RÉSUMÉ D'UN MÉMOIRE

SUR LES

LIGNES GÉODÉSIQUES [1],

PAR M. G. KOENIGS,

Professeur suppléant au Collège de France.

1. Les ds^2 de la forme

$$ds^2 = (U - V)(du^2 + dv^2),$$

que l'on peut encore écrire

$$ds^2 = [f(x+y) - g(x-y)]\, dx\, dy,$$

ont attiré pour la première fois l'attention de Liouville dans son Mémoire célèbre : *Sur quelques cas particuliers où les équations du mouvement peuvent s'intégrer*. M. Sophus Lie a montré qu'il y avait lieu, dans certaines recherches, de rapprocher de la forme de Liouville une autre forme, à savoir

$$ds^2 = [f(x)y + g(x)]\, dx\, dy.$$

Supposons que deux surfaces S et S′ soient *représentables géodésiquement* l'une sur l'autre, c'est-à-dire que l'on puisse faire correspondre à un point M de S un point M′ de S′, dans de telles conditions que, lorsque M décrit une géodésique sur S, le point M′ en décrive aussi une sur S′. M. Dini, qui a étudié ce problème, a trouvé que les ds^2 des deux surfaces ont la forme de Liouville ; le ds^2 de S étant

$$(U - V)(du^2 - dv^2),$$

(1) Cet écrit est un résumé du Mémoire qui a remporté, en 1892, le prix Bordin, et dont l'insertion sera faite au *Recueil des Savants étrangers*.

celui de S′ a la forme

$$\left(\frac{1}{U}-\frac{1}{V}\right)\left(\frac{du^2}{U}-\frac{dv^2}{V}\right);$$

il suit de là que tous les ds^2 compris dans la formule générale ([1])

$$ds^2=\left(\frac{a'U+b'}{aU+b}-\frac{a'V+b'}{aV+b}\right)\left(\frac{du^2}{aU+b}-\frac{dv^2}{aV+b}\right)$$

conviennent à des surfaces géodésiquement représentables les unes sur les autres, pourvu que a, b, a', b' désignent des quantités constantes.

Mais un cas avait échappé à M. Dini. La démonstration de son théorème repose, en effet, sur ce beau théorème de M. Tissot ([2]), en vertu duquel : *Si l'on établit une correspondance ponctuelle entre deux surfaces* S, S′, *il y a un réseau orthogonal tracé sur* S *et un seul qui admet pour image sur* S′ *un autre réseau orthogonal.*

Ce réseau est celui qui, dans les formules précédentes, est représenté par les équations

$$u=\text{const.},\qquad v=\text{const.}$$

Or le théorème de M. Tissot peut tomber en défaut dans certains cas.

Si, en effet, la transformation ponctuelle est *conforme,* c'est-à-dire si les lignes de longueur nulle *des deux familles* se correspondent, tout réseau orthogonal tracé sur S a pour image sur S′ un réseau orthogonal. Je dois dire cependant que cette circonstance ne suffirait pas pour infirmer le théorème de M. Dini.

Mais il se peut, et c'est là l'origine du cas omis par M. Dini, il se peut que la transformation ponctuelle soit *demi-conforme,* c'est-à-dire qu'une seule des familles de lignes de longueur nulle tracées sur S ait pour image sur S′ une famille analogue. Alors le théorème de Dini n'est plus vrai et au lieu de la forme de Liouville, c'est la forme de M. Lie qui intervient; les deux ds^2 possèdent la forme de Lie.

2. La forme de Liouville et celle de M. Lie interviennent encore dans

---

([1]) Ces ds^2 forment ce que j'appelle une *famille de Dini.*

([2]) Pour ce qui concerne ce théorème de M. Tissot, et d'autres questions de la théorie des géodésiques que je suppose connues du lecteur, on pourra consulter le Mémoire de M. Lie sur les lignes géodésiques inséré au Tome XX des *Math. Annalen,* et le Tome III des *Leçons* de M. G. Darboux.

un autre problème traité pour la première fois par M. Massieu, le problème des géodésiques qui possèdent une intégrale quadratique par rapport aux vitesses.

Supposons le ds^2 donné sous la forme

$$ds^2 = \lambda\, dx\, dy.$$

L'équation dont Jacobi fait dépendre les géodésiques aura la forme

$$\frac{pq}{\lambda} = 1, \tag{1}$$

où p, q sont les dérivées partielles en x, y de la fonction de Jacobi. Soit l'intégrale quadratique

$$\varphi = Ap^2 + 2Bpq + Cq^2 = \text{const.}; \tag{2}$$

il faut que, p, q étant tirés de l'équation (1) et de l'équation (2), l'expression

$$p\, dx + q\, dy$$

soit une différentielle exacte pour toutes les valeurs de la constante φ. La condition d'intégrabilité donnera

$$\begin{aligned}\frac{q}{\lambda}\left(p^2\frac{\partial A}{\partial x} + 2pq\frac{\partial B}{\partial x} + q^2\frac{\partial C}{\partial x}\right) + 2\frac{pq}{\lambda^2}\frac{\partial\lambda}{\partial x}(Ap + Bq)&\\ + \frac{p}{\lambda}\left(p^2\frac{\partial A}{\partial y} + 2pq\frac{\partial B}{\partial y} + q^2\frac{\partial C}{\partial y}\right) + 2\frac{pq}{\lambda^2}\frac{\partial\lambda}{\partial y}(Bp + Cq) &= 0.\end{aligned}$$

Cette équation homogène et du troisième degré en p, q doit avoir lieu identiquement.

En égalant à zéro les coefficients de p^3, p^2q, pq^2, q^3, on trouve

$$\frac{\partial A}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial C}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{2}{\lambda}\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{2B}{\lambda^2}\frac{\partial\lambda}{\partial x} + \frac{2C}{\lambda^2}\frac{\partial\lambda}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{2}{\lambda}\frac{\partial B}{\partial y} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{2A}{\lambda^2}\frac{\partial\lambda}{\partial x} + \frac{2B}{\lambda^2}\frac{\partial\lambda}{\partial y} = 0.$$

On a d'abord

$$A = X = \text{fonction de } x,$$

$$B = Y = \text{fonction de } y,$$

et il vient ensuite

$$-2\frac{\partial(B\lambda)}{\partial x} = \lambda Y' + 2Y\frac{\partial\lambda}{\partial y},$$

$$-2\frac{\partial(B\lambda)}{\partial y} = \lambda X' + 2X\frac{\partial\lambda}{\partial x},$$

d'où

$$-2B\lambda = \int\left(\lambda Y' + 2Y\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)dx + \left(\lambda X' + 2X\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)dy.$$

Écrivons que l'expression sous le signe $\int$ est une différentielle exacte et nous trouvons

$$\text{(D)}\qquad 2X\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2} + 3X'\frac{\partial\lambda}{\partial x} + X''\lambda = 2Y\frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2} + 3Y'\frac{\partial\lambda}{\partial y} + Y''\lambda.$$

Cette équation, d'après une remarque de M. Darboux (t. II des *Leçons*, p. 209), exprime, lorsque X, Y ne sont pas nuls, que les variables

$$x' = \int\frac{dx}{\sqrt{X}}, \qquad y' = \int\frac{dy}{\sqrt{Y}}$$

font prendre au ds^2 la forme de Liouville.

Si au contraire X (ou Y) est nul, par exemple $X = 0$, les variables

$$x' = x, \qquad y' = \int\frac{dy}{\sqrt{Y}}$$

font prendre au ds^2 la forme de Lie.

Si X, Y étaient nuls en même temps, on aurait

$$A = 0, \qquad B = 0, \qquad -2B\lambda = \text{const.},$$

et φ ne différerait que par un facteur constant de l'intégrale des forces vives

$$\frac{pq}{\lambda} = 1.$$

On voit donc que, λ étant donné, à chaque couple (X, Y) de solutions de l'équation (D) de M. Darboux correspond une intégrale quadratique et même une seule, car ajouter à $-2B\lambda$ une constante, ainsi que le permet la quadrature, revient à ajouter à l'intégrale φ le produit de l'intégrale des forces vives par une constante, résultat qu'on pouvait prévoir.

3. M. Darboux a fait la remarque que si $(X, Y)(X^0, Y^0)$ sont deux couples de solutions de (D) il en est de même du couple

$$(aX + bX^0, \quad aY + bY^0),$$

où a, b sont deux constantes arbitraires. Cela résulte de la forme linéaire de l'équation.

Il résulte encore de la forme linéaire des formules qui donnent A, B, C, coefficients de l'intégrale φ, que si φ, φ^0 désignent les intégrales correspondantes aux couples (X, Y), (X^0, Y^0), l'intégrale correspondante au couple $(aX + bX^0, aY + bY^0)$ sera

$$a\varphi + b\varphi^0.$$

L'intégrale qui correspond à ce nouveau couple $(aX + bX^0, aY + bY^0)$ n'est donc pas indépendante des deux intégrales φ, φ^0.

Ceci amène naturellement à distinguer entre les couples de solutions de l'équation (D). Les couples de solutions (X, Y), (X^0, Y^0), (X^{00}, Y^{00}), ... seront dits *indépendants* si l'on ne peut pas trouver de constantes non nulles K, K^0, K^{00}, ... donnant lieu simultanément aux identités

$$KX + K^0X^0 + K^{00}X^{00} + \ldots = 0,$$
$$KY + K^0Y^0 + K^{00}Y^{00} + \ldots = 0.$$

Dans le cas où, au contraire, une telle identité aurait lieu, un des couples proposés se déduirait linéairement des autres, et l'intégrale quadratique correspondante serait une fonction linéaire des intégrales quadratiques qui se tirent des autres couples.

Si (X, Y), (X^0, Y^0), (X^{00}, Y^{00}), ... sont indépendants, les intégrales φ, φ^0, φ^{00}, ... seront aussi linéairement distinctes, car si une expression de la forme

$$K\varphi + K^0\varphi^0 + K^{00}\varphi^{00} + \ldots$$

pouvait se réduire à l'intégrale des forces vives, il faudrait que les coefficients de p^2, q^2 y fussent nuls, c'est-à-dire qu'on devrait avoir

$$KX + K^0X^0 + K^{00}X^{00} + \ldots = 0,$$
$$KY + K^0Y^0 + K^{00}Y^{00} + \ldots = 0,$$

et les couples de solutions ne seraient pas indépendants.

Ainsi à m couples indépendants de solutions correspondent m intégrales quadratiques indépendantes linéairement.

Le problème que j'ai traité et résolu est le suivant :

Trouver tous les ds^2 qui admettent pour leurs géodésiques plusieurs intégrales quadratiques indépendantes.

Tous les ds^2 d'une même famille de Dini admettent le même problème des géodésiques, c'est-à-dire que les mêmes équations représentent les géodésiques pour tous ces ds^2. On voit donc que si un ds^2 d'une famille de Dini possède exactement m intégrales quadratiques pour ses géodésiques, il en est de même de tous les autres ds^2 de la famille.

4. Des calculs directs, que l'on trouvera développés dans le Mémoire que je résume ici, m'ont permis d'établir les faits suivants.

1° Si un ds^2 admet pour ses géodésiques plus de trois intégrales quadratiques en dehors de celle des forces vives, il en possède exactement cinq et sa courbure est constante.

Il n'y a donc pas de ds^2 dont les géodésiques possèdent exactement quatre intégrales quadratiques.

2° Si un ds^2 admet pour ses géodésiques trois intégrales quadratiques indépendantes exactement, il convient à des surfaces de révolution.

M. Darboux, cherchant les ds^2 de révolution qui, outre l'intégrale linéaire qu'ils possèdent normalement (comme ds^2 de révolution), possèdent *encore* une intégrale quadratique pour leurs géodésiques, a trouvé que ces ds^2 possèdent en réalité *deux intégrales quadratiques* en sus de leur intégrale linéaire. Si l'on joint le carré de cette intégrale linéaire aux deux intégrales quadratiques, on voit que les ds^2 de révolution de M. Darboux possèdent *en fait trois* intégrales quadratiques indépendantes. Nous n'avons donc fait qu'établir la réciproque de ce théorème de M. Darboux; ses ds^2 sont les seuls qui admettent trois intégrales quadratiques exactement.

Ici se placent plusieurs remarques.

Si un ds^2 d'une famille de Dini a sa courbure constante, il en est de même de tous les autres, car ils admettent tous cinq intégrales quadratiques.

Si un ds^2 d'une famille de Dini convient à une surface de révolution, il en est de même de tous les autres. Raison analogue. La première de ces remarques revient à la célèbre proposition de Beltrami, d'après laquelle les surfaces à courbure constante sont représentables géodésiquement les unes sur les autres à l'exclusion de toute autre surface.

Les ds^2 de révolution de M. Darboux prêtent à une remarque analogue.

Je prouve, en effet, qu'ils conviennent à des surfaces qui sont *toutes représentables géodésiquement les unes sur les autres.*

En sorte que l'on peut dire que, de même qu'il n'y a qu'*un seul* problème de géodésiques qui admette cinq intégrales quadratiques en dehors de celle des forces vives (les géodésiques des surfaces de courbure constante), il n'y a de même qu'*un seul* problème de géodésiques qui admette exactement trois intégrales quadratiques (les géodésiques des ds^2 de révolution de M. Darboux).

Il est fort remarquable que, dans son beau Mémoire du tome XX des *Mathematische Annalen,* M. Lie soit passé fort près de ce théorème. Il en a démontré toutes les parties, *sauf une,* omission qui ne lui a pas permis d'arriver au théorème général.

5. Je ne terminerai pas les considérations qui concernent ces ds^2 de révolution sans mentionner la détermination nouvelle extrêmement simple de ces ds^2 au moyen des principes précédents.

Si l'on suppose que le ds^2 proposé ait la forme

$$g(x-y)\,dx\,dy,$$

et que (X, Y) soit un couple de solutions de l'équation (D), où l'on fait

$$\lambda = g(x-y),$$

on voit que, le ds ne changeant pas si l'on remplace x, y par $x+h, y+h$, les fonctions

$$X(x+h),\quad Y(y+h)$$

constituent encore un couple de solutions de (D). Donc

$$\frac{X(x+h)-X(x)}{h},\qquad \frac{Y(y+h)-Y(y)}{h}$$

constituent aussi un tel couple et, par suite, en prenant le cas de h infiniment petit, on reconnaît que $X'(x)$, $Y'(y)$ constituent un nouveau couple de solutions.

On en peut conclure que

$$(X, Y),\quad (X', Y'),\quad (X'', Y''),\quad \ldots$$

sont autant de couples de solutions de l'équation (D) dans ce cas. On constate aussi que $(1, 1)$ est également un couple de solutions. Mais le ds^2 ne possédant que trois intégrales quadratiques indépendantes, par hypothèse, les couples

$$(1,1), \quad (X, Y), \quad (X', Y'), \quad (X'', Y'')$$

ne peuvent être indépendants. On a donc deux relations de la forme

$$aX'' + bX' + cX + d = 0,$$
$$aY'' + bY' + cY + d = 0.$$

La discussion de ces équations linéaires à *coefficients constants* est des plus simples et conduit, presque sans calculs, à la détermination complète de toutes les formes de révolution

$$g(x - y)\, dx\, dy$$

qui admettent trois intégrales quadratiques pour leurs géodésiques. Le Tableau I fournit tous les types de révolution ainsi obtenus (¹).

6. Toutes les difficultés du problème étaient concentrées sur la détermination RIGOUREUSE de tous les ds^2 qui admettent pour leurs géodésiques exactement *deux* intégrales quadratiques en dehors de celle des forces vives. Je dis *rigoureuse*, car un principe simple publié par moi dans les *Comptes rendus* en 1889 permettait de déduire des solutions déjà connues de nouvelles solutions. Que ces solutions fussent les seules solutions du problème, on pouvait le conjecturer, j'oserai même presque dire le souhaiter, tant était considérable la complication des calculs directs; mais conjecturer n'est rien en Géométrie, prouver y est tout.

Si un ds^2 admet pour ses géodésiques UNE SEULE intégrale quadratique en dehors de celles des forces vives, il ne possède pas forcément la forme de Liouville; la forme de Lie peut, en effet, se substituer à cette forme. Mais, si le nombre des intégrales quadratiques est AU MOINS DEUX, *des formes de Liouville sont alors assurées au ds^2*. Il était donc naturel de prendre pour point de départ une de ces formes de Liouville supposée connue.

Je prends en conséquence le ds^2 sous la forme

$$ds^2 = [X_1(x_1) - Y_1(y_1)]\, dx\, dy,$$

(¹) On trouvera les Tableaux à la fin du présent Mémoire.

où

$$x_1 = \frac{x+y}{\sqrt{2}}, \qquad y_1 = \frac{x-y}{\sqrt{2}}.$$

L'équation de M. Darboux acquiert ainsi la forme suivante

$$(\mathrm{D}') \quad (\mathrm{X}''-\mathrm{Y}'')(\mathrm{X}_1-\mathrm{Y}_1)+\frac{3}{\sqrt{2}}(\mathrm{X}'-\mathrm{Y}')\mathrm{X}'_1-\frac{3}{\sqrt{2}}(\mathrm{X}'+\mathrm{Y}')\mathrm{Y}'_1+(\mathrm{X}-\mathrm{Y})(\mathrm{X}''_1-\mathrm{Y}''_1)=0.$$

Cette équation admet normalement le couple de solutions $(1, 1)$ qui fournit précisément l'intégrale quadratique afférente à toute forme de Liouville. L'existence d'une autre intégrale quadratique exige l'existence d'un autre couple (X, Y) de solutions de l'équation (D). Le changement de variables

$$x' = \int \frac{dx}{\sqrt{\mathrm{X}}}, \qquad y' = \int \frac{dy}{\sqrt{\mathrm{Y}}}$$

fera passer (¹) du type de Liouville à un autre; pour ce motif, j'appelle X, Y des *coefficients de transformation* du ds^2.

Il est clair que si (X, Y), $(\mathrm{X}^0, \mathrm{Y}^0)$, ... sont des couples de coefficients de transformation d'un ds^2, les expressions

$$a + b\mathrm{X} + c\mathrm{X}^0 + \ldots, \quad a + b\mathrm{Y} + c\mathrm{Y}^0 + \ldots$$

constituent un nouveau couple de coefficients de transformation. Si le ds^2 possède m intégrales quadratiques, l'équation (D′) admet, outre le couple $(1, 1)$, $(m-1)$ autres couples formant avec $(1, 1)$ un système de m couples indépendants, et le changement de variables *le plus général* qui amène la forme de Liouville sera défini par les quadratures

$$x' = \int \frac{dx}{\sqrt{a + b\mathrm{X} + c\mathrm{X}^0 + \ldots}}, \qquad y' = \int \frac{dy}{\sqrt{a + b\mathrm{Y} + c\mathrm{Y}^0 + \ldots}}.$$

J'appelle *type essentiel* le type de Liouville le plus général que l'on obtient de la sorte et *variables essentielles* les variables x', y'.

Pour certaines valeurs *particulières* des constantes a, b, c, ... la forme de Liouville que les variables x', y' font prendre au ds^2 peut fort bien avoir un aspect analytique différent du type essentiel. J'appelle *types singuliers* les types de Liouville que l'on obtient ainsi.

(¹) Cela ne serait plus vrai si l'une des fonctions X, Y était nulle.

Par exemple, dans le Tableau II qui comprend toutes les formes de Liouville à courbure constante non nulle, le premier type est la forme essentielle, les autres ne sont que des formes singulières.

De même dans le Tableau III, qui comprend les formes de Liouville à courbure constante nulle, le premier type est seul essentiel.

Nous avons formé dans le Tableau IV tous les types essentiels des ds^2 de révolution.

Le Tableau V offre au contraire tous les types singuliers correspondants.

7. Ici une remarque s'impose. Si l'on se plaçait, non plus au point de vue du nombre des intégrales quadratiques indépendantes, mais au point de vue du *nombre des formes de Liouville* distinctes qu'un ds^2 peut recevoir, il est clair qu'on se placerait dans une position entièrement fausse.

Voilà, par exemple, les ds^2 de révolution dont IV_1 est le type essentiel, qui ont cinq formes de Liouville bien comptées d'*aspect différent,* tout comme les ds^2 de courbure constante non nulle; la classification défectueuse dont je parle placerait donc à côté l'une de l'autre ces deux espèces de ds^2 qui possèdent des propriétés si diverses et disjoindrait les types de révolution, qui en fait sont si étroitement unis qu'ils ont, comme je l'ai dit, le même problème de géodésiques. La classification la plus rationnelle est celle qui a pour base la considération des intégrales quadratiques.

8. J'arrive actuellement au principe auquel j'ai fait déjà allusion et qui permet de déduire des solutions nouvelles d'une solution connue.

L'équation (D′) est symétrique. Elle exprime tout aussi bien que X, Y est un couple de coefficients de transformation du ds^2

$$(X_1 - Y_1)\, dx\, dy,$$

et que X_1, Y_1 est un couple de coefficients de transformation du ds^2

$$(X - Y)\, dx_1\, dy_1.$$

J'appelle *réciproques* (¹) ces ds^2 qui se correspondent d'une manière si curieuse.

(¹) Cette remarque et toutes ses conséquences ont été publiées par moi en octobre 1889

J'appelle également *réciproques* les surfaces qui admettent deux ds^2 réciproques.

Les surfaces réciproques jouissent d'une propriété remarquable d'après laquelle les géodésiques de l'une ont pour images sur l'autre des coniques géodésiques au sens que M. Dini a attribué à ce nom (*voir* DARBOUX, *Leçons,* t. III).

Si un ds^2 admet des coefficients de transformation (X, Y), (X^0, Y^0), (X^{00}, Y^{00}), ..., il possède une infinité de réductions au type de Liouville et, par suite, il existe une infinité de ds^2 de Liouville qui sont réciproques chacun à une forme de Liouville équivalente au ds^2 proposé. L'ensemble de tous ces réciproques est contenu dans une formule unique que le principe de réciprocité suffit à rendre intuitive, c'est la suivante :

$$\left(\frac{a'+b'X+c'X^0+\ldots}{a+bX+cX^0+\ldots}-\frac{a'+b'Y+c'Y^0+\ldots}{a+bY+cY^0+\ldots}\right)\left(\frac{dx^2}{a+bX+cX^0+\ldots}-\frac{dy^2}{a+bY+cY^0+\ldots}\right).$$

Il est naturel d'appliquer cette méthode aux ds^2 à courbure constante nulle ou non nulle. Il suffit pour cela, sans même recourir à la formule que nous venons d'écrire, d'appliquer le principe à tous les éléments des Tableaux II et III. Nous avons ainsi formé le Tableau VI des réciproques des formes à courbure constante nulle et le Tableau VII des réciproques des formes à courbure constante non nulle.

La dernière forme VI_6 du Tableau VI est de révolution, mais les autres n'admettent généralement que deux intégrales quadratiques. Nous disons généralement, parce que, *pour certaines valeurs des constantes,* les formes du Tableau VI, comme aussi celles du Tableau VII, reproduisent des formes des Tableaux précédents, c'est-à-dire des formes de révolution ou à courbure constante. Il y a même lieu d'observer que toutes les formes des Tableaux I, II, III, IV, V sont comprises comme cas particuliers dans les Tableaux VI ou VII.

Mais, tant que les constantes n'ont pas ces valeurs spéciales, les ds^2 des Tableaux VI (sauf VI_6) et VII n'admettent que deux intégrales quadratiques : ce sont donc des solutions nouvelles du problème.

---

aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences.* Depuis, en janvier 1891, j'ai déposé à l'Académie un pli cacheté contenant tous les Tableaux qui accompagnent le travail actuel, *ainsi que la méthode qui me permet d'établir la généralité des résultats.* Par contre, ce qui a trait au problème de M. Lie n'a été l'objet d'aucune Communication antérieure, sauf celle du 26 novembre 1892 à la Société Philomathique.

9. La question qui se pose naturellement à cet instant est la suivante : Quels sont parmi ces nouveaux types ceux qui sont essentiels et quels sont les types singuliers? La réponse est des plus simples.

Tous les types du Tableau VI (on met VI_6 à part) sont singuliers; tous les types du Tableau VII sont essentiels : *ce sont les types essentiels des types du Tableau VI.*

Nous supposons, bien entendu, qu'on établit une concordance entre les constantes des ds^2 du Tableau VI et celles du type essentiel correspondant du Tableau VII.

Par exemple, le type VI_1, qui est singulier et qui s'écrit

$$\left[\frac{a\cos\frac{x-y}{2}+b}{\sin^2\frac{x-y}{2}}+\frac{a'\cos\frac{x+y}{2}+b'}{\sin^2\frac{x+y}{2}}\right]dx\,dy,$$

admet le type essentiel

$$\left\{L_0[p(\xi+\eta)-p(\xi-\eta)]+\Sigma L_i[p(\xi+\eta+\omega_i)-p(\xi-\eta+\omega_i)]\right\}d\xi\,d\eta,$$

où l'on a

$$L_0=-a-b,\qquad L_1=a-b,\qquad L_2=-a'+b',\qquad L_3=a'+b'.$$

Voici, du reste, quelle est la correspondance entre les types des Tableaux VI et VII.

Le type VII_1 admet le seul type singulier VI_1.

Le type VII_2 admet deux types singuliers VI_2 et VI_4.

Le type VII_3 admet le seul type singulier VI_3.

Le type VII_4 admet le seul type singulier VI_5.

Enfin le type VII_5 n'admet aucun type singulier, fait bien curieux qui est à rapprocher de ce fait tout opposé que le type IV_1 de révolution possède quatre types singuliers.

Je ne mentionnerai qu'en passant les calculs auxquels donne lieu la démonstration de ces divers faits, calculs qui offrent d'élégantes applications des formules de la théorie des fonctions elliptiques.

Si l'on applique aux ds^2 de révolution des Tableaux IV, V le principe de réciprocité, on reproduit ces ds^2 eux-mêmes; cependant, si l'on envisage les types du Tableau I, lesquels se trouvent naturellement reproduits dans le Tableau V, on trouve pour leurs inverses des ds^2 du plan.

Le principe de réciprocité se trouve donc épuisé et l'on ne peut plus rien en attendre. Mais, et c'est là la question précise qui constituait toute la difficulté du problème, cela n'est pas surprenant : *l'emploi du principe de réciprocité nous a tout donné*.

10. Avant de passer à l'indication de la méthode qui me permet d'établir rigoureusement cette proposition, je veux indiquer une application du principe de réciprocité.

Nous ne nous sommes pas préoccupés des ds^2 qui admettent des formes de Lie. Nous avons bien vu que tout ds^2 qui possède plusieurs intégrales quadratiques admet des formes de Liouville, mais rien n'empêche qu'il admette en même temps des formes de Lie. Il faut et il suffit pour cela qu'il admette une forme (F) dont un des couples (X, Y) de coefficients de transformation contienne une fonction nulle, par exemple $Y = 0$. Mais alors la forme (F) sera réciproque à la forme de révolution

$$X\,dx_1\,dy_1.$$

Ici deux cas à distinguer :

Si $X\,dx_1\,dy_1$ a une courbure variable, cette forme est l'une de celles du Tableau I, et nous venons de dire que les formes du Tableau I ont pour réciproques des formes de courbure nulle. Nous obtenons donc d'abord pour (F) toutes les formes à courbure nulle.

Si, au contraire, $X_1\,dx\,dy$ a une courbure constante, la forme réciproque (F) sera l'une de celles des Tableaux VI ou VII.

Il faut donc chercher dans VI, VII les formes (F) qui ont un couple de coefficients de transformation comprenant une fonction nulle. On peut se borner à rechercher les types essentiels, c'est-à-dire qu'on peut se borner à chercher dans le Tableau VII. Nous trouvons ainsi les types VII_3 et VII_5. Si nous avions cherché dans VI, nous n'aurions trouvé que VI_3, type singulier de VII_3.

11. J'arrive actuellement à la démonstration de la proposition qui consiste en ce que les Tableaux précédemment formés contiennent toutes les solutions possibles de ce problème : *Trouver tous les ds^2 dont les géodésiques possèdent plusieurs intégrales quadratiques*.

La question se ramène à cette question d'Analyse : *Trouver toutes les* *solutions de l'équation*

$$(\mathrm{D}') \qquad \begin{cases} (\mathrm{X}_1 - \mathrm{Y}_1)(\mathrm{X}'' - \mathrm{Y}'') + \dfrac{3}{\sqrt{2}}(\mathrm{X}'_1 - \mathrm{Y}'_1)\mathrm{X}' \\ \qquad - \dfrac{3}{\sqrt{2}}(\mathrm{X}'_1 + \mathrm{Y}'_1)\mathrm{Y}' + (\mathrm{X} - \mathrm{Y})(\mathrm{X}''_1 - \mathrm{Y}''_1) = 0. \end{cases}$$

Abel, dans un Mémoire inséré au tome I de ses *Œuvres*, intitulé : *Méthode générale pour trouver des fonctions d'une seule quantité variable, lorsqu'une propriété de ces fonctions est exprimée par une équation entre deux variables,* s'est occupé de ce genre d'équations.

Étant donné une équation telle que (D′), il faudra former suivant Abel, par voie de différentiation et d'élimination, une équation différentielle ne contenant plus que l'une des fonctions; il faudra intégrer cette équation (E), transporter son intégrale générale dans (D′) et s'efforcer de déterminer les constantes arbitraires qui y figurent de manière à l'adapter à l'équation (D′). Ainsi, après avoir dû chercher l'intégrale générale de (E), on n'aura, le plus souvent, à utiliser qu'une solution particulière de cette équation. On risque, en conséquence, de compliquer le problème en s'imposant l'intégration de (E). Il se peut qu'on ne puisse trouver l'intégrale générale de (E) et que cependant la proposée (D′) puisse être intégrée. Enfin la méthode d'Abel conduit souvent, et c'est ici le cas, à des calculs compliqués qui la rendent impraticable.

Je me suis donc vu forcé de demander à d'autres principes les moyens de parvenir au résultat. La théorie des fonctions m'a été du plus grand secours. Je développerai ailleurs la théorie générale qui est sortie de mes recherches [1]. Je me renfermerai ici dans les limites du problème qui nous occupe.

12. Je prouve d'abord que les fonctions X, Y, X_1, Y_1 sont des fonctions de leurs arguments respectifs, uniformes dans tout le plan, n'ayant à distance finie d'autres singularités possibles que des pôles.

Je prouve ensuite que tout pôle de l'une quelconque de ces fonctions est forcément double et à résidu nul. C'est-à-dire que, dans le domaine d'un

(1) Dans la séance du 13 février 1892, j'ai communiqué à la Société Philomathique une proposition générale concernant les équations fonctionnelles, et j'ai fait connaître la grande utilité de la théorie générale des fonctions dans ce genre d'équations. C'est dire que dès cette époque les principes essentiels de ma méthode générale n'étaient un mystère pour personne.

pôle a, la fonction X, par exemple, est de la forme

$$\frac{A}{(x-a)^2} + \text{fonction entière.}$$

Je montre aussi que, si a est un pôle de X, les fonctions X_1, Y_1 vérifient la relation

$$X_1\left(\frac{a}{\sqrt{2}}+z\right) = Y_1\left(\frac{a}{\sqrt{2}}-z\right),$$

en sorte que

$$Y_1(u) = X_1(a\sqrt{2}-u).$$

Il en résulte aussitôt que, si a, b sont deux pôles de X, $(a-b)\sqrt{2}$ est une période de X_1, Y_1.

Les pôles de Y possèdent des propriétés analogues, et enfin les pôles de X_1, Y_1 fournissent des résultats identiques pour les X, Y.

Signalons en particulier ce fait : si zéro est un pôle de Y, les fonctions $X_1(z)$, $Y_1(z)$ sont égales; donc, dans tous les cas où Y aura un pôle, il suffira de changer y en $y+k$, ce qui est sans importance, pour donner au ds^2 la forme

$$[F(x+y)-F(x-y)]\,dx\,dy.$$

Mais le fait le plus saillant est le suivant :

Si a, b, c sont trois pôles de l'une quelconque des quatre fonctions et si le rapport

$$\frac{b-a}{c-a}$$

n'est pas un nombre réel commensurable, les fonctions X, Y, X_1, Y_1 sont doublement périodiques. Il est alors très aisé de trouver la forme générale que doivent avoir ces quatre fonctions et de reconstituer ainsi les solutions doublement périodiques que l'on voit figurer dans les Tableaux.

13. Restent les autres cas, où pour tout système de pôles d'une des fonctions le rapport $\frac{b-a}{c-a}$ est un nombre commensurable; car, pour ce qui est du cas où X, Y auraient moins de trois pôles, je fais voir que tout coefficient de transformation relatif à une forme essentielle possède sûrement au moins un pôle, à moins d'être constant; que s'il n'en possède qu'un il a la forme

$$\frac{A}{(x+a)^2} + B,$$

et que dans tout autre cas il en possède au moins trois.

Je détermine ensuite la forme générale que peut avoir dans cette hypothèse le coefficient de transformation d'une forme essentielle, et je trouve que, outre le type déjà trouvé, on a seulement le suivant

$$\frac{A\cos\frac{x}{a}+B}{\sin^2\frac{x}{a}}+C.$$

En résumé, tout coefficient de transformation d'un type essentiel a l'une de ces formes

$$A, \quad \frac{A}{(x-a)^2}+B, \quad \frac{A\cos\frac{x}{a}+B}{\sin^2\frac{x}{a}}+C.$$

J'observe d'abord que le cas d'un coefficient de transformation constant peut être écarté, car le ds^2 est alors réciproque d'un ds^2 de révolution et nous possédons dans les Tableaux tous les ds^2 de cette sorte. En ce qui concerne les deux autres cas, on peut toujours, en changeant, s'il y a lieu, $x-a$ en x, supposer que σ est un pôle pour X et pour Y; le ds^2 a alors la forme

$$[F(x+y)-F(x-y)]\,dx\,dy,$$

et la fonction F est paire.

Soient, dans ces conditions, $\varphi(x)$, $\psi(y)$ un couple de coefficients de transformation du ds^2. Eu égard à la parité de la fonction F, le ds^2 ne change pas si l'on échange x et y; donc $\varphi(y)$, $\psi(x)$ constituent encore un couple de coefficients de transformation du ds^2.

On a donc, si l'on écarte les ds^2 qui admettraient plus de deux intégrales quadratiques, car on les a déterminés directement (¹),

$$\psi(x)=\alpha\varphi(x)+\beta,$$
$$\varphi(y)=\alpha\psi(y)+\beta,$$

c'est-à-dire

$$\psi(z)=\alpha\varphi(z)+\beta, \qquad \varphi(z)=\alpha\psi(z)+\beta,$$

ce qui exige que

$$\alpha^2=1, \qquad (\alpha+1)\beta=0.$$

Le cas de $\alpha=-1$ ne donne rien.

(¹) La méthode s'étendrait aussi aux ds^2 de révolution; mais j'ai cru inutile de revenir sur leur détermination.

Restent donc le cas de $\alpha = 1$ et par suite $\beta = 0$.

On a, dans ce cas,

$$\psi(z) = \varphi(z).$$

Les deux coefficients de transformation sont alors tous les deux, ou bien

$$\frac{A}{x^2}, \quad \frac{A}{y^2}$$

ou bien

$$\frac{A\cos x + B}{\sin^2 x}, \quad \frac{A\cos y + B}{\sin^2 y}.$$

Dans le premier cas, le ds^2 est réciproque du ds^2 II_4 de courbure constante; c'est donc le type essentiel VII_4; dans le second cas, une remarque simple prouve que A doit être nul; le ds^2 est réciproque du type II_2 de courbure constante : c'est donc le type essentiel VII_2. Le cas laissé de côté où l'un des coefficients de transformation est constant (on peut dire nul) nous aurait donné évidemment les types VII_3 et VII_5, également essentiels.

Nous obtenons donc tous les types essentiels du Tableau VII *et nous n'obtenons qu'eux* [1].

14. A l'égard du type VII_1, nous ferons remarquer qu'il ne diffère pas de celui que M. Darboux avait fait connaître au Tome II de ses *Leçons*, p. 212.

Mais les autres types constituent des éléments véritablement nouveaux à côté de celui-là.

Cependant, le type VII_1 joue dans la question un rôle important que fait prévoir un théorème que je vais démontrer.

Tout ds^2 du Tableau VII résulte de la réduction au type $(X_1 - Y_1)\,dx\,dy$ d'une forme

$$\left[\frac{F(u)}{G(u)} - \frac{F(v)}{G(v)}\right]\left[\frac{du^2}{G(u)} - \frac{dv^2}{G(v)}\right],$$

où F, G sont deux polynômes du quatrième degré quelconques; cette forme garde son aspect si l'on effectue sur u, v une même transformation linéaire

---

[1] Nous ferons observer que, en nous bornant à rechercher les formes essentielles, nous avons déjà considérablement simplifié le problème.

de la forme

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}.$$

Si $G(u)$ a ses racines distinctes, on pourra ramener $G(u)$ à la forme canonique de Weierstrass et obtenir le type VII_1. On aura le type VII_2 si l'équation a deux racines égales; le type VII_3 si $G(u)$ est carré parfait; le type VII_4 si $G(u)$ a un diviseur cubique, et enfin le type VII_5 si $G(u)$ est une puissance quatrième exacte.

J'ajouterai que, en toute hypothèse, si F et G ont un diviseur commun du second degré, le ds^2 convient à une surface de révolution, et à une surface à courbure constante si F et G ont en commun un diviseur cubique.

Ceci posé, il est clair que les ds^2 de la famille de Dini

$$E_k \quad \left[\frac{F(u)}{G(u)+kF(u)} - \frac{F(v)}{G(v)+kF(v)}\right]\left[\frac{du^2}{G(u)+kF(u)} - \frac{dv^2}{G(v)+kF(v)}\right]$$

ont tous le même problème de géodésiques que le ds^2 proposé que je représente par E_0, tandis que E_k sera l'élément général de la famille.

Or, si l'on exclut le cas où $G(u)$ et $F(u)$ auraient en commun un facteur carré (cas où le ds^2 serait de révolution), on voit que $G(u) + kF(u)$ aura généralement ses racines inégales, c'est-à-dire que VII_1 sera le type essentiel de E_k. On a donc ce théorème :

Tout ds^2 qui admet deux intégrales quadratiques exactement pour ses géodésiques est représentable géodésiquement sur un autre qui est dans le même cas et qui est réductible au type VII_1.

On voit même que VII_1 est le type essentiel de l'élément général d'une famille de Dini de ds^2 qui admettent exactement deux intégrales quadratiques.

On sent encore là se poursuivre cette extension du théorème de Beltrami que nous avons constatée dans les ds^2 de révolution. Tous les ds^2 qui admettent deux intégrales quadratiques admettent même problème de géodésiques qu'un ds^2 d'un type déterminé VII_1; mais ici ce type contient des constantes qui varient d'un type à l'autre.

15. Pour ce motif j'ai fait du type VII_1 une étude particulière, et je suis parvenu en ce qui le concerne à quelques résultats dignes d'intérêt. Écri-

vons ainsi ce ds^2

$$ds^2 = AS_0 + BS_1 + CS_2 + DS_3,$$

où je fais, pour abréger,

$$S_0 = [\wp(x+y) - \wp(x-y)]\,dx\,dy,$$
$$S_i = [\wp(x+y+\omega_i) - \wp(x-y+\omega_i)]\,dx\,dy.$$

Les coefficients A, B, C, D sont ce que j'appelle les *invariants* du ds^2. Le ds^2 reste identique à lui-même si l'on fait varier le module des fonctions elliptiques, en conservant les invariants.

Il reste identique à lui-même si l'on permute de toutes les manières les quantités A, B, C, D, en sorte qu'*avec une même fonction* elliptique le ds^2 peut prendre *de vingt-quatre manières* la forme VII_1.

Ainsi les ds^2

$$AS_0 + CS_1 + BS_2 + DS_3,$$
$$DS_0 + AS_1 + DS_2 + CS_3$$

sont autant de formes différentes du même ds^2.

Les relations avec le type singulier sont extrêmement simples.

Le type singulier est, en effet, en conservant à A, B, C, D leur signification précédente,

$$\left[\frac{(B-A)\cos\frac{x-y}{2} + (B+A)}{2\sin^2\frac{x-y}{2}} + \frac{(D-C)\cos\frac{x+y}{2} + (D+C)}{2\sin^2\frac{x+y}{2}}\right]dx\,dy.$$

Ce qui, avec un léger changement de notation, s'écrit encore

$$\left(-\frac{A}{\sin^2\frac{x-y}{2}} - \frac{B}{\cos^2\frac{x-y}{2}} + \frac{C}{\cos^2\frac{x+y}{2}} + \frac{D}{\sin^2\frac{x+y}{2}}\right)dx\,dy.$$

En permutant A, B, C, D de toutes les manières, le ds^2 reste identique à lui-même, en sorte que *le type singulier* VI_1 *peut être atteint de vingt-quatre manières* comme toute forme elliptique dans le type VII_1.

On doit donc regarder comme entièrement défini un ds^2 du type VII_1, si l'on connaît ses quatre invariants A, B, C, D, abstraction faite de toute relation d'ordre entre ces quatre invariants, *qui entrent symétriquement dans la conception du* ds^2.

Le ds^2 étant donné sous la forme

$$\left[\frac{F(u)}{G(u)} - \frac{F(v)}{G(v)}\right]\left[\frac{du^2}{G(u)} - \frac{dv^2}{G(v)}\right],$$

les invariants se calculent sans peine; a, b, c, d étant les racines de $G(u) = 0$, ils ont pour expressions

$$16\frac{F(a)}{G'^2(a)}, \quad 16\frac{F(b)}{G'^2(b)}, \quad 16\frac{F(c)}{G'^2(c)}, \quad 16\frac{F(d)}{G'^2(d)},$$

ce qui permet d'écrire d'emblée les formes VII_1 et VI_1 du ds^2.

Nous avons ainsi le moyen de reconnaître l'identité de deux ds^2 donnés chacun par deux polynômes F, G.

Les invariants interviennent encore dans la forme que M. Darboux a donnée dans ses *Leçons* au type de ds^2 que nous considérons.

Considérons en effet le ds^2

$$4\left[\frac{A}{(x'+y')^2} - \frac{B}{(x'-y')^2} + \frac{C}{(1-x'y')^2} - \frac{D}{(1+x'y')^2}\right]dx'\,dy',$$

la transformation $x' = \operatorname{tang}\frac{x}{2}$, $y' = \operatorname{tang}\frac{y}{2}$ suffira pour le ramener à la forme

$$\left(-\frac{B}{\sin^2\frac{x-y}{2}} - \frac{D}{\cos^2\frac{x-y}{2}} + \frac{A}{\sin^2\frac{x+y}{2}} + \frac{C}{\cos^2\frac{x+y}{2}}\right)dx\,dy.$$

Le ds^2 ci-dessus est donc réductible au type VII_1 et A, B, C, D sont ses invariants. Mais on voit de plus que, si dans la formule

$$4\left[\frac{A}{(x+y)^2} - \frac{B}{(x-y)^2} + \frac{C}{(1-xy)^2} - \frac{D}{(1+xy)^2}\right]dx\,dy$$

on permute A, B, C, D de toutes les manières possibles, le ds^2 ne changera pas; on constate aisément que ces permutations reviennent à un groupe de substitutions linéaires effectuées sur les variables x, y.

Interprétées sur le type VII_1, ces substitutions fournissent un exemple des transformations du premier degré dans les fonctions elliptiques.

Nous retrouverons un emploi fort élégant des invariants à propos du problème de M. Lie. Mais, avant de passer à ce problème, je voudrais dire un mot d'une représentation remarquable sur le plan des lignes géodésiques qui possèdent deux intégrales quadratiques.

16. Les lignes géodésiques du ds^2

$$\left[\frac{F(u)}{G(u)} - \frac{F(v)}{G(v)}\right]\left[\frac{du^2}{G(u)} - \frac{dv^2}{G(v)}\right]$$

ont pour équation finie

$$\int \frac{du}{\sqrt{G(u) + a F(u)}} + \int \frac{dv}{\sqrt{G(v) + a F(v)}} = b,$$

où a, b sont les deux constantes d'intégration. Comme $F(u)$, $G(u)$ sont des polynômes du quatrième degré, on est donc ramené à l'équation d'Euler.

Soit la conique représentée dans un plan quelconque par l'équation

$$Y^2 - 4ZX = 0;$$

on vérifie cette équation en posant

$$X = t^2, \qquad Y = 2t, \qquad Z = 1,$$

où t est un paramètre arbitraire. La tangente au point t de la conique a pour équation

$$X - tY + t^2 Z = 0.$$

Si d'un point X, Y, Z on mène deux tangentes à la conique, les paramètres t, t' des points de contact seront racines de l'équation précédente; on aura donc

$$\frac{Z}{1} = \frac{Y}{t + t'} = \frac{X}{tt'}.$$

On peut dès lors substituer, avec M. Darboux, les coordonnées t, t' aux coordonnées X, Y, Z d'un point. Une équation entre t, t' représente une courbe; en particulier, l'équation la plus générale en t, t' symétrique par rapport à t, t', du second degré en t et de second degré en t', correspond à la conique la plus générale.

Si

$$AX^2 + A'Y^2 + A''Z^2 + 2BYZ + 2B'ZX + 2B''XY = 0$$

est l'équation en coordonnées ordinaires d'une conique quelconque, on a, pour l'équation de cette conique en coordonnées t, t',

$$\varphi(t, t') = A t^2 t'^2 + A'(t + t')^2 + A'' + 2B(t + t') + 2B' tt' + 2B'' tt'(t + t') = 0.$$

En ordonnant, on peut écrire cette équation ainsi

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 = H(t'),$$

où il se trouve que

$$H(t') = -\mathrm{a}'' t'^4 + 2\mathrm{b}\, t'^3 - (\mathrm{a}' + 2\mathrm{b}')t^2 + 2\mathrm{b}'' t - \mathrm{a},$$

en désignant par a, a′, a″, b, b′, b″ les coefficients de la forme adjointe

$$\mathrm{a} = A'A'' - B^2,$$
$$\mathrm{a}' = A''A - B'^2, \qquad \mathrm{a}'' = AA' - B''^2, \qquad \mathrm{b} = B'B'' - AB,$$
$$\mathrm{b}' = B''B - A'B', \qquad \mathrm{b}'' = BB' - A''B''.$$

A cause de la symétrie, on aurait aussi

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t'}\right)^2 = H(t).$$

Mais le long de cette conique, on a

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial t}dt + \frac{\partial\varphi}{\partial t'}dt' = 0;$$

donc, à cause des relations précédentes, on a aussi

$$\frac{dt}{\sqrt{H(t)}} \pm \frac{dt'}{\sqrt{H(t')}} = 0.$$

Donnons-nous dès lors une équation d'Euler

$$\frac{dt}{\sqrt{H(t)}} \pm \frac{dt'}{\sqrt{H(t')}} = 0,$$

où

$$H(t) = lt^4 + mt^3 + nt^2 + pt + q,$$

cette équation d'Euler aura lieu en tous les points d'une conique dont les coefficients de l'équation tangentielle a, a′, a″, b, b′, b″ vérifient les conditions d'identification

$$-\mathrm{a}''=l,\qquad 2\mathrm{b}=m,\qquad -(\mathrm{a}'+2\mathrm{b}')=n,\qquad 2\mathrm{b}''=p,\qquad -\mathrm{a}=q.$$

L'équation tangentielle d'une telle conique sera

$$(-q\xi^2-l\zeta^2+m\eta\zeta-n\zeta\xi+p\xi\eta)+\mathrm{a}'(\eta^2-\zeta\xi)=0.$$

Une constante a' y demeure arbitraire; les coniques en question forment donc un faisceau tangentiel dont fait partie la conique $\eta^2-\zeta\xi=0$, qui n'est autre que la conique fondamentale

$$Y^2-4ZX=0.$$

On voit comment, par l'emploi des coordonnées de M. Darboux (*Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces*), l'équation d'Euler se trouve intégrée par un faisceau tangentiel de coniques.

Revenons à nos géodésiques. Supposons que

$$\begin{aligned}F&=lu^4+mu^3+nu^2+pu+q,\\ G&=l'u^4+m'u^3+n'u^2+p'u+q';\end{aligned}$$

dans notre équation d'Euler, le polynône H est $G+aF$; nous aurons pour chaque valeur de a une équation d'Euler, et le faisceau de coniques intégrales sera représenté par l'équation tangentielle

$$\begin{aligned}-(q'+aq)\xi^2-(l'+al)\eta^2+(m'+am)\eta\zeta-(n'+an)\zeta\xi&\\ +(p'+ap)\xi\eta+\mathrm{a}'(\eta^2-\xi\zeta)&=0,\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}&(-q'\xi^2-l'\zeta^2+m'\eta\zeta-n'\zeta\xi+p'\xi\eta)\\ &\quad+a(-q\xi^2-l\zeta^2+m\eta\zeta-n\zeta\xi+p\xi\eta)+\mathrm{a}'(\eta^2-\zeta\xi)=0.\end{aligned}$$

Quand a et a' prendront toutes les valeurs possibles, nous aurons toutes les géodésiques de notre ds^2, et, d'autre part, nous obtiendrons dans le plan représentatif un réseau tangentiel de coniques.

On voit donc comment il se fait que les surfaces qui possèdent les ds^2 du type VII puissent se représenter point par point sur un plan, de telle manière que l'image de leurs géodésiques soit un réseau tangentiel de coniques.

J'ajouterai que, si les coniques du réseau touchent deux droites fixes, le

ds^2 est de révolution, et que sa courbure est constante si les coniques du réseau touchent trois droites fixes.

Cette dernière proposition comprend le théorème de M. Beltrami, car les coniques inscrites dans un triangle $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ ont pour équation

$$l\sqrt{X} + m\sqrt{Y} + n\sqrt{Z} = 0;$$

il suffit de faire la transformation ponctuelle

$$X' = \sqrt{X}, \qquad Y' = \sqrt{Y}, \qquad Z' = \sqrt{Z}$$

pour transformer ces coniques dans les droites du plan, c'est-à-dire pour obtenir une représentation des géodésiques par les droites du plan.

17. M. Lie, dans un beau travail inséré au Tome XX des *Mathematische Annalen,* a étudié les géodésiques avec transformations infinitésimales. Il a distingué trois cas principaux suivant que la transformation est conforme, demi-conforme on non conforme. Il a résolu tous les cas possibles de transformations conformes ou demi-conformes, mais en ce qui concerne le cas général, il se borne à former une équation contenue dans celle de M. Darboux. L'éminent géomètre norvégien a toutefois considéré un cas important, mais exceptionnel, dans lequel la transformation infinitésimale conserve un réseau isotherme de coniques géodésiques. Il restait à trouver les autres cas, c'est-à-dire à trouver le cas général. Dans ce cas général, le ds^2 possède, d'après M. Lie lui-même, deux intégrales quadratiques pour ses géodésiques; nous devons donc nous attendre à le trouver parmi les ds^2 du Tableau VII.

Mais ici intervient utilement la remarque déjà faite que tout ds^2 à deux intégrales quadratiques est représentable géodésiquement sur un ds^2 du type VII_1. Nous pouvons, grâce à cette remarque, nous borner à chercher les types réductibles à VII_1 qui possèdent une transformation infinitésimale de leurs géodésiques.

Les invariants du type VII_1 fournissent une réponse dont la simplicité est inespérée.

Il faut et il suffit pour qu'un type VII_1 *possède une transformation infinitésimale de ses géodésiques qu'un des invariants* A, B, C, D *soit nul, par exemple* $D = 0$, *et en outre que les trois autres vérifient une* *relation de la forme*

$$\pm\sqrt{A}\pm\sqrt{B}\pm\sqrt{C}=0.$$

18. Il peut arriver accidentellement que deux des trois invariants restants soient, en outre, égaux, par exemple $B = C$; on ne saurait avoir $A = 0$ car le ds^2 serait de révolution; il faut donc que l'on ait dans ce cas

$$\pm\sqrt{A}\pm(\sqrt{B}+\sqrt{C})=0$$

ou

$$\pm\sqrt{A}\pm 2\sqrt{B}=0,$$

c'est-à-dire $A = 4B = 4C$.

Comme il importe peu de faire $C = 1$, on aura $B = C = 1$, $A = 4$, et l'on obtient le ds^2 remarquable

$$\left[-\frac{1}{\sin^2\frac{x-y}{2}}+\frac{2\left(1+\cos\frac{x+y}{2}\right)}{\sin^2\frac{x+y}{2}}\right]dx\,dy,$$

qui possède une transformation infinitésimale de ses géodésiques et une seule. Mais ce qui est très digne d'intérêt, c'est que *sur ce ds^2*, qui ne contient aucune constante, *sont géodésiquement représentables tous les ds^2 qui admettent* une *transformation infinitésimale de leurs géodésiques*.

En cela consiste la solution qui manquait à M. Lie.

J'ai complété en divers autres points les résultats de M. Lie. C'est ainsi que les seuls ds^2 de révolution jouissent de la propriété d'admettre trois transformations infinitésimales de leurs géodésiques; une de ces transformations est toujours conforme. Il n'y a donc pas, contrairement à ce qu'avait pu augurer M. Lie, de géodésiques possédant trois transformations infinitésimales non conformes.

J'ajouterai que, dans le cas des géodésiques à transformations infinitésimales, le réseau représentatif des coniques peut se définir comme il suit.

On prendra deux coniques A, B telles qu'on puisse inscrire dans A une infinité de triangles T circonscrits à B; on prendra une tangente D commune à A et à B. Les coniques tangentes à D et inscrites aux triangles T forment le réseau demandé.

On observera que nous avons ainsi, par le fait, résolu cette question :

Trouver les réseaux tangentiels de coniques qui possèdent une transformation infinitésimale ponctuelle.

TABLEAU I.

Formes de révolution à intégrales quadratiques sous leur aspect caractéristique de révolution $g(x \mp y)\,dx\,dy$.

1.
$$ds^2 = \frac{a\left(e^{\frac{x-y}{2}} + e^{\frac{y-x}{2}}\right) + b}{\left(e^{\frac{x-y}{2}} - e^{\frac{y-x}{2}}\right)^2}\,dx\,dy,$$

Couples de solutions de l'équation (D) $(1, 1)(e^x, e^y)(e^{-x}, e^{-y})$.

2.
$$ds^2 = \left(ae^{-\frac{x+y}{2}} + be^{-(x+y)}\right) dx\,\partial y,$$

Couples de solutions de (D) $(1, 1)(0, e^y)(e^x, 0)$.

3.
$$ds^2 = \left[\frac{a}{(x-y)^2} + b\right] dx\,dy,$$

Couples de solutions de (D) $(1, 1)(x, y)(x^2, y^2)$.

4.
$$ds^2 = (x+y)\,dx\,dy,$$

Couples de solutions de (D) $(1, 1)(x, y)(0, 1)$.

Remarque. — Le premier type peut encore s'écrire

$$ds^2 = \frac{a\cos\frac{x'-y'}{2} + b}{\sin^2\frac{x'-y'}{2}}\,dx'\,dy',$$

avec les couples de solutions de (D) $(1, 1)$ $(\cos x', \cos y')$ $(\sin x', \sin y')$.

TABLEAU II.

Formes de Liouville à courbure constante non nulle.

1. $$ds^2 = [\wp(x+y) - \wp(x-y)]\,dx\,dy.$$

Expression générale des coefficients de transformation $[\Phi(x),\ \Phi(y)]$,

où

$$\Phi(x) = \mathrm{L}_0\,\wp(x) + \mathrm{L}_1\,\wp(x+\omega_1) + \mathrm{L}_2\,\wp(x+\omega_2) + \mathrm{L}_3\,\wp(x+\omega_3) + \mathrm{L}_4.$$

2. $$ds^2 = \left[\frac{1}{\sin^2(x+y)} - \frac{1}{\sin^2(x-y)}\right] dx\,dy.$$

Coefficients de transformation $\Phi(x)$, $\Phi(y)$.

$$\Phi(x) = \frac{\mathrm{L}_0}{\sin^2 x} + \frac{\mathrm{L}_1}{\cos^2 x} + \mathrm{L}_2 \cos 4x + \mathrm{L}_3 \cos 2x + \mathrm{L}_4.$$

3. $$ds^2 = \frac{1}{\sin^2(x-y)}\,dx\,dy.$$

Coefficients de transformation $[\Phi(x),\ \Phi(y)]$.

$$\Phi(x) = \mathrm{L}_0 \sin 4x + \mathrm{L}_1 \sin 2x + \mathrm{L}_2 \cos 4x + \mathrm{L}_3 \cos 2x + \mathrm{L}_4.$$

4. $$ds^2 = \left[\frac{1}{(x+y)^2} - \frac{1}{(x-y)^2}\right] dx\,dy.$$

Coefficients de transformation $[\Phi(x),\ \Phi(y)]$.

$$\Phi(x) = \frac{\mathrm{L}_0}{x^2} + \mathrm{L}_1 x^2 + \mathrm{L}_2 x^4 + \mathrm{L}_3 x^6 + \mathrm{L}_4.$$

5. $$ds^2 = \frac{dx\,dy}{(x-y)^2}.$$

Coefficients de transformation $[\Phi(x),\ \Phi(y)]$.

$$\Phi(x) = \mathrm{L}_0 x^4 + \mathrm{L}_1 x^3 + \mathrm{L}_2 x^2 + \mathrm{L}_3 x + \mathrm{L}_4.$$

Dans ces formules les L sont des constantes arbitraires; $\wp(x)$ est la fonction de M. Weierstrass.

TABLEAU III.

Formes de Liouville à courbure nulle.

1. $$ds^2 = \left(e^{\overline{x+y}} + e^{-\overline{x+y}} + e^{\overline{x-y}} + e^{-\overline{x-y}}\right) dx\, dy.$$

Coefficients de transformation $\lambda + \dfrac{\mu(e^x - e^{-x}) + \nu}{(e^x + e^{-x})^2}, \quad \lambda + \dfrac{\mu'(e^y - e^{-y}) + \nu'}{(e^y + e^{-y})^2}.$

$$ds^2 = (e^{x+y} + e^{x-y})\, dx\, dy.$$

Coefficients de transformation $\lambda + \dfrac{\mu(e^x - e^{-x}) + \nu}{(e^x + e^{-x})^2}, \quad \lambda + \dfrac{\mu' e^y + \nu'}{e^{2y}}.$

3. $$ds^2 = e^{x+y}\, dx\, dy.$$

Coefficients de transformation $\lambda + \dfrac{\mu e^x + \nu}{e^{2x}}, \quad \lambda + \dfrac{\mu' e^y + \nu'}{e^{2y}}.$

4. $$ds^2 = \left(\overline{x+y}^2 - \overline{x-y}^2\right) dx\, dy.$$

Coefficients de transformation $\lambda x^2 + \dfrac{\mu}{x^2} + \nu, \quad \lambda y^2 + \dfrac{\mu'}{y^2} + \nu'.$

5. $$ds^2 = \left(\overline{x+y} - \overline{x-y}\right) dx\, dy.$$

Coefficients de transformation $\lambda x^2 + \mu x + \nu, \quad \lambda y^2 + \dfrac{\mu'}{y^2} + \nu'.$

6. $$ds^2 = dx\, dy,$$

Coefficients de transformation $\lambda x^2 + \mu x + \nu, \quad \lambda y^2 + \mu' y + \nu'.$

Dans toutes ces formules, λ, μ, ν, μ', ν' représentent cinq constantes entièrement arbitraires.

Le premier type de ce Tableau, qui est le type essentiel des ds^2 de courbure nulle peut s'écrire encore

$$ds^2 = \left(\cos\overline{x' + y'} - \cos\overline{x' - y'}\right) dx'\, dy',$$

avec les coefficients de transformation

$$\lambda + \frac{\mu \cos x' + \nu}{\sin^2 x'}, \quad \lambda + \frac{\mu' \cos y' + \nu'}{\sin^2 y'}.$$

TABLEAU IV.

Types essentiels de ds^2 de révolution.

1. $ds^2 = \mathrm{A}[\wp(x+y) - \wp(x-y)]\,dx\,dy + \mathrm{B}[\wp(x+y+\omega_1) - \wp(x-y+\omega_1)]\,dx\,dy.$

Coefficients de transformation

$$[\wp(x)+\wp(x+\omega_1),\ \wp(y)+\wp(y+\omega_1)],$$
$$[\wp(x+\omega_2)+\wp(x+\omega_3),\ \wp(y+\omega_2)+\wp(y+\omega_3)].$$

2. $ds^2 = \mathrm{A}(\cos 4\overline{x+y} - \cos 4\overline{x-y})\,dx\,dy + \mathrm{B}(\cos 2\overline{x+y} - \cos 2\overline{x-y})\,dx\,dy.$

Coefficients de transformation $\left(0, \dfrac{1}{\sin^2 2y}\right)$, $\left(\dfrac{1}{\sin^2 2x}, 0\right)$.

3. $ds^2 = \mathrm{A}\left[\dfrac{1}{\sin^2\overline{x+y}} - \dfrac{1}{\sin^2\overline{x-y}}\right]dx\,dy + \mathrm{B}(\cos 2\overline{x+y} - \cos 2\overline{x-y})\,dx\,dy.$

Coefficients de transformation $\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}, \dfrac{1}{\sin^2 y}\right)$, $\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}, \dfrac{1}{\cos^2 y}\right)$.

4. $ds^2 = \mathrm{A}(\overline{x+y}^4 - \overline{x-y}^4)\,dx\,dy + \mathrm{B}(\overline{x+y}^2 - \overline{x-y}^2)\,dx\,dy.$

Coefficients de transformation $\left(\dfrac{1}{x^2}, 0\right)$, $\left(0, \dfrac{1}{y^2}\right)$.

Dans ces formules, A, B sont deux constantes qui changent d'un ds^2 à l'autre.

TABLEAU V.

Types singuliers des ds^2 de révolution (1).

Types équivalents au type essentiel IV_1.

1. $$\frac{a\cos\frac{x-y}{2}+b}{\sin^2\frac{x-y}{2}}\,dx\,dy.$$

Coefficients de transformation $(\cos x, \cos y)$, $(\sin x, \sin y)$.

2. $$\left(\frac{a}{\sin^2\frac{x+y}{2}}+\frac{b}{\sin^2\frac{x-y}{2}}\right)dx\,dy.$$

Coefficients de transformation $(\cos x, \cos y)$, $(\cos 2x, \cos 2y)$,

3. $$\left[a\left(\frac{1}{\cos^2\frac{x+y}{2}}-\frac{1}{\cos^2\frac{x-y}{2}}\right)+b\left(\frac{1}{\sin^2\frac{x+y}{2}}-\frac{1}{\sin^2\frac{x-y}{2}}\right)\right]dx\,dy.$$

Coefficients de transformation $(\cos 2x, \cos 2y)$, $\left(\frac{1}{\sin^2 x}, \frac{1}{\sin^2 y}\right)$.

4. $$\left[\frac{a}{(x+y)^2}+\frac{b}{(x-y)^2}\right]dx\,dy.$$

Coefficients de transformation (x^4, y^4), (x^2, y^2)

Types équivalents au type essentiel IV_2.

5. $$[ae^{-(x+y)}+be^{-2(x+y)}]\,dx\,dy,$$

Coefficients de transformation $(e^{2x}, 0)$, $(0, e^{2y})$.

6. $$\left[a+b\left(\overline{x+y}^{\,2}-\overline{x-y}^{\,-2}\right)\right]dx\,dy,$$

Coefficients de transformation (x^2, y^2), $(0, 1)$.

7. $$[a(e^{2(x+y)}-e^{-2(x-y)})+b(e^{4(x+y)}-e^{-4(x-y)})]\,dx\,dy.$$

Coefficients de transformation $\left[\frac{1}{(e^{2x}-e^{-2x})^2}, 0\right]$ $(0, e^{-4y})$.

---

(1) La concordance entre les types du Tableau V et leurs types essentiels du Tableau IV, s'établit par certaines relations qui permettent d'exprimer les constantes a, b en fonction des constantes A, B.

Types équivalents au type essentiel IV_3.

8. $$\left[\frac{a}{(x-y)^2}+b\right]dx\,dy,$$

Coefficients de transformation (x, y), (x^2, y^2).

9. $$\left\{a[(x+y)^2-(x-y)^2]+b\left[\frac{1}{(x+y)^2}-\frac{1}{(x-y)^2}\right]\right\}dx\,dy.$$

Coefficients de transformation (x^2, y^2), $\left(\frac{1}{x^2}, \frac{1}{y^2}\right)$.

10. $$\left[\frac{a}{(e^{x-y}-e^{y-x})^2}+be^{2(x+y)}\right]dx\,dy.$$

Coefficients de transformation (e^{-2x}, e^{-2y}), (e^{-4x}, e^{-4y}).

Type équivalent au type essentiel IV_4.

11. $$(x+y)\,dx\,dy,$$

Coefficients de transformation (x, y), $(0, 1)$.

TABLEAU VI.

Les ds^2 réciproques des ds^2 du plan.

1. $$ds^2 = \left(\frac{\mu \cos \frac{x+y}{2} + \nu}{\sin^2 \frac{x+y}{2}} - \frac{\mu' \cos \frac{x-y}{2} + \nu'}{\sin^2 \frac{x-y}{2}} \right) dx\, dy.$$

Coefficient de transformation $(\cos x, \cos y)$.

2. $$ds^2 = \left[\frac{\mu(e^{x-y} + e^{y-x}) + \nu}{(e^{x-y} - e^{y-x})^2} + \frac{\mu' e^{x+y} + \nu'}{e^{2(x+y)}} \right] dx\, dy.$$

Coefficient de transformation (e^{2x}, e^{2y}).

3. $$ds^2 = \left(\frac{\mu e^{x+y} + \nu}{e^{2(x+y)}} + \frac{\mu' e^{x-y} + \nu'}{e^{2(x-y)}} \right) dx\, dy.$$

Coefficient de transformation $(e^{2x}, 0)$.

4. $$ds^2 = \left[\lambda xy + \frac{\mu}{(x+y)^2} + \frac{\nu}{(x-y)^2} + \rho \right] dx\, dy.$$

Coefficient de transformation (x^2, y^2).

5. $$ds^2 = \left[\lambda xy + \frac{\mu}{(x-y)^2} + \nu(x+y) + \rho \right] dx\, dy.$$

Coefficient de transformation (x, y).

6. $$ds^2 = (\lambda xy + \mu x + \nu y + \rho)\, dx\, dy.$$

Ce dernier ds^2 est de révolution type V_6 si λ n'est pas nul, type V_{11} si λ est nul; c'est un ds^2 à courbure nulle si λ, étant nul, μ ou ν le sont aussi.

TABLEAU VII.

Réciproques des ds^2 de courbure constante non nulle.

1.
$$\left\{\begin{aligned} ds^2 = {} & A_0[\wp(x+y)-\wp(x-y)]\,dx\,dy \\ & + A_1[\wp(x+y+\omega_1)-\wp(x-y+\omega_1)]\,dx\,dy \\ & + A_2[\wp(x+y+\omega_2)-\wp(x-y+\omega_2)]\,dx\,dy \\ & + A_3[\wp(x+y+\omega_3)-\wp(x-y+\omega_3)]\,dx\,dy. \end{aligned}\right.$$

Coefficient de transformation $[\wp(2x), \wp(2y)]$.

2.
$$\left\{\begin{aligned} ds^2 = {} & A_0\left[\frac{1}{\sin^2(x+y)}-\frac{1}{\sin^2(x-y)}\right]dx\,dy \\ & + A_1\left[\frac{1}{\cos^2(x+y)}-\frac{1}{\cos^2(x-y)}\right]dx\,dy \\ & + A_2[\cos 2(x+y)-\cos 2(x-y)]\,dx\,dy \\ & + A_3[\cos 4(x+y)-\cos 4(x-y)]\,dx\,dy. \end{aligned}\right.$$

Coefficient de transformation $\left(\frac{1}{\sin^2 2x}, \frac{1}{\sin^2 2y}\right)$.

3.
$$\left\{\begin{aligned} ds^2 = {} & A_0[\sin 4(x+y)-\sin 4(x-y)]\,dx\,dy \\ & + A_1[\cos 4(x+y)-\cos 4(x-y)]\,dx\,dy \\ & + A_2[\sin 2(x+y)-\sin 2(x-y)]\,dx\,dy \\ & + A_3[\cos 2(x+y)-\cos 2(x-y)]\,dx\,dy. \end{aligned}\right.$$

Coefficient de transformation $\left(0, \frac{1}{\sin^2 2y}\right)$.

4.
$$\left\{\begin{aligned} ds^2 = {} & A_0\left[\frac{1}{(x+y)^2}-\frac{1}{(x-y)^2}\right]dx\,dy \\ & + A_1[(x+y)^2-(x-y)^2]\,dx\,dy \\ & + A_2[(x+y)^4-(x-y)^4]\,dx\,dy \\ & + A_3[(x+y)^6-(x-y)^6]\,dx\,dy. \end{aligned}\right.$$

Coefficient de transformation $\left(\frac{1}{x^2}, \frac{1}{y^2}\right)$.

5.

$$\left\{\begin{aligned} ds^2 = {} & A_0\left(\overline{x+y}^4 - \overline{x-y}^4\right) dx\,dy \\ & + A_1[(x+y)^3 - (x-y)^3]\,dx\,dy \\ & + A_2[(x+y)^2 - (x-y)^2]\,dx\,dy \\ & + A_3[(x+y) - (x-y)]\,dx\,dy. \end{aligned}\right.$$

Coefficient de transformation $\left(0, \frac{1}{y^2}\right)$.