beta'\pi = 0,$
- (2, 3, 7, 8) ⁽¹⁾,
- (2, 3, 7, 10) $\psi_2 \sin\alpha\pi - (2\beta)\psi_3 \sin(\gamma - \alpha)\pi$
 $+ (\gamma - \alpha)\psi_7 \sin(\beta + \beta')\pi + (\beta + \beta')\psi_{10} \sin\beta\pi = 0,$
- (2, 3, 8, 9) (*voir le Tableau V*),
- (2, 3, 8, 10) $\psi_2 \sin\alpha\pi + (\beta - \beta')\psi_3 \sin(\alpha + \beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $- (\alpha + \beta + \beta' - \gamma)\psi_8 \sin(\beta + \beta')\pi - \psi_{10} \sin\beta'\pi = 0,$
- (2, 3, 9, 10) $\psi_2 \sin\alpha\pi + (\beta - \beta')\psi_3 \sin(\alpha + \beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $- (\gamma - \alpha - \beta - \beta')\psi_9 \sin(\beta + \beta')\pi + (\beta + \beta')\psi_{10} \sin\beta\pi = 0,$
- (2, 4, 5, 8), (2, 4, 5, 9) (*voir le Tableau V*), (2, 4, 6), (2, 4, 7, 8), (2, 4, 7, 9) ⁽¹⁾,
- (2, 4, 7, 10) $(-\alpha)\psi_2 - (\alpha)\psi_4 + (\gamma - \alpha - \beta - \beta')\psi_7 + (\beta')\psi_{10} = 0,$
- (2, 4, 8, 9) (*voir le Tableau V*),
- (2, 4, 8, 10) $\psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi - (\alpha)\psi_4 \sin(\alpha + \beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $+ (\alpha - \gamma + \beta - \beta')\psi_8 \sin(\gamma - \alpha)\pi + (\alpha + \beta + \beta' - \gamma)\psi_{10} \sin\beta'\pi = 0,$
- (2, 4, 9, 10) $\psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi - (\alpha)\psi_4 \sin(\alpha + \beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $+ (\gamma - \alpha + \beta - \beta')\psi_9 \sin(\gamma - \alpha)\pi + (\beta + \beta')\psi_{10} \sin(\alpha + \beta' - \gamma)\pi = 0,$
- (2, 5, 6, 8), (2, 5, 6, 9) ⁽¹⁾,
- (2, 5, 6, 10) $(\alpha)\psi_2 - (-\alpha)\psi_5 + (\alpha + \beta + \beta' - \gamma)\psi_6 - (\beta')\psi_{10} = 0,$
- (2, 5, 7) ⁽¹⁾, (2, 5, 8, 9) (*voir le Tableau V*),
- (2, 5, 8, 10) $\psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi - (-\alpha)\psi_5 \sin(\alpha + \beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $+ (\alpha - \gamma + \beta - \beta')\psi_8 \sin(\gamma - \alpha)\pi - \psi_{10} \sin(\alpha + \beta - \gamma)\pi = 0,$
- (2, 5, 9, 10) $\psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi - (-\alpha)\psi_5 \sin(\alpha + \beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $+ (\gamma - \alpha + \beta - \beta')\psi_9 \sin(\gamma - \alpha)\pi - (\gamma - \alpha)\psi_{10} \sin\beta\pi = 0,$
- (2, 6, 7, 8), (2, 6, 7, 9) ⁽¹⁾,
- (2, 6, 7, 10) $2i\psi_2 \sin\alpha\pi + (\alpha + \beta + \beta' - \gamma)\psi_6 - (\gamma - \alpha - \beta - \beta')\psi_7 - (\beta')\psi_{10} = 0,$
- (2, 6, 8, 9) ⁽¹⁾,
- (2, 6, 8, 10) $\psi_2 \sin\alpha\pi + \psi_6 \sin(\alpha + \beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $- (-2\beta')\psi_8 \sin(\gamma - \alpha)\pi - \psi_{10} \sin\beta'\pi = 0,$

⁽¹⁾ Voir la remarque II, p. 101.

$$(2, 6, 9, 10) \psi_2 \sin \alpha \pi + \psi_6 \sin(\alpha + \beta + \beta' - \gamma) \pi \\ - (2\gamma - 2\alpha - 2\beta') \psi_9 \sin(\gamma - \alpha) \pi + (\gamma - \alpha) \psi_{10} \sin(\gamma - \alpha - \beta') \pi = 0,$$

$$(2, 7, 8, 9) \quad (1),$$

$$(2, 7, 8, 10) \psi_2 \sin \alpha \pi + \psi_7 \sin(\alpha + \beta + \beta' - \gamma) \pi \\ - (2\alpha + 2\beta - 2\gamma) \psi_8 \sin(\gamma - \alpha) \pi \\ - (\alpha - \gamma + \beta + \beta') \psi_{10} \sin(\gamma - \alpha - \beta) \pi = 0,$$

$$(2, 7, 9, 10) \psi_2 \sin \alpha \pi + \psi_7 \sin(\alpha + \beta + \beta' - \gamma) \pi \\ - (2\beta) \psi_9 \sin(\gamma - \alpha) \pi + (\beta + \beta') \psi_{10} \sin \beta \pi = 0,$$

$$(3, 4, 5, 6), (3, 4, 5, 7) \quad (1); \quad (3, 4, 5, 8), (3, 4, 5, 9) \quad (\text{voir le Tableau V}),$$

$$(3, 4, 6, 7), (3, 4, 6, 9) \quad (1),$$

$$(3, 4, 6, 10) (-\beta') \psi_3 \sin(\gamma - \alpha) \pi - (\beta') \psi_4 \sin \alpha \pi \\ - (\beta' - \gamma) \psi_6 \sin(\beta + \beta' - \alpha) + (\beta') \psi_{10} \sin \beta' \pi = 0,$$

$$(3, 4, 7, 8) \quad (1),$$

$$(3, 4, 7, 10) (\beta - \alpha) \psi_3 \sin(\gamma - \alpha) \pi - (\alpha - \beta) \psi_4 \sin \alpha \pi \\ - (\gamma - \alpha - \beta) \psi_7 \sin(\beta + \beta' - \alpha) \pi + (\beta') \psi_{10} \sin(\alpha - \beta) \pi = 0,$$

$$(3, 4, 8, 9) \quad (\text{voir le Tableau V}),$$

$$(3, 4, 8, 10) (\beta - \beta') \psi_3 \sin(\beta + \beta' - \gamma) \pi + (\alpha) \psi_4 \sin \alpha \pi \\ - (\alpha - \gamma + \beta - \beta') \psi_8 \sin(\beta + \beta' - \alpha) \pi - (\alpha) \psi_{10} \sin \beta' \pi = 0,$$

$$(3, 4, 9, 10) (\beta - \beta') \psi_3 \sin(\beta + \beta' - \gamma) \pi + (\alpha) \psi_4 \sin \alpha \pi \\ - (\gamma - \alpha + \beta - \beta') \psi_9 \sin(\beta + \beta' - \alpha) \pi - (\beta + \beta') \psi_{10} \sin(\alpha - \beta) \pi = 0,$$

$$(3, 5, 6, 7), (3, 5, 6, 9) \quad (1),$$

$$(3, 5, 6, 10) (\alpha - \beta') \psi_3 \sin(\gamma - \alpha) \pi - (\beta' - \alpha) \psi_5 \sin \alpha \pi \\ - (\alpha + \beta' - \gamma) \psi_6 \sin(\beta + \beta' - \alpha) \pi - (\beta') \psi_{10} \sin(\alpha - \beta') \pi = 0,$$

$$(3, 5, 7, 8) \quad (1),$$

$$(3, 5, 7, 10) (\beta) \psi_3 \sin(\gamma - \alpha) \pi - (-\beta) \psi_5 \sin \alpha \pi \\ - (\gamma - \beta) \psi_7 \sin(\beta + \beta' - \alpha) \pi - (\beta') \psi_{10} \sin \beta \pi = 0,$$

$$(3, 5, 8, 9) \quad (\text{voir le Tableau V}),$$

$$(3, 5, 8, 10) (\beta - \beta') \psi_3 \sin(\beta + \beta' - \gamma) \pi + (-\alpha) \psi_5 \sin \alpha \pi \\ - (\alpha - \gamma + \beta - \beta') \psi_8 \sin(\beta + \beta' - \alpha) \pi + \psi_{10} \sin(\alpha - \beta') \pi = 0,$$

$$(3, 5, 9, 10) (\beta - \beta') \psi_3 \sin(\beta + \beta' - \gamma) \pi + (-\alpha) \psi_5 \sin \alpha \pi \\ - (\gamma - \alpha + \beta - \beta') \psi_9 \sin(\beta + \beta' - \alpha) \pi + (\beta + \beta' - \alpha) \psi_{10} \sin \beta \pi = 0,$$

$$(3, 6, 7, 10) 2i(\beta - \beta') \psi_3 \sin(\gamma - \alpha) \pi + (\alpha - \gamma) \psi_6 - (\gamma - \alpha) \psi_7 - (\beta) \psi_{10} = 0,$$

$$(3, 6, 8) \quad (1),$$

(1) Voir la remarque II, p. 101.

$$(3, 6, 9, 10) (\alpha - \gamma)\psi_3 - (\alpha - \gamma + \beta' - \beta)\psi_6 - (\gamma - \alpha)\psi_9 + (\beta')\psi_{10} = 0,$$

$$(3, 7, 8, 10) (\gamma - \alpha)\psi_3 - (\gamma - \alpha + \beta' - \beta)\psi_7 - (\alpha - \gamma)\psi_8 - (\beta')\psi_{10} = 0,$$

$$(3, 7, 9), (4, 5, 6, 7), (4, 5, 6, 8), (4, 5, 6, 9), (4, 5, 7, 8), (4, 5, 7, 9) \quad (1),$$

$$(4, 5, 8, 9) \quad (\text{voir le Tableau V}),$$

$$(4, 5, 10) \quad (\alpha)\psi_4 - (-\alpha)\psi_5 - (\beta')\psi_{10} = 0,$$

$$(4, 6, 7, 8), (4, 6, 7, 9) \quad (1),$$

$$(4, 6, 7, 10) \quad 2i\psi_4 \sin \alpha\pi + (\beta + \beta' - \alpha - \gamma)\psi_6 - (\gamma - \alpha - \beta - \beta')\psi_7 - (\beta')\psi_{10} = 0,$$

$$(4, 6, 8, 9) \quad (1),$$

$$(4, 6, 8, 10) \quad \psi_4 \sin \alpha\pi + (-\alpha)\psi_6 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi \\ + (-2\beta')\psi_8 \sin(\alpha - \gamma)\pi - \psi_{10} \sin \beta'\pi = 0,$$

$$(4, 6, 9, 10) \quad \psi_4 \sin \alpha\pi + (-\alpha)\psi_6 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi \\ + (2\gamma - 2\alpha - 2\beta')\psi_9 \sin(\alpha - \gamma)\pi + (\gamma - \alpha)\psi_{10} \sin(\gamma - \alpha - \beta')\pi = 0,$$

$$(4, 7, 8, 9) \quad (\text{voir le Tableau V}),$$

$$(4, 7, 8, 10) \quad (\gamma - \beta)\psi_4 \sin \alpha\pi + (\gamma - \alpha - \beta)\psi_7 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi \\ + (\beta - \gamma)\psi_8 \sin(\alpha - \gamma)\pi + (\beta')\psi_{10} \sin(\beta - \gamma)\pi = 0,$$

$$(4, 7, 9, 10) \quad (\alpha - \beta)\psi_4 \sin \alpha\pi + (-\beta)\psi_7 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi \\ + (\beta - \alpha)\psi_9 \sin(\alpha - \gamma)\pi - (\beta')\psi_{10} \sin(\alpha - \beta)\pi = 0,$$

$$(5, 6, 7, 8), (5, 6, 7, 9) \quad (1),$$

$$(5, 6, 7, 10) \quad 2i\psi_5 \sin \alpha\pi + (\alpha + \beta + \beta' - \gamma)\psi_6 - (\alpha + \gamma - \beta - \beta')\psi_7 - (\beta')\psi_{10} = 0,$$

$$(5, 6, 8, 9) \quad (1),$$

$$(5, 6, 8, 10) \quad (\beta' - \alpha)\psi_5 \sin \alpha\pi + (\beta')\psi_6 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi \\ + (\alpha - \beta')\psi_8 \sin(\alpha - \gamma)\pi + (\beta')\psi_{10} \sin(\alpha - \beta')\pi = 0,$$

$$(5, 6, 9, 10) \quad (\beta' - \gamma)\psi_5 \sin \alpha\pi + (\alpha + \beta' - \gamma)\psi_6 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi \\ + (\gamma - \beta')\psi_9 \sin(\alpha - \gamma)\pi - (\beta')\psi_{10} \sin(\beta' - \gamma)\pi = 0,$$

$$(5, 7, 8, 9) \quad (1),$$

$$(5, 7, 8, 10) \quad \psi_5 \sin \alpha\pi + (\alpha)\psi_7 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi \\ + (2\alpha + 2\beta - 2\gamma)\psi_8 \sin(\alpha - \gamma)\pi \\ - (\alpha - \gamma + \beta + \beta')\psi_{10} \sin(\gamma - \alpha - \beta)\pi = 0,$$

$$(5, 7, 9, 10) \quad \psi_5 \sin \alpha\pi + (\alpha)\psi_7 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi + (2\beta)\psi_9 \sin(\alpha - \gamma)\pi \\ + (\beta + \beta')\psi_{10} \sin \beta\pi = 0,$$

$$(6, 7, 8, 10) \quad (\gamma - \alpha)\psi_6 - (\gamma - \alpha)\psi_7 + 2i(\beta - \beta')\psi_8 \sin(\gamma - \alpha)\pi - (\beta)\psi_{10} = 0,$$

$$(6, 7, 9, 10) \quad (\alpha - \gamma)\psi_6 - (\alpha - \gamma)\psi_7 + 2i(\beta - \beta')\psi_9 \sin(\gamma - \alpha)\pi - (\beta)\psi_{10} = 0,$$

$$(8, 9, 10) \quad (\alpha - \gamma)\psi_8 - (\gamma - \alpha)\psi_9 + (\beta')\psi_{10} = 0.$$

(1) Voir la remarque II, p. 101.

TABLEAU VII.

(1, 2, 3, 4), (1, 2, 3, 5), (1, 2, 3, 6) (1, 2, 3, 7), (1, 2, 3, 8), (1, 2, 3, 9) (voir le Tableau VI).

$$(1, 2, 3, 10) [(\gamma - \alpha - \beta) \sin \beta' \pi + (\alpha + \beta' - \gamma) \sin \beta \pi] \psi_1 \\ - [(\gamma - \beta) \sin \beta' \pi + (\beta' - \gamma) \sin \beta \pi] \psi_2 \\ - \psi_3 \sin(\beta + \beta') \pi - 2i(\gamma - \alpha + \beta') \psi_{10} \sin \beta \pi \sin \beta' \pi = 0,$$

(1, 2, 4, 5), (1, 2, 4, 7), (1, 2, 4, 9) (voir le Tableau VI),

$$(1, 2, 4, 10) \psi_1 \sin(\gamma - \alpha) \pi + (-\beta - \beta') \psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma) \pi \\ - (\gamma - \beta - \beta') \psi_4 \sin(\beta + \beta') \pi + (\gamma - \alpha) \psi_{10} \sin \beta' \pi = 0,$$

(1, 2, 5, 6), (1, 2, 5, 8) (voir le Tableau VI),

$$(1, 2, 5, 10) \psi_1 \sin(\gamma - \alpha) \pi + (\beta + \beta') \psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma) \pi \\ - (\beta + \beta' - \gamma) \psi_3 \sin(\beta + \beta') \pi - (\gamma - \alpha + \beta + \beta') \psi_{10} \sin \beta \pi = 0,$$

(1, 2, 6, 7), (1, 2, 6, 8), (1, 2, 6, 9) (voir le Tableau VI),

$$(1, 2, 6, 10) \psi_1 \sin(\gamma - \alpha) \pi - \psi_2 \sin \gamma \pi - \psi_6 \sin(\beta + \beta') \pi + (\gamma - \alpha) \psi_{10} \sin \beta' \pi = 0,$$

(1, 2, 7, 8), (1, 2, 7, 9) (voir le Tableau VI),

$$(1, 2, 7, 10) \psi_1 \sin(\gamma - \alpha) \pi - \psi_2 \sin \gamma \pi - \psi_7 \sin(\beta + \beta') \pi \\ - (\gamma - \alpha + \beta + \beta') \psi_{10} \sin \beta \pi = 0,$$

(1, 2, 8, 9) (voir le Tableau VI),

$$(1, 2, 8, 10) \psi_1 \sin(\gamma - \alpha - \beta - \beta') \pi - \psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma) \pi \\ + \psi_8 \sin(\beta + \beta') \pi + (\gamma - \alpha + \beta + \beta') \psi_{10} \sin \beta' \pi = 0,$$

$$(1, 2, 9, 10) \psi_1 \sin(\gamma - \alpha - \beta - \beta') \pi + \psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma) \pi \\ + \psi_9 \sin(\beta + \beta') \pi - (\gamma - \alpha) \psi_{10} \sin \beta \pi = 0,$$

(1, 3, 4, 5), (1, 3, 4, 6), (1, 3, 4, 7), (1, 3, 4, 9) (voir le Tableau VI),

$$(1, 3, 4, 10) [(\beta - \beta' - \alpha) \sin(\beta + \beta' - \gamma) \pi + \sin(\gamma - \alpha) \pi] \psi_1 \\ - (\beta - \beta' - \gamma) \psi_3 \sin(\beta + \beta' - \gamma) \pi \\ - [(\gamma - \beta') \sin \beta' \pi + (\beta - \gamma) \sin \beta \pi] \psi_4 + (\gamma - \alpha) \psi_{10} \sin \beta' \pi = 0,$$

(1, 3, 5, 6), (1, 3, 5, 7), (1, 3, 5, 8) (voir le Tableau VI),

$$(1, 3, 5, 10) [(\alpha + \beta - \beta') \sin(\beta + \beta' - \gamma) \pi + \sin(\gamma - \alpha) \pi] \psi_1 \\ - (\gamma + \beta - \beta') \psi_3 \sin(\beta + \beta' - \gamma) \pi \\ - [(\beta - \gamma) \sin \beta \pi + (\gamma - \beta') \sin \beta' \pi] \psi_3 \\ - (\gamma - \alpha + \beta + \beta') \psi_{10} \sin \beta \pi = 0,$$

(1, 3, 6, 7), (1, 3, 6, 9) (voir le Tableau VI),

$$(1, 3, 6, 10) \psi_1 \sin \alpha \pi - \psi_3 \sin \gamma \pi + [(\beta' - \gamma) \sin \beta \pi + (\gamma - \beta) \sin \beta' \pi] \psi_6 \\ - (2\gamma - \alpha) \psi_{10} \sin \beta' \pi = 0,$$

(1, 3, 7, 8) (voir le Tableau VI),

- (1, 3, 7, 10) $\psi_1 \sin \alpha \pi - \psi_3 \sin \gamma \pi + [(\beta' - \gamma) \sin \beta \pi + (\gamma - \beta) \sin \beta' \pi] \psi_7$
 $+ (\beta + \beta' - \alpha) \psi_{10} \sin \beta \pi = 0,$
- (1, 3, 8, 9) (*voir le Tableau VI*),
- (1, 3, 8, 10) $(\beta') \psi_1 \sin \alpha \pi + (\beta) \psi_3 \sin (\beta + \beta' - \gamma) \pi$
 $- [(\beta) \sin (\beta + \beta' - \gamma) \pi + (\beta') \sin \gamma \pi] \psi_8$
 $- (2\gamma - \alpha + \beta') \psi_{10} \sin \beta' \pi = 0,$
- (1, 3, 9, 10) $(-\beta) \psi_1 \sin \alpha \pi + (-\beta') \psi_3 \sin (\beta + \beta' - \gamma) \pi$
 $- [(-\beta') \sin (\beta + \beta' - \gamma) \pi + (-\beta) \sin \gamma \pi] \psi_9$
 $+ (\beta' - \alpha) \psi_{10} \sin \beta \pi = 0,$
- (1, 4, 5, 6), (1, 4, 5, 7) (*voir le Tableau VI*),
- (1, 4, 5, 10) $2i \psi_1 \sin (\gamma - \alpha) \pi - (\gamma) \psi_4 + (-\gamma) \psi_5 + (\gamma - \alpha + \beta') \psi_{10} = 0,$
- (1, 4, 6, 7), (1, 4, 6, 9) (*voir le Tableau VI*),
- (1, 4, 6, 10) $\psi_1 \sin (\gamma - \alpha) \pi - \psi \sin \gamma \pi - (-\gamma) \psi_6 \sin (\beta + \beta' - \gamma) \pi$
 $+ (\gamma - \alpha) \psi_{10} \sin \beta' \pi = 0,$
- (1, 4, 7, 9) (*voir le Tableau VI*),
- (1, 4, 7, 10) $\psi_1 \sin (\gamma - \alpha) \pi - \psi_4 \sin \gamma \pi - (-\gamma) \psi_7 \sin (\beta + \beta' - \gamma) \pi$
 $- (\beta + \beta' - \alpha) \psi_{10} \sin (\beta - \gamma) = 0,$
- (1, 4, 8) (*voir le Tableau VI*),
- (1, 4, 9, 10) $\psi_1 - (\alpha) \psi_4 - (\alpha - \gamma) \psi_9 + (\beta') \psi_{10} = 0,$
- (1, 5, 6, 7), (1, 5, 6, 8) (*voir le Tableau VI*),
- (1, 5, 6, 10) $\psi_1 \sin (\gamma - \alpha) \pi - \psi_5 \sin \gamma \pi - (\gamma) \psi_6 \sin (\beta + \beta' - \gamma) \pi$
 $+ (2\gamma - \alpha) \psi_{10} \sin (\beta' - \gamma) \pi = 0,$
- (1, 5, 7, 8) (*voir le Tableau VI*),
- (1, 5, 7, 10) $\psi_1 \sin (\gamma - \alpha) \pi - \psi_5 \sin \gamma \pi - (\gamma) \psi_7 \sin (\beta + \beta' - \gamma) \pi$
 $- (\gamma - \alpha + \beta + \beta') \psi_{10} \sin \beta \pi = 0,$
- (1, 5, 8, 10) $\psi_1 - (-\alpha) \psi_5 - (\gamma - \alpha) \psi_8 - (2\gamma - 2\alpha + \beta') \psi_{10} = 0,$
- (1, 5, 9), (1, 6, 7, 8), (1, 6, 7, 9) (*voir le Tableau VI*),
- (1, 6, 8, 10) $\psi_1 \sin \alpha \pi + \psi_6 \sin (\beta + \beta' - \gamma) \pi - \psi_8 \sin \gamma \pi - (2\gamma - \alpha) \psi_{10} \sin \beta' \pi = 0,$
- (1, 6, 9, 10) $\psi_1 \sin \alpha \pi + \psi_6 \sin (\beta + \beta' - \gamma) \pi - \psi_9 \sin \gamma \pi$
 $- (\gamma - \alpha) \psi_{10} \sin (\beta' - \gamma) \pi = 0,$
- (1, 7, 8, 9) (*voir le Tableau VI*),
- (1, 7, 8, 10) $\psi_1 \sin \alpha \pi + \psi_7 \sin (\beta + \beta' - \gamma) \pi - \psi_8 \sin \gamma \pi$
 $+ (\gamma - \alpha + \beta + \beta') \psi_{10} \sin (\beta - \gamma) \pi = 0,$
- (1, 7, 9, 10) $\psi_1 \sin \alpha \pi + \psi_7 \sin (\beta + \beta' - \gamma) \pi - \psi_9 \sin \gamma \pi$
 $+ (-\alpha + \beta + \beta') \psi_{10} \sin \beta \pi = 0,$
- (2, 3, 4, 5), (2, 3, 4, 7), (2, 3, 4, 8), (2, 3, 4, 9) (*voir le Tableau VI*),

- (2, 3, 4, 10) $[(-\beta') \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi + (\alpha - \beta) \sin(\gamma - \alpha)\pi] \psi_2$
 $+ (\alpha + \beta - \gamma) \psi_3 \sin(\gamma - \alpha)\pi$
 $- [(2\alpha - \gamma) \sin \beta\pi + (\gamma - \beta - \beta') \sin \beta'\pi] \psi_4$
 $+ (\gamma - \alpha + \beta) \psi_{10} \sin \beta'\pi = 0,$
- (2, 3, 5, 6), (2, 3, 5, 8), (2, 3, 5, 9) (voir le Tableau VI),
- (2, 3, 5, 10) $[(\beta) \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi + (\beta' - \alpha) \sin(\gamma - \alpha)\pi] \psi_2$
 $+ (\gamma - \alpha - \beta') \psi_3 \sin(\gamma - \alpha)\pi$
 $- [(\gamma - 2\alpha) \sin \beta'\pi + (\beta + \beta' - \gamma) \sin \beta\pi] \psi_5$
 $- (\gamma - \alpha + \beta) \psi_{10} \sin \beta\pi = 0,$
- (2, 3, 6, 7), (2, 3, 6, 9) (voir le Tableau VI),
- (2, 3, 6, 10) $\psi_2 \sin \alpha\pi + \psi_3 \sin(\alpha - \gamma)\pi$
 $+ [(\alpha + \beta' - \gamma) \sin \beta\pi + (\gamma - \alpha - \beta) \sin \beta'\pi] \psi_6$
 $- (2\gamma - 2\alpha) \psi_{10} \sin \beta'\pi = 0,$
- (2, 3, 7, 8) (voir le Tableau VI),
- (2, 3, 7, 10) $\psi_2 \sin \alpha\pi + \psi_3 \sin(\alpha - \gamma)\pi$
 $+ [(\gamma - \alpha - \beta) \sin \beta'\pi + (\alpha + \beta' - \gamma) \sin \beta\pi] \psi_7$
 $+ (\beta + \beta') \psi_{10} \sin \beta\pi = 0,$
- (2, 3, 8, 9) (voir le Tableau VI),
- (2, 3, 8, 10) $(\beta' - \beta) \psi_2 \sin \alpha\pi + \psi_3 \sin(\alpha + \beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $- [(\alpha + \beta' - \gamma) \sin \beta\pi + (\gamma - \alpha - \beta) \sin \beta'\pi] \psi_8$
 $- (2\gamma - 2\alpha + \beta' - \beta) \psi_{10} \sin \beta'\pi = 0,$
- (2, 3, 9, 10) $(\beta' - \beta) \psi_2 \sin \alpha\pi + \psi_3 \sin(\alpha + \beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $- [(\alpha + \beta' - \gamma) \sin \beta\pi + (\gamma - \alpha - \beta) \sin \beta'\pi] \psi_9$
 $+ (2\beta') \psi_{10} \sin \beta\pi = 0,$
- (2, 4, 5, 8) (2, 4, 5, 9) (voir le Tableau VI),
- (2, 4, 5, 10) $2i \psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
 $+ (\gamma - \beta - \beta') \psi_4 - (\beta + \beta' - \gamma) \psi_5 - (\gamma - \alpha + \beta) \psi_{10} = 0,$
- (2, 4, 6), (2, 4, 7, 8), (2, 4, 7, 9) (voir le Tableau VI),
- (2, 4, 7, 10) $\psi_2 - \psi_4 + (\beta + \beta' - \gamma) \psi_7 + (2\beta + \beta' - \alpha) \psi_{10} = 0,$
- (2, 4, 8, 9) (voir le Tableau VI),
- (2, 4, 8, 10) $\psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi + (\alpha) \psi_4 \sin(\gamma - \alpha - \beta - \beta')\pi$
 $+ (\alpha + \beta + \beta' - \gamma) \psi_8 \sin(\gamma - \alpha)\pi$
 $+ (\gamma - \alpha + \beta + \beta') \psi_{10} \sin \beta'\pi = 0,$
- (2, 4, 9, 10) $\psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi + (\alpha) \psi_4 \sin(\gamma - \alpha - \beta - \beta')\pi$
 $+ (\alpha + \beta + \beta' - \gamma) \psi_9 \sin(\gamma - \alpha)\pi$
 $- (\beta + \beta') \psi_{10} \sin(\gamma - \alpha - \beta')\pi = 0,$
- (2, 5, 6, 8), (2, 5, 6, 9) (voir le Tableau VI),
- (2, 5, 6, 10) $\psi_2 - \psi_5 + (\gamma - \beta - \beta') \psi_6 - (2\gamma - \alpha - \beta') \psi_{10} = 0,$
- (2, 5, 7), (2, 5, 8, 9) (voir le Tableau VI),

$$(2, 5, 8, 10) \psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi + (-\alpha)\psi_5 \sin(\gamma - \alpha - \beta - \beta')\pi \\ + (\gamma - \alpha - \beta - \beta')\psi_8 \sin(\gamma - \alpha)\pi \\ + (2\gamma - 2\alpha)\psi_{10} \sin(\gamma - \alpha - \beta)\pi = 0,$$

$$(2, 5, 9, 10) \psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi + (-\alpha)\psi_5 \sin(\gamma - \alpha - \beta - \beta')\pi \\ + (\gamma - \alpha - \beta - \beta')\psi_9 \sin(\gamma - \alpha)\pi - (\gamma - \alpha)\psi_{10} \sin\beta\pi = 0,$$

$$(2, 6, 7, 8), (2, 6, 7, 9), (2, 6, 8, 9) \quad (\text{voir le Tableau VI}),$$

$$(2, 6, 8, 10) \psi_2 \sin\alpha\pi + \psi_6 \sin(\alpha + \beta + \beta' - \gamma)\pi + \psi_8 \sin(\alpha - \gamma)\pi \\ - (2\gamma - 2\alpha)\psi_{10} \sin\beta'\pi = 0,$$

$$(2, 6, 9, 10) \psi_2 \sin\alpha\pi + \psi_6 \sin(\alpha + \beta + \beta' - \gamma)\pi + \psi_9 \sin(\alpha - \gamma)\pi \\ - (\gamma - \alpha)\psi_{10} \sin(\alpha + \beta' - \gamma)\pi = 0,$$

$$(2, 5, 6, 8), (2, 5, 6, 9) \quad (\text{voir le Tableau VI}),$$

$$(2, 5, 6, 10) \psi_2 - \psi_3 + (\gamma - \beta - \beta')\psi_6 - (2\gamma - \alpha - \beta')\psi_{10} = 0,$$

$$(2, 5, 7), (2, 5, 8, 9) \quad (\text{voir le Tableau VI}),$$

$$(2, 5, 8, 10) \psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi + (-\alpha)\psi_5 \sin(\gamma - \alpha - \beta - \beta')\pi \\ + (\gamma - \alpha - \beta - \beta')\psi_8 \sin(\gamma - \alpha)\pi + (2\gamma - 2\alpha)\psi_{10} \sin(\gamma - \alpha - \beta)\pi = 0,$$

$$(2, 5, 9, 10) \psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi + (-\alpha)\psi_5 \sin(\gamma - \alpha - \beta - \beta')\pi \\ + (\gamma - \alpha - \beta - \beta')\psi_9 \sin(\gamma - \alpha)\pi - (\gamma - \alpha)\psi_{10} \sin\beta\pi = 0,$$

$$(2, 6, 7, 8), (2, 6, 7, 9), (2, 6, 8, 9) \quad (\text{voir le Tableau VI}),$$

$$(2, 6, 8, 10) \psi_2 \sin\alpha\pi + \psi_6 \sin(\alpha + \beta + \beta')\pi \\ + \psi_8 \sin(\alpha - \gamma)\pi - (2\gamma - 2\alpha)\psi_{10} \sin\beta'\pi = 0,$$

$$(2, 6, 9, 10) \psi_2 \sin\alpha\pi + \psi_6 \sin(\alpha + \beta + \beta' - \gamma)\pi \\ - \psi_9 \sin(\alpha - \gamma)\pi - (\gamma - \alpha)\psi_{10} \sin(\alpha + \beta' - \gamma)\pi = 0,$$

$$(2, 7, 8, 9) \quad (\text{voir le Tableau VI}),$$

$$(2, 7, 8, 10) \psi_2 \sin\alpha\pi + \psi_7 \sin(\alpha + \beta + \beta' - \gamma)\pi \\ + \psi_8 \sin(\alpha - \gamma)\pi + (\gamma - \alpha + \beta + \beta')\psi_{10} \sin(\alpha + \beta - \gamma)\pi = 0,$$

$$(2, 7, 9, 10) \psi_2 \sin\alpha\pi + \psi_7 \sin(\alpha + \beta + \beta' - \gamma)\pi \\ + \psi_9 \sin(\alpha - \gamma)\pi + (\beta + \beta')\psi_{10} \sin\beta\pi = 0,$$

$$(3, 4, 5, 6), (3, 4, 5, 7), (3, 4, 5, 8), (3, 4, 5, 9) \quad (\text{voir le Tableau IV}),$$

$$(3, 4, 5, 10) 2i\psi_3 \sin(\gamma - \alpha)\pi \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi \\ - [(\gamma - \beta) \sin(\beta' - \alpha)\pi + (\alpha + \beta' - \gamma) \sin\beta\pi]\psi_4 \\ + [(\beta' - \gamma) \sin(\beta - \alpha)\pi + (\gamma - \alpha - \beta) \sin\beta'\pi]\psi_5 \\ + (\gamma - \alpha + \beta')\psi_{10} \sin(\beta + \beta' - \alpha)\pi = 0,$$

$$(3, 4, 6, 7), (3, 4, 6, 9) \quad (\text{voir le Tableau VI}),$$

$$(3, 4, 6, 10) \psi_3 \sin(\alpha - \gamma)\pi + \psi_4 \sin\alpha\pi \\ + [(-\alpha) \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi + (\beta' - \beta) \sin(\gamma - \alpha)\pi]\psi_6 \\ - (2\gamma - 2\alpha)\psi_{10} \sin\beta'\pi = 0,$$

$$(3, 4, 7, 8) \quad (\text{voir le Tableau VI}),$$

$$(3, 4, 7, 10) \quad \psi_3 \sin(\gamma - \alpha)\pi - \psi_4 \sin \alpha\pi \\ - [(\beta' - \gamma) \sin(\beta - \alpha)\pi + (\gamma - \alpha - \beta) \sin \beta' \pi] \psi_7 \\ - (\beta + \beta' - \alpha) \psi_{10} \sin(\beta - \alpha)\pi = 0,$$

(3, 4, 8, 9) (voir le Tableau VI),

$$(3, 4, 8, 10) \quad \psi_3 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi + (\alpha + \beta' - \beta) \psi_4 \sin \alpha\pi \\ - [(\alpha + \beta' - \beta) \sin(\gamma - \alpha)\pi + \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi] \psi_8 \\ - (2\gamma - \alpha + \beta' - \beta) \psi_{10} \sin \beta' \pi = 0,$$

$$(3, 4, 9, 10) \quad \psi_3 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi + (\alpha + \beta' - \beta) \psi_4 \sin \alpha\pi \\ + [(\alpha + \beta' - \gamma) \sin(\alpha - \beta)\pi - (\gamma - \beta) \sin \beta' \pi] \psi_9 \\ - (2\beta') \psi_{10} \sin(\alpha - \beta)\pi = 0,$$

(3, 5, 6, 7), (3, 5, 6, 9) (voir le Tableau VI),

$$(3, 5, 6, 10) \quad \psi_3 \sin(\gamma - \alpha)\pi - \psi_5 \sin \alpha\pi \\ - [(\gamma - \beta) \sin(\beta' - \alpha)\pi + (\alpha + \beta' - \gamma) \sin \beta\pi] \psi_6 \\ + (2\gamma - \alpha) \psi_{10} \sin(\beta' - \alpha)\pi = 0,$$

(3, 5, 7, 8) (voir le Tableau VI),

$$(3, 5, 7, 10) \quad \psi_3 \sin(\alpha - \gamma)\pi + \psi_5 \sin \alpha\pi \\ + [(\alpha) \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi + (\beta' - \beta) \sin(\gamma - \alpha)\pi] \psi_7 \\ + (\beta + \beta') \psi_{10} \sin \beta\pi = 0,$$

(3, 5, 8, 9) (voir le Tableau VI),

$$(3, 5, 8, 10) \quad \psi_3 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi + (\beta' - \beta - \alpha) \psi_5 \sin \alpha\pi \\ + [(\gamma - \alpha - \beta) \sin(\alpha - \beta')\pi - (\beta' - \gamma) \sin \beta\pi] \psi_8 \\ + (2\gamma - 2\alpha + \beta' - \beta) \psi_{10} \sin(\alpha - \beta')\pi = 0,$$

$$(3, 5, 9, 10) \quad \psi_3 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi + (\beta' - \beta - \alpha) \psi_5 \sin \alpha\pi \\ - [(\beta' - \beta - \alpha) \sin(\gamma - \alpha)\pi + \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi] \psi_9 \\ + (2\beta' - \alpha) \psi_{10} \sin \beta\pi = 0,$$

(3, 6, 8) (voir le Tableau VI),

$$(3, 6, 9, 10) \quad \psi_3 - (\beta' - \beta) \psi_6 - \psi_9 + (\gamma - \alpha + \beta') \psi_{10} = 0,$$

$$(3, 7, 8, 10) \quad \psi_3 - (\beta' - \beta) \psi_7 - \psi_8 - (\gamma - \alpha + \beta') \psi_{10} = 0,$$

(3, 7, 9), (4, 5, 6, 7), (4, 5, 6, 8), (4, 5, 6, 9) (voir le Tableau VI),

$$(4, 5, 6, 10) \quad \psi_4 - \psi_5 - 2i \psi_6 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi - (2\gamma - \alpha - \beta') \psi_{10} = 0,$$

(4, 5, 7, 8), (4, 5, 7, 9) (voir le Tableau VI),

$$(4, 5, 7, 10) \quad \psi_4 - \psi_5 - 2i \psi_7 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi - (2\beta + \beta' - \alpha) \psi_{10} = 0,$$

(4, 5, 8, 9) (voir le Tableau VI),

$$(4, 5, 8, 10) \quad (\alpha) \psi_4 - (-\alpha) \psi_5 - 2i \psi_8 \sin(\gamma - \alpha)\pi - (2\gamma - 2\alpha + \beta') \psi_{10} = 0,$$

$$(4, 5, 9, 10) \quad (\alpha) \psi_4 - (-\alpha) \psi_5 - 2i \psi_9 \sin(\gamma - \alpha)\pi - (\beta') \psi_{10} = 0,$$

(4, 6, 7, 8), (4, 6, 7, 9), (4, 6, 8, 9) (voir le Tableau VI),

$$(4, 6, 8, 10) \quad \psi_4 \sin \alpha\pi + (-\alpha) \psi_6 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi \\ + \psi_8 \sin(\alpha - \gamma)\pi - (2\gamma - 2\alpha) \psi_{10} \sin \beta' \pi = 0,$$

$$(4, 6, 9, 10) \quad \psi_4 \sin \alpha \pi + (-\alpha) \psi_6 \sin(\beta + \beta' - \gamma) \pi \\ + \psi_9 \sin(\alpha - \gamma) \pi - (\gamma - \alpha) \psi_{10} \sin(\alpha + \beta' - \gamma) \pi = 0,$$

(4, 7, 8, 9) (voir le Tableau VI),

$$(4, 7, 8, 10) \quad \psi_4 \sin \alpha \pi + (-\alpha) \psi_7 \sin(\beta + \beta' - \gamma) \pi \\ + \psi_8 \sin(\alpha - \gamma) \pi + (\gamma - 2\alpha + \beta + \beta') \psi_{10} \sin(\beta - \gamma) \pi = 0,$$

$$(4, 7, 9, 10) \quad \psi_4 \sin \alpha \pi + (-\alpha) \psi_7 \sin(\beta + \beta' - \gamma) \pi \\ + \psi_9 \sin(\alpha - \gamma) \pi - (\beta + \beta' - \alpha) \psi_{10} \sin(\alpha - \beta) \pi = 0,$$

(5, 6, 7, 8), (5, 6, 7, 9), (5, 6, 8, 9) (voir le Tableau VI),

$$(5, 6, 8, 10) \quad \psi_5 \sin \alpha \pi + (\alpha) \psi_6 \sin(\beta + \beta' - \gamma) \pi \\ + \psi_8 \sin(\alpha - \gamma) \pi + (2\gamma - \alpha) \psi_{10} \sin(\alpha - \beta') \pi = 0,$$

$$(5, 6, 9, 10) \quad \psi_5 \sin \alpha \pi + (\alpha) \psi_6 \sin(\beta + \beta' - \gamma) \pi \\ - \psi_9 \sin(\alpha - \gamma) \pi - (\gamma) \psi_{10} \sin(\beta' - \gamma) \pi = 0,$$

(5, 7, 8, 9) (voir le Tableau VI),

$$(5, 7, 8, 10) \quad \psi_5 \sin \alpha \pi + (\alpha) \psi_7 \sin(\beta + \beta' - \gamma) \pi \\ + \psi_8 \sin(\alpha - \gamma) \pi + (\gamma - \alpha + \beta + \beta') \psi_{10} \sin(\alpha + \beta - \gamma) \pi = 0,$$

$$(5, 7, 9, 10) \quad \psi_5 \sin \alpha \pi + (\alpha) \psi_7 \sin(\beta + \beta' - \gamma) \pi \\ + \psi_9 \sin(\alpha - \gamma) \pi + (\beta + \beta') \psi_{10} \sin \beta \pi = 0,$$

$$(6, 7, 10) \quad \psi_6 - \psi_7 - (\gamma - \alpha + \beta) \psi_{10} = 0,$$

$$(8, 9, 10) \quad \psi_8 - \psi_9 + (\gamma - \alpha + \beta') \psi_{10} = 0,$$

Remarque I. — Les formules de ce Tableau s'associent deux à deux, ou à elles-mêmes comme il a déjà été dit (voir p. 100). Il n'y a de changement que pour le coefficient de ψ_{10} . Étant donnée une formule du Tableau, contenant ψ_{10} , pour avoir le coefficient de ψ_{10} dans la formule associée, il faut effectuer les opérations suivantes : 1° multiplier le coefficient de ψ_{10} dans la formule donnée par $-(2\alpha - 2\gamma - \beta - \beta')$; 2° dans la parenthèse, permuter β et β' ; 3° changer tous les signes des termes de cette parenthèse.

Remarque II. — Étant données deux aires symétriques par rapport à X, tandis que u parcourt le contour de l'une, le point imaginaire conjugué u_0 parcourt le contour de l'autre. Les deux formules correspondantes se déduiront l'une de l'autre comme il suit : dans le coefficient de chaque terme de l'une, on changera les signes de tous les termes entre parenthèses. Un terme de la forme $e^{i\pi\lambda} \psi_p = (\lambda) \psi_p$ devient ainsi $e^{-i\pi\lambda} \psi_p = (-\lambda) \psi_p$. Les arguments des sinus restent inaltérés.

Cette remarque permet de déduire les Tableaux VIII, IX, X, XI, XII, XIII, XIV des précédents.



CHAPITRE IV.

25. Si l'on pose

$$U = u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(1-ux)^{-\beta}(1-uy)^{-\beta'}$$

et

$$V = v^{\beta+\beta'-\gamma}(v-1)^{\gamma-\alpha-1}(v-x)^{-\beta}(v-y)^{-\beta'},$$

on aura

$$\begin{aligned} \int_0^{+1} U du &= \int_{+1}^{\infty} V dv, & \int_0^{-\infty} U du &= \int_0^{-\infty} V dv, & \int_{+1}^{\infty} U du &= \int_0^1 V dv, \\ \int_0^{\frac{1}{x}} U du &= \int_x^{\infty} V dv, & \int_0^{\frac{1}{y}} U du &= \int_y^{\infty} V dv, \\ \int_1^{\frac{1}{x}} U du &= \int_x^1 V dv, & \int_1^{\frac{1}{y}} U du &= \int_y^1 V dv, \\ \int_{\frac{1}{x}}^{\infty} U du &= \int_0^x V dv, & \int_{\frac{1}{y}}^{\infty} U du &= \int_0^y V dv, & \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{y}} U du &= \int_y^x V dv. \end{aligned}$$

Les intégrales des seconds membres sont prises soit le long de segments rectilignes, soit le long d'arcs de circonférences qu'il est aisé de déterminer.

Choisissons les trois intégrales suivantes

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \int_{\frac{1}{x}}^{\infty} U du = \int_0^x V dv, \\ \omega_2 &= \int_{\frac{1}{y}}^{\infty} U du = \int_0^y V dv, \\ \omega_3 &= \int_1^{\infty} U du = \int_0^1 V dv, \end{aligned}$$

et soit

$$\frac{\omega_1}{\omega_3} = \xi, \quad \frac{\omega_2}{\omega_3} = \eta.$$

On peut se demander à quelles conditions x et y , considérées comme fonctions de ξ et de η , seront des fonctions uniformes de ξ et de η .

Soient

$$a = 1 + \beta + \beta' - \gamma, \quad b = \gamma - \alpha, \quad \lambda = 1 - \beta, \quad \mu = 1 - \beta'.$$

M. Picard a démontré ⁽¹⁾ que les dix conditions suivantes étaient tout d'abord nécessaires : les dix nombres $a + b - 1$, $a + \lambda - 1$, $a + \mu - 1$, $b + \lambda - 1$, $b + \mu - 1$, $\lambda + \mu - 1$, $2 - b - \lambda - \mu$, $2 - \lambda - \mu - a$, $2 - \mu - a - b$, $2 - a - b - \lambda$ doivent être les inverses d'un nombre entier, positif ou négatif ⁽²⁾.

Nous nous proposons, dans le présent Chapitre, de trouver tous les groupes de quatre nombres, a , b , c , d , tels que l'on ait

$$\begin{aligned} a + b &= 1 + \frac{1}{n_{ab}}, \\ a + c &= 1 + \frac{1}{n_{ac}}, & 2 - (b + c + d) &= \frac{1}{n_a}, \\ a + d &= 1 + \frac{1}{n_{ad}}, & 2 - (c + d + a) &= \frac{1}{n_b}, \\ b + c &= 1 + \frac{1}{n_{bc}}, & 2 - (d + a + b) &= \frac{1}{n_c}, \\ b + d &= 1 + \frac{1}{n_{bd}}, & 2 - (a + b + c) &= \frac{1}{n_d}, \\ c + d &= 1 + \frac{1}{n_{cd}}, \end{aligned}$$

où les n sont des nombres entiers.

Les quatre dernières équations, ajoutées membre à membre nous donnent

$$8 - 3(a + b + c + d) = \frac{1}{n_a} + \frac{1}{n_b} + \frac{1}{n_c} + \frac{1}{n_d} = \sigma$$

ou

$$a + b + c + d = \frac{8 - \sigma}{3},$$

(1) E. PICARD, *Sur les fonctions hyperfuchsienues provenant des séries hypergéo-métriques de deux variables* (Annales de l'École Normale supérieure, 3^e série, t. II, p. 381; année 1885).

(2) E. PICARD, *Sur les fonctions hyperfuchsienues provenant des séries hypergéo-métriques de deux variables* (Bulletin de la Société mathématique de France, t. XV, p. 148; année 1886-1887).

d'où je conclus

$$a = \frac{2-\sigma}{3} + \frac{1}{n_a},$$

$$b = \frac{2-\sigma}{3} + \frac{1}{n_b},$$

$$c = \frac{2-\sigma}{3} + \frac{1}{n_c},$$

$$d = \frac{2-\sigma}{3} + \frac{1}{n_d}.$$

On en déduit

$$\frac{1}{n_{ij}} = \frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} + \frac{1-2\sigma}{3},$$

i et j désignant deux quelconques des quatre lettres a, b, c, d ; si k et l désignent les deux autres, on peut mettre cette équation sous la forme

$$\frac{2}{n_k} + \frac{2}{n_l} - \frac{1}{n_i} - \frac{1}{n_j} + \frac{3}{n_{ij}} = 1.$$

Donc, en posant $n_a = x, n_b = y, n_c = z, n_d = t,$

$$n_{cd} = u, \quad n_{bd} = v, \quad n_{bc} = w, \quad n_{ad} = p, \quad n_{ac} = q, \quad n_{ab} = r,$$

on est ramené à résoudre en nombres entiers le système des six équations qui suivent

$$\frac{2}{x} + \frac{2}{y} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{u} = 1,$$

$$\frac{2}{x} + \frac{2}{z} - \frac{1}{t} - \frac{1}{y} + \frac{3}{v} = 1,$$

$$\frac{2}{x} + \frac{2}{t} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} + \frac{3}{w} = 1,$$

$$\frac{2}{y} + \frac{2}{z} - \frac{1}{x} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = 1,$$

$$\frac{2}{y} + \frac{2}{t} - \frac{1}{x} - \frac{1}{z} + \frac{3}{q} = 1,$$

$$\frac{2}{z} + \frac{2}{t} - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{3}{r} = 1.$$

26. Si l'on considère la première de ces équations, si l'on a simultanément

$$|x| > 10, \quad |y| > 10, \quad |z| > 5, \quad |t| > 5, \quad |u| > 15,$$

j'en déduis

$$\left| \frac{2}{x} \right| < \frac{1}{5}, \quad \left| \frac{2}{y} \right| < \frac{1}{5}, \quad \left| \frac{1}{z} \right| < \frac{1}{5}, \quad \left| \frac{1}{t} \right| < \frac{1}{5}, \quad \left| \frac{3}{u} \right| < \frac{1}{5};$$

donc

$$\left| \frac{2}{x} + \frac{2}{y} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{u} \right| < 1,$$

et, par suite, pas de solution possible dans de telles conditions.

Comme x , y , z et t jouent le même rôle, je vais d'abord donner à x des valeurs entières appartenant à l'intervalle $(-10, +10)$.

Je donnerai ensuite à u , v , w , p , q , r des valeurs entières appartenant à l'intervalle $(-15, +15)$.

27. Nous ferons d'abord $x = 2$. Les six équations précédentes deviennent

$$\begin{array}{ll} \frac{2}{y} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{u} = 0, & \frac{2}{y} + \frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = \frac{3}{2}, \\ \frac{2}{z} - \frac{1}{t} - \frac{1}{y} + \frac{3}{v} = 0, & \frac{2}{z} + \frac{2}{t} - \frac{1}{y} + \frac{3}{r} = \frac{3}{2}, \\ \frac{2}{t} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} + \frac{3}{w} = 0, & \frac{2}{t} + \frac{2}{y} - \frac{1}{z} + \frac{3}{q} = \frac{3}{2}. \end{array}$$

Si l'on a simultanément

$$|y| > \frac{16}{3}, \quad |z| > \frac{16}{3}, \quad |t| > \frac{8}{3}, \quad |p| > 8,$$

ou

$$|y| > 5, \quad |z| > 5, \quad |t| > 2, \quad |p| > 8,$$

il est impossible de satisfaire à la première équation du deuxième groupe.

Comme dans les équations du deuxième groupe, y , z et t jouent le même rôle, je donnerai à y des valeurs entières comprises dans l'intervalle $(-5, +5)$. Ensuite je donnerai à p , q , r des valeurs entières appartenant à l'intervalle $(-8, +8)$.

28. Soit $y = -2$. Le système à résoudre est le suivant :

$$\begin{array}{ll} \frac{3}{u} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} = 1, & \frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = \frac{5}{2}, \\ \frac{1}{t} - \frac{2}{z} - \frac{3}{v} = \frac{1}{2}, & \frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{3}{r} = 1, \\ \frac{1}{z} - \frac{2}{t} - \frac{3}{w} = \frac{1}{2}, & \frac{2}{t} - \frac{1}{z} + \frac{3}{q} = \frac{5}{2}, \end{array}$$

Je considère en particulier l'équation

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = \frac{5}{2}.$$

Si l'on a simultanément

$$\left| \frac{2}{z} \right| < \frac{5}{6}, \quad \left| \frac{1}{t} \right| < \frac{5}{6}, \quad \left| \frac{3}{p} \right| < \frac{5}{6}$$

ou bien

$$|z| > 2, \quad |t| > 1, \quad |p| > 3,$$

il n'y a pas de solutions.

29. Soient $t = 1$, $\frac{2}{z} + \frac{3}{p} = \frac{7}{2}$, $z = \frac{4p}{7p-6}$.

Soient $7p - 6 = p'$, $z = \frac{4}{7} + \frac{24}{7p'}$. On doit donc avoir

$$4 + \frac{24}{p'} \equiv 0 \pmod{7},$$

p' étant un diviseur de 24.

Donc

$$p' = 1, 8, \quad p = 1, 2, \quad z = 4, 1;$$

mais, pour $t = 1$, $\frac{3}{u} = 2 + \frac{1}{z}$ élimine $z = 4$.

Reste la solution $t = z = 1$, qui convient.

Soient donc $x = 2$, $y = -2$, $z = t = 1$. On a

$$\sigma = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} = 2, \quad \frac{2-\sigma}{3} = 0, \quad a = b = 1, \quad c = \frac{1}{2}, \quad d = -\frac{1}{2}.$$

Nous avons ainsi une première solution. Elle est comprise dans une solution plus générale, que nous trouverons plus tard.

30. Soient $t = -1$, $\frac{2}{z} + \frac{3}{p} = \frac{3}{2}$, $z = \frac{4p}{3(p-2)}$.

Posons $p - 2 = p'$, $z = \frac{4}{3} + \frac{8}{3p'}$. On a

$$4 + \frac{8}{p'} \equiv 0 \pmod{3},$$

d'où

$$p' = -8, -2, 1, 4,$$

$$p = -6, 3, 6, 2,$$

$$z = 1, 4, 2, \infty.$$

La formule $v = -\frac{3z+4}{2z}$ élimine $z = 1, 4, 2$.

D'ailleurs l'équation $\frac{2}{t} - \frac{1}{z} + \frac{3}{q} = \frac{5}{2}$ élimine $t = -1, z = \infty$.

31. Soient maintenant $z = -2, p = \frac{6t}{7t+2}$; soit $7t+2 = t'$,

$$p = \frac{6}{7} - \frac{12}{7t'}, \quad 6 - \frac{12}{t'} \equiv 0 \pmod{7},$$

$$t' = -12, \quad t = -2,$$

$x = 2, y = z = t = -2$ est une solution.

1 ^{re} solution : $x = 2, \quad y = z = t = -2; \quad a = b = c = \frac{1}{2}, \quad d = \frac{3}{2}.$

32. Soit $z = -1$, on a

$$\frac{3}{p} - \frac{1}{t} = \frac{9}{2}.$$

Or on a

$$\left| \frac{3}{p} - \frac{1}{t} \right| \leq 4;$$

donc, pas de solutions.

33. Soit $z = +1$, on a

$$p = \frac{6t}{t+2}, \quad t+2 = t', \quad p = 6 - \frac{12}{t'},$$

$$t' = -12, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 12, \infty,$$

$$t = -14, -8, -6, -5, -4, -3, -1, 1, 2, 4, 10, \infty, -2.$$

D'ailleurs la formule $q = \frac{6t}{7t-4}$ élimine

$$t = -14, -8, -6, -5, -4, -3, -1, 2, 10, \infty, -2.$$

Reste

$$t = 1, 4;$$

$t = 1$ a déjà été essayé (29).

$$\frac{3}{u} = 2 + \frac{1}{t} \text{ élimine } t = 4.$$

34. Soit $z = +2$, on a

$$p = \frac{6t}{3t+2}, \quad 3t+2 = t', \quad p = 2 - \frac{4}{t'}$$

$$t' = -4, -2, -1, 1, 2, 4, \infty,$$

$$3t = -6, -4, -3, -1, 2, \infty,$$

$$t = -2, -1, \infty.$$

La formule $v = \frac{6t}{2-3t}$ élimine $t = -2, -1$.

$x = 2, y = -2, z = 2, t = \infty$ est une solution.

2^e solution : $x = y = 2, z = -2, t = \infty, a = b = 1, c = 0, d = \frac{1}{2}$.

35. Revenons au n° 28. Soit $|p| \leq 3$. On peut supposer

$$|z| > 2, \quad |t| > 2, \quad \text{d'où} \quad \max\left(\frac{2}{z} - \frac{1}{t}\right) = 1.$$

On doit donc avoir $\left|\frac{5}{2} - \frac{3}{p}\right| \leq 1$;

$$\frac{5}{2} - \frac{3}{p} \leq 1 \quad \text{donne} \quad p \leq 2,$$

en supposant $p > 0$. Or

$$\frac{3}{p} - \frac{5}{2} \leq 1 \quad \text{donne} \quad p > 0,$$

donc

$$p = 1, 2,$$

$p = 1$:

$$\frac{1}{t} - \frac{2}{z} = \frac{1}{2}, \quad t = \frac{2z}{z+4}; \quad z+4 = z' \quad t = 2 - \frac{8}{z'}$$

$$z' = -8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8, \infty,$$

$$z = -12, -8, -6, -5, -3, -2, 4, \infty, -4,$$

$$t = 3, 4, 6, 10, -6, -2, 1, 2, \infty.$$

J'écarte les solutions pour lesquelles on n'a pas $|z| > 2, |t| > 2$.

La formule $u = \frac{2z}{z+2}$ élimine $z = -12, -8, -5$. Reste

$$z = -6, -3, -4.$$

$$t = 6, -6, \infty.$$

$2r + z = 0$ élimine $z = -3$; $q = \frac{2z}{z-2}$ élimine $z = -6, -4$.

36. $p = 2$:

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} = 1, \quad z = \frac{2t}{t+1}, \quad t+1 = t', \quad z = 2 - \frac{2}{t'},$$

$$t' = -2, -1, 1, 2, \infty,$$

$$t = -3, -2, 1, \infty, -1,$$

$$z = 3, \quad 2.$$

La seule solution à essayer est $t = -3$; $z = 3$ or elle donne $q = \frac{6}{7}$.

37. Reportons-nous au n° 27 et faisons $y = -1$.

Le système à résoudre est le suivant :

$$\frac{3}{u} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} = 2, \quad \frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = \frac{7}{2},$$

$$\frac{1}{t} - \frac{2}{z} - \frac{3}{v} = 1, \quad \frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{3}{r} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{z} - \frac{2}{t} - \frac{3}{w} = 1, \quad \frac{2}{t} - \frac{1}{z} + \frac{3}{q} = \frac{7}{2}.$$

Prenons la dernière de ces équations. Si l'on a simultanément

$$\left| \frac{2}{t} \right| < \frac{7}{6}, \quad \left| \frac{1}{z} \right| < \frac{7}{6}, \quad \left| \frac{3}{q} \right| < \frac{7}{6}, \quad \text{ou bien} \quad |t| > 1, \quad |z| > 0, \quad |q| > 2,$$

il n'y a pas de solutions.

38. Soit donc $t = -1$; $\frac{3}{q} - \frac{1}{z} = \frac{11}{2}$ n'admet pas de solutions.

39. Soit $t = +1$,

$$\frac{3}{q} - \frac{1}{z} = \frac{3}{2}, \quad z = \frac{2q}{3(2-q)},$$

$$2 - q = q', \quad z = \frac{4}{3q'} - \frac{2}{3}, \quad \frac{4}{q'} - 2 \equiv 0 \pmod{3},$$

$$q' = -4, -1,$$

$$q = 6, 3, 2,$$

$$z = -1, -2, \infty.$$

$u = \frac{3z}{3z+1}$ élimine $z = -1, -2$; reste la solution $t = 1, z = \infty$ qui donne

$$w = -\frac{5}{6}.$$