SUR LES RACINES

DE LA

FONCTION SPHÉRIQUE DE SECONDE ESPÈCE.

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. LERCH

PAR M. HERMITE.

Soit $X_n = F(x)$ le polynôme de Legendre du degré n, et $R(x)$ la partie entière du produit

$$F(x)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \cdots\right),$$

je poserai, sous la condition que le module de la variable soit supérieur à l'unité,

$$Q^n(x) = \frac{1}{2} F(x) \log \frac{x+1}{x-1} - R(x),$$

et, dans le cas contraire,

$$Q^n(x) = \frac{1}{2} F(x) \log \frac{1+x}{1-x} - R(x).$$

Ces expressions vérifient l'équation différentielle

$$(x^2-1)\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} = n(n+1)y,$$

et représentent dans tout le plan, sauf sur la circonférence de rayon égal à l'unité et dont le centre est à l'origine, ce que Heine nomme la *fonction sphérique de seconde espèce*. L'Ouvrage classique de l'illustre géomètre en expose les propriétés fondamentales qui sont d'une grande importance, mais il n'aborde pas l'étude de l'équation $Q^n(x) = 0$, la recherche de ses racines réelles ou imaginaires. J'ai essayé de traiter la question en employant le théorème de Cauchy dont je rappelle l'énoncé.

Soit $f(z) = 0$ une équation ayant pour premier membre une fonction holomorphe quelconque; si l'on pose

$$f(x+iy) = \mathrm{P} + i\mathrm{Q},$$

l'excès du nombre de fois que le rapport $\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{P}}$ passe du positif au négatif, sur le nombre de fois qu'il passe du négatif au positif en devenant infini, lorsque la variable $z = x + iy$ décrit dans le sens direct un contour fermé, est égal au double du nombre des racines contenues à l'intérieur de ce contour.

La fonction $\mathrm{Q}^n(x)$ que nous avons à considérer n'est pas holomorphe, mais elle le devient par un changement de variable, et lorsqu'il s'agit de la première de ses deux expressions, à savoir

$$\mathrm{Q}^n(x) = \frac{1}{2}\mathrm{F}(x)\log\frac{x+1}{x-1} - \mathrm{R}(x);$$

je ferai

$$\frac{x+1}{x-1} = c^z,$$

d'où

$$x = \frac{e^z+1}{e^z-1}.$$

En posant alors, pour abréger,

$$\Phi(e^z) = \frac{1}{2}(e^z-1)^n\,\mathrm{F}\left(\frac{e^z+1}{e^z-1}\right), \qquad \Pi(e^z) = (e^z-1)^n\,\mathrm{R}\left(\frac{e^z+1}{e^z-1}\right),$$

j'aurai deux fonctions entières du degré n en e^z, et par conséquent, sous la forme voulue, l'équation

$$z\Phi(e^z) - \Pi(e^z) = 0,$$

Une première remarque permettra de chercher seulement les racines qui sont dans le demi-plan au-dessus de l'axe des abscisses. Soit, en effet,

$$f(z) = z\Phi(e^z) - \Pi(e^z),$$

les égalités

$$\mathrm{F}(-x) = (-1)^n\,\mathrm{F}(x), \qquad \mathrm{R}(-x) = (-1)^{n-1}\,\mathrm{R}(x)$$

donnent immédiatement

$$f(-z) = -\frac{f(z)}{e^{nz}},$$

et l'on voit que les racines étant deux à deux égales et de signes contraires sont placées symétriquement par rapport à l'origine. Ce point établi, je ferai usage, pour mon objet, de contours qui seront des rectangles ayant leurs côtés parallèles aux axes coordonnés. Les côtés parallèles à l'axe des abscisses seront représentés par les équations

$$z = ki\pi + t, \qquad z = (k+1)i\pi + t,$$

où k est entier, en faisant croître t de $-a+a$; les autres seront

$$z = ki\pi + a + it, \qquad z = ki\pi - a + it,$$

t variant alors de zéro à π.

J'ai maintenant à obtenir, dans ces divers cas, le premier membre de l'équation sous la forme $P + iQ$, puis à calculer pour chacun d'eux ce que Cauchy nomme l'indice de $\frac{Q}{P}$. Supposons d'abord que k soit pair, on aura

$$f(ki\pi + t) = (ki\pi + t)\,\Phi(e^t) - \Pi(e^t)$$

et, par conséquent,

$$P = t\Phi(e^t) - \Pi(e^t), \qquad Q = k\pi\Phi(e^t),$$

en observant que les coefficients des fonctions $\Phi(e^t)$ et $\Pi(e^t)$ sont réels. Pour obtenir ensuite l'indice de $\frac{Q}{P}$ entre les limites $t = -a, t = +a$, j'aurai recours à la relation

$$\operatorname{Ind}\frac{Q}{P} + \operatorname{Ind}\frac{P}{Q} = \varepsilon,$$

où ε se déterminera par la règle de Cauchy. Je remarque à cet effet que, si nous attribuons à t une valeur considérable, l'expression

$$\frac{P}{Q} = \frac{1}{k\pi}\left[t - \frac{\Pi(e^t)}{\Phi(e^t)}\right]$$

se réduit sensiblement à $\frac{t}{k\pi}$, le second terme étant fini, puisque l'exponentielle entre au même degré dans le numérateur et le dénominateur de la fraction. En supposant la quantité a très grande, nous aurons donc aux limites pour $t = -a$, $t = +a$, les signes $-$ et $+$, par conséquent $\varepsilon = -1$.

Ce résultat obtenu, écrivons successivement

$$\operatorname{Ind}\frac{P}{Q} = \operatorname{Ind}\left[t - \frac{\Pi(e^t)}{\Phi(e^t)}\right] = \operatorname{Ind}\left[-\frac{\Pi(e^t)}{\Phi(e^t)}\right] = -\operatorname{Ind}\frac{\Pi(e^t)}{\Phi(e^t)},$$

puis revenons à la variable

$$x = \frac{e^t+1}{e^t-1},$$

ce qui donne

$$\frac{\Pi(e^t)}{\Phi(e^t)} = \frac{2R(x)}{F(x)}.$$

On remarquera que la quantité x reste toujours en dehors des limites -1 et $+1$, de sorte que $F(x)$ ne peut s'annuler, ni la fraction devenir infinie. L'indice est donc nul et il en résulte qu'entre les limites considérées $t = -a$, $t = +a$, on a

$$\operatorname{Ind}\frac{Q}{P} = -1.$$

Passons maintenant au cas où l'entier k est impair, et soit alors

$$f(ki\pi + t) = P_1 + iQ_1,$$

en posant

$$P_1 = t\Phi(-e^t) - \Pi(-e^t), \qquad Q_1 = k\pi\Phi(-e^t).$$

On trouvera, comme tout à l'heure, $\varepsilon = -1$ et il faudra obtenir l'indice de l'expression

$$\frac{\Pi(-e^t)}{\Phi(-e^t)}$$

que la substitution suivante

$$\xi = \frac{e^t-1}{e^t+1}$$

ramène à $\frac{2R(\xi)}{F(\xi)}$. Mais cette variable ξ parcourt maintenant l'intervalle compris entre -1 et $+1$, lorsque t croît de $-\infty$ à $+\infty$: il y a donc n passages par l'infini qui correspondent aux diverses racines $a, b, \ldots, l$ du polynôme de Legendre. Cela étant, l'égalité

$$\frac{R(\xi)}{F(\xi)} = \frac{1}{(1-a^2)F'^2(a)(\xi-a)} + \frac{1}{(1-b^2)F'^2(b)(\xi-b)} + \cdots + \frac{1}{(1-l^2)F'^2(l)(\xi-l)}$$

fait voir que ces passages ont lieu du négatif au positif; on a donc

$$\operatorname{Ind}\frac{\Pi(-e^t)}{\Phi(-e^t)} = -n,$$

et nous en concluons cette seconde relation

$$\operatorname{Ind}\frac{Q_1}{P_1} = -n-1.$$

Les côtés du rectangle qui nous restent à considérer conduisent aux expressions

$$f(ki\pi + a + it) = (ki\pi + a + it)\,\Phi[(-1)^k e^{a+it}] - \Pi[(-1)^k e^{a-it}],$$

et

$$f(ki\pi - a + it) = (ki\pi - a + it)\,\Phi[(-1)^k e^{-a+it}] - \Pi[(-1)^k e^{-a+it}],$$

qui prennent pour de grandes valeurs de la constante a une forme extrêmement simple.

Soit d'abord, en développant suivant les puissances descendantes de l'exponentielle,

$$\Phi(e^t) = \alpha e^{nt} + \ldots;$$

la première se réduit au seul terme

$$\alpha(-1)^{nk} e^{na}(\cos nt + i \sin nt),$$

et le rapport $\frac{Q}{P}$ à la quantité $\frac{\sin nt}{\cos nt}$ qui devient infinie n fois en passant du positif au négatif lorsque t croît de zéro à π. Pour obtenir la seconde, on emploiera les développements de $\Pi(e^t)$ et de $\Phi(e^t)$ suivant les puissances ascendantes de e^t. En négligeant l'exponentielle e^{-a+it}, la partie réelle P est une constante, de sorte que l'indice relatif au quatrième côté du rectangle est nul.

Les résultats que nous venons d'établir donnent immédiatement l'indice relatif au contour total du rectangle; en observant que l'indice du côté parallèle à la base doit être changé de signe afin d'avoir égard au sens dans lequel il est parcouru, on obtient les conclusions suivantes :

1° Lorsque l'entier k auquel correspond la base est un nombre pair $2l$, la somme des indices -1, n, $n+1$ est égale à $2n$; l'équation $Q^n(x) = 0$

a donc n racines comprises entre les deux parallèles $y = 2l\pi, y = (2l+1)\pi$.

2° Mais si la base correspond à un entier impair $k = 2l + 1$, les indices étant $-n$, -1, n, 1, leur somme est nulle, et il n'existe aucune racine entre les droites $y = (2l+1)\pi$ et $y = (2l+2)\pi$.

L'analyse précédente doit être légèrement modifiée lorsqu'il s'agit de la portion du plan limitée par l'axe des abscisses et la droite $y = \pi$; le long de l'axe, en effet, la fonction $f(x)$ est réelle et n'a pas la forme $P + iQ$. Nous considérerons une parallèle infiniment voisine représentée par l'équation $z = t + i\delta$, en supposant que δ soit infiniment petit et positif. Ayant ainsi

$$f(z) = f(t) + i\delta f'(t),$$

l'indice de $\frac{Q}{P}$ sera celui de la quantité $\frac{f'(t)}{f(t)}$, qui est égal à $-\mu$, si l'on désigne par μ le nombre des racines réelles de l'équation $f(t) = 0$. L'indice du contour du rectangle est donc

$$-\mu + n + n + 1$$

et sera connu lorsque nous aurons obtenu le nombre μ. J'emploierai dans ce but cette expression de $Q^n(x)$, la première qui se soit offerte, à savoir

$$Q^n(x) = \frac{1}{2} F(x) \int_x^\infty \frac{dx}{(x^2-1) F^2(x)}.$$

Elle montre que cette fonction reste toujours de même signe et positive, lorsque la variable est en valeur absolue supérieure à l'unité. On voit aussi que $Q^n(x)$ s'évanouit pour x infini, le développement de l'intégrale suivant les puissances descendantes de la variable commençant par un terme en $\frac{1}{x^{n+1}}$. Par conséquent, à l'égard de t qui est lié à x par la relation

$$x = \frac{e^t+1}{e^t-1},$$

on n'a que la racine $t = 0$ avec l'ordre de multiplicité $n + 1$. Mais l'indice de $\frac{f'(t)}{f(t)}$ représente le nombre des racines réelles qui sont distinctes, sans avoir égard à l'ordre de multiplicité; le nombre μ est donc égal à l'unité, et il est établi que la portion du plan que nous venons de considérer contient n racines comme toutes celles qui sont comprises entre les droites $y = 2l\pi, y = (2l+1)\pi$.

Une dernière remarque nous reste à faire.

L'équation qui vient de nous occuper a ses racines imaginaires conjuguées puisqu'elle est à coefficients réels, et ces racines sont deux à deux égales et de signes contraires. Elles se trouvent donc en nombre pair et représentées par les quantités $g + ih$, $-g + ih$, dans la région où nous venons de démontrer que leur nombre est n, à moins que l'on n'ait $g = 0$. De là résulte, lorsque n est impair, l'existence d'un nombre impair de racines telles que $z = ih$, où la quantité h est comprise entre les limites $2l\pi$ et $(2l+1)\pi$. C'est ce qu'il s'agit de reconnaître.

J'observe, dans ce but, qu'en posant $z = i\zeta$ dans l'expression

$$x = \frac{e^z+1}{e^z-1},$$

on en tire

$$x = \frac{1}{i}\cot\frac{\zeta}{2}.$$

La transformée en ζ de l'équation $f(z) = 0$ est donc

$$\frac{i\zeta}{2}\mathrm{F}\left(\frac{1}{i}\cot\frac{\zeta}{2}\right) - \mathrm{R}\left(\frac{1}{i}\cot\frac{\zeta}{2}\right) = 0,$$

et, si l'on écrit pour un moment

$$\tfrac{1}{2}\mathrm{F}(x) = \alpha x^n + \beta x^{n-2} + \ldots + \omega x, \qquad \mathrm{R}(x) = a x^{n-1} + b x^{n-3} + \ldots + p,$$

on l'obtient ainsi sous forme entière

$$\begin{aligned} &i\zeta\left[\alpha\left(\frac{1}{i}\cos\frac{\zeta}{2}\right)^n + \beta\sin^2\frac{\zeta}{2}\left(\frac{1}{i}\cos\frac{\zeta}{2}\right)^{n-2} + \ldots\right] \\ &\qquad - \sin\frac{\zeta}{2}\left[a\left(\frac{1}{i}\cos\frac{\zeta}{2}\right)^{n-1} + b\sin^2\frac{\zeta}{2}\left(\frac{1}{i}\cos\frac{\zeta}{2}\right)^{n-3} + \ldots + p\sin^{n-1}\frac{\zeta}{2}\right] = 0. \end{aligned}$$

Faisons maintenant dans le premier membre les substitutions $\zeta = 2l\pi$, $\zeta = (2l+1)\pi$; en se servant de la condition que n est impair, les résultats seront

$$2l\pi\alpha(-1)^{\frac{n-1}{2}+ln}, \qquad -p(-1)^{ln},$$

et il faut établir qu'ils sont de signes contraires. Remarquant, à cet effet, que p est la valeur de $\mathrm{R}(x)$ pour $x = 0$, on est amené à recourir à l'expression de M. Christoffel

$$R(x) = \frac{2n-1}{1.n} X_{n-1} + \frac{2n-5}{3(n-1)} X_{n-3} + \frac{2n-9}{5(n-2)} X_{n-5} + \ldots.$$

Mais cette formule ne conduit pas au but, les polynômes d'indices pairs X_0, X_2, X_4, ... présentant la succession des signes $+$, $-$, $+$, ..., lorsqu'on suppose $x = 0$. Nous emploierons un autre résultat de l'illustre géomètre; je ferai usage de l'équation suivante

$$R_n X_\nu - X_n R_\nu = \Sigma \frac{X_s X_{n-\nu-s-1}}{\nu+s+1}, \qquad (s = 0, 1, 2, \ldots, n-\nu-1)$$

dans le cas particulier de $\nu = 0$. Elle donne cette expression

$$R(x) = \frac{X_0 X_{n-1}}{1} + \frac{X_1 X_{n-2}}{2} + \ldots + \frac{X_{n-1} X_0}{n},$$

dont tous les termes ont pour $x = 0$ le signe de $(-1)^{\frac{n-1}{2}}$; le coefficient α étant positif, il est prouvé que les substitutions $\xi = 2l\pi$, $\zeta = (2l+1)\pi$ conduisent, comme nous voulions l'établir, à des résultats de signes contraires.

La fonction sphérique de seconde espèce définie à l'intérieur de la circonférence de rayon égal à l'unité, dont le centre est à l'origine, par la formule

$$Q^n(x) = \frac{1}{2} F(x) \log \frac{1+x}{1-x} - R(x),$$

se traite de la même manière et par le même procédé.

Ainsi, en posant $\frac{1+x}{1-x} = e^z$, nous obtenons une fonction holomorphe de z

$$f(z) = z\Phi(e^t) - \Pi(e^i),$$

où l'on a

$$\Phi(e^z) = \frac{1}{2}(e^z+1)^n F\left(\frac{e^z-1}{e^z+1}\right), \qquad \Pi(e^z) = (e^z+1)^n R\left(\frac{e^z-1}{e^z+1}\right).$$

Soit ensuite,

$$z = ki\pi + t, \qquad z = ki\pi + a + it,$$

et faisons successivement $f(z) = P + iQ$. On trouvera en premier lieu, suivant que k est pair ou impair, $\operatorname{Ind}\frac{Q}{P} = -n-1$, ou $\operatorname{Ind}\frac{Q}{P} = -1$; puis, suivant que la constante a supposée très grande est positive ou négative, $\operatorname{Ind}\frac{Q}{P} = n$ ou bien $\operatorname{Ind}\frac{Q}{P} = 0$. A l'égard du nombre μ des racines réelles, je dois à M. Stieltjes la remarque qu'il résulte d'un théorème général de Sturm sur les solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre, que l'on a $\mu = n+1$, deux racines consécutives comprenant toujours une racine de $X_n = 0$. C'est ce qui résulte aussi de l'expression déjà employée

$$\frac{R(x)}{F(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \ldots + \frac{L}{x-l}$$

où les numérateurs des fractions simples sont tous positifs.

Supposons que l'on ait $a < b < c < \ldots < l$, et écrivons le premier membre sous la forme

$$\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} - \Sigma\frac{A}{x-a}.$$

On voit que la dérivée

$$\frac{1}{1-x^2} + \Sigma\frac{A}{(x-a)^2}$$

étant continue et positive, lorsque la variable croît de a à b par exemple, l'équation ne peut avoir qu'une seule et unique racine dans cet intervalle; il en est de même entre les limites -1 et a d'une part, l et 1 de l'autre. Et comme, en faisant dans l'expression considérée les substitutions $x = a + \delta$, $x = b - \delta$, où δ est infiniment petit et positif, on obtient des résultats de signes contraires, $\frac{A}{\delta}$ et $-\frac{B}{\delta}$; qu'il en est de même si l'on suppose $x = -1 + \delta$, $x = a - \delta$, et enfin $x = l + \delta$, $x = 1 - \delta$, on a ainsi démontré l'existence de $n+1$ racines, placées chacune entre deux termes consécutifs de la suite

$$-1, a, b, c, \ldots, l, +1.$$

Ce point établi, et après avoir remarqué la relation

$$f(-z) = \frac{f(z)}{e^{nz}},$$

il suffira d'énoncer les conclusions suivantes.

L'équation $f(z) = 0$ admet n racines qui sont comprises dans l'intervalle des parallèles $y = (2l - 1)\pi$, $y = 2l\pi$, et il n'y en a aucune entre les droites $y = 2l\pi$, $y = (2l + 1)\pi$, pour $l = 1, 2, \ldots$.

Il n'y a de même aucune racine dans la région comprise entre une parallèle à l'axe des abscisses, à une distance infiniment petite au-dessus de cet axe, et la droite $y = \pi$.

Enfin, et dans le cas de n impair, il existe, représentées par la forme $\xi = ih$, un nombre impair de racines où h est renfermé entre les limites $(2l - 1)$ et $2l\pi$.