SUR LES

COURBES SYNCHRONES,

PAR M. A. LEGOUX,

Professeur de Mécanique à la Faculté des Sciences de Toulouse.

On trouve dans la *Mécanique d'Euler* (t. II, p. 47) l'énoncé du problème suivant :

Soient une infinité de courbes semblables AM *prenant leur origine en un point fixe* A, *trouver une courbe* CMM *déterminant sur toutes ces courbes des arcs* AM *qui sont parcourus dans des temps égaux par un point matériel pesant descendant sur chacune d'elles et partant de* A *sans vitesse initiale* (*courbes synchrones*).

Comme application de sa méthode, Euler traite complètement le cas particulier bien connu des lignes droites émanant de l'origine; la courbe synchrone est, comme on sait, une circonférence. Il aborde ensuite les deux cas particuliers où les courbes sont des circonférences et des cycloïdes et l'équation différentielle de la courbe synchrone à laquelle il arrive est tellement compliquée qu'il paraît impossible de l'intégrer.

Nous nous proposons, dans ce qui va suivre, de traiter ce problème difficile par une méthode différente qui nous permettra de trouver les courbes synchrones dans un grand nombre de cas, et en supposant le point soumis à des forces qui satisfont à une fonction potentielle.

La méthode s'applique aux courbes tracées sur des surfaces.

Nous définirons les courbes en donnant l'expression de leurs coordonnées en fonction d'un paramètre variable.

Soient

$$(1) \qquad \begin{cases} x = f_1(u, a), \\ y = f_2(u, a) \end{cases}$$

les équations des courbes de la famille, u désignant le paramètre variable et a une constante arbitraire.

Soit φ la fonction des forces, on a l'intégrale des forces vives

$$v^2 = 2\varphi(x, y) = 2\varphi(u, a); \tag{2}$$

on supposera $\varphi = 0$ pour $x = 0$, $y = 0$.

On tire des équations des courbes (1)

$$dx = \frac{\partial f_1}{\partial u}\,du,$$

$$dy = \frac{\partial f_2}{\partial u}\,du,$$

$$ds = du\sqrt{\left(\frac{\partial f_1}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial u}\right)^2};$$

de (2), on tire

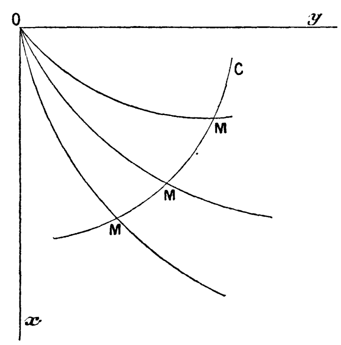
$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2\varphi}}, \qquad t = \int \frac{ds}{\sqrt{2\varphi}},$$

$$\sqrt{2}\,t = \int \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial f_1}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial u}\right)^2}}{\sqrt{\varphi}}\,du.$$

Cette intégrale devra être prise entre des limites telles qu'elle s'annule pour une valeur de u correspondant à l'origine.

Il faut que t soit le même pour tous les parcours sur les arcs AM, quelle

Fig. 1.



que soit la courbe que décrit le point matériel pour atteindre la courbe CMM (*fig.* 1). Or t est fonction de u et de a, et l'on exprime que ce temps est constant en écrivant que sa différentielle totale est nulle,

$$\frac{\partial t}{\partial u}\,du + \frac{\partial t}{\partial a}\,da = 0. \tag{4}$$

En éliminant a entre (1) et (4), on aura les équations de la courbe synchrone.

EXEMPLE I. — *La force est la pesanteur et l'axe* AX *est dirigé suivant la verticale; les lignes* AM *sont des lignes droites passant par l'origine.* (EULER.)

Soient

$$x = u^2,$$
$$y = au^2$$

les équations de ces droites

$$v = \sqrt{2gx},$$
$$ds = 2\sqrt{1+a^2}\,u\,du;$$

posons

$$t\sqrt{2g} = t_1,$$

il vient

$$t_1 = 2\sqrt{1+a^2}\int_0^u du.$$

Différentions et égalons à o la différentielle totale

$$\sqrt{1+a^2}\,du + \frac{a\,da}{\sqrt{1+a^2}}\int_0^u du = 0. \tag{4 bis}$$

Mais nous remarquerons que chaque courbe CMM correspond à une valeur particulière de t_1, que pour chacune de ces courbes on doit considérer t_1 ou $2\sqrt{1+a^2}\int du$ comme une constante et, par conséquent, on pourra remplacer $\int_0^u du$ par l'expression équivalente $\frac{t_1}{2\sqrt{1+a^2}}$, dans laquelle on traitera t_1 comme une constante. En substituant cette valeur dans l'expression précédente, on trouve

$$\frac{t_1\,a\,da}{(1+a^2)^{\frac{3}{2}}} + 2\,du = 0.$$

Intégrant, on trouve

$$\frac{t_1}{(1+a^2)^{\frac{1}{2}}} = 2u + C;$$

la constante C est nulle, car, pour $u = 0$, $t_1 = 0$. En tirant de cette équation la valeur de a et la portant dans lès deux équations des lignes droites, on a, pour la courbe synchrone,

$$x^2 = u^4,$$

$$y^2 = \frac{t_1^2}{4} u^2 - u^4,$$

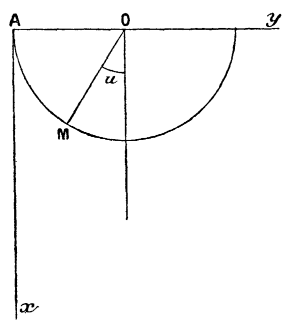
ou, en éliminant u,

$$x^2 + y^2 = \frac{t_1^2}{4} x;$$

c'est un résultat bien connu et si nous avons donné un tel développement à la solution de cet exemple très simple, c'est pour indiquer l'esprit de la méthode qui va nous permettre de résoudre des problèmes beaucoup plus compliqués (¹).

Exemple II. — *La force est la pesanteur et les courbes* AM (Euler)

Fig. 2.



(*fig.* 2) *sont des cercles dont l'équation est*

$$x^2 + y^2 - 2ay = 0.$$

Prenons, pour paramètre variable, l'angle u que fait le rayon du cercle

(¹) Dans ce cas simple, on aurait pu intégrer immédiatement l'équation (4 *bis*) qui aurait donné $a^2 = \frac{C}{u^2} - 1$, et, en remplaçant dans les équations (1), on aurait trouvé

$$y^2 + x^2 = Cx.$$

avec la verticale, les équations de ces cercles sont

$$(1) \qquad \begin{cases} x = a\cos u, \\ y = a(1 - \sin u); \end{cases}$$

on a

$$s = a\left(\frac{\pi}{2} - u\right).$$

On trouve immédiatement

$$t\sqrt{2g} = t_1 = \sqrt{a}\int_u^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{\cos u}}.$$

L'équation différentielle totale sera, en remarquant que $\int \frac{du}{\sqrt{\cos u}} = \frac{t_1}{\sqrt{a}}$,

$$\frac{t_1 a^{-\frac{3}{2}}\,da}{2} = \frac{du}{\sqrt{\cos u}} = \frac{du}{\sqrt{1 - 2\sin^2\frac{u}{2}}},$$

d'où, en intégrant,

$$t_1 a^{-\frac{1}{2}} = -\int \frac{du}{\sqrt{\cos u}} = F(u),$$

d'où

$$a = \frac{t_1^2}{F^2(u)}.$$

Par conséquent, les équations de la courbe synchrone sont

$$x = \frac{t_1^2 \cos u}{F^2(u)},$$

$$y = \frac{t_1^2(1 - \sin u)}{F^2(u)}.$$

On voit que les coordonnées d'un point de la courbe synchrone s'expriment au moyen d'une intégrale elliptique.

On remarquera qu'il entre dans ces équations un paramètre arbitraire t_1, de sorte que nous avons une famille de courbes synchrones correspondant à la famille de cercles.

Exemple III. — *La force est encore la pesanteur et les courbes sont des cycloïdes.* (Euler.)

Soient

$$x = a(1 - \cos u),$$

$$y = a(u - \sin u)$$

les équations des cycloïdes, le paramètre arbitraire a désignant le diamètre du cercle générateur.

On a

$$ds = 2a \sin \frac{u}{2} du,$$

$$t\sqrt{2g} = t_1 = \int \frac{ds}{\sqrt{x}} = \sqrt{2}\sqrt{a} \int du.$$

L'équation

$$\frac{\partial t_1}{\partial u} du + \frac{\partial t_1}{\partial a} da = 0 \quad (^1)$$

prend la forme, toutes réductions faites, après avoir remplacé $\sqrt{2a}\int du$ par t_1,

$$du + \frac{t_1}{2\sqrt{2}} a^{\frac{3}{2}} da = 0.$$

Intégrons et remarquons que la constante est nulle, car pour $u = 0$ on a $t_1 = 0$, on a

$$u = \frac{t_1}{\sqrt{2a}},$$

d'où l'on tire

$$a = \frac{t_1^2}{2u^2},$$

et, remplaçant a par cette valeur dans les équations de la cycloïde, on a pour la courbe synchrone

$$x = \frac{t_1^2}{2} \frac{1 - \cos u}{u^2},$$

$$y = \frac{t_1^2}{2} \frac{u - \sin u}{u^2}.$$

On voit aisément que les courbes synchrones forment un système orthogonal au système des cycloïdes.

Ces trois exemples sont les seuls qui ont été traités par Euler (*loc. cit.*).

---

(1) Dans ce cas particulier, l'équation différentielle totale $\frac{du}{u} + \frac{da}{2a} = 0$ s'intègre immédiatement et donne $a = \frac{C}{u^2}$, C désignant une constante.

Cas des forces centrales.

Supposons que les courbes soient des cercles représentés par les équations

$$x = a\cos u,$$
$$y = a(1 - \sin u) \qquad (\textit{voir}\text{ plus haut});$$

si l'on désigne par r le rayon vecteur partant de l'origine, on a

$$r = \sqrt{2}\,a(1 - \sin u)^{\frac{1}{2}}.$$

On a aussi

$$ds = -\,a\,du.$$

Supposons que la force centrale R soit proportionnelle à la distance et posons

$$R = k^2 r,$$
$$v^2 = 2\int R\,dr = k^2 r^2,$$

d'où

$$dt = \frac{ds}{v} = -\,\frac{a\,du}{kr},$$
$$t = -\,\frac{a}{k}\int_{\frac{\pi}{2}}^{u}\frac{du}{\sqrt{2}\,a(1 - \sin u)^{\frac{1}{2}}} = -\,\frac{1}{k\sqrt{2}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{u}\frac{du}{\sqrt{1 - \sin u}}.$$

La durée du parcours du point matériel depuis l'origine jusqu'à un point M correspondant à une valeur donnée de u étant indépendante de a, la courbe synchrone, dans ce cas particulier, est une droite passant par l'origine; cette droite coupe tous les cercles sous le même angle. On obtient son équation en regardant u comme constant dans les équations des cercles et en éliminant a. On trouve

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right).$$

Autre exemple. — Soit $R = k^2 r^m$,

$$v^2 = 2\int R\,dr = \frac{2k^2 r^{m+1}}{m+1}.$$

on trouve aisément, en considérant la même famille de cercles,

$$t = -a\int_{\frac{\pi}{2}}^{u}\frac{du}{\dfrac{k\sqrt{2}}{\sqrt{m+1}}\,r^{\frac{m+1}{2}}} = -\frac{\sqrt{m+1}}{k\,2^{\frac{m+2}{2}}}\,a^{\frac{1-m}{2}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{u}\frac{du}{(1-\sin u)^{\frac{m+1}{4}}}.$$

En posant $m = 1$, on trouve que t est indépendant de a : c'est le cas particulier traité précédemment.

On peut écrire l'expression de t sous la forme suivante, en désignant par A une constante,

$$t = \mathrm{A}\,a^{\frac{1-m}{2}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{u}\frac{du}{(1-\sin u)^{\frac{m+1}{4}}}.$$

On forme facilement les expressions de $\dfrac{\partial t}{\partial u}$ et de $\dfrac{\partial t}{\partial a}$, et, en les substituant dans l'équation

$$\frac{\partial t}{\partial u}du + \frac{\partial t}{\partial a}da = 0,$$

on a

$$\frac{a^{\frac{1-m}{2}}\,du}{(1-\sin u)^{\frac{m+1}{4}}} + \frac{1-m}{2}\,a^{-\frac{1+m}{2}}\,da\int_{\frac{\pi}{2}}^{u}\frac{du}{(1-\sin u)^{\frac{m+1}{4}}} = 0.$$

Or, pour chacune des courbes synchrones, la valeur de t doit être considérée comme constante et l'on pourra remplacer dans l'équation précédente

$$\int\frac{du}{(1-\sin u)^{\frac{m+1}{4}}}$$

par

$$\frac{t}{\mathrm{A}}\,a^{\frac{m-1}{2}},$$

et l'on obtient, toutes réductions effectuées,

$$\frac{\mathrm{A}\,du}{(1-\sin u)^{\frac{m+1}{4}}} + \frac{1-m}{2}\,t\,a^{\frac{m-3}{2}}\,da = 0.$$

Intégrons, on aura, en résolvant par rapport à a,

$$a^{\frac{m-1}{2}} = \frac{\mathrm{A}}{t}\int_{\frac{\pi}{2}}^{u}\frac{du}{(1-\sin u)^{\frac{m+1}{4}}}.$$

Cas particulier : $m = -1$. — On a

$$a = \frac{t}{A\left(u - \frac{\pi}{2}\right)},$$

et les équations des courbes synchrones sont

$$x = \frac{t}{A\left(u - \frac{\pi}{2}\right)} \cos u,$$
$$y = \frac{t}{A\left(u - \frac{\pi}{2}\right)} (1 - \sin u).$$

Formule générale.

Nous allons maintenant donner une formule générale qui comprend, outre les cas précédents, un grand nombre de cas nouveaux.

Si le paramètre a, qui entre dans l'équation des courbes semblables, représente une longueur, l'équation des courbes sera homogène entre x, y, a. On pourra toujours, et cela d'une infinité de manières, écrire sous la forme suivante les deux équations de la courbe

$$(1) \qquad \begin{cases} x = a f_1(u), \\ y = a f_2(u), \end{cases}$$

u étant un paramètre variable, f_1 et f_2 étant des fonctions données de ce paramètre. Supposons que la fonction des forces soit aussi une fonction homogène des coordonnées, on pourra écrire

$$(2) \qquad \varphi(x, y) = x^m \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = a^m f_1^m \varphi\left(\frac{f_2}{f_1}\right).$$

Comme on peut appliquer le principe des forces vives,

$$v^2 = 2\varphi,$$
$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2}\sqrt{\varphi},$$
$$\sqrt{2}\, dt = \frac{ds}{\sqrt{\varphi}},$$
$$t_1 = t\sqrt{2} = a^{\frac{2-m}{2}} \int \frac{(f_1'^2 + f_2'^2)^{\frac{1}{2}} du}{f_1^{\frac{m}{2}} \left[\varphi\left(\frac{f_2}{f_1}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

l'intégrale devant être prise entre des limites telles que le temps t soit nul à l'origine.

Posons

$$\int \frac{(f_1'^2 + f_2'^2)^{\frac{1}{2}} du}{f_1^{\frac{m}{2}} \left[\varphi\left(\frac{f_2}{f_1}\right)\right]} = \psi(u).$$

On aura

$$(3) \qquad t_1 = a^{\frac{2-m}{2}} \psi(u).$$

On tire de là

$$\frac{\partial t_1}{\partial a} = \frac{2-m}{2} a^{-\frac{m}{2}} \psi(u), \qquad \frac{\partial t_1}{\partial u} = a^{\frac{2-m}{2}} \psi'(u);$$

remplaçons dans l'équation différentielle totale

$$\frac{\partial t_1}{\partial u} du + \frac{\partial t_1}{\partial a} da = 0,$$

il vient

$$(4) \qquad a^{1-\frac{m}{2}} \psi'(u)\, du + \left(1 - \frac{m}{2}\right) a^{-\frac{m}{2}} \psi(u)\, da = 0.$$

Les équations de la courbe synchrone résultent de l'élimination de a entre (1) et (4). Si nous remarquons que la durée du parcours du point matériel sur l'arc de courbe compris entre l'origine et la courbe synchrone est constant, on aura, d'après (3),

$$\psi(u) = a^{\frac{m-2}{2}} t_1,$$

formule dans laquelle t_1 ou $t\sqrt{2}$ doit être considéré comme une constante. Remplaçons $\psi(u)$ par cette valeur dans l'équation précédente, elle deviendra

$$a^{1-\frac{m}{2}} \psi'(u)\, du + \left(1 - \frac{m}{2}\right) t_1 a^{-1}\, da = 0$$

ou

$$\psi'(u)\, du + \left(1 - \frac{m}{2}\right) t_1 a^{\frac{m}{2}-2}\, da = 0.$$

Intégrons, on aura

$$\psi(u) = t_1 a^{\frac{m}{2}-1},$$

d'où

$$a = \left[\frac{\psi(u)}{t_1}\right]^{\frac{2}{m-2}};$$

remplaçons a par cette valeur dans les équations (1), on aura pour la courbe synchrone correspondant à cette valeur de t_1

$$(5)\qquad \begin{cases} x = \left[\dfrac{\psi(u)}{t_1}\right]^{\frac{2}{m-2}} f_1(u), \\ y = \left[\dfrac{\psi(u)}{t_1}\right]^{\frac{2}{m-2}} f_2(u). \end{cases}$$

On arriverait au même résultat en observant que l'équation (4) peut se mettre sous la forme suivante

$$\frac{\psi'(u)\,du}{\psi(u)} = \frac{m-2}{2}\frac{da}{a},$$

d'où, en intégrant et désignant par C une constante arbitraire,

$$a^{\frac{m-2}{2}} = \mathrm{C}\psi(u),$$

et

$$a = [\mathrm{C}\psi(u)]^{\frac{2}{m-2}}.$$

On voit que la constante C est l'inverse de la constante t_1.

Les équations (5) définissent une famille de courbes synchrones correspondant aux trajectoires du point matériel.

Courbes synchrones sur les surfaces.

La méthode précédente permet de trouver les courbes synchrones sur les surfaces. Nous supposerons que chaque point de la surface est défini par l'intersection de deux courbes appartenant à des systèmes orthogonaux définis par deux paramètres r et ψ et que l'élément linéaire est représenté par la formule

$$(1)\qquad ds^2 = f^2\,dr^2 + g^2\,d\psi^2,$$

f et g étant des fonctions données de ψ et r; soit

$$(2)\qquad \mathrm{F}(r, \psi, a) = 0$$

l'équation d'une famille de courbes tracées sur la surface en question, a représentant une constante arbitraire. Supposons que les courbes précédentes partent toutes d'un même point de cette surface et qu'elles soient les trajectoires d'un point matériel soumis à des forces telles qu'il existe une fonction potentielle φ. On aura

$$v^2 = \varphi,$$

φ étant une fonction donnée de r et ψ. On tirera de là

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\varphi},$$
$$t = \int \frac{ds}{\sqrt{\varphi}}.$$

Mais, si l'on différentie l'équation (2), on a

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial r}\,dr + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \psi}\,d\psi = 0,$$

d'où

$$d\psi = -\frac{\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial r}}{\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial \psi}}\,dr;$$

remplaçons dans l'expression (1) de ds, on aura, en tenant compte de (2)

$$ds = \chi(r)\,dr,$$

φ pourra aussi être considéré comme une fonction de r seulement, en vertu de l'équation (2), et l'on pourra écrire

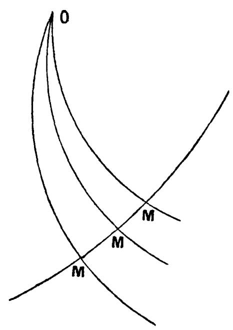
$$(3) \qquad t = \int \mathrm{F}(r, a)\,dr.$$

En raisonnant comme dans le cas des courbes planes, on verrait que l'équation des courbes synchrones correspondant aux courbes du système (2) et à cette loi particulière de la force sera donnée par l'élimination de la constante arbitraire a entre l'équation (2) et l'équation différentielle totale

$$(4) \qquad \frac{\partial t}{\partial r}\,dr + \frac{\partial t}{\partial a}\,da = 0.$$

Application. — *Soit à trouver les courbes synchrones correspondant à une famille de courbes géodésiques tracées sur une surface de révo-*

Fig. 3.



lutiou à partir d'un point donné, parcourues par un point matériel soumis à l'action d'une force donnée (*fig.* 3).

Soit

$$(1) \qquad ds^2 = du^2 + r^2\, d\psi^2$$

l'expression de l'élément linéaire, r désignant le rayon du parallèle, ψ l'angle formé par un méridien quelconque avec un méridien pris pour origine, u la longueur de l'arc du méridien, u étant lié à r par la relation

$$u = f(r),$$

qui définit la courbe méridienne.

On peut mettre sous la forme suivante l'équation des courbes géodésiques

$$(2) \qquad d\psi = \frac{a\,du}{r\sqrt{r^2 - a^2}} = \frac{a f'(r)\,dr}{r\sqrt{r^2 - a^2}},$$

a désignant une constante arbitraire (*voir* Darboux, *Théorie des surfaces*).

Si l'on appelle i l'angle formé par une de ces courbes avec le méridien on a

$$\operatorname{tang} i = \frac{r\,d\psi}{du} = \frac{a}{\sqrt{r^2 - a^2}},$$

et l'on voit que a représente le rayon d'un parallèle auquel les géodésiques sont tangentes.

Considérons toutes les géodésiques passant par un point donné sur la surface et que l'on obtient en faisant varier la constante a; regardons-les comme les trajectoires d'un point matériel soumis à des forces données telles qu'il existe une fonction potentielle φ.

On trouve aisément pour l'expression de l'élément linéaire d'une ligne géodésique tracée sur une surface de révolution

$$ds = \frac{r\,du}{\sqrt{r^2 - a^2}};$$

de $v^2 = \varphi$, on tire

$$(3) \qquad t = \int \frac{ds}{\sqrt{\varphi}} = \int \frac{r\,du}{\sqrt{\varphi}\sqrt{r^2 - a^2}}.$$

Dans le second membre u est une fonction donnée de r, et φ qui, en général, dépend de r et de ψ peut aussi être considéré comme une fonction de r en tenant compte de l'équation (2). Si l'on suppose effectuée l'intégration dans le second membre, l'équation (3) donnera l'expression de t au moyen de r et de a. On écrira l'équation

$$(4) \qquad \frac{\partial t}{\partial r}\,dr + \frac{\partial t}{\partial a}\,da = 0,$$

et les courbes synchrones seront définies par une équation résultant de l'élimination de a entre (2) et (4).

Application. — Considérons le cas particulier suivant

$$(1) \qquad r^2 - u^2 = h^2, \qquad \varphi = \frac{A^2 r^m}{r^2 - h^2} \;\text{(1)}, \qquad h \text{ et } A \text{ const.};$$

la surface en question est l'alysséide de Bour.

L'équation différentielle des géodésiques est

$$(2) \qquad d\psi = \frac{a\,dr}{\sqrt{(r^2 - a^2)(r^2 - h^2)}};$$

la longueur de l'arc s'exprime ainsi

$$ds = \frac{r^2\,dr}{\sqrt{(r^2 - a^2)(r^2 - h^2)}}.$$

On a

$$(3) \qquad v^2 = \varphi,$$

$$(4) \qquad t = \int_{r_0}^{r} \frac{r^2\,dr}{\sqrt{\varphi}\sqrt{(r^2 - a^2)(r^2 - h^2)}} = \frac{1}{A}\int_{r_0}^{r} \frac{r^{2-m}\,dr}{\sqrt{r^2 - a^2}}.$$

---

(1) On suppose que la fonction des forces φ dépend du rayon du parallèle et de la longueur de l'arc du méridien compris entre ce parallèle et le sommet de la surface.

Il faut éliminer a entre l'équation (2) et

$$\frac{\partial t}{\partial r}\,dr + \frac{\partial t}{\partial a}\,da = 0. \tag{5}$$

Ceci posé, introduisons une variable auxiliaire comme nous avons fait pour le mouvement dans un plan; posons

$$r = \frac{a}{2}\,(e^{\theta} + e^{-\theta}), \tag{2 bis}$$

remplaçons r par sa valeur dans l'équation (2), on aura

$$d\psi = \frac{2\,a\,d\theta}{\sqrt{a^2(e^{\theta}+e^{-\theta})^2 - 4h^2}}; \tag{2 bis}$$

sous cette forme on a r et ψ exprimés en fonction de θ pour représenter les géodésiques de l'alysséide.

On trouve pour l'expression du temps

$$t = \mathrm{B}\,a^{1-m}\int_{\theta_0}^{\theta}(e^{\theta}+e^{-\theta})^{2-m}\,d\theta, \tag{4 bis}$$

θ et θ_0 correspondant aux valeurs r et r_0.

L'équation (5) sera remplacée par

$$\frac{\partial t}{\partial \theta}\,d\theta + \frac{\partial t}{\partial a}\,da = 0, \tag{5 bis}$$

ou, en remarquant que

$$\frac{\partial t}{\partial \theta} = \mathrm{B}\,a^{1-m}(e^{\theta}+e^{-\theta})^{2-m}, \qquad \frac{\partial t}{\partial a} = \mathrm{B}(1-m)\,a^{-m}\int(e^{\theta}+e^{-\theta})^{2-m}\,d\theta,$$

$$a^{1-m}(e^{\theta}+e^{-\theta})^{2-m}\,d\theta + (1-m)\,a^{-m}da\int_{\theta_0}^{\theta}(e^{\theta}+e^{-\theta})^{2-m}\,d\theta = 0.$$

Mais on tire de (4 *bis*)

$$\int_{\theta_0}^{\theta}(e^{\theta}+e^{-\theta})^{2-m}\,d\theta = \frac{t}{\mathrm{B}}\,a^{m-1},$$

t devant être regardé comme une constante; substituant, on a

$$(e^{\theta}+e^{-\theta})^{2-m}\,d\theta = \frac{(m-1)\,t}{\mathrm{B}}\,a^{m-2}\,da. \tag{5 ter}$$

On peut intégrer et l'on a

$$\int_{\theta_0}^{\theta}(e^{\theta}+e^{-\theta})^{2-m}\,d\theta = \frac{t}{\mathrm{B}}\,a^{m-1} = \chi(\theta),$$

d'où

$$a = \left[\frac{B\chi(\theta)}{t}\right]^{\frac{1}{m-1}}.$$

Portons cette valeur de a dans les équations (2 *bis*), nous aurons les équations des courbes synchrones. Ces équations contenant une constante t, on aura une famille de courbes synchrones correspondant aux géodésiques passant par un point donné.

Cas particuliers. — 1° $m = 1$. Ce cas n'est pas compris dans les formules générales. L'équation (4 *bis*) montre que t est indépendant de a : il ne dépend que du paramètre θ. Or le temps que met le mobile pour atteindre la courbe synchrone en partant de l'origine est constant quelle que soit la trajectoire parcourue, et, t étant une fonction de θ seulement, il en résulte que θ est constant.

Donc la courbe synchrone dans ce cas particulier sera définie par les équations (2 *bis*) dans lesquelles on considérera θ comme une constante et a comme un paramètre. On aura l'équation entre r et ψ en éliminant a entre les deux équations

$$\psi = 2a\int\frac{d\theta}{\sqrt{a^2(e^\theta + e^{-\theta})^2 - 4h^2}} = \psi(\theta, a),$$

$$r = \frac{a}{2}(e^\theta + e^{-\theta}).$$

On a traité précédemment un cas particulier analogue à celui-ci.

2° $m = 2$, on a

$$a = \frac{B}{t}(\theta - \theta_0);$$

la substitution de cette valeur de a dans (2 *bis*) donne

$$r = \frac{B}{2t}(\theta - \theta_0)(e^\theta + e^{-\theta}),$$

$$d\psi = \frac{2B(\theta - \theta_0)\,d\theta}{t\sqrt{\frac{B^2}{t^2}(\theta - \theta_0)^2(e^\theta + e^{-\theta})^2 - 4h^2}}.$$

Il est intéressant de remarquer que les formules précédentes ne dépendent que de la forme de l'élément linéaire de la surface de révolution. Donc elles s'appliquent à des trajectoires tracées sur toutes les surfaces applicables sur les surfaces de révolution.