SUR QUELQUES

INÉGALITÉS DE LA LONGITUDE DE LA LUNE

(DEUXIÈME MÉMOIRE),

PAR M. H. ANDOYER,

Chargé d'un Cours complémentaire de Mécanique céleste
et Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Paris.

Dans ce Travail, je continue les recherches sur la théorie de la Lune commencées dans un Mémoire précédent (*Faculté de Toulouse*, t. VI). Je calcule avec la même approximation que Delaunay les coefficients des inégalités de la longitude de la Lune, qui ne dépendent que de la première puissance de l'excentricité de l'orbite de la Terre.

Ces coefficients sont en désaccord avec ceux de Delaunay à partir du huitième ordre inclusivement, toujours, et quelquefois même à partir du septième ordre.

Comme précédemment, j'ai employé, pour obtenir des résultats tout à fait certains, deux méthodes absolument distinctes, que je vais exposer brièvement : ce sont les mêmes que celles que l'on trouve dans mon premier Mémoire, mais étendues au cas où l'on suppose que l'orbite du Soleil autour de la Terre est non plus une circonférence décrite d'un mouvement uniforme, mais une courbe plane connue, parcourue suivant une loi déterminée.

Le problème à résoudre s'énonce toujours de la même façon, à cette modification près que je viens de signaler; toutes les autres hypothèses sont conservées. Je conserverai aussi les mêmes notations, observant seulement que le rayon vecteur r' du Soleil sera non plus a', mais $a'(1+\rho')$, et que sa longitude v', comptée dans le plan du mouvement, sera non plus N', mais $\mathrm{N}'+\lambda'$; par suite aussi, l'angle H représentera $v-v'$ et non $v-\mathrm{N}'$.

La fonction des forces devient, avec les hypothèses faites,

$$\mathrm{M}\left[\frac{n^2a^3}{r}+\frac{n'^2}{4}\frac{a'^3}{r'^3}r^2(1+3\cos 2\mathrm{H})\right].$$

Les équations du mouvement sont, par suite,

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r\frac{dv^2}{dt^2} + \frac{n^2 a^3}{r^2} - \frac{n'^2}{2}\frac{a'^3}{r'^3}\,r\,(1 + 3\cos 2\mathrm{H}) = 0,$$

$$2\frac{dr}{dt}\frac{dv}{dt} + r\left(\frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{3}{2}n'^2\frac{a'^3}{r'^3}\sin 2\mathrm{H}\right) = 0.$$

Différentiant la seconde, il vient

$$2\frac{dv}{dt}\frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{dr}{dt}\left(3\frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{3}{2}n'^2\frac{a'^3}{r'^3}\sin 2\mathrm{H}\right)$$
$$+ r\left[\frac{d^3 v}{dt^3} + 3n'^2\frac{a'^3}{r'^3}\left(\frac{dv}{dt} - \frac{dv'}{dt}\right)\cos 2\mathrm{H} - \frac{9}{2}n'^2\frac{a'^3}{r'^3}\frac{\frac{dr'}{dt}}{r'}\sin 2\mathrm{H} = 0.\right]$$

Entre ces trois équations, j'élimine r, $\frac{dr}{dt}$, $\frac{d^2 r}{dt^2}$, en considérant $\frac{n^2 a^3}{r^3}$ comme une constante ; j'obtiens

$$4\frac{n^2 a^3}{r^3}\frac{dv^2}{dt^2} = 2\frac{dv}{dt}\frac{d^3 v}{dt^3} - 3\left(\frac{d^2 v}{dt^2}\right)^2 + 4\frac{dv^4}{dt^4} + 2n'^2\frac{a'^3}{r'^3}\frac{dv^2}{dt^2} - \frac{9}{8}n'^4\frac{a'^6}{r'^6}$$
$$- 6n'^2\frac{a'^3}{r'^3}\frac{d^2 v}{dt^2}\sin 2\mathrm{H} + 6n'^2\frac{a'^3}{r'^3}\frac{dv}{dt}\left(2\frac{dv}{dt} - \frac{dv'}{dt}\right)\cos 2\mathrm{H}$$
$$- 9n'^2\frac{a'^3}{r'^3}\frac{\frac{dr'}{dt}}{r'}\frac{dv}{dt}\sin 2\mathrm{H} + \frac{9}{8}n'^4\frac{a'^6}{r'^6}\cos 4\mathrm{H}.$$

Prenant les dérivées logarithmiques et remarquant que

$$-\frac{\frac{dr}{dt}}{r} = \frac{\frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{3}{2}n'^2\frac{a'^3}{r'^3}\sin 2\mathrm{H}}{2\frac{dv}{dt}},$$

r se trouve complètement éliminé, et l'on obtient l'équation suivante, qui ne contient plus que la longitude v et ses dérivées,

$$0 = \frac{dv^2}{dt^2}\frac{d^4 v}{dt^4} - \frac{11}{2}\frac{dv}{dt}\frac{d^2 v}{dt^2}\frac{d^3 v}{dt^3} + \frac{21}{4}\left(\frac{d^2 v}{dt^2}\right)^3 + \frac{dv^4}{dt^4}\frac{d^2 v}{dt^2} - \frac{3}{2}n'^2\frac{a'^3}{r'^3}\frac{dv^2}{dt^2}\frac{d^2 v}{dt^2}$$
$$+ \frac{171}{32}n'^4\frac{a'^6}{r'^6}\frac{d^2 v}{dt^2} - 3n'^2\frac{a'^3}{r'^3}\frac{\frac{dr'}{dt}}{r'}\frac{dv^3}{dt^3} + \frac{135}{16}n'^4\frac{a'^6}{r'^6}\frac{\frac{dr'}{dt}}{r'}\frac{dv}{dt}$$
$$+ 2n'^6\frac{a'^9}{r'^9}\sin 6\mathrm{H}\left[-\frac{81}{256}\right]$$

$$
\begin{aligned}
&+2n'^4\frac{a'^6}{r'^6}\cos 4\mathrm{H}\left[-\frac{171}{64}\frac{d^2v}{dt^2}-\frac{135}{32}\frac{dv}{dt}\frac{\frac{dr'}{dt}}{r'}\right]\\
&+2n'^4\frac{a'^6}{r'^6}\sin 4\mathrm{H}\left[-\frac{9}{2}\frac{dv^2}{dt^2}+\frac{45}{16}\frac{dv}{dt}\frac{dv'}{dt}\right]\\
&+2n'^2\frac{a'^3}{r'^3}\cos 2\mathrm{H}\left[-\frac{15}{2}\frac{dv^2}{dt^2}\frac{d^2v}{dt^2}+\frac{27}{4}\frac{dv}{dt}\frac{d^2v}{dt^2}\frac{dv'}{dt}-\frac{3}{2}\frac{dv^2}{dt^2}\frac{d^2v'}{dt^2}\right.\\
&\qquad\qquad\left.-\frac{27}{2}\frac{dv^3}{dt^3}\frac{\frac{dr'}{dt}}{r'}+9\frac{dv^2}{dt^2}\frac{dv'}{dt}\frac{\frac{dr'}{dt}}{r'}\right]\\
&+2n'^2\frac{a'^3}{r'^3}\sin 2\mathrm{H}\left[-\frac{21}{8}\frac{dv}{dt}\frac{d^3v}{dt^3}+\frac{111}{16}\left(\frac{d^2v}{dt^2}\right)^2-\frac{33}{4}\frac{dv^4}{dt^4}+9\frac{dv^3}{dt^3}\frac{dv'}{dt}\right.\\
&\qquad\qquad-3\frac{dv^2}{dt^2}\frac{dv'^2}{dt^2}-\frac{9}{8}n'^2\frac{a'^3}{r'^3}\frac{dv^2}{dt^2}+\frac{243}{256}n'^4\frac{a'^6}{r'^6}\\
&\qquad\qquad\left.+\frac{81}{8}\frac{dv}{dt}\frac{d^2v}{dt^2}\frac{\frac{dr'}{dt}}{r'}+9\frac{dv^2}{dt^2}\frac{\left(\frac{dr'}{dt}\right)^2}{r'^2}-\frac{9}{4}\frac{dv^2}{dt^2}\frac{\frac{d^2r'}{dt^2}}{r'}\right].
\end{aligned}
$$

λ' et ρ' sont des séries trigonométriques procédant la première suivant les sinus, la deuxième suivant les cosinus des sommes des multiples de certains arguments connus, de sorte qu'on peut écrire

$$\lambda' = \Sigma\lambda'_{p'}\sin \mathrm{V}_{p'}, \qquad \rho' = \Sigma\rho'_{p'}\cos \mathrm{V}_{p'},$$

la symétrie des séries trigonométriques étant, je le dis une fois pour toutes, toujours conservée.

Faisant alors $\mathrm{N} = nt + v_0$, $v = \mathrm{N} + \lambda$, $\mathrm{K} = \mathrm{N} - \mathrm{N}'$, et appelant G un argument convenablement déterminé de la forme $gt + \varpi$, λ sera une série trigonométrique, procédant suivant les sinus des sommes des multiples des arguments K, G, $\mathrm{V}_{p'}$; de sorte que je poserai, en désignant d'une façon générale par V_p ces nouveaux arguments,

$$\lambda = \Sigma\lambda_p \sin \mathrm{V}_p.$$

Le coefficient du temps dans V_p ou $\mathrm{V}_{p'}$ sera désigné par nk_p ou $nk_{p'}$, de façon que le rapport $\frac{n'}{n} = m$ figure seul à la place de n et n' dans les équations.

Si, maintenant, l'on développe le second membre de l'équation précédente en série trigonométrique procédant suivant les sinus des arguments

V_p, et que l'on égale à zéro le coefficient de $\sin V_p$ (V_p étant un argument quelconque), on obtient l'équation générale écrite ci-dessous, propre à déterminer par approximations successives chacun des coefficients λ_p,

$$0 = \lambda_p(k_p^4 - k_p^2)$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{V}_{p_1}+\mathbf{V}_{p_2}+\ldots+\mathbf{V}_{p'_1}+\ldots+\mathbf{V}_{p'_i}+\ldots=\mathbf{V}_p) \quad + \Sigma\Big\{\lambda_{p_1}\lambda_{p_2}(2k_{p_1}k_{p_2}^4 - \tfrac{11}{2}k_{p_1}^2k_{p_2}^3 - 4k_{p_1}k_{p_2}^2) \\
&\quad + \lambda_{p_1}\lambda_{p_2}\lambda_{p_3}(k_{p_1}k_{p_2}k_{p_3}^4 - \tfrac{11}{2}k_{p_1}k_{p_2}^2k_{p_3}^3 \\
&\qquad + \tfrac{21}{4}k_{p_1}^2k_{p_2}^2k_{p_3}^2 - 6k_{p_1}k_{p_2}k_{p_3}^2) \\
&\quad + \lambda_{p_1}\lambda_{p_2}\lambda_{p_3}\lambda_{p_4}(-4k_{p_1}k_{p_2}k_{p_3}k_{p_4}^2) \\
&\quad + \lambda_{p_1}\lambda_{p_2}\lambda_{p_3}\lambda_{p_4}\lambda_{p_5}(-k_{p_1}k_{p_2}k_{p_3}k_{p_4}k_{p_5}^2) \\
&\quad + m^2[1 - 3\rho'_{p'_i} + 6\rho'_{p'_i}\rho'_{p'_j} - 10\rho'_{p'_i}\rho'_{p'_j}\rho'_{p'_h} + \ldots] \\
&\qquad \times [\lambda_{p_1}(\tfrac{3}{2}k_{p_1}^2) + \lambda_{p_1}\lambda_{p_2}(3k_{p_1}k_{p_2}^2) \\
&\qquad + \lambda_{p_1}\lambda_{p_2}\lambda_{p_3}(\tfrac{3}{2}k_{p_1}k_{p_2}k_{p_3}^2)] \\
&\quad + m^4[1 - 6\rho'_{p'_i} + 21\rho'_{p'_i}\rho'_{p'_j} - 56\rho'_{p'_i}\rho'_{p'_j}\rho'_{p'_h} + \ldots] \\
&\qquad \times [\lambda_{p_1}(-\tfrac{171}{32}k_{p_1}^2)] \\
&\quad + m^2[1 - 4\rho'_{p'_i} + 10\rho'_{p'_i}\rho'_{p'_j} - 20\rho'_{p'_i}\rho'_{p'_j}\rho'_{p'_h} + \ldots] \\
&\qquad \times [\rho'_{p'_1}(3k_{p'_1}) + \rho'_{p'_1}\lambda_{p_1}(9k_{p'_1}k_{p_1}) \\
&\qquad + \rho'_{p'_1}\lambda_{p_1}\lambda_{p_2}(9k_{p'_1}k_{p_1}k_{p_2}) \\
&\qquad + \rho'_{p'_1}\lambda_{p_1}\lambda_{p_2}\lambda_{p_3}(3k_{p'_1}k_{p_1}k_{p_2}k_{p_3})] \\
&\quad + m^4[1 - 7\rho'_{p'_i} + 28\rho'_{p'_i}\rho'_{p'_j} - 84\rho'_{p'_i}\rho'_{p'_j}\rho'_{p'_h} + \ldots] \\
&\qquad \times [\rho'_{p'_1}(-\tfrac{135}{16}k_{p'_1}) + \rho'_{p'_1}\lambda_{p_1}(-\tfrac{135}{16}k_{p'_1}k_{p_1})]\Big\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{V}_{p_1}+\ldots+\mathbf{V}_{p'_1}+\ldots=\mathbf{V}_p \mp 6\mathbf{K}) \quad + m^6\,\Sigma[1 \pm 6\lambda_{p_i} + 18\lambda_{p_i}\lambda_{p_j} \pm 36\lambda_{p_i}\lambda_{p_j}\lambda_{p_h} + \ldots] \\
&\qquad \times [1 \mp 6\lambda'_{p'_i} + 18\lambda'_{p'_i}\lambda'_{p'_j} \mp 36\lambda'_{p'_i}\lambda'_{p'_j}\lambda'_{p'_h} + \ldots] \\
&\qquad \times [1 - 9\rho'_{p'_{i'}} + 45\rho'_{p'_{i'}}\rho'_{p'_{j'}} - 165\rho'_{p'_{i'}}\rho'_{p'_{j'}}\rho'_{p'_{h'}} + \ldots][\mp \tfrac{81}{256}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{V}_{p_1}+\ldots+\mathbf{V}_{p'_1}+\ldots=\mathbf{V}_p \mp 4\mathbf{K}) \quad + m^4\,\Sigma[1 \pm 4\lambda_{p_i} + 8\lambda_{p_i}\lambda_{p_j} \pm \tfrac{32}{3}\lambda_{p_i}\lambda_{p_j}\lambda_{p_h} + \ldots] \\
&\qquad \times [1 \mp 4\lambda'_{p'_i} + 8\lambda'_{p'_i}\lambda'_{p'_j} \mp \tfrac{32}{3}\lambda'_{p'_i}\lambda'_{p'_j}\lambda'_{p'_h} + \ldots] \\
&\qquad \times \Big\{[1 - 6\rho'_{p'_{i'}} + 21\rho'_{p'_{i'}}\rho'_{p'_{j'}} - 56\rho'_{p'_{i'}}\rho'_{p'_{j'}}\rho'_{p'_{h'}} + \ldots] \\
&\qquad \times (\pm(-\tfrac{9}{2} + \tfrac{45}{16}m) + \lambda_{p_1}[\tfrac{171}{64}k_{p_1}^2 \pm k_{p_1}(-9 + \tfrac{45}{16}m)] \\
&\qquad\quad + \lambda_{p_1}\lambda_{p_2}(\mp\tfrac{9}{2}k_{p_1}k_{p_2}) \\
&\qquad\quad + \lambda'_{p'_1}(\pm\tfrac{45}{16}k_{p'_1}) + \lambda'_{p'_1}\lambda_{p_1}(\pm\tfrac{45}{16}k_{p'_1}k_{p_1})) \\
&\qquad + [1 - 7\rho'_{p'_{i'}} + 28\rho'_{p'_{i'}}\rho'_{p'_{j'}} - 84\rho'_{p_{i'}}\rho'_{p'_{j'}}\rho'_{p'_{h'}} + \ldots] \\
&\qquad \times [\rho'_{p'_1}(\tfrac{135}{32}k_{p'_1}) + \rho'_{p'_1}\lambda_{p_1}(\tfrac{135}{32}k_{p'_1}k_{p_1})]\Big\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{V}_{p_1}+\ldots+\mathbf{V}_{p'_1}+\ldots=\mathbf{V}_p\mp 2\mathbf{K}) \quad & + m^2\,\Sigma\left[1\pm 2\lambda_{p_i}+2\lambda_{p_i}\lambda_{p_j}\pm\tfrac{4}{3}\lambda_{p_i}\lambda_{p_j}\lambda_{p_h}+\ldots\right]\\
& \times\left[1\mp 2\lambda'_{p'_i}+2\lambda'_{p'_i}\lambda'_{p'_j}\mp\tfrac{4}{3}\lambda'_{p'_i}\lambda'_{p'_j}\lambda'_{p'_h}+\ldots\right]\\
& \times\Big\{\left[1-3\rho'_{p'_{i'}}+6\rho'_{p'_{i'}}\rho'_{p'_{j'}}-10\rho'_{p'_{i'}}\rho'_{p'_{j'}}\rho'_{p'_{h'}}+\ldots\right]\\
& \quad\times\Big(\pm(-\tfrac{33}{4}+9m-3m^2)\\
& \qquad+\lambda_{p_1}\big[\pm\tfrac{21}{8}k_{p_1}^3+k_{p_1}^2(\tfrac{15}{2}-\tfrac{27}{4}m)\\
& \qquad\qquad\pm k_{p_1}(-33+27m-6m^2)\big]\\
& \qquad+\lambda_{p_1}\lambda_{p_2}\big[\pm\tfrac{21}{8}k_{p_1}k_{p_2}^3\mp\tfrac{111}{16}k_{p_1}^2k_{p_2}^2+k_{p_1}k_{p_2}^2(15-\tfrac{27}{4}m)\\
& \qquad\qquad\pm k_{p_1}k_{p_2}(-\tfrac{99}{2}+27m-3m^2)\big]\\
& \qquad+\lambda_{p_1}\lambda_{p_2}\lambda_{p_3}\big[\tfrac{15}{2}k_{p_1}k_{p_2}k_{p_3}^2\pm k_{p_1}k_{p_2}k_{p_3}(-33+9m)\big]\\
& \qquad+\lambda_{p_1}\lambda_{p_2}\lambda_{p_3}\lambda_{p_4}(\mp\tfrac{33}{4}k_{p_1}k_{p_2}k_{p_3}k_{p_4})\\
& \qquad+\lambda'_{p'_1}\big[\tfrac{3}{2}k_{p'_1}^2+k_{p'_1}(9-6m)\big]\\
& \qquad+\lambda'_{p'_1}\lambda_{p_1}\big[3k_{p'_1}^2k_{p_1}-\tfrac{27}{4}k_{p'_1}k_{p_1}^2\pm k_{p'_1}k_{p_1}(27-12m)\big]\\
& \qquad+\lambda'_{p'_1}\lambda_{p_1}\lambda_{p_2}\big[\tfrac{3}{2}k_{p'_1}^2k_{p_1}k_{p_2}-\tfrac{27}{4}k_{p'_1}k_{p_1}k_{p_2}^2\\
& \qquad\qquad\pm k_{p'_1}k_{p_1}k_{p_2}(27-6m)\big]\\
& \qquad+\lambda'_{p'_1}\lambda_{p_1}\lambda_{p_2}\lambda_{p_3}(\pm 9k_{p'_1}k_{p_1}k_{p_2}k_{p_3})\\
& \qquad+\lambda'_{p'_1}\lambda'_{p'_2}(\mp 3k_{p'_1}k_{p'_2})\\
& \qquad+\lambda'_{p'_1}\lambda'_{p'_2}\lambda_{p_1}(\mp 6k_{p'_1}k_{p'_2}k_{p_1})\\
& \qquad+\lambda'_{p'_1}\lambda'_{p'_2}\lambda_{p_1}\lambda_{p_2}(\mp 3k_{p'_1}k_{p'_2}k_{p_1}k_{p_2})\Big)\\
& +\left[1-4\rho'_{p'_{i'}}+10\rho'_{p'_{i'}}\rho'_{p'_{j'}}-20\rho'_{p'_{i'}}\rho'_{p'_{j'}}\rho'_{p'_{h'}}+\ldots\right]\\
& \times\Big(\rho'_{p'_1}\big[\pm\tfrac{9}{4}k_{p'_1}^2+k_{p'_1}(\tfrac{27}{2}-9m)\big]\\
& \qquad+\rho'_{p'_1}\lambda_{p_1}\big[\pm\tfrac{9}{2}k_{p'_1}^2k_{p_1}\mp\tfrac{81}{8}k_{p'_1}k_{p_1}^2\\
& \qquad\qquad+k_{p'_1}k_{p_1}(\tfrac{81}{2}-18m)\big]\\
& \qquad+\rho'_{p'_1}\lambda_{p_1}\lambda_{p_2}\big[\pm\tfrac{9}{4}k_{p'_1}^2k_{p_1}k_{p_2}\\
& \qquad\qquad\mp\tfrac{81}{8}k_{p'_1}k_{p_1}k_{p_2}^2+k_{p'_1}k_{p_1}k_{p_2}(\tfrac{81}{2}-9m)\big]\\
& \qquad+\rho'_{p'_1}\lambda_{p_1}\lambda_{p_2}\lambda_{p_3}(\tfrac{27}{2}k_{p'_1}k_{p_1}k_{p_2}k_{p_3})\\
& \qquad+\rho'_{p'_1}\lambda'_{p'_2}(-9k_{p'_1}k_{p'_2})\\
& \qquad+\rho'_{p'_1}\lambda'_{p'_2}\lambda_{p_1}(-18k_{p'_1}k_{p'_2}k_{p_1})\\
& \qquad+\rho'_{p'_1}\lambda'_{p'_2}\lambda_{p_1}\lambda_{p_2}(-9k_{p'_1}k_{p'_2}k_{p_1}k_{p_2})\Big)\\
& +\left[1-5\rho'_{p'_{i'}}+15\rho'_{p'_{i'}}\rho'_{p'_{j'}}-35\rho'_{p'_{i'}}\rho'_{p'_{j'}}\rho'_{p'_{h'}}+\ldots\right]\\
& \times\big[\rho'_{p'_1}\rho'_{p'_2}(\mp 9k_{p'_1}k_{p'_2})+\rho'_{p'_1}\rho'_{p'_2}\lambda_{p_1}(\mp 18k_{p'_1}k_{p'_2}k_{p_1})\\
& \qquad+\rho'_{p'_1}\rho'_{p'_2}\lambda_{p_1}\lambda_{p_2}(\mp 9k_{p'_1}k_{p'_2}k_{p_1}k_{p_2})\big]\\
& -m^2\left[1-6\rho'_{p'_{i'}}+21\rho'_{p'_{i'}}\rho'_{p'_{j'}}-56\rho'_{p'_{i'}}\rho'_{p'_{j'}}\rho'_{p'_{h'}}+\ldots\right]\\
& \quad\times\big[\pm(-\tfrac{9}{8})+\lambda_{p_1}(\mp\tfrac{9}{4}k_{p_1})+\lambda_{p_1}\lambda_{p_2}(\mp\tfrac{9}{8}k_{p_1}k_{p_2})\big]\\
& +m^4\left[1-9\rho'_{p'_{i'}}+45\rho'_{p'_{i'}}\rho'_{p'_{j'}}-165\rho'_{p'_{i'}}\rho'_{p'_{j'}}\rho'_{p'_{h'}}+\ldots\right]\\
& \quad\times\big[\pm\tfrac{243}{256}\big]\Big\}.
\end{aligned}
$$

Cette équation se lit facilement si l'on se reporte aux explications données dans le premier Mémoire : les sommations indiquées devront être étendues à tous les termes provenant des différentes permutations possibles des arguments V_{p_1}, V_{p_2}, ..., $V_{p'_1}$, ... qui vérifient les conditions marquées en vedette. On remarquera toutefois que je n'ai pas développé les produits dont les facteurs comprennent un nombre infini de termes; outre l'abréviation qui en résulte, on a de cette façon l'avantage de mettre en évidence la loi de formation de ces facteurs qui proviennent, comme on le voit tout de suite, du développement de certaines puissances négatives de $(1+\rho')$, et du développement des sinus et cosinus de certains multiples des angles λ et λ'.

Si, maintenant, on se reporte aux résultats obtenus dans mon Mémoire : *Sur les formules générales de la Mécanique céleste* (*Faculté de Toulouse,* tome IV), on voit d'abord, en adoptant les notations qui y sont employées, et en se souvenant des hypothèses faites, que l'on doit faire $N' = N_3 + \pi$, $a' = a_3$, $\lambda' = \lambda_3$, $\rho' = \rho_3$; et, comme on suppose l'orbite du Soleil autour de la Terre située tout entière dans le plan des xy, on laissera de côté dans λ' et ρ' tous les termes qui dépendent des constantes η_i correspondant aux inclinaisons. Si l'on convient, en outre, de ne garder dans λ' et ρ' que les parties d'ordre zéro par rapport aux masses des huit systèmes planétaires, on voit que ces quantités pourront s'écrire sous la forme

$$\lambda' = \Sigma\lambda'_{p_1^{(1)},\, p_2^{(2)},\dots} \sin[p^{(1)}(N_3 - G_1) + p^{(2)}(N_3 - G_2) + \dots],$$

$$\rho' = \Sigma\rho'_{p_1^{(1)},\, p_2^{(2)},\dots} \cos[p^{(1)}(N_3 - G_1) + p^{(2)}(N_3 - G_2) + \dots],$$

les G_i étant les arguments définis dans le Mémoire cité, de la forme $g_i t + \varpi_i$, et les coefficients $\lambda'_{p_1^{(1)},\, p_2^{(2)},\dots}$, $\rho'_{p_1^{(1)},\, p_2^{(2)},\dots}$ étant les coefficients correspondants de λ_3 et ρ_3 réduits à leurs parties d'ordre zéro par rapport aux masses et indépendantes des η_i. Quant aux quantités g_i, elles sont du premier ordre par rapport aux masses, et on les négligera par suite (quand elles figurent en dehors des arguments) devant les quantités d'ordre zéro par rapport à ces masses; dans le cas où l'on devra les conserver, on les réduira à leurs parties du premier ordre et indépendantes des η_i, que j'appellerai ng'_i.

Désignant toujours par ε_1, ε_2, ... les constantes correspondant aux excentricités, on aura d'ailleurs

$$\lambda'_{p_1^{(1)}, p_2^{(2)}, \ldots} = \varepsilon_1^{|p^{(1)}|} \varepsilon_2^{|p^{(2)}|} \ldots \Sigma \varepsilon_1^{q^{(1)}} \varepsilon_2^{q^{(2)}} \ldots \lambda'^{(q_1^{(1)}, q_2^{(2)}, \ldots)}_{p_1^{(1)}, p_2^{(2)}, \ldots},$$

$$\rho'_{p_1^{(1)}, p_2^{(2)}, \ldots} = \varepsilon_1^{|p^{(1)}|} \varepsilon_2^{|p^{(2)}|} \ldots \Sigma \varepsilon_1^{q^{(1)}} \varepsilon_2^{q^{(2)}} \ldots \rho'^{(q_1^{(1)}, q_2^{(2)}, \ldots)}_{p_1^{(1)}, q_2^{(2)}, \ldots},$$

$$g'_i = \Sigma \varepsilon_1^{q^{(1)}} \varepsilon_2^{q^{(2)}} \ldots g_i'^{(q_1^{(1)}, q^{(2)}, \ldots)},$$

$q^{(1)}$, $q^{(2)}$, ... étant des entiers pairs positifs ou nuls.

Les nouveaux coefficients ne dépendent plus que des seules masses des systèmes planétaires, et sont d'ordre zéro par rapport à ces masses, qui, dans la plupart des cas, par suite, n'y figureront pas.

On voit encore que, sans craindre aucune ambiguïté, on pourra se dispenser d'écrire les indices nuls parmi ceux qui affectent les divers coefficients que je viens de définir, en convenant toutefois de remplacer par zéro un ensemble d'indices correspondants tous nuls. C'est ainsi que, si j'appelle ε_i le coefficient de $\sin(N_3 - G_i)$ dans λ_3 (1), je pourrai écrire $\lambda'_{1_i} = \varepsilon_i$, et, par suite, $\lambda'^{(0)}_{1_i} = 1$; on en déduit facilement $\rho'^{(0)}_{1_i} = -\frac{1}{2}$.

Par suite des simplifications introduites, dont il serait facile ultérieurement de s'affranchir, mais qui correspondent aux conditions dans lesquelles on a l'habitude de traiter le mouvement de la Lune, on aura, pour λ, la forme suivante :

$$\lambda = \Sigma \lambda_{h, p, p_1^{(1)}, p_2^{(2)}, \ldots} \sin[hK + pG + p^{(1)}(N_3 - G_1) + p^{(2)}(N_3 - G_2) + \ldots];$$

et, en outre, on pourra écrire

$$\lambda_{h, p, p_1^{(1)}, p_2^{(2)}, \ldots} = \varepsilon^{|p|} \varepsilon^{|p^{(1)}|} \varepsilon^{|p^{(2)}|} \ldots \Sigma \varepsilon^q \varepsilon_1^{q^{(1)}} \varepsilon_2^{q^{(2)}} \ldots \lambda^{(q, q_1^{(1)}, q_2^{(2)}, \ldots)}_{h, p, p_1^{(1)}, p_2^{(2)}, \ldots},$$

de même

$$g = n \Sigma \varepsilon^q \varepsilon_1^{q^{(1)}} \varepsilon_2^{q^{(2)}} \ldots g_{q, q_1^{(1)}, q_2^{(2)}, \ldots},$$

q, $q^{(1)}$, $q^{(2)}$, ... étant des entiers pairs positifs ou nuls, et les nouveaux coefficients ne dépendant plus que de m et des coefficients $\lambda'^{(q_1^{(1)}, \ldots)}_{p_1^{(1)}, \ldots}$, $\rho'^{(q_1^{(1)}, \ldots)}_{p_1^{(1)}, \ldots}$, $g_i'^{(q_1^{(1)}, \ldots)}$ définis en dernier lieu. On pourra d'ailleurs partout se dispenser d'écrire les indices $p^{(i)}$ ou $q^{(i)}$ qui seraient nuls; mais on conservera tou-

(1) Dans le Mémoire cité, ε_i désigne le coefficient de $\cos(N_3 - G_i)$ dans ρ_3; la convention faite ici rapproche les notations de celles qu'on a l'habitude d'employer.

jours les indices h, p, q même nuls. C'est ainsi que l'on a $\lambda_{0,1} = \varepsilon$, et, par suite, $\lambda_{0,1}^{(0)} = 1$.

Dans le présent travail, je calcule les parties des coefficients λ_p qui sont du premier degré par rapport aux quantités ε_i, c'est-à-dire les coefficients $\lambda_{h,0,\pm 1_i}^{(0)}$: l'approximation que je me propose d'obtenir étant celle de Delaunay, il suffira de faire $h = 0, 2, 4, 6$. On voit que dans le calcul on pourra négliger g_i partout, et que les coefficients cherchés sont indépendants de l'indice i et ne renferment que m et non les masses des systèmes planétaires, puisque $\lambda_{1_i}^{\prime(0)} = 1$ et $\rho_{1_i}^{\prime(0)} = -\frac{1}{2}$.

Ces coefficients seront, par suite, développés en séries ordonnées suivant les puissances de m; l'ordre de $\lambda_{h,0,\pm 1_i}^{(0)}$ par rapport à m sera manifestement h, sauf dans le cas de $h = 0$, où cet ordre sera un.

Les formules du premier Mémoire, qui donnent g_0 et $\lambda_{h,\pm 1}^{(0)}$ pour les mêmes valeurs de h, vont s'appliquer au présent calcul avec les modifications suivantes : g_0 sera remplacé par m, $\lambda_{h,\pm 1}^{(0)}$ par $\lambda_{h,0,\pm 1_i}^{(0)}$, et partout où il n'y aura pas de facteur de la forme $\lambda_{h,\pm 1}^{(0)}$, on mettra le facteur $\lambda_{0,0,1_i}^{(0)}$ (précédemment, en effet, l'unité remplaçait $\lambda_{0,1}^{(0)}$); on pourra supprimer les termes assez nombreux d'un ordre supérieur à celui qu'on doit obtenir et qui sera indiqué plus bas; enfin les seconds membres de chaque formule devront être complétés par de nouveaux termes que seuls je vais écrire en même temps que les premiers termes. Toutes les explications données précédemment s'appliquent d'ailleurs sans modification aux formules actuelles que voici :

$\lambda_{0,0,1_i}^{(0)}$ jusqu'au neuvième ordre :

$$
\begin{aligned}
0 = \;& \lambda_{0,0,1_i}^{(0)}[m^4 + m^2(-1 + \tfrac{3}{2}m^2 - \tfrac{171}{32}m^4)] \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& - \tfrac{3}{2}m^3 + \tfrac{135}{32}m^5 + (\lambda_{2,0}^{(0)})^2[-36m^3\mu^2] + (\lambda_{4,0}^{(0)})^2[-144m^3\mu^2] + (\lambda_{2,0}^{(0)})^2\lambda_{4,0}^{(0)}[-144m^3\mu^3] \\
& + m^4\lambda_{4,0}^{(0)}[342\mu^2 + \mu(288 - 90m) - 144 + 90m - \tfrac{135}{8}m\mu + \tfrac{135}{8}m] \\
& + m^4(\lambda_{2,0}^{(0)})^2[-198\mu^2 + \mu(-576 + 180m) + 288 - 180m + \tfrac{135}{4}m\mu - \tfrac{135}{4}m] \\
& + m^2\lambda_{2,0}^{(0)}[-84\mu^3 + \mu^2(120 - 108m) + \mu(264 - 216m + 66m^2) - 66 + 72m - 33m^2 \\
& \qquad + \tfrac{243}{32}m^4 - \tfrac{81}{2}m\mu^2 + m\mu(-81 + 36m) + m(27 - 18m) + 12m^2\mu - 6m^2] \\
& + m^2\lambda_{2,0}^{(0)}\lambda_{4,0}^{(0)}[-5232\mu^4 + \mu^3(-216 - 432m) + \mu^2(4368 - 2808m + 264m^2) \\
& \qquad + \mu(528 - 432m + 132m^2) - 132 + 144m - 66m^2 + \tfrac{243}{16}m^4 \\
& \qquad - 162m\mu^3 + m\mu^2(-1053 + 144m) + m\mu(-162 + 72m) \\
& \qquad + m(54 - 36m) + 48m^2\mu^2 + 24m^2\mu - 12m^2]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ m^2(\lambda_{2,0}^{(0)})^3[3480\mu^4 + \mu^3(4296 - 1296m) + \mu^2(-2304 + 1512m - 132m^2) \\
&\qquad + \mu(-528 + 432m - 132m^2) + 132 - 144m + 66m^2 - \tfrac{243}{16}m^4 \\
&\qquad - 486m\mu^3 + m\mu^2(567 - 72m) + m\mu(162 - 72m) + m(-54 + 36m) \\
&\qquad - 24m^2\mu^2 - 24m^2\mu + 12m^2] \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

$\lambda_{2,0,1_i}^{(0)}$ jusqu'au neuvième ordre :

$$
\begin{aligned}
0 = \;& \lambda_{2,0,1_i}^{(0)}[(2\mu + m)^4 + (2\mu + m)^2(-1 + \tfrac{3}{2}m^2 - \tfrac{171}{32}m^4)] \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \lambda_{2,0}^{(0)}[\mu^2(9m^2 - \tfrac{513}{8}m^4) + \mu(-9m^3 + \tfrac{135}{16}m^5)] \\
&+ \lambda_{2,0}^{(0)}\lambda_{4,0}^{(0)}[72\mu^3m^2 - 72\mu^2m^3] + (\lambda_{2,0}^{(0)})^3[36\mu^4m^2 - 36\mu^3m^3] \\
&+ m^4\lambda_{2,0}^{(0)}[\tfrac{171}{16}\mu^2 + \mu(18 - \tfrac{45}{8}m) - 18 + \tfrac{45}{4}m + \tfrac{45}{32}m\mu - \tfrac{45}{16}m] \\
&+ m^2[\tfrac{33}{8} - \tfrac{9}{4}m - \tfrac{3}{4}m^2 + \tfrac{1215}{512}m^4] \\
&+ m^2\lambda_{4,0}^{(0)}[-588\mu^3 + \mu^2(420 - 378m) + \mu(462 - 378m + 129m^2) - \tfrac{231}{4} + 63m \\
&\qquad - \tfrac{129}{4}m^2 + \tfrac{3159}{256}m^4 - 189m\mu^2 + m\mu(-189 + 84m) \\
&\qquad + m(\tfrac{63}{2} - 21m) + 21m^2\mu - \tfrac{21}{4}m^2] \\
&+ m^2(\lambda_{2,0}^{(0)})^2[\tfrac{177}{2}\mu^4 + \mu^3(567 - 189m) + \mu^2(741 - 351m + \tfrac{135}{2}m^2) \\
&\qquad + \mu(-462 + 378m - 129m^2) + \tfrac{165}{4} - 45m + \tfrac{123}{4}m^2 - \tfrac{5589}{256}m^4 \\
&\qquad - \tfrac{189}{2}m\mu^3 + m\mu^2(-\tfrac{27}{2} + 30m) + m\mu(189 - 84m) \\
&\qquad + m(-\tfrac{81}{2} + 27m) + \tfrac{27}{2}m^2\mu^2 - 21m^2\mu + \tfrac{15}{4}m^2] \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

$\lambda_{2,0,-1_i}^{(0)}$ jusqu'au neuvième ordre :

$$
\begin{aligned}
0 = \;& \lambda_{2,0,-1_i}^{(0)}[(2\mu - m)^4 + (2\mu - m)^2(-1 + \tfrac{3}{2}m^2 - \tfrac{171}{32}m^4)] \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \lambda_{2,0}^{(0)}[\mu^2(9m^2 - \tfrac{513}{8}m^4) + \mu(9m^3 - \tfrac{135}{16}m^5)] \\
&+ \lambda_{2,0}^{(0)}\lambda_{4,0}^{(0)}[72\mu^3m^2 + 72\mu^2m^3] + (\lambda_{2,0}^{(0)})^3[36\mu^4m^2 + 36\mu^3m^3] \\
&+ m^4\lambda_{2,0}^{(0)}[-\tfrac{1197}{16}\mu^2 + \mu(-126 + \tfrac{315}{8}m) + 126 - \tfrac{315}{4}m + \tfrac{315}{32}m\mu - \tfrac{315}{16}m] \\
&+ m^2[-\tfrac{231}{8} + \tfrac{189}{4}m - \tfrac{117}{4}m^2 + \tfrac{3159}{512}m^4] \\
&+ m^2\lambda_{4,0}^{(0)}[84\mu^3 + \mu^2(-60 + 54m) + \mu(-66 + 54m - 3m^2) + \tfrac{33}{4} - 9m + \tfrac{3}{4}m^2 \\
&\qquad + \tfrac{1215}{256}m^4 - 27m\mu^2 + m\mu(-27 + 12m) + m(\tfrac{9}{2} - 3m) - 3m^2\mu + \tfrac{3}{4}m^2] \\
&+ m^2(\lambda_{2,0}^{(0)})^2[\tfrac{2073}{2}\mu^4 + \mu^3(-81 + 27m) + \mu^2(-1875 + 1161m - \tfrac{261}{2}m^2) \\
&\qquad + \mu(66 - 54m + 3m^2) + \tfrac{429}{4} - 117m + \tfrac{255}{4}m^2 - \tfrac{7533}{256}m^4 \\
&\qquad - \tfrac{27}{2}m\mu^3 + m\mu^2(\tfrac{1107}{2} - 78m) + m\mu(27 - 12m) + m(-\tfrac{135}{2} + 45m \\
&\qquad - \tfrac{45}{2}m^2\mu^2 + 3m^2\mu + \tfrac{39}{4}m^2] \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

$\lambda^{(0)}_{4,0,1i}$ jusqu'au septième ordre :

$$\begin{aligned}
0 = \;& \lambda^{(0)}_{4,0,1i}[(4\mu+m)^4+(4\mu+m)^2(-1+\tfrac{3}{2}m^2-\tfrac{171}{32}m^4)] \\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+\lambda^{(0)}_{4,0}[\mu^2(36m^2-\tfrac{513}{2}m^4)+\mu(-18m^3+\tfrac{135}{8}m^5)] \\
&+(\lambda^{(0)}_{2,0})^2[36\mu^3m^2-18\mu^2m^3] \\
&+m^4[\tfrac{9}{4}-\tfrac{135}{64}m] \\
&+m^2\lambda^{(0)}_{2,0}[-\tfrac{21}{2}\mu^3+\mu^2(-15+\tfrac{27}{2}m)+\mu(33-27m+\tfrac{3}{2}m^2)+\tfrac{33}{4}-9m+\tfrac{3}{4}m^2 \\
&\qquad+\tfrac{1215}{256}m^4-\tfrac{27}{4}m\mu^2+m\mu(\tfrac{27}{2}-6m)+m(\tfrac{9}{2}-3m)+\tfrac{3}{2}m^2\mu+\tfrac{3}{4}m^2] \\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$\lambda^{(0)}_{4,0,-1i}$ jusqu'au septième ordre :

$$\begin{aligned}
0 = \;& \lambda^{(0)}_{4,0,-1i}[(4\mu-m)^4+(4\mu-m)^2(-1+\tfrac{3}{2}m^2-\tfrac{171}{32}m^4)] \\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+\lambda^{(0)}_{4,0}[\mu^2(36m^2-\tfrac{513}{2}m^4)+\mu(18m^3-\tfrac{135}{8}m^5)] \\
&+(\lambda^{(0)}_{2,0})^2[36\mu^3m^2+18\mu^2m^3] \\
&+m^4[-\tfrac{63}{2}+\tfrac{1575}{64}m] \\
&+m^2\lambda^{(0)}_{2,0}[\tfrac{147}{2}\mu^3+\mu^2(105-\tfrac{189}{2}m)+\mu(-231+189m-\tfrac{129}{2}m^2)-\tfrac{231}{4}+63m \\
&\qquad-\tfrac{129}{4}m^2+\tfrac{3159}{256}m^4-\tfrac{189}{4}m\mu^2+m\mu(\tfrac{189}{2}-42m)+m(\tfrac{63}{2}-21m) \\
&\qquad-\tfrac{21}{2}m^2\mu-\tfrac{21}{4}m^2] \\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Il serait facile d'écrire les formules qui permettent de calculer $\lambda^{(0)}_{6,0,\pm 1i}$ jusqu'au neuvième ordre; c'est en effet le résultat de la première approximation. Comme je ne ferai pas usage de ces formules, j'écris seulement les termes complémentaires nécessaires pour obtenir le sixième ordre.

$\lambda^{(0)}_{6,0,1i}$ jusqu'au sixième ordre :

$$\begin{aligned}
0 = \;& \lambda^{(0)}_{6,0,1i}[(6\mu+m)^4+(6\mu+m)^2(-1+\tfrac{3}{2}m^2-\tfrac{171}{32}m^4)] \\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+m^6[\tfrac{243}{512}] \\
&+m^4\lambda^{(0)}_{2,0}[-\tfrac{171}{16}\mu^2+18\mu+18+\ldots] \\
&+m^2\lambda^{(0)}_{4,0}[-84\mu^3-60\mu^2+66\mu+\tfrac{33}{4}+\ldots] \\
&+m^2(\lambda^{(0)}_{2,0})^2[\tfrac{69}{2}\mu^4-81\mu^3+69\mu^2+66\mu+\tfrac{33}{4}+\ldots] \\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$\lambda^{(0)}_{6,0,-1,i}$ jusqu'au sixième ordre :

$$\begin{aligned}
0 = {} & \lambda^{(0)}_{6,0,-1,i}[(6\mu - m)^4 + (6\mu - m)^2(-1 + \tfrac{3}{2}m^2 - \tfrac{171}{32}m^4)] \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + m^6[-\tfrac{1701}{512}] \\
& + m^4\lambda^{(0)}_{2,0}[\tfrac{1197}{16}\mu^2 - 126\mu - 126 + \ldots] \\
& + m^2\lambda^{(0)}_{4,0}[588\mu^3 + 420\mu^2 - 462\mu - \tfrac{231}{4} + \ldots] \\
& + m^2(\lambda^{(0)}_{2,0})^2[-\tfrac{483}{2}\mu^4 + 567\mu^3 - 483\mu^2 - 462\mu - \tfrac{231}{4} + \ldots] \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

On trouvera plus loin les valeurs des inconnues, qui sont identiques avec celles fournies par la seconde méthode que j'ai employée et que je vais exposer maintenant.

Cette méthode est une extension immédiate de celle que j'ai exposée d'après M. Hill dans mon premier Mémoire.

Je prends les équations du mouvement sous la forme

$$\frac{1}{2}\frac{d^2(r^2)}{dt^2} - \frac{f(\mathrm{M}+\mathrm{M}_0)}{r} - 2\int(d\mathrm{R}) - r\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial r} = 0,$$

$$\frac{dv^2}{dt^2} - \frac{1}{r}\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{f(\mathrm{M}+\mathrm{M}_0)}{r^3} + \frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial r} = 0,$$

où

$$\mathrm{R} = \frac{n'^2}{4}\frac{a'^3}{r'^3}r^2(1 + 3\cos 2\mathrm{H}) \quad \text{et} \quad (d\mathrm{R}) = \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial r}dr + \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial v}dv.$$

Éliminant f entre ces deux équations, j'obtiens la suivante :

$$2r\frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{dr^2}{dt^2} - r^2\frac{dv^2}{dt^2} - 2\int(d\mathrm{R}) - 2r\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial r} = 0,$$

à laquelle je joins

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{dv}{dt}\right) - \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial v} = 0.$$

Remplaçant R par sa valeur, ces équations s'écrivent

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{dv}{dt}\right) + \frac{3}{2}n'^2\frac{a'^3}{r'^3}r^2\sin 2\mathrm{H} = 0,$$

$$\begin{aligned}
2r\frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{dr^2}{dt^2} - r^2\frac{dv^2}{dt^2} - n'^2\frac{a'^3}{r'^3}r^2(1 + 3\cos 2\mathrm{H}) & \\
- \frac{n'^2}{2}\int\left\{d\left[r^2\frac{a'^3}{r'^3}(1 + 3\cos 2\mathrm{H})\right]\right\} &= 0.
\end{aligned}$$

Si alors on fait

$$r\cos\lambda = x = \alpha(1 + \Sigma x_p \cos V_p),$$
$$r\sin\lambda = y = \alpha\Sigma y_p \sin V_p,$$

les V_p étant les mêmes arguments que précédemment et α une constante à déterminer, ces équations deviennent d'abord

$$\frac{d}{dt}\left[n(x^2+y^2) + x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right] + 3n'^2\frac{a'^3}{r'^3}xy\cos 2(\mathrm{K}-\lambda')$$
$$+ \frac{3}{2}n'^2\frac{a'^3}{r'^3}(x^2-y^2)\sin 2(\mathrm{K}-\lambda') = 0,$$

$$2\left(x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2}\right) + \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} - 2n\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) - n^2(x^2+y^2)$$
$$- n'^2\left\{\frac{a'^3}{r'^3}(x^2+y^2) + \frac{1}{2}\int\left(d\left[\frac{a'^3}{r'^3}(x^2+y^2)\right]\right)\right\}$$
$$- 3n'^2\left\{\frac{a'^3}{r'^3}(x^2-y^2)\cos 2(\mathrm{K}-\lambda') + \frac{1}{2}\int\left(d\left[\frac{a'^3}{r'^3}(x^2-y^2)\cos 2(k-\lambda')\right]\right)\right\}$$
$$+ 6n'^2\left\{\frac{a'^3}{r'^3}\;xy\;\sin 2(\mathrm{K}-\lambda') + \frac{1}{2}\int\left(d\left[\frac{a'^3}{r'^3}\;xy\;\sin 2(k-\lambda')\right]\right)\right\} = 0.$$

Puis, développant les premiers membres en séries trigonométriques, et égalant à zéro le coefficient de $\sin V_p$ dans la première équation et celui de $\cos V_p$ dans la seconde, V_p étant un argument quelconque (0 exclu), on obtient les deux équations fondamentales suivantes, que l'on comprendra comme celle qui donne λ_p :

$$\mathbf{V}_{p_1} + \mathbf{V}_{p_2} = \mathbf{V}_p) \qquad \Sigma[k_p(k_{p_1}-k_{p_2})x_{p_1}y_{p_2} + k_p(y_{p_1}y_{p_2} - x_{p_1}x_{p_2})]$$

$$\mathbf{V}_{p_1}+\mathbf{V}_{p_2}+\mathbf{V}_{p'_i}+\ldots=\mathbf{V}_p\mp 2\mathbf{K}) \qquad \pm\tfrac{3}{2}m^2\Sigma(1 - 3\rho'_{p'_i} + 6\rho'_{p'_i}\rho'_{p'_j} - 10\rho'_{p'_i}\rho'_{p'_j}\rho'_{p'_h} + \ldots)$$
$$\times(1 \mp 2\lambda'_{p'_{i'}} + 2\lambda'_{p'_{i'}}\lambda'_{p'_{j'}} \mp \tfrac{4}{3}\lambda'_{p'_{i'}}\lambda'_{p'_{j'}}\lambda'_{p'_{h'}} + \ldots)$$
$$\times(\tfrac{1}{2}y_{p_1}y_{p_2} + \tfrac{1}{2}x_{p_1}x_{p_2} \pm x_{p_1}y_{p_2}) = 0.$$

$$\mathbf{V}_{p_1} + \mathbf{V}_{p_2} = \mathbf{V}_p) \qquad \Sigma[(k_{p_1}k_{p_2} - k_p^2 - 1)(y_{p_1}y_{p_2} - x_{p_1}x_{p_2}) - 2(k_{p_1}-k_{p_2})x_{p_1}y_{p_2}]$$

$$\mathbf{V}_{p_1} + \mathbf{V}_{p_2} + \mathbf{V}_{p'_i} + \ldots = \mathbf{V}_p) \qquad -\frac{m^2}{2k_p}\Sigma(3k_p - k_{p'_i} - k_{p'_j} - \ldots)$$
$$\times(1 - 3\rho'_{p'_i} + 6\rho'_{p'_i}\rho'_{p'_j} - 10\rho'_{p'_i}\rho'_{p'_j}\rho'_{p'_h} + \ldots)$$
$$\times(y_{p_1}y_{p_2} - x_{p_1}x_{p_2})$$

$$
\begin{array}{ll}
\mathrm{V}_{p_1}+\mathrm{V}_{p_2}+\mathrm{V}_{p'_i}+\ldots=\mathrm{V}_p\mp 2\mathrm{K}) & +\dfrac{3m^2}{2k_p}\Sigma(3k_p\pm 2m-k_{p'_i}-k_{p'_j}-\ldots)\\
& \quad\times(1-3\rho'_{p'_i}+6\rho'_{p'_i}\rho'_{p'_j}-10\rho'_{p'_i}\rho'_{p'_j}\rho'_{p'_h}+\ldots)\\
& \quad\times(1\mp 2\lambda'_{p'_{i'}}+2\lambda'_{p'_{i'}}\lambda'_{p'_{j'}}\mp\frac{4}{3}\lambda'_{p'_{i'}}\lambda'_{p'_{j'}}\lambda'_{p'_{h'}}+\ldots)\\
& \quad\times(\frac{1}{2}y_{p_1}y_{p_2}+\frac{1}{2}x_{p_1}x_{p_2}\pm x_{p_1}y_{p_2})=0.
\end{array}
$$

On remarquera que, pour obtenir ces deux équations fondamentales, l'artifice employé dans le premier Mémoire a été inutile : il a suffi d'appliquer la définition de $\int(d\mathrm{R})$.

Ces équations peuvent être transformées et utilisées de bien des façons. Dans la première ligne de chacune d'elles, je mets en évidence les termes qui proviennent de la combinaison $\left.\begin{matrix}\mathrm{V}_{p_1}\\ \mathrm{V}_{p_2}\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}0\\ \mathrm{V}_p\end{matrix}\right.$, et je résous par rapport à y_p et x_p mis ainsi en évidence; j'obtiens

$$
(k_p^4-k_p^2)y_p=\left\{
\begin{array}{ll}
\left.\begin{matrix}\mathrm{V}_{p_1}+\mathrm{V}_{p_2}=\mathrm{V}_p\\ \mathrm{V}_{p_1},\mathrm{V}_{p_2}\neq 0\end{matrix}\right) & 2k_p\Sigma\frac{1}{2}k_{p_1}k_{p_2}(y_{p_1}y_{p_2}-x_{p_1}x_{p_2})\\
& \quad+k_p(k_p^2-1)\Sigma(k_{p_1}-k_{p_2})x_{p_1}y_{p_2}\\
\mathrm{V}_{p_1}+\mathrm{V}_{p_2}+\mathrm{V}_{p'_i}+\ldots=\mathrm{V}_p) & -m^2\Sigma(3k_p-k_{p'_i}-k_{p'_j}-\ldots)\\
& \quad\times(1-3\rho'_{p'_i}+6\rho'_{p'_i}\rho'_{p'_j}-10\rho'_{p'_i}\rho'_{p'_j}\rho'_{p'_h}+\ldots)\\
& \quad\times\frac{1}{2}(y_{p_1}y_{p_2}-x_{p_1}x_{p_2})\\
\mathrm{V}_{p_1}+\mathrm{V}_{p_2}+\mathrm{V}_{p'_i}+\ldots=\mathrm{V}_p\mp 2\mathrm{K}) & +m^2\Sigma[\frac{9}{2}k_p-\frac{3}{2}(k_{p'_i}+k_{p'_j}+\ldots)\pm\frac{3}{2}(k_p^2+1+2m)]\\
& \quad\times(1-3\rho'_{p'_i}+6\rho'_{p'_i}\rho'_{p'_j}-10\rho'_{p'_i}\rho'_{p'_j}\rho'_{p'_h}+\ldots)\\
& \quad\times(1\mp 2\lambda'_{p'_{i'}}+2\lambda'_{p'_{i'}}\lambda'_{p'_{j'}}\mp\frac{4}{3}\lambda'_{p'_{i'}}\lambda'_{p'_{j'}}\lambda'_{p'_{h'}}+\ldots)\\
& \quad\times(\frac{1}{2}y_{p_1}y_{p_2}+\frac{1}{2}x_{p_1}x_{p_2}\pm x_{p_1}y_{p_2}).
\end{array}\right.
$$

$$
x_p=\left\{
\begin{array}{lll}
& \left.\begin{matrix}\mathrm{V}_{p_1}+\mathrm{V}_{p_2}=\mathrm{V}_p\\ \mathrm{V}_{p_1},\mathrm{V}_{p_2}\neq 0\end{matrix}\right) & \Sigma\frac{1}{2}(y_{p_1}y_{p_2}-x_{p_1}x_{p_2})\\
+\dfrac{1}{k_p(1-k_p^2)}\times & \left\{\begin{matrix}\mathrm{V}_{p_1}+\mathrm{V}_{p_2}=\mathrm{V}_p)\\ \mathrm{V}_{p_1}+\mathrm{V}_{p_2}+\mathrm{V}_{p'_i}+\ldots=\mathrm{V}_p)\end{matrix}\right. & \begin{array}{l}k_p\Sigma\frac{1}{2}k_{p_1}k_{p_2}(y_{p_1}y_{p_2}-x_{p_1}x_{p_2})\\ -\dfrac{m^2}{2}\Sigma(3k_p-k_{p'_i}-k_{p'_j}-\ldots)\end{array}\\
& & \quad\times(1-3\rho'_{p'_i}+6\rho'_{p'_i}\rho'_{p'_j}-10\rho'_{p'_i}\rho'_{p'_j}\rho'_{p'_h}+\ldots)\\
& & \quad\times\frac{1}{2}(y_{p_1}y_{p_2}-x_{p_1}x_{p_2})\\
& \mathrm{V}_{p_1}+\mathrm{V}_{p_2}+\mathrm{V}_{p'_i}+\ldots=\mathrm{V}_p\mp 2\mathrm{K}) & +m^2\Sigma[\frac{9}{4}k_p-\frac{3}{4}(k_{p'_i}+k_{p'_j}+\ldots)\pm\frac{3}{2}(1+m)]\\
& & \quad\times(1-3\rho'_{p'_i}+6\rho'_{p'_i}\rho'_{p'_j}-10\rho'_{p'_i}\rho'_{p'_j}\rho'_{p'_h}+\ldots)\\
& & \quad\times(1\mp 2\lambda'_{p'_{i'}}+2\lambda'_{p'_{i'}}\lambda'_{p'_{j'}}\mp\frac{4}{3}\lambda'_{p'_{i'}}\lambda'_{p'_{j'}}\lambda'_{p'_{h'}}+\ldots)\\
& & \quad\times(\frac{1}{2}y_{p_1}y_{p_2}+\frac{1}{2}x_{p_1}x_{p_2}\pm x_{p_1}y_{p_2})\Big\}.
\end{array}\right.
$$

Mais on peut encore employer les formules suivantes, qui se rapprochent davantage de celles qu'on trouve dans le premier Mémoire et qu'on obtient d'une façon tout à fait semblable,

$$k_p^2\left(k_p^2 - 1 + \tfrac{3}{2}m^2\right)y_p = \left\{\begin{array}{ll}
\left.\begin{array}{l}\mathbf{V}_{p_1}+\mathbf{V}_{p_2}=\mathbf{V}_p\\ \mathbf{V}_{p_1},\mathbf{V}_{p_2}\quad\neq 0\end{array}\right) & 2k_p\Sigma\tfrac{1}{2}k_{p_1}k_{p_2}(y_{p_1}y_{p_2}-x_{p_1}x_{p_2})\\
 & \quad + k_p\left(k_p^2-1+\tfrac{3}{2}m^2\right)\Sigma(k_{p_1}-k_{p_2})x_{p_1}y_{p_2}\\
\mathbf{V}_{p_1}+\mathbf{V}_{p_2}+\mathbf{V}_{p'_i}+\ldots=\mathbf{V}_p) & + m^2\Sigma(3k_p-k_{p'_i}-k_{p'_j}-\ldots)\\
 & \quad\times(3\rho'_{p'_i}-6\rho'_{p'_i}\rho'_{p'_j}+10\rho'_{p'_i}\rho'_{p'_j}\rho'_{p'_h}-\ldots)\\
 & \quad\times\tfrac{1}{2}(y_{p_1}y_{p_2}-x_{p_1}x_{p_2})\\
\mathbf{V}_{p_1}+\mathbf{V}_{p_2}+\mathbf{V}_{p'_i}+\ldots=\mathbf{V}_p\mp 2\mathbf{K}) & + m^2\Sigma\left[\tfrac{9}{2}k_p-\tfrac{3}{2}(k_{p'_i}+k_{p'_j}+\ldots)\right.\\
 & \qquad\left.\pm\tfrac{3}{2}\left(k_p^2+1+2m+\tfrac{3}{2}m^2\right)\right]\\
 & \quad\times(1-3\rho'_{p'_i}+6\rho'_{p'_i}\rho'_{p'_j}-10\rho'_{p'_i}\rho'_{p'_j}\rho'_{p'_h}+\ldots)\\
 & \quad\times(1\mp 2\lambda'_{p'_{i'}}+2\lambda'_{p'_{i'}}\lambda'_{p'_{j'}}\mp\tfrac{4}{3}\lambda'_{p'_{i'}}\lambda'_{p'_{j'}}\lambda'_{p'_{h'}}+\ldots)\\
 & \quad\times(\tfrac{1}{2}y_{p_1}y_{p_2}+\tfrac{1}{2}x_{p_1}x_{p_2}\pm x_{p_1}y_{p_2}).
\end{array}\right.$$

$$x_p = -\frac{k_p}{2}y_p + \left\{\begin{array}{ll}
\left.\begin{array}{l}\mathbf{V}_{p_1}+\mathbf{V}_{p_2}=\mathbf{V}_p\\ \mathbf{V}_{p_1},\mathbf{V}_{p_2}\quad\neq 0\end{array}\right) & \tfrac{1}{2}\Sigma(k_{p_1}-k_{p_2})x_{p_1}y_{p_2}+\Sigma\tfrac{1}{2}(y_{p_1}y_{p_2}-x_{p_1}x_{p_2})\\
\mathbf{V}_{p_1}+\mathbf{V}_{p_2}+\mathbf{V}_{p'_i}+\ldots=\mathbf{V}_p\mp 2\mathbf{K}) & \pm\dfrac{3}{4}\dfrac{m^2}{k_p}\Sigma(1-3\rho'_{p'_i}+6\rho'_{p'_i}\rho'_{p'_j}-10\rho'_{p'_i}\rho'_{p_j}\rho'_{p'_h}+\ldots)\\
 & \quad\times(1\mp 2\lambda'_{p'_{i'}}+2\lambda'_{p'_{i'}}\lambda'_{p'_{j'}}\mp\tfrac{4}{3}\lambda'_{p'_{i'}}\lambda'_{p'_{j'}}\lambda'_{p'_{h'}}+\ldots)\\
 & \quad\times(\tfrac{1}{2}y_{p_1}y_{p_2}+\tfrac{1}{2}x_{p_1}x_{p_2}\pm x_{p_1}y_{p_2}).
\end{array}\right.$$

Enfin λ_p sera calculé par une formule donnée dans le premier Mémoire. La forme des coefficients x_p et y_p, et de la quantité g, sera tout à fait pareille à celle donnée pour les λ_p et g précédemment : la constante η ne fera que remplacer la constante ε. Il me paraît donc inutile de récrire ces formes, et je vais donner tout de suite les formules qui permettent le calcul des coefficients que j'ai en vue, c'est-à-dire $x^{(0)}_{h,0,\pm 1_i}$, $y^{(0)}_{h,0,\pm 1_i}$, pour $h = 0, 2, 4, 6$. Les formules du premier Mémoire s'appliqueront encore avec les modifications suivantes : g_0 sera remplacé par m, $x^{(0)}_{h,\pm 1}$, $y^{(0)}_{h,\pm 1}$ par $x^{(0)}_{h,0,\pm 1_i}$, $y^{(0)}_{h,0,\pm 1_i}$, et, partout où il n'y aura pas de facteur de la forme $x^{(0)}_{h,\pm 1}$ ou $y^{(0)}_{h,\pm 1}$, on mettra le facteur $y^{(0)}_{0,0,1_i}$ (précédemment, en effet, l'unité remplaçait $y^{(0)}_{0,1}$); on pourra supprimer les termes d'un ordre supérieur à celui qu'on doit obtenir et qui sera indiqué plus bas; enfin, les seconds membres de chaque formule devront être complétés par de nouveaux termes que seuls je vais écrire en même temps que les premiers membres.

On obtient ainsi :

$y^{(0)}_{0,0,1_i}$ jusqu'au neuvième ordre :

$$
\begin{aligned}
m^2(m^2-1+\tfrac{3}{2}m^2)\,y^{(0)}_{0,0,1_i} &= \ldots \\
&+3m^3\left[\tfrac{1}{2}+(y^{(0)}_{2,0})^2+(x^{(0)}_{2,0})^2+(y^{(0)}_{4,0})^2+(x^{(0)}_{4,0})^2\right] \\
&-\tfrac{1}{2}m^2(\tfrac{3}{2}+6m+\tfrac{15}{4}m^2)\left[x^{(0)}_{2,0}-y^{(0)}_{2,0}\right. \\
&\qquad\left.-y^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{4,0}+x^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{4,0}-x^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{4,0}+x^{(0)}_{4,0}y^{(0)}_{2,0}\right] \\
&+\tfrac{7}{2}m^2(-\tfrac{3}{2}-\tfrac{15}{4}m^2)\left[x^{(0)}_{2,0}-y^{(0)}_{2,0}\right. \\
&\qquad\left.-y^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{4,0}+x^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{4,0}-x^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{4,0}+x^{(0)}_{4,0}y^{(0)}_{2,0}\right] \\
&+\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

$x^{(0)}_{0,0,1_i}$ jusqu'au sixième ordre (on écrirait immédiatement la formule qui permet d'aller jusqu'au dixième ordre) :

$$x^{(0)}_{0,0,1_i}=\ldots-3m\left[x^{(0)}_{2,0}-y^{(0)}_{2,0}\right]+\ldots.$$

$y^{(0)}_{2,0,\pm1_i}$, $x^{(0)}_{2,0,\pm1_i}$ jusqu'au neuvième ordre :

$$
\begin{aligned}
(2\mu+m)^2\left[(2\mu+m)^2-1+\tfrac{3}{2}m^2\right]y^{(0)}_{2,0,1_i} &= \ldots \\
&+3m^2(3-2m)\left[x^{(0)}_{2,0}+y^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{4,0}+x^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{4,0}\right] \\
&-\tfrac{1}{2}m^2(\tfrac{33}{2}-9m+\tfrac{15}{4}m^2)\left[\tfrac{1}{2}-(y^{(0)}_{2,0})^2+(x^{(0)}_{2,0})^2\right] \\
&+\tfrac{7}{2}m^2(\tfrac{3}{2}-3m-\tfrac{15}{4}m^2)\left[\tfrac{1}{2}(y^{(0)}_{2,0})^2+\tfrac{1}{2}(x^{(0)}_{2,0})^2-x^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{2,0}+x^{(0)}_{4,0}-y^{(0)}_{4,0}\right] \\
&+\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x^{(0)}_{2,0,1_i} &= \ldots-\frac{3}{8}\frac{m^2}{2-m}\left[\tfrac{1}{2}-(y^{(0)}_{2,0})^2+(x^{(0)}_{2,0})^2\right] \\
&\quad-\frac{21}{8}\frac{m^2}{2-m}\left[\tfrac{1}{2}(y^{(0)}_{2,0})^2+\tfrac{1}{2}(x^{(0)}_{2,0})^2-x^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{2,0}+x^{(0)}_{4,0}-y^{(0)}_{4,0}\right] \\
&\quad+\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(2\mu-m)^2\left[(2\mu-m)^2-1+\tfrac{3}{2}m^2\right]y^{(0)}_{2,0,-1_i} &= \ldots \\
&+3m^2(3-4m)\left[x^{(0)}_{2,0}+y^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{4,0}+x^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{4,0}\right] \\
&+\tfrac{7}{2}m^2(\tfrac{33}{2}-27m+\tfrac{63}{4}m^2)\left[\tfrac{1}{2}-(y^{(0)}_{2,0})^2+(x^{(0)}_{2,0})^2\right] \\
&-\tfrac{1}{2}m^2(\tfrac{3}{2}+3m-\tfrac{63}{4}m^2)\left[\tfrac{1}{2}(y^{(0)}_{2,0})^2+\tfrac{1}{2}(x^{(0)}_{2,0})^2-x^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{2,0}+x^{(0)}_{4,0}-y^{(0)}_{4,0}\right] \\
&+\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x^{(0)}_{2,0,-1_i} &= \ldots+\frac{21}{8}\frac{m^2}{2-3m}\left[\tfrac{1}{2}-(y^{(0)}_{2,0})^2+(x^{(0)}_{2,0})^2\right] \\
&\quad+\frac{3}{8}\frac{m^2}{2-3m}\left[\tfrac{1}{2}(y^{(0)}_{2,0})^2+\tfrac{1}{2}(x^{(0)}_{2,0})^2-x^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{2,0}+x^{(0)}_{4,0}-y^{(0)}_{4,0}\right] \\
&\quad+\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

$y^{(0)}_{4,0,\pm 1_i}$, $x^{(0)}_{4,0,\pm 1_i}$ jusqu'au septième ordre :

$$\begin{aligned}(4\mu+m)^2\left[(4\mu+m)^2-1+\tfrac{3}{2}m^2\right]y^{(0)}_{4,0,1_i} &= \ldots\\ &+3m^2(6-5m)\left[-\tfrac{1}{2}(y^{(0)}_{2,0})^2+\tfrac{1}{2}(x^{(0)}_{2,0})^2-x^{(0)}_{4,0}\right]\\ &-\tfrac{1}{2}m^2\left(\tfrac{87}{2}-48m+\tfrac{63}{4}m^2\right)\left[x^{(0)}_{2,0}+y^{(0)}_{2,0}\right]\\ &+\ldots\ldots\end{aligned}$$

$$x^{(0)}_{4,0,1_i}=\ldots-\frac{3}{8}\,\frac{m^2}{4-3m}\left[x^{(0)}_{2,0}+y^{(0)}_{2,0}\right]+\ldots$$

$$\begin{aligned}(4\mu-m)^2\left[(4\mu-m)^2-1+\tfrac{3}{2}m^2\right]y^{(0)}_{4,0,-1_i} &= \ldots\\ &+3m^2(6-7m)\left[-\tfrac{1}{2}(y^{(0)}_{2,0})^2+\tfrac{1}{2}(x^{(0)}_{2,0})^2-x^{(0)}_{4,0}\right]\\ &+\tfrac{7}{2}m^2\left(\tfrac{87}{2}-78m+\tfrac{159}{4}m^2\right)\left[x^{(0)}_{2,0}+y^{(0)}_{2,0}\right]\\ &+\ldots\ldots\end{aligned}$$

$$x^{(0)}_{4,0,-1_i}=\ldots+\frac{21}{8}\,\frac{m^2}{4-5m}\left[x^{(0)}_{2,0}+y^{(0)}_{2,0}\right]+\ldots.$$

$y^{(0)}_{6,0,\pm 1_i}$, $x^{(0)}_{6,0,\pm 1_i}$ jusqu'au sixième ordre (la première approximation permettrait d'aller jusqu'au neuvième ordre) :

$$\begin{aligned}(6\mu+m)^2\left[(6\mu+m)^2-1+\tfrac{3}{2}m^2\right]y^{(0)}_{6,0,1_i} &= \ldots\\ &-\tfrac{1}{2}m^2\left(\tfrac{165}{2}+\ldots\right)\left[x^{(0)}_{4,0}+y^{(0)}_{4,0}+\tfrac{1}{2}(y^{(0)}_{2,0})^2+\tfrac{1}{2}(x^{(0)}_{2,0})^2+x^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{2,0}\right]\\ &+\ldots\ldots\end{aligned}$$

$$x^{(0)}_{6,0,1_i}=\ldots-\frac{3}{8}\,\frac{m^2}{6-5m}\left[x^{(0)}_{4,0}+y^{(0)}_{4,0}+\tfrac{1}{2}(y^{(0)}_{2,0})^2+\tfrac{1}{2}(x^{(0)}_{2,0})^2+x^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{2,0}\right]+\ldots$$

$$\begin{aligned}(6\mu-m)^2\left[(6\mu-m)^2-1+\tfrac{3}{2}m^2\right]y^{(0)}_{6,0,-1_i} &= \ldots\\ &+\tfrac{7}{2}m^2\left(\tfrac{165}{2}+\ldots\right)\left[x^{(0)}_{4,0}+y^{(0)}_{4,0}+\tfrac{1}{2}(y^{(0)}_{2,0})^2+\tfrac{1}{2}(x^{(0)}_{2,0})^2+x^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{2,0}\right]\\ &+\ldots\ldots\end{aligned}$$

$$x^{(0)}_{6,0,-1_i}=\ldots+\frac{21}{8}\,\frac{m^2}{6-7m}\left[x^{(0)}_{4,0}+y^{(0)}_{4,0}+\tfrac{1}{2}(y^{(0)}_{2,0})^2+\tfrac{1}{2}(x^{(0)}_{2,0})^2+x^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{2,0}\right]+\ldots$$

Enfin, pour calculer $\lambda^{(0)}_{h,0,\pm 1_i}$ (h étant positif, nul ou négatif), on aura la formule suivante :

$$\begin{aligned}\lambda^{(0)}_{h,0,\pm 1_i} = \mathrm{A}_0\, y^{(0)}_{h,0,\pm 1_i} &+ \mathrm{A}_{-2}\, y^{(0)}_{h-2,0,\pm 1_i} + \mathrm{A}_{+2}\, y^{(0)}_{h+2,0,\pm 1_i} + \mathrm{A}_{-4}\, y^{(0)}_{h-4,0,\pm 1_i} + \mathrm{A}_{+4}\, y^{(0)}_{h+4,0,\pm 1_i}\\ &+ \mathrm{B}_{-2}\, x^{(0)}_{h-2,0,\pm 1_i} + \mathrm{B}_{+2}\, x^{(0)}_{h+2,0,\pm 1_i} + \mathrm{B}_{-4}\, x^{(0)}_{h-4,0,\pm 1_i} + \mathrm{B}_{+4}\, x^{(0)}_{h+4,0,\pm 1_i}\\ &+ \mathrm{A}_{-6}\, y^{(0)}_{h-6,0,\pm 1_i} + \mathrm{A}_{+6}\, y^{(0)}_{h+6,0,\pm 1_i} + \ldots\\ &+ \mathrm{B}_{-6}\, x^{(0)}_{h-6,0,\pm 1_i} + \mathrm{B}_{+6}\, x^{(0)}_{h+6,0,\pm 1_i} + \ldots\end{aligned}$$

où l'on a d'abord

$$A_{+i} = A_{-i} \quad \text{et} \quad B_{+i} = -B_{-i},$$

puis

$$A_0 = 1 - 2(y^{(0)}_{2,0})^2 + 2(x^{(0)}_{2,0})^2 - 2(y^{(0)}_{4,0})^2 + 2(x^{(0)}_{4,0})^2 - 6x^{(0)}_{4,0}(y^{(0)}_{2,0})^2 + 12y^{(0)}_{4,0}x^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{2,0}$$
$$- 6x^{(0)}_{4,0}(x^{(0)}_{2,0})^2 + 6(y^{(0)}_{2,0})^4 - 12(x^{(0)}_{2,0})^2(y^{(0)}_{2,0})^2 + 6(x^{(0)}_{2,0})^4 + \ldots;$$

$$A_{-2} = -x^{(0)}_{2,0} - 2y^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{4,0} + 2x^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{4,0} + 3x^{(0)}_{2,0}(y^{(0)}_{2,0})^2 - 3(x^{(0)}_{2,0})^3 + \ldots,$$

$$B_{-2} = -y^{(0)}_{2,0} + 2x^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{4,0} - 2x^{(0)}_{4,0}y^{(0)}_{2,0} + 3(y^{(0)}_{2,0})^3 - 3y^{(0)}_{2,0}(x^{(0)}_{2,0})^2 + \ldots;$$

$$A_{-4} = -x^{(0)}_{4,0} + (y^{(0)}_{2,0})^2 + (x^{(0)}_{2,0})^2 + \ldots,$$

$$B_{-4} = -y^{(0)}_{4,0} + 2x^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{2,0} + \ldots;$$

$$A_{-6} = -x^{(0)}_{6,0} + 2y^{(0)}_{2,0}y^{(0)}_{4,0} + 2x^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{4,0} - 3x^{(0)}_{2,0}(y^{(0)}_{2,0})^2 - (x^{(0)}_{2,0})^3 + \ldots,$$

$$B_{-6} = -y^{(0)}_{6,0} + 2x^{(0)}_{2,0}x^{(0)}_{4,0} + 2x^{(0)}_{4,0}y^{(0)}_{2,0} - (y^{(0)}_{2,0})^3 - 3y^{(0)}_{2,0}(x^{(0)}_{2,0})^2 + \ldots;$$

. . . .

Les calculs effectués par l'une ou l'autre des deux méthodes, et conduits de façon à obtenir la même approximation que Delaunay, fournissent les résultats suivants :

$$y^{(0)}_{0,0,1_i} = -\frac{3}{2}m + \frac{735}{2^5}m^3 + \frac{1\,261}{2^3}m^4 + \frac{285\,715}{2^7.3}m^5$$
$$+ \frac{3\,260\,473}{2^7.3^2}m^6 + \frac{966\,281\,531}{2^{12}.3^3}m^7 + \frac{12\,863\,159\,737}{2^{13}.3^4}m^8 + \ldots,$$

$$x^{(0)}_{0,0,1_i} = \frac{3}{2^2}m^2 - \frac{3\,603}{2^8}m^4 - \frac{4\,697}{2^4.3}m^5 - \frac{1\,435\,123}{2^{10}.3}m^6 + \ldots,$$

$$\lambda^{(0)}_{0,0,1_i} = -\frac{3}{2}m + \frac{735}{2^5}m^3 + \frac{1\,261}{2^3}m^4 + \frac{142\,817}{2^6.3}m^5$$
$$+ \frac{3\,257\,665}{2^7.3^2}m^6 + \frac{964\,471\,235^{\star}}{2^{12}.3^3}m^7 + \frac{12\,808\,433\,977^{\star}}{2^{13}.3^4}m^8 + \ldots;$$

$$y^{(0)}_{2,0,1_i} = -\frac{11}{2^5}m^2 - \frac{185}{2^5.3}m^3 - \frac{4\,007}{2^7.3^2}m^4 + \frac{94\,451}{2^8.3^3}m^5$$
$$+ \frac{211\,903\,565}{2^{14}.3^4}m^6 + \frac{9\,139\,608\,107}{2^{13}.3^5.5}m^7 + \frac{2\,403\,267\,820\,153}{2^{15}.3^6.5^2}m^8 + \ldots,$$

$$x^{(0)}_{2,0,1_i} = \frac{1}{2^2}m^2 + \frac{83}{2^5.3}m^3 - \frac{25}{2^5.3^2}m^4 - \frac{136\,993}{2^9.3^3}m^5$$
$$- \frac{57\,005\,111}{2^{14}.3^4}m^6 - \frac{80\,372\,867}{2^{12}.3^5}m^7 + \frac{101\,365\,818\,913}{2^{17}.3^6.5}m^8 + \ldots,$$

$$\lambda^{(0)}_{2,0,1_i} = -\frac{11}{2^5}m^2 - \frac{257}{2^5.3}m^3 - \frac{7\,337}{2^7.3^2}m^4 + \frac{124\,223}{2^8.3^3}m^5 + \frac{178\,759\,285}{2^{13}.3^4}m^6 + \frac{16\,839\,339\,119^*}{2^{13}.3^5.5}m^7 + \frac{9\,441\,265\,806\,887^*}{2^{16}.3^6.5^2}m^8 + \ldots;$$

$$y^{(0)}_{2,0,-1_i} = \frac{77}{2^5}m^2 + \frac{455}{2^5}m^3 + \frac{7\,313}{2^7}m^4 + \frac{133\,525}{2^8.3}m^5 + \frac{50\,672\,333}{2^{14}.3^2}m^6 - \frac{207\,473\,021}{2^{13}.3^3.5}m^7 - \frac{416\,799\,738\,203}{2^{15}.3^4.5^2}m^8 + \ldots,$$

$$x^{(0)}_{2,0,-1_i} = -\frac{7}{2^2}m^2 - \frac{281}{2^5}m^3 - \frac{1\,013}{2^5}m^4 - \frac{141\,959}{2^9.3}m^5 - \frac{29\,251\,415}{2^{14}.3^2}m^6 - \frac{2\,655\,349}{2^{10}.3^3}m^7 + \frac{21\,652\,916\,813}{2^{17}.3^4}m^8 + \ldots,$$

$$\lambda^{(0)}_{2,0,-1_i} = \frac{77}{2^5}m^2 + \frac{479}{2^5}m^3 + \frac{7\,551}{2^7}m^4 + \frac{127\,385}{2^8.3}m^5 + \frac{17\,924\,309}{2^{13}.3^2}m^6 - \frac{872\,999\,227^*}{2^{13}.3^3.5}m^7 - \frac{1\,194\,216\,784\,217^*}{2^{16}.3^4.5^2}m^8 + \ldots;$$

$$y^{(0)}_{4,0,1_i} = -\frac{25}{2^9}m^4 - \frac{3\,359}{2^{10}.5}m^5 - \frac{6\,772\,849}{2^{13}.3^2.5^2}m^6 + \ldots,$$

$$x^{(0)}_{4,0,1_i} = -\frac{25}{2^9}m^4 - \frac{3\,497}{2^{10}.5}m^5 - \frac{924\,059}{2^{10}.3^2.5^2}m^6 + \ldots,$$

$$\lambda^{(0)}_{4,0,1_i} = -\frac{201}{2^9}m^4 - \frac{5\,611}{2^8.5}m^5 - \frac{12\,697\,903}{2^{13}.3.5^2}m^6 + \ldots;$$

$$y^{(0)}_{4,0,-1_i} = \frac{175}{2^9}m^4 + \frac{11\,513}{2^{10}.3}m^5 + \frac{2\,855\,609}{2^{13}.3.5}m^6 + \ldots$$

$$x^{(0)}_{4,0,-1_i} = \frac{175}{2^9}m^4 + \frac{12\,479}{2^{10}.3}m^5 + \frac{136\,489}{2^{10}.5}m^6 + \ldots,$$

$$\lambda^{(0)}_{4,0,-1_i} = \frac{1\,407}{2^9}m^4 + \frac{19\,981}{2^8.3}m^5 + \frac{52\,839\,679^*}{2^{13}.3^2.5}m^6 + \ldots;$$

$$y^{(0)}_{6,0,1_i} = -\frac{769}{2^{14}}m^6 + \ldots,$$

$$x^{(0)}_{6,0,1_i} = -\frac{897}{2^{14}}m^6 + \ldots,$$

$$\lambda^{(0)}_{6,0,1_i} = -\frac{3\,715^*}{2^{13}}m^6 + \ldots;$$

$$y^{(0)}_{6,0,-1_i} = \frac{5\,383}{2^{14}}m^6 + \ldots,$$

$$x^{(0)}_{6,0,-1_i} = \frac{6\,279}{2^{14}}m^6 + \ldots,$$

$$\lambda^{(0)}_{6,0,-1_i} = \frac{26\,005}{2^{13}}m^6 + \ldots.$$

Les nombres marqués d'un astérisque sont ceux qui diffèrent des coefficients correspondants donnés par Delaunay dans sa *Théorie de la Lune.*

Je ferai remarquer, en terminant, qu'il est facile de voir la cause de l'erreur commise par Delaunay sur le terme en m^6 du coefficient $\lambda^{(0)}_{6,0,1_i}$: le premier terme du coefficient correspondant (314) de la page 376 (*Mémoires de l'Académie des Sciences,* t. XXIX) n'est pas $-\frac{821}{64}$, mais $-\frac{821}{64}\times\frac{9}{8}$. Le facteur $\frac{9}{8}$ a été omis, et il est facile de s'en convaincre en observant que ce terme provient de l'action de la sixième opération sur le terme (239) de la longitude (p. 356); réduit à la partie utile, ce terme est

$$\left(\frac{5}{16}+\frac{1053}{64}-\frac{63}{16}\right) e\,\frac{n'^4}{n^4}\sin(4h+4g+5l-4h'-4g'-4l')$$

ou

$$\frac{821}{64}\,e\,\frac{n'^4}{n^4}\sin(4h+4g+5l-4h'-4g'-4l');$$

or, par suite de la dixième opération (t. XXVIII, p. 329), on remplace

$$e\cos(2h+2g+l-2h'-2g'-l')$$

par

$$-\frac{9}{8}\,e'\,\frac{n'^2}{n^2}+\ldots;$$

donc on obtient le terme

$$-\frac{9}{8}\times\frac{821}{64}\,e'\,\frac{n'^6}{n^6}\sin(6h+6g+6l-6h'-6g'-5l');$$

il est dès lors évident que le facteur $\frac{9}{8}$ a été oublié dans la formule donnée par Delaunay.