SUR UNE

CLASSE DE POLYNÔMES A DEUX VARIABLES

ET LE CALCUL APPROCHÉ DES INTÉGRALES DOUBLES,

PAR M. P. APPELL.

Les polynômes à deux variables analogues aux polynômes de Legendre et aux polynômes $\cos(n \arccos x)$ ont été découverts par M. Hermite ([1]) dont les indications ont conduit Didon à des résultats intéressants ([2]). Dans un second Mémoire ([3]), Didon, se plaçant à un point de vue très général, forme des polynômes de deux variables $U_{m,n}(x, y)$ de degrés $m+n$, tels que l'on ait

$$\int\int K(x, y) U_{m,n} U_{\mu,\nu}\, dx\, dy = 0$$

tant que l'on n'a pas $m = \mu$ et $n = \nu$, $K(x, y)$ étant une fonction donnée et le champ d'intégration ayant une forme déterminée.

Nous avons montré comment les polynômes de M. Hermite, certains des polynômes de Didon et certains polynômes analogues à ceux de Jacobi, peuvent être rattachés aux fonctions hypergéométriques de deux variables ([4]).

Les polynômes de Legendre interviennent dans la méthode de Gauss pour le calcul approché des intégrales définies, et les polynômes plus généraux $P_n(x)$ caractérisés par les conditions

$$\int_a^b K(x) P_n(x) P_\nu(x)\, dx = 0 \qquad (n \gtrless \nu),$$

([1]) *Journal de Crelle*, t. 64, et *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LX.

([2]) *Annales de l'École Normale*, 1re série, t. V.

([3]) *Ibid.*, t. VII.

([4]) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1880; *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, dirigé par M. Resal, 1882; *Archiv der Mathematik und Physik* de Hoppe, 1881.

dans le calcul approché des intégrales de la forme

$$\int_a^b \mathrm{K}(x) f(x)\, dx$$

où $\mathrm{K}(x)$ est une fonction déterminée ([1]).

Il y a lieu de penser que les polynômes de M. Hermite et les polynômes de Didon interviendront de même dans le calcul approché des intégrales doubles de la forme

$$\int\int \mathrm{K}(x, y) f(x, y)\, dx\, dy,$$

$\mathrm{K}(x, y)$ étant une fonction déterminée servant à la définition des polynômes, et le champ d'intégration ayant une forme donnée.

C'est à mettre ce fait en évidence, dans quelques cas très simples pouvant servir de types à une théorie générale, qu'est consacrée la présente Note. Dans une première Partie, nous résumons les principales propriétés des polynômes de M. Hermite généralisés par Didon, en y ajoutant quelques faits nouveaux, parmi lesquels nous citerons une liaison très simple entre une certaine forme quadratique et la notion de polynômes associés ou adjoints introduite par M. Hermite. Dans la deuxième Partie, nous nous occupons de l'approximation des intégrales doubles.

I. — *Polynômes.*

1. Imaginons, dans le plan $x\mathrm{O}y$, un champ d'intégration auquel seront étendues toutes les intégrales doubles considérées, et désignons par K une fonction de x et y susceptible d'intégration et conservant un *signe constant* dans toute l'étendue du champ d'intégration. Cherchons le polynôme P en x et y, le plus général d'un degré donné p, vérifiant les conditions

$$\int\int \mathrm{K} x^i y^j \mathrm{P}\, dx\, dy = 0 \qquad (i + j < p) \tag{1}$$

pour toutes les valeurs positives ou nulles des entiers i et j dont la somme

---

([1]) *Voir* les travaux de Christoffel, Tchebicheff et Heine (*Handbuch der Kugelfunctionen,* t. I, p. 286).

est moindre que p. Le polynôme le plus général de degré p,

$$P = \sum_{m+n=0}^{m+n=p} \alpha_{m,n} x^m y^n,$$

contient $\frac{(p+1)(p+2)}{2}$ coefficients $\alpha_{m,n}$. En écrivant les conditions (1) au nombre de $\frac{p(p+1)}{2}$, on aura, entre les coefficients $\alpha_{m,n}$, autant d'équations linéaires et homogènes qui permettront de les exprimer tous en fonction de

$$\frac{(p+1)(p+2)}{2} - \frac{p(p+1)}{2} = p+1$$

d'entre eux convenablement choisis. Nous allons montrer qu'on peut prendre arbitrairement les $(p+1)$ coefficients des termes de degré p dans P, c'est-à-dire

$$(2) \qquad \alpha_{p,0}, \quad \alpha_{p-1,1}, \quad \alpha_{p-2,2}, \quad \ldots, \quad \alpha_{0,p}.$$

Dans les équations du premier degré (1) qui déterminent les autres coefficients en fonction linéaire et homogène de ceux-là, le déterminant des coefficients des inconnues $\alpha_{i,j}(i+j<p)$ *n'est pas nul*. En effet, si ce déterminant était nul, on pourrait supposer les coefficients (2) tous nuls et tirer des équations (1) des valeurs des $\alpha_{i,j}(i+j<p)$ non nulles toutes à la fois; on aurait alors un polynôme P, de degré $(p-1)$ seulement, vérifiant les conditions (1), ce qui est impossible; car, en multipliant chacune des équations (1) par le coefficient $\alpha_{i,j}(i+j<p)$ et ajoutant, on aurait

$$\iint KP^2\, dx\, dy = 0,$$

condition absurde, puisque K a un *signe constant*.

Ainsi on pourra résoudre les équations (1) par rapport aux coefficients $\alpha_{i,j}(i+j<p)$ et les exprimer en fonction linéaire et homogène des coefficients (2). Le polynôme le plus général P vérifiant les conditions (1) est donc de la forme

$$P = \alpha_{p,0} V_{p,0} + \alpha_{p-1,1} V_{p-1,1} + \alpha_{p-2,2} V_{p-2,2} + \ldots + \alpha_{0,p} V_{0,p}$$

avec $(p+1)$ coefficients arbitraires, $V_{p,0}$, $V_{p-1,1}$, ..., $V_{0,p}$ désignant des polynômes linéairement indépendants. Ce dernier point est évident, car le polynôme $V_{m,n}(m+n=p)$ contient un seul terme de degré p, le terme $x^m y^n$.

2. Tout polynôme en x et y de degré p peut être mis sous la forme d'une somme de polynômes $V_{m,n}$ de degrés égaux et inférieurs à p multipliés par des constantes.

Pour le montrer, il suffit de faire voir que, si ce théorème est vrai pour un polynôme de degré $(p-1)$, il l'est pour un polynôme de degré p. Soit donc un polynôme de degré p, que nous écrirons

$$\varphi_p(x,y)=\varphi_{p-1}(x,y)+\lambda_0 x^p+\lambda_1 x^{p-1}y+\lambda_2 x^{p-2}y^2+\ldots+\lambda_p y^p,$$

en mettant en évidence les termes de degré p. Le polynôme

$$V(x,y)=\lambda_0 V_{p,0}+\lambda_1 V_{p-1,1}+\lambda_2 V_{p-2,2}+\ldots+\lambda_p V_{0,p}$$

est également de degré p et a les mêmes termes de degré p que le polynôme $\varphi_p(x,y)$. La différence

$$\varphi_p(x,y)-V(x,y)$$

est donc un polynôme de degré $(p-1)$ exprimable par hypothèse à l'aide d'une somme de polynômes $V_{m,n}$; il en est donc de même de $\varphi_p(x,y)$.

3. Les polynômes $V_{m,n}$ possèdent évidemment cette propriété que l'intégrale

$$\int\int KV_{m,n}V_{\mu,\nu}\,dx\,dy \tag{3}$$

est nulle tant que $(m+n)$ est différent de $\mu+\nu$. Si l'on imagine une suite de polynômes $V_{m,n}$ obtenus d'une façon quelconque et vérifiant les conditions (3), les polynômes de M. Hermite par exemple, on pourra toujours, comme le fait M. Hermite, leur associer des polynômes adjoints $W_{m,n}$, tels que l'intégrale

$$\int\int KV_{m,n}W_{\mu,\nu}\,dx\,dy$$

est *nulle* tant que l'on n'a pas $m=\mu$ et $n=\nu$. Mais, suivant une remarque qui nous a été faite par M. Tchebicheff [1] à l'occasion de nos recherches

---

[1] *Voir* Didon, *Annales de l'École Normale,* 1re série, t. VII, p. 265.

sur la généralisation des polynômes de Jacobi, nous chercherons à remplacer les polynômes $V_{m,n}$ par d'autres $U_{m,n}$ de degré $(m+n)$, *identiques à leurs adjoints,* c'est-à-dire tels que l'intégrale

$$\iint KU_{m,n}U_{\mu,\nu}\,dx\,dy$$

reste nulle tant que l'on n'a pas en même temps $m=\mu$, $n=\nu$.

Voici comment nous formerons les polynômes $U_{m,n}$ d'un degré donné p, $(m+n=p)$. Posons

$$(4)\qquad \begin{cases} U_{p,0} \;\;= a_0V_{p,0}+a_1V_{p-1,1}+a_2V_{p-2,2}+\ldots+a_pV_{0,p}, \\ U_{p-1,1}=b_0V_{p,0}+b_1V_{p-1,1}+b_2V_{p-2,2}+\ldots+b_pV_{0,p}, \\ U_{p-2,2}=c_0V_{p,0}+c_1V_{p-1,1}+c_2V_{p-2,2}+\ldots+c_pV_{0,p}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ U_{0,p} \;\;= l_0V_{p,0}+l_1V_{p-1,1}+l_2V_{p-2,2}+\ldots+l_pV_{0,p}, \end{cases}$$

les lettres $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p, b_0, \ldots, b_p, \ldots, l_0, \ldots, l_p$ désignant $(p+1)^2$ constantes dont le déterminant n'est pas nul. Nous allons montrer qu'on peut, d'une infinité de façons, déterminer ces constantes, de manière à vérifier les conditions suivantes

$$(5)\qquad \iint KU_{p-i,i}U_{p-j,j}\,dx\,dy=0 \qquad (i \gtrless j),$$

i et j désignant des entiers *différents.*

Posons, pour abréger,

$$A_{i,j}=\iint KV_{p-i,i}V_{p-j,j}\,dx\,dy, \qquad A_{i,j}=A_{j,i},$$

et considérons la forme quadratique de $(p+1)$ variables $x_0, x_1, \ldots, x_p$

$$\psi(x_0, x_1, \ldots, x_p)=\sum_{i+j=0}^{i+j=p} A_{i,j}x_ix_j$$

ou, d'après les valeurs des $A_{i,j}$,

$$\psi(x_0, x_1, \ldots, x_p)=\iint K(x_0V_{p,0}+x_1V_{p-1,1}+x_2V_{p-2,2}+\ldots+x_pV_{0,p})^2\,dx\,dy.$$

La condition

$$\iint KU_{p,0}U_{p-1,1}\,dx\,dy=0$$

devient, si l'on remplace $U_{p,0}$ et $U_{p-1,1}$ par leurs valeurs (4),

$$b_0 \frac{\partial\psi}{\partial a_0} + b_1 \frac{\partial\psi}{\partial a_1} + b_2 \frac{\partial\psi}{\partial a_2} + \ldots + b_p \frac{\partial\psi}{\partial a_p} = 0;$$

de même, la condition

$$\iint K U_{p,0} U_{p-2,2}\, dx\, dy = 0$$

peut s'écrire

$$c_0 \frac{\partial\psi}{\partial a_0} + c_1 \frac{\partial\psi}{\partial a_1} + c_2 \frac{\partial\psi}{\partial a_2} + \ldots + c_p \frac{\partial\psi}{\partial a_p} = 0,$$

et ainsi de suite pour toutes les conditions (5). Les équations (5) expriment donc que, dans l'espace à p dimensions, les points ayant pour coordonnées homogènes

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p), \quad (b_0, b_1, \ldots, b_p), \quad \ldots, \quad (l_0, l_1, l_2, \ldots, l_p)$$

sont les sommets d'un polyèdre de $(p+1)$ faces conjugué à la quadrique $\psi(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_p) = 0$. Le discriminant de la forme quadratique ψ n'est pas nul, car cette forme ne peut pas s'annuler pour des valeurs de x_0, $x_1, \ldots, x_p$ non nulles à la fois, comme il résulte de l'expression de ψ sous forme d'intégrale définie. On pourra donc déterminer les quantités $(a_0, a_1, \ldots, a_p)$, $(b_0, b_1, \ldots, b_p)$, $\ldots$, $(l_0, l_1, \ldots, l_p)$ d'une infinité de façons, par exemple en décomposant la forme ψ en carrés. L'une de ces déterminations étant adoptée pour chaque degré p, on aura des polynômes $U_{m,n}$, tels que

$$\iint K U_{m,n} U_{\mu,\nu}\, dx\, dy = 0,$$

tant que l'on n'a pas $m = \mu$ et $n = \nu$. De plus, comme les quantités $(a_0, a_1, \ldots, a_p)$, $(b_0, \ldots, b_p)$, $\ldots$, $(l_0, \ldots, l_p)$ ne sont déterminées qu'à des facteurs près, on pourra supposer ces facteurs choisis de telle façon que les intégrales doubles

$$\iint K U_{p,0}^2\, dx\, dy, \quad \iint K U_{p-1,1}^2\, dx\, dy, \quad \ldots, \quad \iint K U_{0,p}^2\, dx\, dy,$$

qui ont pour expressions respectives

$$\psi(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p), \quad \psi(b_0, b_1, \ldots, b_p), \quad \ldots, \quad \psi(l_0, l_1, \ldots, l_p),$$

soient toutes égales à l'*unité*.

En résumé, nous avons formé des polynômes $U_{m,n}$ linéairement indépendants, de degrés $(m+n)$, vérifiant les équations

$$\iint K U_{m,n} U_{\mu,\nu}\, dx\, dy = 0$$

tant que l'on n'a pas $m=\mu$, $n=\nu$, et

$$\iint K U_{m,n}^2\, dx\, dy = 1.$$

Un polynôme quelconque d'un degré p, $\varphi_p(x,y)$, pourra se mettre sous la forme d'une somme de polynômes $U_{m,n}$ multipliés par des constantes

$$\varphi_p(x,y) = \sum_{m+n=0}^{m+n=p} \lambda_{m,n} U_{m,n},$$

et l'on aura, en multipliant les deux membres par $K U_{m,n}\, dx\, dy$ et intégrant,

$$\lambda_{m,n} = \iint K\, \varphi_p(x,y)\, U_{m,n}\, dx\, dy.$$

Plus généralement, si l'on admet la possibilité de développer une fonction $\varphi(x,y)$ en série de polynômes $U_{m,n}$

$$\varphi(x,y) = \sum_{m+n=0}^{m+n=\infty} \lambda_{m,n} U_{m,n},$$

on aura de même

$$\lambda_{m,n} = \iint K\, \varphi(x,y)\, U_{m,n}\, dx\, dy.$$

4. D'après une remarque de Didon (*Annales de l'École Normale*, 1re série, t. VII), si l'on a une suite de polynômes, tels que l'intégrale

$$\iint K V_{m,n} V_{\mu,\nu}\, dx\, dy$$

soit nulle tant que $m+n$ est différent de $\mu+\nu$, on peut en déduire une infinité de systèmes de polynômes associés $P_{m,n}$ et $R_{m,n}$, tels que

$$\iint K P_{m,n} R_{\mu,\nu}\, dx\, dy = 0$$

tant que l'on n'a pas $m=\mu$, $n=\nu$. On vérifiera sans peine que l'on obtiendra les polynômes $P_{m,n}$ et $R_{m,n}$ d'un degré donné p par la méthode suivante. On posera, comme dans le numéro précédent,

$$\begin{aligned}
P_{p,0} &= a_0 V_{p,0} + a_1 V_{p-1,1} + \ldots + a_p V_{0,p},\\
P_{p-1,1} &= b_0 V_{p,0} + b_1 V_{p-1,1} + \ldots + b_p V_{0,p},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
P_{0,p} &= l_0 V_{p,0} + l_1 V_{p-1,1} + \ldots + l_p V_{0,p},
\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
R_{p,0} &= a'_0 V_{p,0} + a'_1 V_{p-1,1} + \ldots + a'_p V_{0,p},\\
R_{p-1,1} &= b'_0 V_{p,0} + b'_1 V_{p-1,1} + \ldots + b'_p V_{0,p},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
R_{0,p} &= l'_0 V_{p,0} + l'_1 V_{p-1,1} + \ldots + l'_p V_{0,p};
\end{aligned}$$

et l'on prendra, pour

$$\begin{gathered}
(a_0, a_1, \ldots, a_p), \quad (b_0, b_1, \ldots, b_p), \quad \ldots, \quad (l_0, l_1, \ldots, l_p),\\
(a'_0, a'_1, \ldots, a'_p), \quad (b'_0, b'_1, \ldots, b'_p), \quad \ldots, \quad (l'_0, l'_1, \ldots, l'_p),
\end{gathered}$$

les coordonnées homogènes, dans l'espace à p dimensions, des sommets de deux polyèdres à $(p+1)$ faces conjugués l'un de l'autre par rapport à la quadrique

$$\psi(x_0, x_1, \ldots, x_p) = 0,$$

définie à la page 5.

5. Soit un polynôme P, de degré p, vérifiant les conditions

$$\int\!\!\int K x^i y^j P \, dx \, dy = 0, \qquad i + j < p; \tag{1}$$

il est évident que ce polynôme doit s'annuler dans le champ d'intégration, car s'il y gardait un signe constant, l'intégrale (1) ne serait pas nulle pour $i = j = 0$.

Plus généralement, si le polynôme P est décomposable en un produit de deux facteurs entiers $P = QR$, chacun des polynômes Q et R doit s'annuler dans le domaine d'intégration. En effet, si le polynôme R, par exemple, gardait un signe constant dans le champ d'intégration, l'intégrale

$$\int\!\!\int KQP \, dx \, dy$$

qui *devrait être nulle* en vertu des relations (1), puisque le degré de Q est moindre que celui de P, *ne le serait pas,* car en remplaçant P par QR, elle deviendrait

$$\iint \mathrm{K}\,\mathrm{Q}^2\mathrm{R}\,dx\,dy,$$

ce qui est une intégrale composée d'éléments ayant tous le même signe.

II. — *Quadratures mécaniques.*

6. La théorie des quadratures mécaniques est ordinairement rattachée aux propriétés des fractions continues. Mais, pour préparer son extension aux intégrales doubles, nous adopterons le mode d'exposition suivant, que nous indiquerons rapidement, sans le donner comme nouveau (¹).

Soit $\mathrm{K}(x)$ une fonction donnée de x susceptible d'intégration dans un intervalle donné a, b, et

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_\nu x^\nu + \ldots$$

une série convergente dans cet intervalle ainsi qu'aux limites.

Pour évaluer l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_a^b \mathrm{K}(x) f(x)\,dx = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} a_\nu \mathrm{I}_\nu,$$

où

$$\mathrm{I}_\nu = \int_a^b \mathrm{K}(x)\,x^\nu\,dx,$$

substituons à $f(x)$ le polynôme de degré $n-1$

$$\begin{aligned}\varphi(x) = {} & \frac{(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_n)} f(x_1) + \frac{(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_n)} f(x_2) + \ldots \\ & + \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\ldots(x_n-x_{n-1})} f(x_n),\end{aligned}$$

qui, d'après la formule de Lagrange, devient égal à $f(x)$ pour n valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ choisies dans l'intervalle a, b. Nous prendrons pour valeur approchée de l'intégrale I, l'intégrale

$$\mathrm{J} = \int_a^b \mathrm{K}(x)\,\varphi(x)\,dx = p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2) + \ldots + p_n f(x_n),$$

(¹) *Voir* JORDAN, *Cours d'Analyse,* t. II, p. 108.

$p_1, p_2, \ldots, p_n$ désignant des constantes qui dépendent de la valeur de x_1, $x_2, \ldots, x_n$, mais non de la nature de la fonction $f(x)$. Par exemple,

$$p_1 = \int_a^b \frac{(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_n)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\ldots(x_1 - x_n)} \mathrm{K}(x)\, dx, \qquad \ldots.$$

En remplaçant $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ par les séries correspondantes, on a

$$\mathrm{J} = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} a_\nu (p_1 x_1^\nu + p_2 x_2^\nu + \ldots + p_n x_n^\nu).$$

Si l'on suppose nuls les coefficients

$$a_n, \quad a_{n+1}, \quad \ldots, \quad \text{ad inf.},$$

$f(x)$ se réduit à un polynôme de degré $n - 1$, $\varphi(x)$ devient identique à $f(x)$, et l'on a alors

$$\mathrm{I} = \mathrm{J}$$

quels que soient $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$. On a donc

$$(6) \qquad \begin{cases} p_1 + p_2 + \ldots + p_n = \mathrm{I}_0, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n = \mathrm{I}_1, \\ p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + \ldots + p_n x_n^2 = \mathrm{I}_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ p_1 x_1^{n-1} + p_2 x_2^{n-1} + \ldots + p_n x_n^{n-1} = \mathrm{I}_{n-1}. \end{cases}$$

Ces relations ont lieu quels que soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Pour obtenir une approximation plus grande, disposons de ces n quantités de façon à rendre égaux les n termes suivants en

$$a_n, \quad a_{n+1}, \quad \ldots, \quad a_{2n-1}$$

dans les expressions de I et de J. Nous aurons les n nouvelles équations

$$(7) \qquad \begin{cases} p_1 x_1^n + p_2 x_2^n + \ldots + p_n x_n^n = \mathrm{I}_n, \\ p_1 x_1^{n+1} + p_2 x_2^{n+1} + \ldots + p_n x_n^{n+1} = \mathrm{I}_{n+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ p_1 x_1^{2n-1} + p_2 x_2^{2n-1} + \ldots + p_n x_n^{2n-1} = \mathrm{I}_{2n-1}. \end{cases}$$

On a en tout $2n$ équations (6) et (7) à $2n$ inconnues $p_1, p_2, \ldots, p_n$, x_1,

$x_2, \ldots, x_n$. Soit

$$P(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \ldots + \lambda_{n-1} x^{n-1} + \lambda_n x^n$$

le polynôme de degré n ayant pour racines $x_1, x_2, \ldots, x_n$. On aura

$$P(x_i) = 0, \qquad x_i P(x_i) = 0, \qquad x_i^2 P(x_i) = 0, \qquad \ldots, \qquad x_i^{n-1} P(x_i) = 0$$

pour $i = 1, 2, \ldots, n$. Alors, en multipliant, dans le Tableau des équations (6) et (7), la première par λ_0, la deuxième par $\lambda_1, \ldots$, la $(n+1)^{\text{ième}}$ par λ_n et ajoutant, on verra que les coefficients de $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sont nuls, et l'on aura

$$\lambda_0 I_0 + \lambda_1 I_1 + \ldots + \lambda_{n-1} I_{n-1} + \lambda_n I_n = 0.$$

De même, en multipliant la deuxième de ces équations par λ_0, la troisième par $\lambda_1, \ldots$, la $(n+2)^{\text{ième}}$ par λ_n, on aura

$$\lambda_0 I_1 + \lambda_1 I_2 + \ldots + \lambda_{n-1} I_n + \lambda_n I_{n+1} = 0,$$

et ainsi de suite jusqu'à

$$\lambda_0 I_{n-1} + \lambda_1 I_n + \ldots + \lambda_{n-1} I_{2n-2} + \lambda_n I_{2n-1} = 0.$$

Ces équations, qui déterminent les rapports des coefficients $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ à l'un d'entre eux, expriment que le polynôme $P(x)$ satisfait aux n relations

$$\int_a^b K(x) x^p P(x)\, dx = 0, \qquad p = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

qui déterminent le polynôme $P(x)$ à un facteur constant près, à condition que $K(x)$ garde un signe constant entre a et b. Par exemple, si $K(x) = 1$, $a = -1$, $b = +1$, $P(x)$ est égal, à un facteur près, au $(n-1)^{\text{ième}}$ polynôme de Legendre.

Si $K(x)$ changeait de signe dans l'intervalle a, b, le polynôme $P(x)$ pourrait ne pas être déterminé par les conditions précédentes. Il paraît alors possible d'annuler un terme de plus dans la différence $I - J$. Par exemple, en prenant $a = -1$, $b = 1$, $K(x) = 5x^2 + x\sqrt{15}$, il existe une infinité de polynômes du second degré $P(x)$ vérifiant les deux conditions

$$\int_{-1}^{+1} K(x) P(x)\, dx = 0, \qquad \int_{-1}^{+1} K(x)\, x P(x)\, dx = 0.$$

C'est ce que l'on vérifiera sans peine, en montrant que le polynôme P contient deux coefficients arbitraires.

7. Le problème de l'extension de la méthode de Gauss aux intégrales doubles se présente maintenant d'une manière simple. Nous ne ferons que l'indiquer sommairement, car cette théorie doit être développée par M. Gourier dans une thèse.

Soit K une fonction de x et y susceptible d'intégration, gardant un signe constant dans le champ d'intégration, et $f(x, y)$ une fonction développable dans le champ d'intégration en une série de puissances

$$f(x, y) = \sum_{\mu+\nu=0}^{\mu+\nu=\infty} a_{\mu,\nu}\, x^\mu y^\nu.$$

L'intégrale double

$$I = \int\int K f(x, y)\, dx\, dy$$

aura pour expression

$$I = \sum_{\mu+\nu=0}^{\mu+\nu=\infty} a_{\mu,\nu}\, I_{\mu,\nu},$$

si l'on pose

$$I_{\mu,\nu} = \int\int K x^\mu y^\nu\, dx\, dy.$$

Prenons un polynôme $\varphi(x, y)$ de degré p en x et y : ce polynôme contient un nombre

$$n = \frac{(p+1)(p+2)}{2}$$

de coefficients $b_{\mu,\nu}$

$$\varphi(x, y) = \sum_{\mu+\nu=0}^{\mu+\nu=p} b_{\mu,\nu}\, x^\mu y^\nu,$$

que nous déterminerons en exprimant qu'il prend la même valeur que $f(x, y)$ en n points (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_n, y_n) situés dans le champ d'intégration et n'appartenant pas à une courbe d'ordre p. Les coefficients $b_{\mu,\nu}$ étant ainsi déterminés par des équations du premier degré dont le déterminant n'est pas nul, le polynôme $\varphi(x, y)$ prendra la forme

$$\varphi(x, y) = P_1(x, y) f(x_1, y_1) + P_2(x, y) f(x_2, y_2) + \ldots + P_n(x, y) f(x_n, y_n)$$

et l'intégrale

$$J = \iint K \varphi(x, y)\, dx\, dy$$

deviendra

$$J = p_1 f(x_1, y_1) + p_2 f(x_2, y_2) + \ldots + p_n f(x_n, y_n),$$

$p_1, p_2, \ldots, p_n$ ne dépendant que de (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_n, y_n) et non de la nature de la fonction $f(x, y)$. Cette intégrale J pourra s'écrire

$$J = \sum_{\mu+\nu=0}^{\mu+\nu=\infty} a_{\mu,\nu}(p_1 x_1^\mu y_1^\nu + p_2 x_2^\mu y_2^\nu + \ldots + p_n x_n^\mu y_n^\nu)$$

et l'on prendra J pour valeur approchée de I. Si, dans $f(x, y)$, les coefficients $a_{\mu,\nu}$ de tous les termes de degré supérieur à p, $(\mu + \nu > p)$, étaient nuls, $f(x, y)$ serait un polynôme de degré p et $\varphi(x, y)$ serait identique à $f(x, y)$. On aurait donc

$$I = J,$$

quelles que soient les valeurs des n premiers coefficients $a_{\mu,\nu}(\mu + \nu \leqq p)$, ce qui donne

$$(8) \qquad p_1 x_1^\mu y_1^\nu + p_2 x_2^\mu y_2^\nu + \ldots + p_n x_n^\mu y_n^\nu = I_{\mu,\nu}$$

pour toutes les valeurs de μ et ν dont la somme est moindre que $(p + 1)$

$$\mu + \nu \leqq p.$$

On pourra ensuite chercher à disposer des $2n$ indéterminées (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_n, y_n) de façon à rendre identiques $2n$ des termes suivants dans les développements de I et de J, ce qui fournira $2n$ équations nouvelles de la forme

$$(9) \qquad p_1 x_1^i y_1^j + p_2 x_2^i y_2^j + \ldots + p_n x_n^i y_n^j = I_{i,j}.$$

On aura en tout un système de $3n$ équations (8) et (9) à $3n$ inconnues $p_1, p_2, \ldots, p_n$, (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_n, y_n). Il faudra, pour que le problème soit possible, que ces équations soient compatibles et donnent, pour les points (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_n, y_n), des points réels appartenant au champ d'intégration et non situés sur une courbe d'ordre p.

8. Le cas le plus simple de tous est le cas de $p = 0$, $n = 1$. On substitue alors à $f(x, y)$ une constante $f(x_1, y_1)$ égale à la valeur que prend $f(x, y)$ en un certain point (x_1, y_1) du champ d'intégration. L'intégrale J devient

$$J = p_1 f(x_1, y_1), \qquad p_1 = \iint K(x, y)\, dx\, dy = I_{0,0}.$$

On pourra disposer du point x_1, y_1 de façon à égaler les deux termes suivants dans les développements de I et J, ce qui donne

$$p_1 x_1 = I_{1,0}, \qquad p_1 y_1 = I_{0,1},$$

d'où

$$x_1 = \frac{I_{1,0}}{I_{0,0}}, \qquad y_1 = \frac{I_{0,1}}{I_{0,0}}.$$

Donc le point (x_1, y_1) devra être choisi au centre de gravité du champ d'intégration, la densité en chaque point étant égale à $K(x, y)$.

Si l'on forme le polynôme le plus général du premier degré

$$P = Ax + By + C$$

s'annulant pour $x = x_1$, $y = y_1$, on voit, en écrivant $Ax_1 + By_1 + C = 0$, c'est-à-dire $AI_{1,0} + BI_{0,1} + CI_{0,0} = 0$, que ce polynôme possédera la propriété

$$\iint KP\, dx\, dy = 0;$$

ce sera donc le plus simple des polynômes considérés dans la première Partie. Ce polynôme égalé à zéro donnera une droite passant par le point fixe cherché (x_1, y_1) : $\lambda_{1,0} V_{1,0} + \lambda_{0,1} V_{0,1} = 0$.

9. En donnant à p d'autres valeurs, on se trouve en face de certaines difficultés : les équations obtenues peuvent être incompatibles ou donner des points non situés dans le champ d'intégration. Nous nous bornerons à signaler un cas intéressant à étudier en détail, c'est le cas où $p = 4$: le polynôme $\varphi(x, y)$ contient alors $n = 15$ coefficients. On pourra chercher à disposer des 30 coordonnées (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_{15}, y_{15}), de façon à rendre identiques les coefficients des quantités $a_{\mu,\nu}$, dans les développements des intégrales I et J, pour toutes les valeurs de μ et ν dont la somme est in-

férieure à 9. On a ainsi les équations

$$(10)\qquad \begin{cases} p_1 x_1^\mu y_1^\nu + p_2 x_2^\mu y_2^\nu + \ldots + p_{15} x_{15}^\mu y_{15}^\nu = \mathrm{I}_{\mu,\nu}, \\ 0 \leqq \mu + \nu \leqq 8, \end{cases}$$

au nombre de 45, déterminant $p_1, p_2, \ldots, p_{15}$, (x_1, y_1), (x_2, y_2), …. (x_{15}, y_{15}). Les 15 points (x_i, y_i) n'étant pas sur une courbe du quatrième degré, on pourra chercher l'équation générale d'une courbe du cinquième degré passant par ces points. Soit

$$\psi(x, y) = 0$$

l'équation d'une courbe du cinquième degré passant par ces 15 points, on aura les conditions

$$x_i^\alpha y_i^\beta \psi(x_i, y_i) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, 15,$$
$$0 \leqq \alpha + \beta \leqq 3.$$

D'après les équations (10), on voit que le polynôme du cinquième degré $\psi(x, y)$ est d'abord assujetti aux conditions

$$\iint \mathrm{K} x^\alpha y^\beta \psi(x, y)\, dx\, dy = 0,$$
$$0 \leqq \alpha + \beta \leqq 3$$

au nombre de 10.

Comme ce polynôme contient 21 coefficients, ces conditions en déterminent 10 en fonction des 11 autres, et l'expression la plus générale d'un polynôme $\psi(x, y)$ vérifiant ces 10 conditions est

$$\psi(x, y) = \sum_{\mu+\nu=4}^{\mu+\nu=5} \lambda_{\mu,\nu} \mathrm{V}_{\mu,\nu}(x, y),$$

les polynômes $\mathrm{V}_{\mu,\nu}$ étant ceux qui ont été définis dans la première Partie. Les coefficients $\lambda_{\mu,\nu}$, au nombre de 11, sont encore assujettis à d'autres conditions, puisque l'équation d'une courbe du cinquième ordre passant par 15 points ne contient plus que 6 coefficients d'une manière linéaire et homogène.

On verra, de même, que toute courbe du sixième, septième, huitième ordre passant par les 15 points (x_i, y_i) a une équation de l'une des formes suivantes

$$\sum_{\mu+\nu=3}^{\mu+\nu=6} \lambda_{\mu,\nu} V_{\mu,\nu}(x, y) = 0,$$

$$\sum_{\mu+\nu=2}^{\mu+\nu=7} \lambda_{\mu,\nu} V_{\mu,\nu}(x, y) = 0,$$

$$\sum_{\mu+\nu=1}^{\mu+\nu=8} \lambda_{\mu,\nu} V_{\mu,\nu}(x, y) = 0.$$

10. On pourrait aussi imposer aux points (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n) des conditions particulières, en diminuant d'autant le nombre des termes que l'on annule dans la différence $I - J$. Supposons, par exemple, que le champ d'intégration soit un cercle de centre O et de rayon 1 et que $K = 1$,

$$x^2 + y^2 - 1 \leqq 0.$$

Les polynômes $V_{m,n}$ sont alors composés linéairement avec les polynômes

$$U_{m,n} = \frac{\partial^{m+n}(x^2 + y^2 - 1)^{m+n}}{\partial x^m \, \partial y^n}$$

de M. Hermite. Prenons 3 points (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) dans le cercle, et substituons à la fonction $f(x, y)$ à intégrer un polynôme du premier degré

$$\varphi(x, y) = b_{0,0} + b_{1,0}x + b_{0,1}y$$

qui devienne égal à $f(x, y)$ aux 3 points. En raisonnant comme plus haut, on verra que, dans la différence $I - J$, les trois premiers termes sont nuls. On pourra alors disposer des coordonnées des 3 points de manière à annuler les termes du second ordre et 3 des termes du troisième ordre. Annulons seulement les termes du second ordre : nous aurons en tout 6 équations

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} p_1 + p_2 + p_3 &= I_{0,0} = \pi, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 &= I_{1,0} = 0, \\ p_1 y_1 + p_2 y_2 + p_3 y_3 &= I_{0,1} = 0, \\ p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + p_3 x_3^2 &= I_{2,0} = \frac{\pi}{4}, \\ p_1 x_1 y_1 + p_2 x_2 y_2 + p_3 x_3 y_3 &= I_{1,1} = 0, \\ p_1 y_1^2 + p_2 y_2^2 + p_3 y_3^2 &= I_{0,2} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned} \right.$$

On pourra, dans de certaines limites, choisir arbitrairement 3 des 9 quantités qui figurent dans ces équations. On peut remarquer que si

$$\psi(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

désigne l'équation d'une conique passant par les 3 points, les équations (11) multipliées par F, D, E, A, B, C et ajoutées donnent, puisque

$$\psi(x_1,y_1) = 0, \qquad \psi(x_2,y_2) = 0, \qquad \psi(x_3,y_3) = 0,$$

$$(12) \qquad F + \frac{A}{4} + \frac{C}{4} = 0.$$

En particulier, si cette conique est un cercle, son équation sera de la forme

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey - \tfrac{1}{2} = 0,$$

et la puissance de l'origine par rapport à ce cercle sera constante. La condition (12), que nous venons d'obtenir, peut aussi s'interpréter en remarquant qu'elle signifie

$$\iint \psi(x,y)\,dx\,dy = 0;$$

donc $\psi(x,y)$ est de la forme

$$\psi(x,y) = \sum_{\mu+\nu=1}^{\mu+\nu=2} \lambda_{\mu,\nu} V_{\mu,\nu} = \sum_{\mu+\nu=1}^{\mu+\nu=2} \lambda'_{\mu,\nu} U_{\mu,\nu},$$

les $V_{\mu,\nu}$ étant les polynômes considérés dans la première Partie, les $U_{\mu,\nu}$ les polynômes de M. Hermite, $\lambda_{\mu,\nu}$ et $\lambda'_{\mu,\nu}$ des constantes arbitraires.

Particularisons le problème et assujettissons les 3 points (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) à se trouver sur un cercle de centre O. Alors, d'après ce qui précède, $D = E = 0$ et le cercle sur lequel se trouvent les points est

$$x^2 + y^2 - \tfrac{1}{2} = 0.$$

Faisons

$$x_1 + iy_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\theta_1 i}, \qquad x_2 + iy_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\theta_2 i}, \qquad x_3 + iy_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\theta_3 i},$$

$$e^{\theta_1 i} = t_1, \qquad e^{\theta_2 i} = t_2, \qquad e^{\theta_3 i} = t_3.$$

Nous aurons, d'après (11),

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} & p_1 t_1 + p_2 t_2 + p_3 t_3 = 0, \\ & \frac{p_1}{t_1} + \frac{p_2}{t_2} + \frac{p_3}{t_3} = 0, \\ & p_1 t_1^2 + p_2 t_2^2 + p_3 t_3^2 = 0, \\ & \frac{p_1}{t_1^2} + \frac{p_2}{t_2^2} + \frac{p_3}{t_3^2} = 0. \end{aligned}\right.$$

En éliminant p_1, p_2, p_3 entre ces 4 équations, on trouve deux conditions qui, après suppression du facteur $(t_1 - t_2)(t_2 - t_3)(t_3 - t_1)$, donnent

$$t_1 + t_2 + t_3 = 0, \qquad t_2 t_3 + t_3 t_1 + t_1 t_2 = 0.$$

Ces 3 quantités sont donc racines d'une équation binôme de la forme $t^3 = e^{3\alpha i}$, et l'on a

$$t_1 = e^{\alpha i}, \qquad t_2 = e^{\alpha i + \frac{2\pi i}{3}}, \qquad t_3 = e^{\alpha i + \frac{4\pi i}{3}}.$$

Donc enfin, les 3 points forment les sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$; l'un de ces sommets est arbitraire. Les équations (13) montrent ensuite que $p_1 = p_2 = p_3$ et la première des équations (11) donne, pour la valeur commune de ces 3 coefficients, $\frac{\pi}{3}$.

11. Nous avons dit plus haut que le problème de déterminer

$$p_1, p_2, \ldots, p_n, \quad x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, \quad x_n, y_n$$

par les équations (8) et (9) peut, dans certains cas, être impossible. Pour en donner un exemple, prenons encore une intégrale double

$$I = \iint f(x, y)\, dx\, dy$$

étendue au cercle

$$x^2 + y^2 - 1 \leqq 0,$$

la fonction K étant supposée égale à l'unité. Substituons à $f(x, y)$ un polynôme du premier degré

$$\varphi(x, y) = b_{0,0} + b_{1,0} x + b_{0,1} y$$

prenant les mêmes valeurs que $f(x, y)$ en 3 points (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) non en ligne droite situés dans le champ d'intégration, et adoptons comme valeur approchée de I l'expression

$$\mathrm{J} = \int\int \varphi(x, y)\, dx\, dy.$$

Dans la différence I — J, les trois premiers termes sont nuls. On pourra alors chercher à disposer des coordonnées des 3 points de manière à annuler les termes du second ordre et les trois premiers termes du troisième ordre. On aura ainsi 9 équations

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} p_1 + p_2 + p_3 &= \mathrm{I}_{0,0} = \pi, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 &= \mathrm{I}_{1,0} = 0, \\ p_1 y_1 + p_2 y_2 + p_3 y_3 &= \mathrm{I}_{0,1} = 0, \\ p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + p_3 x_3^2 &= \mathrm{I}_{2,0} = \frac{\pi}{4}, \\ p_1 x_1 y_1 + p_2 x_2 y_2 + p_3 x_3 y_3 &= \mathrm{I}_{1,1} = 0, \\ p_1 y_1^2 + p_2 y_2^2 + p_3 y_3^2 &= \mathrm{I}_{0,2} = \frac{\pi}{4}, \\ p_1 x_1^3 + p_2 x_2^3 + p_3 x_3^3 &= \mathrm{I}_{3,0} = 0, \\ p_1 x_1^2 y_1 + p_2 x_2^2 y_2 + p_3 x_3^2 y_3 &= \mathrm{I}_{2,1} = 0, \\ p_1 x_1 y_1^2 + p_2 x_2 y_2^2 + p_3 x_3 y_3^2 &= \mathrm{I}_{1,2} = 0. \end{aligned}\right.$$

Or ces équations ne déterminent pas 3 points remplissant les conditions requises. En effet, soit

$$\psi(x, y) = \mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}xy + \mathrm{D}x + \mathrm{E}y + \mathrm{F} = 0$$

l'équation d'une conique passant par les 3 points cherchés et un point à l'infini sur l'axe Ox. On aura

$$\psi(x_i, y_i) = 0, \qquad x_i\,\psi(x_i, y_i) = 0, \qquad y_i\,\psi(x_i, y_i) = 0$$

pour $i = 1, 2, 3$, d'où l'on déduit immédiatement

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{AI}_{2,0} + \mathrm{BI}_{1,1} + \mathrm{DI}_{1,0} + \mathrm{EI}_{0,1} + \mathrm{FI}_{0,0} &= 0, \\ \mathrm{AI}_{3,0} + \mathrm{BI}_{2,1} + \mathrm{DI}_{2,0} + \mathrm{EI}_{1,1} + \mathrm{FI}_{1,0} &= 0, \\ \mathrm{AI}_{2,1} + \mathrm{BI}_{1,2} + \mathrm{DI}_{1,1} + \mathrm{EI}_{0,2} + \mathrm{FI}_{0,1} &= 0, \end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire

$$(16) \qquad \begin{cases} \displaystyle\iint \psi(x, y)\, dx\, dy = 0, \\ \displaystyle\iint x\psi(x, y)\, dx\, dy = 0, \\ \displaystyle\iint y\psi(x, y)\, dx\, dy = 0. \end{cases}$$

Ces conditions (16) montrent que le polynôme $\psi(x, y)$ est de la forme

$$\lambda U_{2,0}(x, y) + \mu U_{1,1}(x, y) + \nu U_{0,2}(x, y),$$

$U_{m,n}$ désignant le polynôme de M. Hermite

$$\frac{\partial^{m+n}(x^2 + y^2 - 1)^{m+n}}{\partial x^m\, \partial y^n},$$

λ, μ et ν des constantes assujetties à la condition d'annuler le coefficient de y^2 dans $\psi(x, y)$. On obtient ainsi l'expression cherchée de $\psi(x, y)$; on l'obtient également à l'aide des relations (15) qui donnent, d'après les valeurs des intégrales $I_{0,0}$, $I_{1,0}$, ...,

$$A + 4F = 0, \qquad D = 0, \qquad E = 0.$$

La conique $\psi(x, y) = 0$, passant par les 3 points cherchés et le point à l'infini sur Ox, a donc pour équation

$$F(1 - 4x^2) + Bxy = 0.$$

Quand B et F varient, cette conique passe bien par 4 points fixes, mais 2 d'entre eux seulement et non 3 appartiennent au champ d'intégration, les autres sont à l'infini. Le problème est donc impossible.

On remarquera que, dans ce problème, l'un des axes joue un rôle spécial, tandis que, dans les autres questions que nous avons résolues, la direction des axes ne joue aucun rôle.