SUR LE

PROBLÈME DE DIRICHLET

ET SON EXTENSION

AU CAS DE L'ÉQUATION LINÉAIRE GÉNÉRALE DU SECOND ORDRE,

PAR M. A. PARAF,

Ancien Élève de l'École Normale supérieure.

La théorie des équations aux dérivées partielles est une de celles qui ont le plus attiré dans ce siècle l'attention des géomètres. En se bornant même à un point particulier de cette théorie, à la considération des équations linéaires du second ordre, il faut renoncer à citer tous les Mémoires écrits sur la matière, tous les résultats déjà obtenus sur ce point. La théorie générale des fonctions, la Géométrie des surfaces et des ensembles de lignes, la Physique mathématique donnent naissance à de telles équations, et la manière de poser les problèmes varie avec le point de vue auquel on se place.

Pour l'équation linéaire générale à deux variables indépendantes

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2D\frac{\partial u}{\partial x} + 2E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0,$$

le problème se présente sous deux formes bien différentes, suivant que les caractéristiques de l'équation sont réelles ou imaginaires, c'est-à-dire suivant que la quantité $B^2 - AC$ est positive ou négative. Dans ce dernier cas, on peut se proposer de trouver une intégrale continue dans une aire donnée, y admettant des dérivées continues des deux premiers ordres et prenant sur le contour de l'aire des valeurs données d'avance. C'est ce problème qui fait l'objet du présent travail.

Le premier Chapitre traite de la plus simple et aussi de la plus célèbre de toutes ces équations : je veux dire l'équation de Laplace

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Le problème correspondant est connu sous le nom de *problème de Dirichlet* et joue un rôle capital dans plusieurs branches des Mathématiques. La première solution rigoureuse en a été trouvée par M. Schwarz (1), et M. C. Neumann (2) en a, de son côté, donné une solution différente.

Plus récemment, M. Poincaré (3) a fait connaître une méthode nouvelle et extrêmement originale pour résoudre ce problème. L'auteur a exposé sa méthode pour le cas de trois variables, en déterminant l'équilibre électrique à la surface d'un conducteur isolé quelconque. L'application du principe des images donne alors immédiatement la fonction de Green relative à la surface inverse, et il reste, pour achever la solution, à discuter une intégrale double (4).

Outre cette voie un peu détournée, M. Poincaré montre encore, mais plus sommairement, que la même méthode se prête à la solution directe sans passer par l'intermédiaire de la fonction de Green. Il m'a semblé qu'il pourrait y avoir quelque intérêt à reprendre sous cette dernière forme la belle méthode de M. Poincaré, en l'exposant dans le cas de deux variables qui, plus simple à certains égards que le cas de trois variables, présente en revanche quelques difficultés particulières tenant aux différences existant entre le potentiel newtonien et le potentiel logarithmique. Certains points étaient aussi susceptibles d'un plus grand degré de rigueur que ne leur en avait donné l'auteur dans les quelques pages concises consacrées par lui à ce sujet. J'ai ainsi été amené à apporter à la méthode de M. Poincaré des changements assez notables qui n'atteignent cependant pas le fond même des idées.

L'équation de Laplace conduit tout naturellement à l'équation

$$\Delta(u) = f(x, y).$$

---

(1) SCHWARZ, *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, t. II.

(2) C. NEUMANN, *Untersuchungen in dem Gebiete des logarithmischen und newtonschen Potentiales*, Leipzig, 1877.

(3) POINCARÉ, *American Journal of Mathematics*, t. XII.

(4) *Voir*, sur ce point, A. HARNACK, *Die Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentiales*, Leipzig, 1887.

Green (1) a intégré cette équation, mais la méthode qu'il a suivie laisse à désirer et n'est plus en rapport avec les habitudes d'esprit que l'on apporte aujourd'hui dans ces recherches. Cette question fait l'objet du second Chapitre.

Dans la troisième et dernière Partie, nous arrivons enfin à l'équation générale. Jusqu'à ces derniers temps, on s'était généralement borné à considérer le cas où les coefficients sont des fonctions analytiques, et l'on n'avait cherché l'intégrale que sous forme de fonction analytique, sans se préoccuper des autres intégrales qui pourraient exister. M. Schwarz (2), dans une première tentative, avait ouvert une voie nouvelle dans un cas très particulier. C'est M. Picard qui a fait faire à la question un pas décisif en montrant que la méthode des approximations successives se prête merveilleusement à ce genre de problèmes.

Dans plusieurs Mémoires bien connus (3), M. Picard développe cette méthode et obtient des résultats de la plus haute importance concernant les équations du second ordre en général, ainsi que certaines équations particulières, entre autres les équations linéaires, notamment dans le cas des coefficients analytiques.

En me bornant aux équations linéaires, j'ai, en suivant une voie différente, retrouvé une partie de ses résultats et étendu au cas des coefficients quelconques quelques-uns des théorèmes démontrés par lui dans l'hypothèse des coefficients analytiques.

---

(1) GREEN, *Math. Papers* et *Journal de Crelle*, t. 47.

(2) SCHWARZ, *Gesam. math. Abh.*, t. I, p. 241 et seq.

(3) *Voir* entre autres : *Acta mathematica*, t. XII. — *Journal de Mathématiques*, 1890. — *Journal de l'École Polytechnique*, LX^{e} Cahier.

CHAPITRE I.

L'ÉQUATION DE LAPLACE ET LE PROBLÈME DE DIRICHLET.

1. L'équation

$$\Delta(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{1}$$

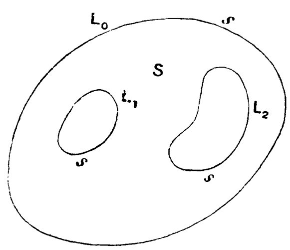
que nous appellerons *équation de Laplace*, et l'équation analogue, avec une variable indépendante de plus, interviennent dans presque toutes les branches de l'Analyse. Elles se présentent notamment dans la théorie de l'attraction, dans celle de l'équilibre électrique, dans celle de la chaleur, etc., etc. En Analyse pure, la théorie des fonctions d'une variable complexe est intimement liée à la solution du problème de Dirichlet que l'on peut énoncer comme il suit :

Trouver une fonction des deux variables x et y qui, à l'intérieur d'une aire donnée, soit finie, continue et bien déterminée, ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres, satisfasse à l'équation de Laplace et prenne sur le contour de l'aire des valeurs données d'avance.

C'est par ce problème que nous commencerons notre étude.

Les aires dont nous parlerons seront toujours supposées connexes, mais à connexion simple ou multiple. Si l'ordre de connexion est égal à n, l'aire sera la portion du plan limitée extérieurement par une courbe

Fig. 1.



fermée L_0 (*fig.* 1) et intérieurement par $n-1$ courbes fermées $L_1, L_2, \ldots, L_{n-1}$ toutes intérieures à L_0, mais extérieures les unes aux autres.

Nous désignerons toujours par S l'intérieur d'une telle aire, et nous emploierons la lettre s pour désigner, suivant les cas, ou bien l'ensemble du contour de S, ou bien l'une de ces courbes seulement, ou encore un point sur une de ces courbes, ainsi que la variable qui fixe la position de ce point sur le contour. Il ne pourra, d'ailleurs, jamais résulter aucune confusion de cet emploi multiple de la lettre s.

Nous supposerons d'abord que s a en chaque point une tangente bien déterminée et variant d'une manière continue. Nous verrons plus tard que l'on peut s'affranchir de cette dernière restriction, pourvu que les points où cette condition cesse d'être remplie soient en nombre limité.

Nous représenterons par U ou, d'une manière plus précise, par $U(s)$ la fonction du point s, donnée d'avance, qui exprime la suite des valeurs que doit prendre la fonction cherchée V sur le contour.

A l'égard de cette fonction U [1], nous supposons seulement qu'elle est continue sur chacune des courbes qui limitent S, mais sans faire aucune hypothèse sur la continuité ni même sur l'existence de sa dérivée.

Nous dirons, suivant l'usage, qu'une fonction est harmonique à l'intérieur d'une aire S quand elle y est continue et uniforme, admet des dérivées des deux premiers ordres continues et uniformes, et vérifie l'équation de Laplace. Le problème de Dirichlet revient donc à trouver une fonction V harmonique dans S et prenant sur s des valeurs données d'avance. Nous voulons dire, par ces derniers mots, que, quand le point A tend vers le point s par un chemin quelconque intérieur à S, la fonction $V(A)$ tend toujours vers $U(s)$.

2. A côté du problème précédent, que nous pouvons appeler le *problème intérieur*, vient se placer un problème analogue relatif à la partie du plan extérieure à S. Les considérations qui suivent nous permettront à la fois de formuler ce problème et d'en ramener la solution à celle du problème intérieur.

A cet effet, commençons par faire une remarque qui nous sera utile dans la suite.

Si deux aires S et S′ sont représentées l'une sur l'autre d'une manière

---

(1) Nous ne nous occuperons pas du cas où U présenterait un nombre fini de discontinuités, ce cas pouvant se ramener simplement au cas où U est continue. *Voir* J. RIEMANN, *Sur le problème de Dirichlet* (*Annales de l'École Normale*, 1888).

conforme par la transformation $x+iy=f(x'+iy')$, toute fonction $V(x,y)$ harmonique dans S se transforme en une fonction $V'(x',y')$ harmonique dans S'.

En effet, toute fonction harmonique $V(x,y)$ peut être considérée comme la partie réelle d'une fonction analytique d'une variable complexe $\varphi(x+iy)$, de sorte que l'on a

$$V(x,y)+i\,U(x,y)=\varphi(x+iy).$$

Effectuons maintenant la transformation réelle

$$x=X(x',y'), \qquad y=Y(x',y')$$

avec

$$x+iy=f(x'+iy')=X(x',y')+i\,Y(x',y'),$$

il en résultera

$$V'(x',y')+i\,U'(x',y')=\varphi[f(x'+iy')]=\Phi(x'+iy'),$$

où l'on a posé

$$V'(x',y')=V(X,Y),$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Cela posé, effectuons une transformation par rayons vecteurs réciproques, en choisissant le pôle à l'intérieur de S. Par cette transformation les n courbes s se changent en n autres courbes s' qui sont toutes extérieures les unes aux autres, et la région S se transforme dans la région S' du plan qui est extérieure à toutes les courbes s'. La relation entre les points des deux aires est, d'ailleurs, univoque et isogonale, et la remarque précédente est donc applicable au cas présent.

La fonction $V(x,y)$ harmonique dans S et se réduisant à $U(s)$ sur s devient donc une fonction $V(x',y')$ harmonique dans S' et se réduisant à $U'(s')$ sur s', la fonction U' étant bien connue en tout point de s', puisque la relation entre les points des deux aires reste univoque même sur les contours. Quant au point ∞ qui est l'homologue du pôle de la transformation, on voit de suite que la fonction V' reste régulière dans le voisinage de ce point et y prend une valeur finie bien déterminée et nullement arbitraire, puisque cette valeur est précisément celle que prend V au point choisi pour pôle, laquelle est, comme nous le verrons, parfaitement déterminée par la fonction $U(s)$ donnée.

Le problème extérieur peut donc se formuler ainsi :

Étant données n courbes fermées s extérieures les unes aux autres, et une suite de valeurs formant sur chacune de ces courbes une fonction continue U(s), *trouver une fonction* V *harmonique dans la région* S *du plan extérieure à la fois à toutes les courbes s, prenant sur s les valeurs* U(s), *et qui, pour x et y très grands, reste régulière en tendant vers une valeur finie inconnue, mais déterminée par la fonction* U(s).

Nous voyons en même temps que sa solution se ramène à celle du problème intérieur pour un contour convenable. Nous nous bornerons donc désormais à l'étude du problème intérieur.

3. Rappelons d'abord quelques résultats classiques qui sont d'un usage courant et dont la démonstration se trouve dans tous les Traités ([1]).

Une fonction, harmonique dans une région S, ne peut avoir de maximum ni de minimum en aucun point de S.

Sa valeur en tout point intérieur est comprise entre la plus grande et la plus petite des valeurs qu'elle prend sur le contour.

Sa valeur en tout point intérieur est donc nulle si elle est nulle tout le long du contour.

Le problème de Dirichlet ne peut admettre plus d'une solution. Il a été complètement résolu dans le cas du cercle, et l'on démontre par des considérations élémentaires que la solution est donnée, dans ce cas, par la formule

$$\text{(2)} \qquad V(P) = \int V(s)\,\frac{R^2 - OP^2}{2\pi R.MP^2}\,ds.$$

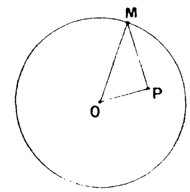
Dans cette formule, V(P) représente la valeur que prend la fonction cherchée V (*fig.* 2) en un point quelconque P intérieur au cercle dont le centre est en O et dont le rayon est R. M est un point quelconque de la circonférence que nous désignons aussi par s, valeur de l'arc qui fixe sa position sur la circonférence; enfin l'intégrale est prise le long de la circon-

---

([1]) Consulter, par exemple, NEUMANN, *Untersuchungen über das logarithmische und newtonsche Potential,* Leipzig, 1877. — A. HARNACK, *Die Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentiales,* Leipzig, 1887. — J. RIEMANN, *Sur le problème de Dirichlet* (*Annales de l'École Normale,* Paris, 1888) — E. PICARD, *Traité d'Analyse,* t. I. Paris, 1891.

férence dans le sens positif. Cette formule montre aussi que la fonction $V(P)$ est régulière à l'intérieur du cercle.

Fig. 2.



Si, dans cette formule, nous supposons que P vienne en O, on a

$$V(O) = \int_0^{2\pi} \frac{V(s)\, d\theta}{2\pi}, \tag{2 bis}$$

et l'on retrouve ce résultat connu, que la moyenne arithmétique des valeurs de V sur la circonférence est égale à la valeur de V au centre.

Quelques considérations empruntées à la Mécanique faciliteront encore notre tâche.

On sait que, si, dans un plan, une masse matérielle égale à m est concentrée en un point A et attire un point M de masse 1 suivant la droite MA avec une force ayant pour intensité $\frac{m}{r}$ (où r désigne la longueur absolue MA), les composantes de cette attraction suivant les axes des x et des y (que nous supposons rectangulaires) sont égales aux dérivées partielles de la fonction $m \log \frac{1}{r}$ par rapport aux coordonnées x et y du point M.

Cette fonction $m \log \frac{1}{r}$ s'appelle le *potentiel logarithmique* de la masse m sur le point M.

Si l'on a plusieurs masses attirantes, le potentiel sera la somme

$$\sum m \log \frac{1}{r}$$

étendue à toutes les masses agissantes. Si les masses remplissent d'une manière continue une aire ou un arc de courbe avec une densité ρ (ce qui veut dire que la masse contenue dans l'élément $d\tau$ de l'aire ou de la courbe est égale à $\rho\, d\tau$), il existera de même un potentiel donné par la formule

$$V = \int \rho \log \frac{1}{r}\, d\tau$$

étendue à toutes les masses agissantes.

Dans tout ce qui suit, nous ne considérerons que des masses positives.

Les principales propriétés du potentiel logarithmique que nous aurons à employer sont les suivantes.

Dans toute région qui ne contient aucune des masses agissantes, le potentiel est une fonction harmonique.

Le potentiel dû à des masses dont la distribution est superficielle est une fonction continue, ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre, dans toute région finie du plan.

Les dérivées du second ordre sont aussi continues tant en dehors qu'en dedans des masses agissantes, mais elles éprouvent une discontinuité en traversant le contour des aires attirantes; à l'intérieur de ces aires, on a

$$\Delta V = -2\pi\rho. \tag{3}$$

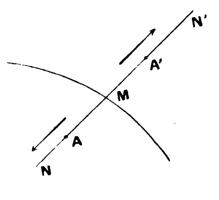
Le potentiel dû à des masses dont la distribution est linéaire est encore une fonction continue dans toute région finie, mais les dérivées du premier ordre éprouvent une discontinuité en traversant les courbes attirantes.

Cette discontinuité est exprimée par la formule

$$\frac{dV}{dn} + \frac{dV}{dn'} = -2\pi\rho, \tag{4}$$

dans laquelle $\frac{dV}{dn}$ est la limite vers laquelle tend la dérivée de V au point A (*fig.* 3) prise dans la direction de la flèche lorsque le point A se

Fig. 3.



rapproche de M en suivant la normale MN. $\frac{dV}{dn'}$ est la quantité analogue au point A'.

On remarquera que le potentiel logarithmique peut être aussi bien négatif que positif, et que, en un point qui s'éloigne indéfiniment, il peut être ou bien $-\infty$ ou bien 0. Ce sont ces deux faits qui donnent au cas de deux variables une physionomie particulière.

Enfin, si l'on considère le potentiel engendré par des masses distribuées d'une manière quelconque dans le plan, si l'on appelle d'une manière générale m celles de ces masses qui sont extérieures à un cercle de rayon R ou sur sa circonférence, et μ celles qui sont intérieures au cercle, la moyenne arithmétique des valeurs de ce potentiel en tous les points de la circonférence sera donnée par l'équation

$$\text{moy.}\, V = \sum m \log \frac{1}{r} + \log \frac{1}{R} \sum \mu, \tag{5}$$

r désignant la distance d'un point de masse m au centre de la circonférence.

Nous possédons maintenant tous les matériaux nécessaires. Il s'agit de les mettre en œuvre.

4. Soit un cercle de centre O et de rayon R, A un point extérieur, P un point intérieur.

La quantité $\log \frac{1}{AP}$, dans laquelle nous considérons le point A comme fixe et le point P comme variable, est une fonction des coordonnées de P, harmonique dans tout le cercle, puisque P est toujours séparé de A par la circonférence. En un point M de la circonférence, elle prend la valeur $\log \frac{1}{AM}$. Nous pouvons donc, en appliquant la formule (2), écrire

$$\log \frac{1}{AP} = \int \log \frac{1}{AM} \frac{R^2 - OP^2}{2\pi R . MP^2} ds. \tag{6}$$

Faisons, d'autre part, $V(s) = 1$ dans la même formule (2).

L'intégrale du second membre devra représenter une fonction harmonique dans le cercle et se réduisant à l'unité sur la circonférence. Mais nous avons une telle fonction en prenant $V(P) = 1$, et comme le problème ne peut avoir plus d'une solution, on aura

$$1 = \int \frac{R^2 - OP^2}{2\pi R . MP^2} ds. \tag{7}$$

Les formules (6) et (7) expriment le fait suivant :

Si l'on a, sur la circonférence, une couche attirante dont la densité en chaque point M est la quantité positive $\rho = \frac{R^2 - OP^2}{2\pi R.MP^2}$, la masse totale de cette couche sera égale à l'unité [formule (7)] et le potentiel de cette couche sur un point extérieur A sera le même que si toute la masse était concentrée en P [formule (6)].

Que devient ce potentiel quand le point A est intérieur au cercle ? Il est toujours donné par la même intégrale, mais l'égalité (6) n'a plus lieu dans ce cas. Entourons alors P d'un petit cercle et envisageons l'aire comprise entre les deux cercles pour y étudier la fonction

$$\log\frac{1}{PA} - \int \log\frac{1}{AM}\,\frac{R^2 - OP^2}{2\pi R.MP^2}\,ds,$$

où, cette fois, P est fixe et A variable.

Les deux termes de la différence sont harmoniques dans l'aire, puisque chacun d'eux est un potentiel dû à des masses dont aucune n'est intérieure. Sur le cercle extérieur, la différence est nulle, comme on le voit en supposant que dans (6) le point extérieur A se rapproche de la circonférence, ce qui est légitime, à cause de la continuité du potentiel. Sur le cercle intérieur, elle est certainement positive, et comme elle ne peut avoir de minimum dans l'intérieur de l'aire, elle y sera constamment positive. On a donc, en tout point A intérieur,

$$\int \log\frac{1}{MA}\,\frac{R^2 - OP^2}{2\pi R.MP^2}\,ds < \log\frac{1}{PA}. \tag{8}$$

Nous avons donc finalement démontré le théorème suivant :

Quand une masse égale à l'unité est placée en un point P *de l'intérieur d'un cercle, si l'on répartit cette masse sur toute la circonférence, de manière que la densité en un point quelconque* M *soit inversement proportionnelle au carré de* MP, *la couche circulaire ainsi obtenue aura même potentiel que la masse primitive en tout point extérieur, et un potentiel plus petit en tout point intérieur.*

Une telle couche s'appellera la *couche équivalente* à la masse placée en P.

Le théorème subsiste évidemment si la masse primitive, au lieu d'être égale à l'unité, était égale à m.

Enfin, si l'on avait plusieurs masses positives à l'intérieur du cercle, on pourrait remplacer chacune d'elles par une couche équivalente, et nous arrivons ainsi à former une couche équivalente à un système quelconque de masses intérieures à un cercle, cette couche ayant même potentiel que le système donné sur tout point extérieur, et un potentiel plus petit sur tout point intérieur.

On peut remarquer qu'il est impossible de trouver sur un même cercle deux couches différentes, de densités ρ et ρ_1, équivalentes à un même système de masses intérieures.

Soient, en effet, V et V_1 les potentiels de ces deux couches sur un même point A. On aura, pour tout point extérieur, $V = V_1$, et cette égalité aura encore lieu sur la circonférence, à cause de la continuité du potentiel. Alors la différence $V - V_1$, harmonique dans l'intérieur du cercle et nulle sur la circonférence, est nulle dans tout l'intérieur. Les fonctions V et V_1 coïncident donc dans tout le plan, et l'on a, en tout point de la circonférence,

$$\frac{dV}{dn} + \frac{dV}{dn'} = \frac{dV_1}{dn} + \frac{dV_1}{dn'},$$

c'est-à-dire $\rho = \rho_1$, d'après la formule (4).

C'est sur la proposition que nous venons de démontrer que repose la méthode de M. Poincaré.

5. Il nous faut encore établir deux théorèmes dus à M. Harnack, et qui jouent dans la théorie des fonctions harmoniques le même rôle que les théorèmes d'Abel sur les séries entières dans la théorie des fonctions d'une variable complexe.

Revenons encore à la formule (2)

$$V(P) = \int V(s) \frac{R^2 - OP^2}{2\pi R . MP^2} ds$$

pour en déduire des limites entre lesquelles sont comprises les valeurs de $V(P)$ à l'intérieur du cercle, si l'on suppose que $V(s)$ est constamment positif sur la circonférence. Les deux facteurs de la quantité à intégrer sont alors positifs. MP étant toujours compris entre $R + OP$ et $R - OP$, nous aurons évidemment

$$(9) \qquad \frac{R - OP}{R + OP} \int \frac{V(s)\, ds}{2\pi R} < V(P) < \frac{R + OP}{R - OP} \int \frac{V(s)\, ds}{2\pi R}.$$

Cela posé, nous pouvons démontrer le premier de ces théorèmes, en l'énonçant comme il suit :

Soit une série

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

dont tous les termes sont des fonctions harmoniques positives en tous les points d'une région connexe R. *Si cette série est convergente en un point de la région, elle sera uniformément convergente dans toute la région* R *et y représentera une fonction harmonique.*

Supposons d'abord que la région R soit un cercle C de centre O et de rayon R. Construisons un cercle concentrique C′ de rayon $R' < R$. Les fonctions u_i prendront sur C′ des valeurs u'_i finies et positives, continues sur la circonférence. On aura donc, P et Q étant deux points intérieurs à C′,

$$\frac{R' - OP}{R' + OP} \int_{C'} \frac{u'_i\, ds'}{2\pi R'} < u_i(P) < \frac{R' + OP}{R' - OP} \int_{C'} \frac{u'_i\, ds'}{2\pi R'},$$

$$\frac{R' - OQ}{R' + OQ} \int_{C'} \frac{u'_i\, ds'}{2\pi R'} < u_i(Q) < \frac{R' + OQ}{R' - OQ} \int_{C'} \frac{u'_i\, ds'}{2\pi R'}.$$

On en conclut, *a fortiori*,

$$u_i(P) < \frac{R' + OP}{R' - OP} \frac{R' + OQ}{R' - OQ} u_i(Q),$$

et si P ne sort pas d'un cercle de rayon R″ inférieur à R′,

$$u_i(P) < \frac{R' + R''}{R' - R''} \frac{R' + OQ}{R' - OQ} u_i(Q).$$

Les quantités $u_i(P)$ sont donc respectivement inférieures aux quantités $u_i(Q)$ multipliées par un même facteur constant et indépendant de P. Donc, dans tout l'intérieur du cercle R″, la série u_i est uniformément convergente et représente, par suite, une fonction continue des coordonnées de P. R″ peut d'ailleurs être pris aussi voisin de R que nous voudrons.

Ceci s'étend sans peine à une aire connexe quelconque S. Supposons, en effet, la série convergente en un point Q de l'aire, et soit P un autre point quelconque de l'aire. Nous pourrons toujours tracer une suite de cercles en nombre fini $C_1, C_2, \ldots, C_n$, se coupant successivement, et le premier contenant Q dans son intérieur, le dernier contenant P. Soit alors Q_1 un point intérieur à la fois à C_1 et à C_2, Q_2 un point intérieur à C_2 et à C_3, etc. La série, étant convergente en Q, le sera dans tout le cercle C_1 et, en particulier, en Q_1. Donc elle le sera aussi dans tout le cercle C_2 et, par suite, en Q_2, etc.

De plus, la convergence étant uniforme dans chacune des circonférences le sera évidemment dans toute aire S′ tout entière intérieure à S.

Il reste à montrer que la série, dont nous venons de prouver la convergence et la continuité, est aussi une fonction harmonique. Traçons un cercle quelconque intérieur à S; soit O son centre et R son rayon, et appelons u la somme de la série

$$u = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

en un point quelconque P intérieur au cercle.

En un point s de la circonférence, u_n devient $u_n(s)$ et u prend une valeur $u(s)$. La série dont le terme général est $u_n(s)$ est uniformément convergente sur toute la circonférence, et l'on a

$$u(s) = u_1(s) + u_2(s) + \ldots + u_n(s) + \ldots.$$

Nous avons donc le droit d'intégrer les deux membres de cette équation le long de la circonférence, après multiplication par le facteur $\frac{\mathrm{R}^2 - \mathrm{OP}^2}{2\pi \mathrm{R}.\mathrm{MP}^2} ds$, ce qui donnera

$$\int u(s) \frac{\mathrm{R}^2 - \mathrm{OP}^2}{2\pi \mathrm{R}.\mathrm{MP}^2} ds = u_1(\mathrm{P}) + u_2(\mathrm{P}) + \ldots + u_n(\mathrm{P}) + \ldots.$$

On a donc bien

$$u(\mathrm{P}) = \int u(s) \frac{\mathrm{R}^2 - \mathrm{OP}^2}{2\pi \mathrm{R}.\mathrm{MP}^2} ds,$$

ce qui démontre que la fonction u est harmonique dans le cercle et, par conséquent, dans toute l'aire.

Outre cet important théorème, M. Harnack en a encore donné un second non moins utile et dont voici l'énoncé :

Si des fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ *sont harmoniques à l'intérieur d'une aire* S *et que* $u_n(\mathrm{A})$ *tende vers* $\mathrm{U}_n(s)$ *quand le point intérieur* A *tend vers un point* s *du contour par un chemin quelconque; si, de plus, la série*

$$\mathrm{U} = \mathrm{U}_1 + \mathrm{U}_2 + \ldots + \mathrm{U}_n + \ldots$$

est uniformément convergente sur tout le contour, alors la série

$$u = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

sera uniformément convergente dans toute l'aire S *et y représentera une fonction harmonique. De plus,* $u(\mathrm{A})$ *tendra vers* $\mathrm{U}(s)$ *quand* A *tendra vers s par un chemin quelconque.*

Posons

$$\mathrm{U} = \Sigma_n + \mathrm{R}_n = (\mathrm{U}_1 + \mathrm{U}_2 + \ldots + \mathrm{U}_n) + (\mathrm{U}_{n+1} + \mathrm{U}_{n+2} + \ldots),$$
$$u = \sigma_n + r_n = (u_1 + u_2 + \ldots + u_n) + (u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots),$$

$$\mathrm{R}_{n,p} = \mathrm{R}_n - \mathrm{R}_{n+p} = \mathrm{U}_{n+1} + \mathrm{U}_{n+2} + \ldots + \mathrm{U}_{n+p},$$
$$r_{n,p} = r_n - r_{n+p} = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}.$$

On peut prendre n assez grand pour que l'on ait

$$|\mathrm{R}_{n,p}| < \varepsilon,$$

quels que soient s et p.

Donc $r_{n,p}$, qui est une somme d'un nombre fini de fonctions harmoniques dans S, et qui tend vers $\mathrm{R}_{n,p}$ sur le contour, aura lui-même dans toute l'aire un module inférieur à ε.

On aura donc

$$|r_{n,p}| < \varepsilon,$$

quel que soit p et quel que soit le point A dans l'aire.

Ceci montre déjà que la série u est uniformément convergente dans S. Le même raisonnement que plus haut montrerait aussi qu'elle est harmonique.

Maintenant, s étant un point du contour, on peut de ce point comme centre tracer un cercle de rayon assez petit pour que, quel que soit le point A dans la portion de l'aire S intérieure à ce cercle, on ait

$$|\Sigma_n(s) - \sigma_n(\mathrm{A})| < \varepsilon,$$

puisque σ_n est une fonction continue dans S se réduisant à $\Sigma_n(s)$ au point s. Donc

$$|u(\mathrm{A}) - \mathrm{U}(s)| = |[\sigma_n(\mathrm{A}) - \Sigma_n(s)] + r_n - \mathrm{R}_n| < 3\varepsilon,$$

ce qui démontre le théorème.

6. Nous allons faire tout de suite une application de ce second théorème, en résolvant le problème de Dirichlet dans le cas de l'aire comprise entre deux cercles concentriques.

Soient C et C′ les deux cercles, R et R′ leurs rayons, r et θ les coordonnées polaires d'un point de la couronne. On aura

$$R' > r > R.$$

Nous nous proposons de trouver, si cela est possible, une fonction $f(r, \theta)$, harmonique dans la couronne S, se réduisant à des fonctions données $U(\theta)$ et $U'(\theta)$ lorsque r tend vers R ou vers R′. Comme nous savons d'avance que ce problème admet au plus une solution, si nous arrivons à former une fonction répondant aux conditions énoncées, nous aurons résolu le problème.

Pour atteindre ce but, nous allons construire une série dont tous les termes soient des fonctions harmoniques dans S, et nous déterminerons les coefficients de manière à satisfaire aux conditions aux limites. Remarquons, à cet effet, que les fonctions

$$r^m \cos m\theta, \qquad r^m \sin m\theta, \qquad \frac{1}{r^m}\cos m\theta, \qquad -\frac{1}{r^m}\sin m\theta,$$

sont harmoniques dans S, car ce sont les parties réelles et les coefficients de i dans les fonctions complexes

$$z^m \quad \text{et} \quad \frac{1}{z^m} \qquad [z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)],$$

lesquelles sont holomorphes dans S, si m est entier.

Désignons donc par

$$a_0, \quad b_0, \quad a_1, \quad a_{-1}, \quad b_1, \quad b_{-1}, \quad \ldots, \quad a_m, \quad a_{-m}, \quad b_m, \quad b_{-m}, \quad \ldots$$

des constantes indéterminées, et employons les abréviations suivantes

$$(10) \quad \begin{cases} a_m \cos m\theta + b_m \sin m\theta = X_m, \qquad a_{-m}\cos m\theta - b_{-m}\sin m\theta = Y_m, \\ \left(\dfrac{r}{R'}\right)^m X_m + \left(\dfrac{R}{r}\right)^m Y_m = u_m, \\ \left(\dfrac{R}{R'}\right)^m X_m + Y_m = U_m, \qquad X_m + \left(\dfrac{R}{R'}\right)^m Y_m = U'_m; \end{cases}$$

u_m est alors une fonction harmonique dans S et tend vers U_m ou vers U'_m

quand le point mobile se rapproche d'un point de C ou de C'. Posons enfin

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} f(r,\theta) &= a_0 + b_0\log r + u_1 + u_2 + \ldots + u_m + \ldots \\ &= a_0 + b_0 \log r + \left\{\begin{aligned} &\frac{r}{R'}(a_1\cos\theta + b_1\sin\theta) + \ldots + \left(\frac{r}{R'}\right)^m (a_m\cos m\theta + b_m\sin m\theta) + \ldots \\ &+ \left(\frac{R}{r}\right)(a_{-1}\cos\theta - b_{-1}\sin\theta) + \ldots + \left(\frac{R}{r}\right)^m (a_{-m}\cos m\theta - b_{-m}\sin m\theta) + \ldots \end{aligned}\right. \end{aligned}\right.$$

Admettons, pour un instant, que cette série soit uniformément convergente, écrivons que l'on a

$$f(R,\theta) = U, \qquad f(R',\theta) = U',$$

et déterminons les coefficients par ces conditions à la manière de Fourier. Nous aurons les équations suivantes, où toutes les intégrales sont prises entre o et 2π,

$$\int U\,d\psi = 2\pi(a_0 + b_0\log R), \qquad \int U'\,d\psi = 2\pi(a_0 + b_0 \log R'),$$

$$\left(\frac{R}{R'}\right)^m a_m + a_{-m} = \frac{1}{\pi}\int U\cos m\psi\,d\psi, \qquad a_m + \left(\frac{R}{R'}\right)^m a_{-m} = \frac{1}{\pi}\int U'\cos m\psi\,d\psi,$$

$$\left(\frac{R}{R'}\right)^m b_m - b_{-m} = \frac{1}{\pi}\int U\sin m\psi\,d\psi, \qquad b_m - \left(\frac{R}{R'}\right)^m b_{-m} = \frac{1}{\pi}\int U'\sin m\psi\,d\psi.$$

(Dans ces intégrales, on a remplacé θ par ψ dans les fonctions U et U'). Ces équations déterminent sans ambiguïté tous les coefficients. On en tire

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} U_m &= \left(\frac{R}{R'}\right)^m X_m + Y_m = \frac{1}{\pi}\int U\cos m(\theta-\psi)\,d\psi, \\ U'_m &= X_m + \left(\frac{R}{R'}\right)^m Y_m = \frac{1}{\pi}\int U'\cos m(\theta-\psi)\,d\psi \end{aligned}\right.$$

avec

$$(13)\quad U_0 = a_0 + b_0\log R = \frac{1}{\pi}\int \tfrac{1}{2}U\,d\psi, \qquad U'_0 = a_0 + b_0\log R' = \frac{1}{\pi}\int\tfrac{1}{2}U'\,d\psi.$$

Il faut maintenant faire voir que la série (11), dont nous venons ainsi de déterminer les coefficients, est uniformément convergente, représente une fonction harmonique, et satisfait effectivement aux conditions aux limites. Considérons, à cet effet, la somme des $n+1$ premiers termes de la série U_0, U_1, ..., U_m, ..., qui devra représenter $f(R,\theta)$. D'après les formules (12), cette somme peut s'écrire

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{U}[\tfrac{1}{2}+\cos(\theta-\psi)+\cos 2(\theta-\psi)+\ldots+\cos n(\theta-\psi)]\,d\psi.$$

Or, dans les applications que nous ferons de la formule cherchée, la fonction U sera toujours la succession des valeurs que prend le long du cercle C une fonction analytique régulière de x et de y. Tous les raisonnements que l'on fait sur cette intégrale dans la théorie des séries trigonométriques seront donc immédiatement applicables. Il en résulte que la série dont le terme général est U_m est uniformément convergente sur toute la circonférence C et a pour valeur U.

De même $\sum \mathrm{U}'_m$ converge uniformément sur C' et représente U'. Donc, d'après le second théorème de Harnack, la série dont le terme général est u_m représente une fonction harmonique dans S et tend vers U ou vers U' quand le point r, θ se rapproche de C ou de C' par un chemin quelconque. La fonction $f(r, \theta)$ résout donc le problème.

On peut remarquer que, en résolvant les équations (12) par rapport à X_m et Y_m, on obtient des expressions d'où il est facile de déduire, pour le module de ces quantités, la limite supérieure que voici

$$\frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1-\left(\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}'}\right)^{2m_1}}\left[\int_0^{2\pi}(\operatorname{mod}\mathrm{U}+\operatorname{mod}\mathrm{U}')\right]d\psi,$$

toutes les fois que m sera supérieur à m_1.

On en conclut que les deux séries

$$\sum\left(\frac{r}{\mathrm{R}'}\right)^m(a_m\cos m\theta+b_m\sin m\theta),\qquad \sum\left(\frac{\mathrm{R}}{r}\right)^m(a_{-m}\cos m\theta-b_{-m}\sin m\theta)$$

sont absolument convergentes.

On peut donc changer l'ordre des termes dans $f(r, \theta)$ et l'écrire

$$f(r,\theta)=a_0+b_0\log r+\sum_1^\infty\left(\frac{r}{\mathrm{R}'}\right)^m\mathrm{X}_m+\sum_1^\infty\left(\frac{\mathrm{R}}{r}\right)^m\mathrm{Y}_m.$$

7. Revenons maintenant à l'aire S pour laquelle nous voulons résoudre le problème de Dirichlet.

Je dis d'abord que l'on peut toujours trouver des cercles C_i tout entiers intérieurs à S, formant une suite simplement infinie à indices entiers positifs

$$C_1,\quad C_2,\quad C_3,\quad \ldots,\quad C_n,\quad \ldots,$$

et tels, que tout point intérieur à S soit intérieur à au moins l'un des cercles C_i.

Pour le faire voir, considérons dans S une région R dont tous les points soient à une distance de s supérieure à δ. Soit δ' une longueur plus petite que δ, et traçons une série de parallèles aux axes de coordonnées ayant entre elles la distance constante $\frac{\delta'}{\sqrt{2}}$.

Nous formons ainsi une infinité de carrés, dont la diagonale est δ'. Nous ne retiendrons parmi eux que ceux qui sont en totalité ou en partie intérieurs à R, lesquels sont naturellement en nombre limité. Tout point de R est alors intérieur à l'un de ces n carrés, ou sur son contour. Ceux mêmes de ces carrés qui sont partiellement extérieurs à R sont encore sûrement intérieurs à S, puisque leur plus grande dimension δ' est inférieure à δ.

Soient D_1, D_2, $\ldots$, D_n les centres de ces carrés; de chacun de ces points comme centre, avec un rayon intermédiaire entre $\frac{\delta}{2}$ et $\frac{\delta'}{2}$, décrivons une circonférence. Chaque carré est alors tout entier intérieur au cercle correspondant, lequel est toujours intérieur à S. Chaque point de R est alors intérieur à l'un de ces n cercles.

Imaginons alors une série de longueurs $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ décroissant et tendant vers o. Appelons R_0 la région formée par l'ensemble des points de S dont la distance à s est supérieure à δ_1, puis, d'une manière générale, appelons R_i l'ensemble des points de S dont la distance à s est comprise entre δ_i et δ_{i+1}. (Ces régions ne seront pas nécessairement connexes, mais ceci importe peu.)

Construisons dans R_0 les cercles C_1, C_2, $\ldots$, C_{n_0} comme plus haut, puis, dans R_1, les cercles C_{n_0+1}, C_{n_0+2}, $\ldots$, C_{n_1}, $\ldots$.

Nous aurons ainsi construit les cercles demandés.

Il est clair que l'on aurait pu les construire d'une infinité de manières différentes. L'important est de voir qu'on peut leur donner pour indices la suite des nombres entiers.

8. Après avoir ainsi construit dans S la famille des cercles C_i, traçons encore une courbe fermée L qui contienne dans son intérieur la partie du plan où se trouve S. Cette courbe sera arbitraire, pourvu qu'elle soit suffisamment grande. Mettons, pour fixer les idées, que ce soit une circonférence ayant son centre dans S et un rayon supérieur au double de la plus grande dimension de S.

Appelons T la partie du plan intérieure à L.

Il pourra arriver que l'on connaisse une fonction $V_0(x, y)$ qui, à l'intérieur de T, soit holomorphe et qui, sur s, se réduise à U (U étant toujours la fonction donnée sur le contour s et qui est seulement supposée être continue). Nous allons résoudre le problème dans ce cas particulier, auquel nous ramènerons ensuite le cas général.

Supposons d'abord que ΔV_0 soit constamment négatif dans T. Si alors on pose

$$-\frac{\Delta V_0}{2\pi} = \rho,$$

ρ sera une fonction holomorphe et positive dans T.

Imaginons une masse répandue d'une manière continue sur T et dont la densité en chaque point serait justement la fonction ρ. Cette masse aura un potentiel W_0, et l'on aura, dans toute la région T,

$$\Delta W_0 = -2\pi\rho = \Delta V_0, \qquad \Delta(W_0 - V_0) = 0.$$

La différence $W_0 - V_0 = \theta$ est donc une fonction harmonique dans T, et nous est parfaitement connue, puisque nous connaissons W_0 et V_0 pour tous les points de T. En particulier, nous connaissons les valeurs $\theta(s)$ que prend θ sur le contour s qui est tout entier intérieur à T, et nous avons

$$\theta(s) = W_0(s) - U. \tag{14}$$

Les masses qui engendrent le potentiel W_0 sont toutes positives, et une partie d'entre elles est intérieure à S. Envisageons en particulier celles qui sont intérieures au cercle C_i.

Nous avons appris au n° 4 à former une couche équivalente à ces masses. Comme nous aurons à répéter souvent cette opération, il est bon de lui donner un nom spécial. Nous l'appellerons, avec M. Poincaré, le *balayage* du cercle C_i.

Nous pourrons dire alors que le balayage du cercle C_i ne change pas le potentiel en un point quelconque extérieur à C_i, mais le diminue en tout point intérieur. Cette opération n'altère pas non plus la somme totale des masses et n'introduit jamais de masses négatives.

Balayons alors successivement tous les cercles dans un ordre tel que chacun d'eux soit balayé une infinité de fois. Il suffira, pour cela, de les balayer dans l'ordre

$$1\ 2,\quad 1\ 2\ 3,\quad 1\ 2\ 3\ 4,\quad \ldots,$$

en ne tenant cependant aucun compte de ceux qui pourraient ne contenir aucune masse quand viendrait leur tour d'être balayés. Ainsi, par exemple, si, après la septième opération, le cercle C_3 ne contenait aucune masse, on prendrait à sa place le cercle C_4.

Appelons enfin W_k ce que devient le potentiel après la $k^{\text{ième}}$ opération et comparons entre elles les valeurs des différentes quantités W_k en un même point A.

Il est clair que, si A est extérieur au cercle balayé à la $k^{\text{ième}}$ opération, on aura

$$W_k = W_{k-1}.$$

Dans le cas contraire, on aura

$$W_k < W_{k-1}.$$

Donc, dans tous les cas,

$$W_k \leqq W_{k-1}.$$

W_k va donc en décroissant ou tout au moins ne va jamais en croissant quand l'indice augmente. Remarquons que, si A est extérieur à S, il est aussi extérieur à tous les cercles. A l'extérieur de S, on a donc

$$W_k = W_0.$$

Nous allons voir maintenant que, lorsque k augmente indéfiniment, W_k tend vers une limite W, déterminée en chaque point de T, et tendant vers $U(s) + \theta(s)$ quand A tend vers le point s du contour.

Pour le démontrer, construisons un cercle tangent en s au contour et tout entier extérieur à S. Construisons aussi un second cercle concentrique au premier, contenu tout entier dans T et comprenant S dans son intérieur, ce qui est possible si T a les dimensions que nous avons indiquées et si le rayon du premier cercle est assez petit.

Comme nous savons résoudre le problème de Dirichlet pour l'aire comprise entre deux cercles concentriques, nous pouvons construire une fonction ω, harmonique entre les deux cercles, et prenant sur ces cercles les mêmes valeurs que W_0. Étudions la différence $F = W_n - \omega$. Elle est nulle sur les deux cercles qui sont tous deux extérieurs à S, et où, par suite, on a $W_n = W_0$. Nous allons montrer qu'elle est positive dans toute la couronne. Il suffit, pour cela, de faire voir qu'elle n'y peut admettre de minimum.

Or, si F pouvait avoir un minimum en un point B de cette couronne et que l'on traçât autour de B comme centre un cercle assez petit, la valeur de F en tout point de ce cercle, et, par suite, sa valeur moyenne sur le cercle, serait plus grande que sa valeur en B. Calculons cette moyenne. On a

$$\mathfrak{M} F = \mathfrak{M} W_n - \mathfrak{M} \omega.$$

Mais W_n est un potentiel, ω est une fonction harmonique.

Donc, d'après les formules (5) et (2 *bis*),

$$\mathfrak{M} F = \sum m \log \frac{1}{r} + \log \frac{1}{R} \sum \mu - \omega(B).$$

D'ailleurs, au point B, on a

$$F(B) = \sum m \log \frac{1}{r} + \sum \mu \log \frac{1}{r} - \omega(B).$$

Donc

$$\mathfrak{M} F - F(B) = \log \frac{1}{R} \sum \mu - \sum \mu \log \frac{1}{r}.$$

(Je rappelle que, dans ces formules, m désigne les masses extérieures au cercle, μ les masses intérieures, r la distance d'un point au centre, R le rayon.)

Cette différence est évidemment négative, puisque, pour tout point intérieur,

$$1 < \frac{1}{R} < \frac{1}{r},$$

et cette conclusion est contradictoire avec l'hypothèse d'un minimum.

On a donc, pour tout point de S, et quel que soit n,

$$W_n > \omega.$$

Donc W_n tend vers une limite W qui est supérieure ou égale à ω, et l'on a

$$W_n > W \geqq \omega.$$

Imaginons maintenant que le point mobile A tende vers s.

W_n et ω tendent tous deux vers la valeur de W_0 au point s, W tend donc aussi vers cette valeur qui est $U(s) + \theta(s)$.

Nous constatons donc l'existence d'une fonction W, définie dans l'intérieur de S et tendant vers $U + \theta(s)$ quand A se rapproche du contour. Nous allons voir aussi qu'elle est harmonique dans S.

Envisageons un des cercles, C_α par exemple, et supposons que ce cercle soit balayé aux opérations α_1, α_2, α_3, ... Après chacune de ces opérations, le cercle C_α ne contient plus aucune masse. On a donc, à l'intérieur de ce cercle,

$$\Delta W_{\alpha_i} = 0.$$

Or les quantités

$$W_{\alpha_1}, \quad W_{\alpha_2}, \quad \ldots, \quad W_{\alpha_n}, \quad \ldots$$

sont des fonctions harmoniques, décroissantes, et ont pour limite W.

La série

$$W_{\alpha_1} + (W_{\alpha_2} - W_{\alpha_1}) + (W_{\alpha_3} - W_{\alpha_2}) + \ldots + (W_{\alpha_n} - W_{\alpha_{n-1}}) + \ldots$$

a donc tous ses termes de même signe, sauf peut-être le premier. Ils sont harmoniques dans C_α; la somme des n premiers termes est W_{α_n} qui tend vers W. La série est donc convergente et définit une fonction W harmonique dans C_α d'après le premier théorème de Harnack.

On a donc $\Delta W = 0$ dans toute l'étendue de S, puisque tout point de S est intérieur à un cercle C_α.

La fonction $W - \theta$ est harmonique dans toute l'étendue de S et tend vers U sur le contour s. C'est donc la solution du problème de Dirichlet.

On a supposé dans cette démonstration que ΔV_0 conservait dans T un signe constant. Si cela n'était pas, on pourrait toujours partager T en deux régions T_1 et T_2, la première contenant tous les points pour lesquels $-\frac{\Delta V_0}{2\pi}$ est positif, la seconde, tous ceux pour lesquels la même quantité est négative. Définissons alors des fonctions ρ_1 et ρ_2 par les conditions suivantes

$$\rho_1 = \begin{cases} \rho \text{ dans } T_1, \\ 0 \text{ dans } T_2; \end{cases} \qquad \rho_2 = \begin{cases} 0 \text{ dans } T_1, \\ -\rho \text{ dans } T_2. \end{cases}$$

Ces deux fonctions sont, dans toute l'étendue de T, continues et positives ou nulles. Et, de plus, on a

$$\rho = \rho_1 - \rho_2.$$

Considérons alors deux systèmes de masses ayant des densités ρ_1 et ρ_2. Elles engendreront deux potentiels W_0^1 et W_0^2 qui, dans toute l'étendue de T, donneront lieu aux relations

$$\frac{\Delta W_0^1}{-2\pi} = \rho_1, \qquad \frac{\Delta W_0^2}{-2\pi} = \rho_2, \qquad \frac{\Delta(W_0^1 - W_0^2)}{-2\pi} = \rho_1 - \rho_2 = \rho,$$

On a donc

$$\Delta(W_0^1 - W_0^2 - V_0) = 0.$$

$$W_0^1 - W_0^2 - V_0 = \theta,$$

θ étant encore harmonique dans T et bien connue.

Alors les raisonnements précédents s'appliquent mot pour mot aux deux fonctions W_0^1 et W_0^2 traitées isolément. Elles engendrent respectivement deux fonctions W^1 et W^2 harmoniques dans S et prenant sur le contour les mêmes valeurs que W_0^1 et W_0^2. La fonction $W^1 - W^2 - \theta$ résout donc le problème.

Nous avons supposé implicitement chacune des régions T_1 et T_2 connexe. Dans le cas contraire, on les décomposerait en plusieurs régions connexes, et l'on considérerait séparément les fonctions ρ relatives à chacune de ces régions; les mêmes raisonnements seraient, d'ailleurs, applicables.

9. Nous venons de résoudre le problème dans un cas particulier. Il est aisé d'y ramener le cas général. Voici la marche que nous allons suivre.

On peut toujours bien facilement, et cela d'une infinité de manières, construire une fonction $\psi(x, y)$, continue dans la région T et prenant sur s les valeurs données U. Nous ne faisons ici sur ψ aucune autre hypothèse que celle de la continuité.

Nous montrerons alors que l'on peut trouver une infinité de polynômes

$$F_1, \quad F_2, \quad \ldots, \quad F_n, \quad \ldots$$